

მათემატიკა

სახელმძღვანელო

10

$$y = a \sin bx$$

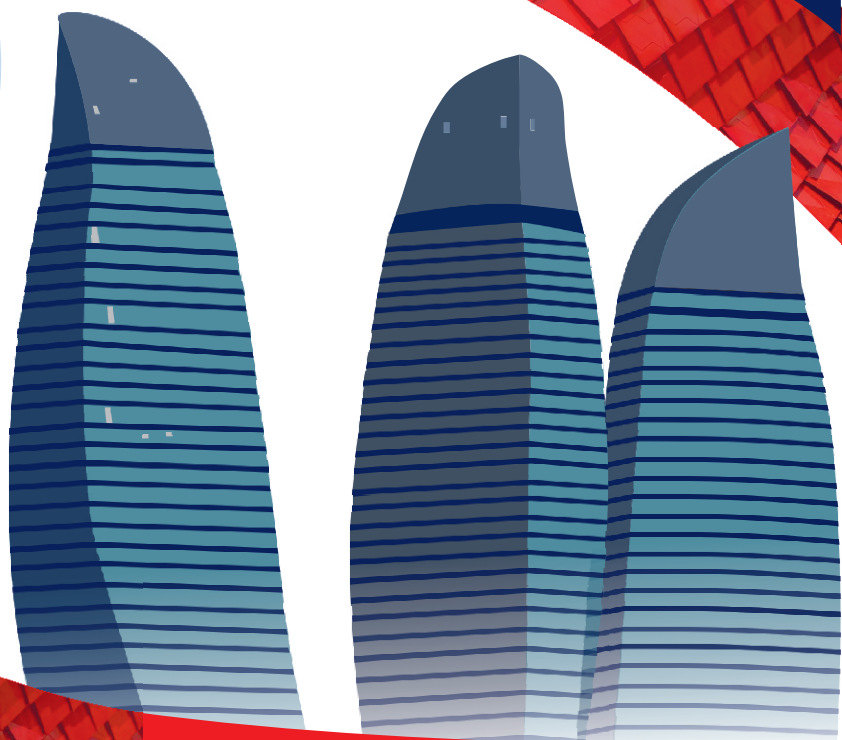
$$y = \ln x$$

$$y = e^x$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$V = sh$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$





Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin*,
sözləri *Əhməd Cavadındır*.

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadیرiz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



ჰეიდარ ალიევი

აზერბაიჯანელი ხალხის საერთო ეროვნული ლიდერი

ნაიმა კეჭრემახოვა
მეჭემედ ქერიმოვი
ილჰამ ჰუსეინოვი

მათემატიკა 10

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების
მე-10 კლასისათვის “მათემატიკის” საგნის
სახელმძღვანელო

აზერბაიჯანის რესპუბლიკის განათლების სამინისტროს გრიფის ნომერი:
2017-092

გთხოვთ სახელმძღვანელოსთან დაკავშირებული თქვენი
გამოხმაურება, შენიშვნები და წინადადებები გამოაგზავნოთ
radius_n@hotmail.com და derslik@edu.gov.az ელექტრონულ
მისამართებზე. წინასწარ მადლობას მოგახსენებთ ჩვენთან
თანამშრომლობისათვის!

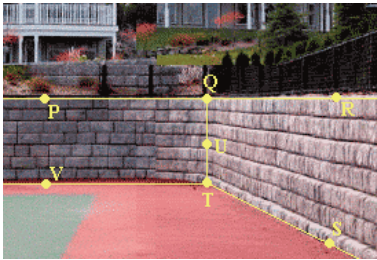


Radius
Baki - 2017

სარჩევი

1. ფუნქციები

ფუნქცია და მისი მოცემის ხერხები	7
ზოგიერთი ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე	12
ფუნქციის თვისებები	14
ლუწი ფუნქცია და კენტი ფუნქცია	18
ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქციები	20
$y = x^n$ ($n \in N$) მაჩვენებლიანი ფუნქცია	22
ფუნქციათა კლასიფიკაცია	23
გრაფიკების გარდაქმნა	25
მოქმედებები ფუნქციებზე	32
რთული ფუნქცია	34
შეცვლელი ფუნქცია	37
განმაზოგადებელი დავალებები	41



2. წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში

წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში ..	44
წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა ...	48
წრფისა და სიბრტყის მართობულობა ...	49
სამი მართობის თეორემა	52
ორ სიბრტყეს შორის კუთხე. ორწახნაგა კუთხე	54
მართობული სიბრტყეები	56
პარალელური სიბრტყეები	59
გეგმილები და ამოცანების ამოხსნა	63
განმაზოგადებელი დავალებები	65

3. კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მობრუნების კუთხეები	67
კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომები	69
რკალის სიგრძე, სექტორის ფართობი	72
ტრიგონომეტრიული ფუნქციები	76
ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები	80
ერთეულოვანი წრეწირი და ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები	83
დაყვანის ფორმულები	86
ტრიგონომეტრიული იგივეობები	90
შეკრების ფორმულები	93
შეკრების ფორმულებიდან მიღებული შედეგები	97
ტრიგონომეტრიული გამოსახულებების გამარტივება	102
განმაზოგადებელი დავალებები	104

4. სინუსებისა და კოსინუსების თეორემა

სინუსების თეორემა	107
კოსინუსების თეორემა	114
განმაზოგადებელი დავალებები	119

5. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

პერიოდული ფუნქციები	122
$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკები	124
$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები	128
სინუსოიდის აგება ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით	136
ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და პერიოდული მოვლენები	141
$y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციათა გრაფიკები	144
შეცვლელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები	150
განმაზოგადებელი დავალებები	155

6. მრავალწახნაგები

მრავალწახნაგები	158
პრიზმები	160
მრავალწახნაგები და მათი ხედები	
სხვადასხვა მხრიდან	163
პრიზმის ზედაპირის ფართობი	166
პრიზმის სიბრტყითი კვეთები	171
პირამიდა. პირამიდის გვერდითი	
ზედაპირისა და სრული ზედაპირის	
ფართობი	174
პირამიდის კვეთები. წაკვეთილი	
პირამიდა	180
განმაზოგადებელი დავალებები	183



7. ტრიგონომეტრიული განტოლებები და უტოლობები

მარტივი ტრიგონომეტრიული	
განტოლებები	185
ტრიგონომეტრიული განტოლებების	
ამოხსნის ხერხები	193
ამოცანების ამოხსნა ტრიგონომეტრიული	
განტოლებების გამოყენებით	198
ტრიგონომეტრიული უტოლობები	200
განმაზოგადებელი დავალებები	209

8. ფიგურების მოცულობა

პრიზმის მოცულობა	211
პირამიდის მოცულობა	218
სივრცითი ფიგურების მსგავსება	222
მსგავსი სივრცითი ფიგურების	
ზედაპირები და მოცულობები	223
წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა	226
ამოცანები სიბრტყითი კვეთების	
შესახებ	228
სიმეტრია სივრცეში	229
განმაზოგადებელი დავალებები	232

9. მაჩვენებლიანი და ლოგარიტმული ფუნქციები

ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხი	234
მაჩვენებლიანი ფუნქცია	237
მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის	
გარდაქმნები	243
მაჩვენებლიანი ფუნქცია. e რიცხვი	246
რიცხვის ლოგარიტმი	248
ლოგარიტმული ფუნქცია	250
ლოგარიტმული სკალა და ამოცანების	
ამოხსნა	252
ლოგარიტმის თვისებები	254
მაჩვენებლიანი განტოლებები	258
ლოგარიტმული განტოლებები	261
მაჩვენებლიანი უტოლობები	265
ლოგარიტმული უტოლობები	267
განმაზოგადებელი დავალებები	270

10. კომპლექსური რიცხვები

კომპლექსური რიცხვები	273
მოქმედებები კომპლექსურ რიცხვებზე	274
კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული	
გამოსახვა	277
კომპლექსური რიცხვის მოდული და	
არგუმენტი. კომპლექსური რიცხვის	
ტრიგონომეტრიული სახე	278
მოქმედებები ტრიგონომეტრიული სახით	
მოცემულ კომპლექსურ რიცხვებზე	280
n -ური ხარისხის ფესვი კომპლექსური	
რიცხვიდან	282
განმაზოგადებელი დავალებები	284

11. ინფორმაციები და პროგნოზები

ერთობლიობა და შერჩევა. შემთხვევითი	
შერჩევა და სახეები	286
ინფორმაციის წარდგენა	290
ბინომიალური დანაშალი	297
ბერნულის ცდები	301
განმაზოგადებელი დავალებები	306

1

ფუნქციები

ფუნქცია და მისი მოცემის ხერხები
ზოგიერთი ფუნქციის განსაზღვრის არე
და მნიშვნელობათა სიმრავლე
ფუნქციის თვისებები
ლუწი ფუნქცია და კენტი ფუნქცია
ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქციები
 $y=x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) მაჩვენებლიანი ფუნქცია
ფუნქციათა კლასიფიკაცია
გრაფიკების გარდაქმნა
მოქმედებები ფუნქციებზე
რთული ფუნქცია
შეპცეული ფუნქცია



ფუნქცია და მისი მოცემის სერხები

ჩვენს გარშემო მიმდინარე სხვადასხვა პროცესში ზოგიერთი რაოდენობები სხვებზე დამოკიდებულებით იცვლება და ერთის მნიშვნელობა მეორის მნიშვნელობით განისაზღვრება.

მაგალითად, ქვეითის მიერ გავლილი მანძილი დროზე დამოკიდებულებით იცვლება. სურსათში გადახდილი ფული მისი მასისაგან დამოკიდებულებით იცვლება. გზა და დრო, მასა და ღირებულება დამოკიდებული ცვლადი სიდიდეებია. ამ სიდიდეებიდან ერთი დამოუკიდებლად, მეორე კი მასზე დამოკიდებულებით იცვლება. მაგალითად, დრო დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო გავლილი გზა კი დროზე დამოკიდებული ცვლადი სიდიდეა. სურსათის მასა დამოუკიდებელი, მისი ღირებულება კი დამოკიდებული ცვლადი სიდიდეა.

თუ x ცვლადის თითოეული მნიშვნელობას განსაზღვრული წესით y ცვლადის ერთადერთი მნიშვნელობა შესაბამება, მაშინ y და x ცვლადებს შორის დამოკიდებულებას ფუნქცია ეწოდება.

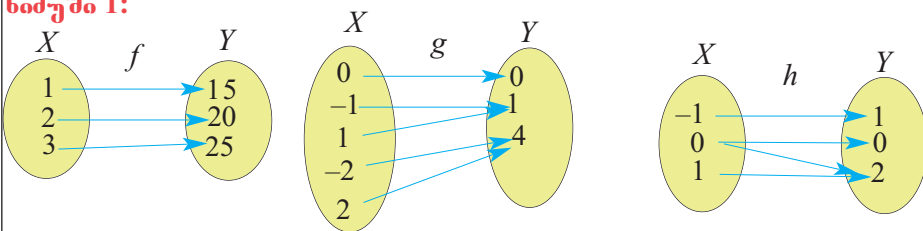
აქ x დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი, ხოლო y -ს კი დამოკიდებული ცვლადი ანუ ფუნქცია ეწოდება. ფუნქცია, როგორც წესი f -ით (ან g , φ და სხვ.), არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობისათვის შესაბამისი ფუნქცია კი $f(x)$ -ით (ან $g(x)$, $\varphi(x)$ და სხვა) აღინიშნება: $y = f(x)$.

არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება და როგორც წესი $D(f)$ -ით, დამოკიდებული ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს კი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე (ან მნიშვნელობათა არე) ეწოდება და როგორც წესი $E(f)$ -ით აღინიშნება.

ფუნქციის მოცემა სხვადასხვა სერხით შეიძლება: ცხრილით, შესაბამისი მნიშვნელობების წყვილით, დამოკიდებულების რუკით, გრაფიკით, ფორმულით და ა.შ.

თუ განსაზღვრის არე სასრული სიმრავლეა, არგუმენტის თითოეულ მნიშვნელობაზე დამოკიდებული ცვლადის შესაბამისი მნიშვნელობის შეპირისპირების წესის ისრების დახმარებით ჩვენება შეიძლება. ასეთ ასახვას **დამოკიდებულების რუკა** ეწოდება.

ნიმუში 1:



სადაც f და g დამოკიდებულებებიდან თითოეული ფუნქციაა, რადგან X სიმრავლიდან აღებულ თითოეულ რიცხვს Y სიმრავლიდან ერთადერთი რიცხვი შეუპირისპირდება. h დამოკიდებულება კი ფუნქცია არაა (რატომ?).

შეპირისპირების წესის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ: $f(1) = 15$, $f(2) = 20$, $f(3) = 25$
 $g(0) = 0$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-2) = 4$, $g(2) = 4$

ნაჩვენები ფუნქციების არგუმენტისა და ფუნქციის **შესაბამისი მნიშვნელობათა წყვილების ჩამოთვლით** მოცემა შეიძლება.

f ფუნქცია: $\{(1; 15), (2; 20), (3; 25)\}$

g ფუნქცია: $\{(0; 0), (-1; 1), (1; 1), (-2; 4), (2; 4)\}$

ფუნქცია და მისი მოცემის სერხები

ფუნქცია შეიძლება ცხრილით იყოს მოცემული.

ასეთ შემთხვევებში ცხრილის ერთ სტრიქონში დამოუკიდებელი ცვლადის, მეორე სტრიქონში კი დამოკიდებული ცვლადის მნიშვნელობები მოიცემა.

ნამუშაუ 2:

ერთი ჰექტარიდან მიღებული მოსავალი (ტონობით)							
წლები	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
1 ჰექტარიდან მიღებული მოსავალი (ტონობით)	3	4	2	3	5	3	4

(2009; 3), (2010; 4), (2011; 2), (2012; 3), (2013; 5), (2014; 3), (2015; 4) კოორდინატები გვიჩვენებენ 1 ჰექტარიდან მიღებული მოსავლის ცვლილებას წლების მიხედვით.

განსაზღვრის არე (წლები): {2009; 2010; 2011; 2012; 2013; 2014; 2015}

მნიშვნელობათა სიმრავლე (მიღებული მოსავლის ოდენობა): {2; 3; 4; 5}

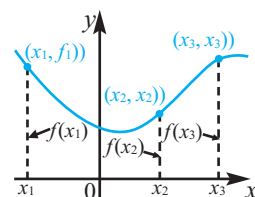
ფუნქციის ფორმულით - ანალიტიკური სერხით მოცემაც შეიძლება.

ნამუშაუ 3: $f(x) = x^2$, $1 \leq x \leq 3$

ეს ჩანაწერი უჩვენებს იმას, რომ $[1; 3]$ მონაკვეთიდან აღებულ თითოეულ რიცხვს ამავე რიცხვის კვადრატი შეუპირისპირდება. მაგალითად, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(1,2) = 1,2^2 = 1,44$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3) = 3^2 = 9$ და სხვა. ამ შემთხვევაში $f(4)$ ჩანაწერი უაზროა, ვინაიდან რიცხვი 4 მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეში $[1; 3]$ მონაკვეთში არ შედის.

არგუმენტის თითოეული $x \in D$ მნიშვნელობისათვის, ფუნქციის შესაბამისი $y = f(x)$ მნიშვნელობის გაანგარიშება, კოორდინატების $(x; y)$ მქონე წერტილების საკოორდინატო სიბრტყეზე აგება შეიძლება. ყველა ასეთი წერტილის სიმრავლე ფუნქციის გრაფის შეადგენს.

ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო სისტემაში აბსცისა არგუმენტების, ორდინატი კი ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობების მქონე წერტილთა სიმრავლეა.



ფუნქციის მოცემა შეიძლება გრაფიკის სახითაც.

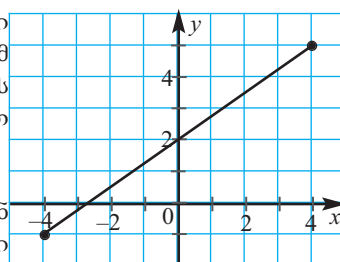
ორ ცვლად სიდიდეს შორის დამოკიდებულების საკოორდინატო სიბრტყეზე გეომეტრიული ასახვა ხელსაყრელია.

ნამუშაუ 4: სურათზე $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ წრფივი ფუნქციაა $-4 \leq x \leq 4$ ინტერვალში გრაფიკითაა მოცემული.

წვეროს წერტილების კოორდინატები $(-4; f(-4))$, ე.ი $(-4; -1)$ და $(4; f(4))$, ე.ი $(4; 5)$ მქონე მონაკვეთი ამ ფუნქციის მოცემული შუალედის გრაფიკია. წვეროს წერტილები გრაფიკს ეკუთვნის. ეს ნახაზზე შიგნით გამუქებული პატარა წრეებითაა აღნიშნული.

მნიშვნელობათა არე: $[-1, 5]$.

შენიშვნა: თუ ფუნქციის გრაფიკის მრუდის (ან კიდევ წრფის მონაკვეთის) ბოლოები სპეციალური პატარა ბურთულებით არ არის აღნიშნული, ეს იმას უჩვენებს, რომ ხაზის უსასრულოდ გაგრძელება შეიძლება. (როგორც წესი ამას წვეროებში მყოფი ისრებით უჩვენებენ).



ფუნქცია და მისი მოცემის სერხები

ორ რაოდენობას შორის დამოკიდებულება არის თუ არა ფუნქცია, ამის განსაზღვრა მათი გამომსახველი მოწესრიგებული წყვილების-წერტილთა სიმრავლის კოორდინატების მიხედვით ან მოცემული გრაფიკის ასახვის მიხედვით შეიძლება.

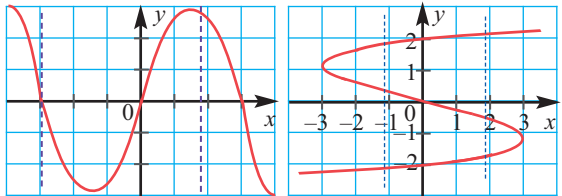
1. წერტილების კოორდინატების მიხედვით. არგუმენტის მნიშვნელობებს შორის (პირველი მნიშვნელობა) თუ არსებობს განმეორებადი მნიშვნელობები, ეს დამოკიდებულება ფუნქცია არაა.

(1; A), (1; B), (2; C), (3; D) წერტილთა სიმრავლით მოცემული დამოკიდებულება ფუნქცია არაა.

(1; A), (2; B), (3; C), (4; C), (5; D) დამოკიდებულება ფუნქციაა.

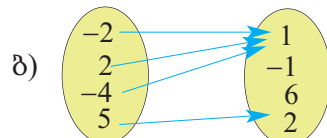
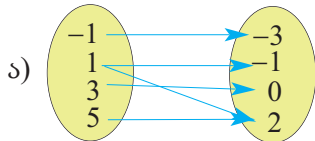
2. გრაფიკის ასახვის მიხედვით.

თუ Oy ღერძის პარალელურად გავლებული ნებისმიერ ვერტიკალურ წრფეზე აღმოჩნდება გრაფიკის არაუმეტეს ერთი წერტილისა, ეს დამოკიდებულება ფუნქციაა. თუ Oy ღერძის პარალელურად გავლებული ვერტიკალური წრფე გრაფიკის ორ ან უფრო მეტ წერტილს გადაკვეთს, ეს დამოკიდებულება ფუნქცია არაა. ეს იმას უჩვენებს, რომ არგუმენტის (x -ის) ერთსა და იმავე მნიშვნელობის ფუნქციის რამდენიმე მნიშვნელობა შეესაბამება. ეს კი ფუნქციის განსაზღვრებას ეწინააღმდეგება.



სასწავლო დაფალებები

1. განსაზღვრეთ მოცემული დამოკიდებულება არის თუ არა ფუნქცია.



2. წერტილთა სიმრავლითა და მოცემული დამოკიდებულებით განსაზღვრეთ არის თუ არა ფუნქცია?

ა) $\{(-5, 1), (-3, 2), (-1, 3), (1, 2)\}$ ბ) $\{(0, 4), (3, 5), (5, -2), (0, 1)\}$

3. ცხრილში მოცემულ რომელ (x, y) დამოკიდებულებას შეიძლება ეწოდოს ფუნქცია?

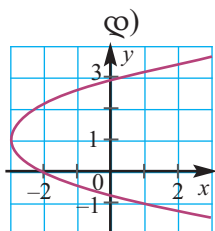
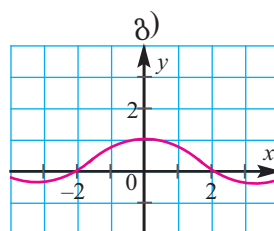
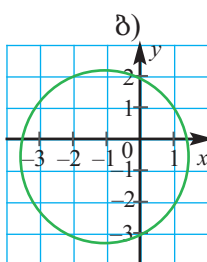
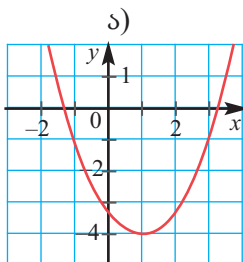
ა)

x	3	0	0	-1	-3
y	-4	-3	-1	-2	0

ბ)

x	7	6	5	4	3
y	-1	2	-1	2	3

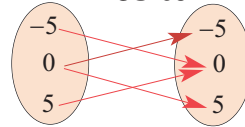
4. ვერტიკალური წრფის გავლებით შეამოწმეთ მოცემული დამოკიდებულება არის თუ არა რაიმე ფუნქციის გრაფიკი.



ფუნქცია და მისი მოცემის სერხები

5. ქვემოთ მოცემული დამოკიდებულებებიდან რომელს შეიძლება ეწოდოს ფუნქცია?
 ა) დამოკიდებულება რამიზის კვირეულ ხელფასსა და გაყიდვიდან მიღებულ შემოსავალს შორის. რამიზი კვირეულად იღებს 50 მანეთ მუდმივ ხელფასს და პლუს გაყიდვიდან 2 % -ს დამატებით.
 ბ) ესმერი 5 კმ/სთ-ით მოძრაობს, მისი გავლილი გზის დროზე დამოკიდებულება.
 გ) ზაფხუბის ასაკზე დამოკიდებულებით კომპიუტერის თამაშში ქულების მოპოვება.
6. ქვემოთ მოცემული მონაცემების მიხედვით $x = 0$ და $x = -3$ მნიშვნელობებისათვის. გამოთვალეთ y -ის მნიშვნელობა. განსაზღვრეთ რომელი დამოკიდებულება არის ფუნქცია?
- ა) $y = 5 - 2x$ ბ) $y = x^2 - 3$ გ) $y^2 + x^2 = 25$
7. თითოეული დამოკიდებულება ნიმუშის შესაბამისად წარმოადგინეთ ორიენტირებული გრაფით, რომელი დამოკიდებულება არ არის ფუნქცია?

ნიმუში: $\{(-5, 0), (0, -5), (5, 0), (0, 5)\}$



ა) $\{(-5, 0), (0, -5), (5, 0), (0, 5)\}$

გ) $\{(-2, -2), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 2)\}$

ბ) $\{(-5, 4), (3, 6), (1, 0), (-3, 2)\}$

დ) $\{(1, 3), (0, 0), (-4, -2), (2, 3), (1, -1)\}$

8. მოცემულია ფუნქცია: $f(x) = 1 - 2x$
 იპოვეთ $f(-2)$, $f(0)$, $f(0,5)$, $f(a + 1)$ მნიშვნელობები.

9. $g(x) = 4x^3 - x$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ $g(2) + g(-2)$ ჯამი.

10. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \frac{x+1}{3-x}$ არგუმენტის რა მნიშვნელობისათვის იქნება ფუნქციის მნიშვნელობა: ა) 1; ბ) 0; გ) -2 ტოლი?

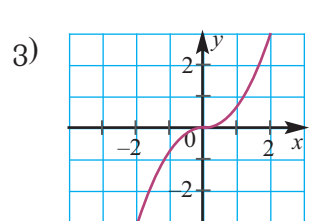
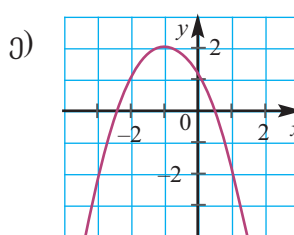
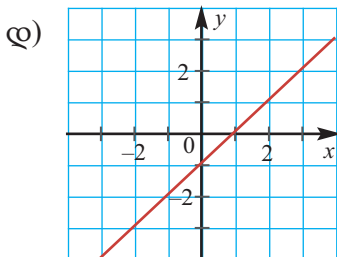
11. მოცემულია ფუნქცია. $f(x) = x^2 - 2x + q$ იპოვეთ $f(-1)$ თუ $f(0) = -3$.

12. ფუნქცია ანალიტიკური ხერხითა და გრაფიკითაა მოცემული. თითოეული შემთხვევისათვის იპოვეთ $f(0)$, $f(1,5)$, $f(-1)$ მნიშვნელობები.

ა) $f(x) = 5x - 2$

ბ) $f(x) = -x^2 + x$

გ) $f(x) = -2x^3 + 1$



13. მოცემულ განსაზღვრის არეში ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი, იპოვეთ მნიშვნელობათა არე და გამოსახეთ შესაბამისი ჩანაწერით.

ა) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, -6 \leq x < 2$

ბ) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1, (-\infty; 3]$

გ) $f(x) = -x - 2, \{x \mid x > -3\}$

დ) $f(x) = 2x + 1, (-3; 2]$

ფუნქცია და მისი მოცემის ხერხები

14. $y = 2x + b$ ფუნქციის გრაფიკი $A(1; -1)$ წერტილზე გადის. იპოვეთ b და ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

15. c -ს რა მნიშვნელობისათვის გადის $f(x) = x^2 + x + c$ ფუნქციის გრაფიკი $A(-1; 2)$ წერტილზე?

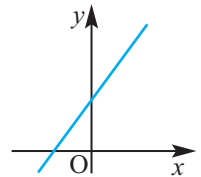
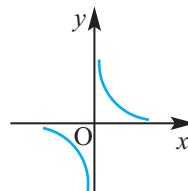
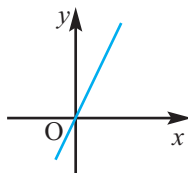
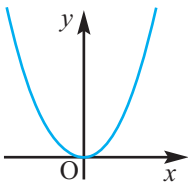
16. $N(-1; 1)$ წერტილი $f(x) = x^3 + mx$ ფუნქციის გრაფიკზეა. იპოვეთ $f(2)$.

17. ააგეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი და უჩვენეთ გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებით გადაკვეთის წერტილები.

ა) $y = \frac{1}{2}x - 1$

ბ) $y = -\frac{1}{2}x - 1$

18. სურათზე $y = 2x$, $y = 2 + x$, $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2$ ფუნქციების გრაფიკებია მოცემული. უჩვენეთ თითოეული ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი.

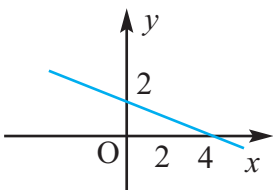


19. მოცემული ფუნქციის “1” ბიჯით შეადგინეთ მნიშვნელობათა ცხრილი, ააგეთ გრაფიკი, უჩვენეთ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

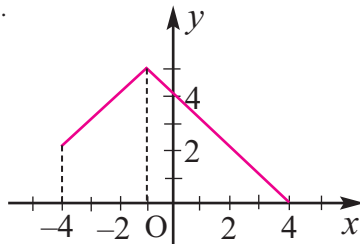
ა) $y = \frac{x+6}{x}$, $1 \leq x \leq 6$

ბ) $y = x^2 - 2|x|$, $-4 \leq x \leq 4$

20. გრაფიკზე გამოსახული წრფივი ფუნქცია ჩაწერეთ ფორმულით $f(x) = kx + b$ სახით. იპოვეთ $f(-2)$, $f(6)$ მნიშვნელობები.



21. $f(x)$ ფუნქციის მოცემული გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ: ა) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ მნიშვნელობები; ბ) x -ის ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებს $f(x) = 1$ და x -ის $f(x) = 3$ ტოლობას.



22. დაწერეთ ფუნქციები ალგებრული სახით ქვემოთ მოცემული სიტუაციების შესაბამისად. სიტუაციის მიხედვით განსაზღვრეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და ააგეთ გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა არე.

- 1) დილარე 40 წუთის განმავლობაში ყოველ 10 წუთში 1 კმ-ს დარბოდა. (სიტუაციის შესაბამისად დაწერეთ ინტერვალებით ფუნქციის განსაზღვრის და მნიშვნელობათა არე).
- 2) ერთი ფოტოსურათის დაბეჭდვის ფასი 25 კაპიკია. n რაოდენობის ფოტოსურათის დაბეჭდვის ფასი.
- 3) სანთელი, რომლის სიმაღლეც იყო 20 სმ და ყოველ 2 საათში წვის დროს 5 სმ-ით იკლებდა, 6 საათში დაიწვა.
- 4) n რაოდენობის ცხენის დაჭედებისათვის საჭირო ნალების რაოდენობა.
- 5) ერთი ლიტრი ბენზინის ფასი 90 კაპიკია. ავტომობილის ავზი 40 ლიტრ ბენზინს იტევს.

ზოგიერთი ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

ანალიტიკური ხერხით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე თუ არ არის ნაჩვენები, განსაზღვრის არედ არგუმენტის ყველა ისეთი მნიშვნელობა მოიაზრება, რომ ამ მნიშვნელობებისათვის ფუნქციის გამომსახველ ფორმულას აზრი ჰქონდეს (x -ის ამ მნიშვნელობებს ზოგჯერ ფუნქციის ბუნებრივ განსაზღვრის არესაც უწოდებენ). ამ შემთხვევაში საჭირო ხდება გავარკვიოთ, რომელ მნიშვნელობებს ვერ მიიღებს არგუმენტი. ზოგიერთი ფუნქციის ალგებრული ჩანაწერის მიხედვით განსაზღვრით მისი განსაზღვრის არე.

1. ფუნქცია დამოუკიდებელი ცვლადის მიხედვით **მრავალწევრის სახით** თუ არის მოცემული, მისი განსაზღვრის არე მთელი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა. მაგალითად, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა: $(-\infty; +\infty)$.

2. **რაციონალური ფუნქციების** მნიშვნელში მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობა არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი. მაგალითად, $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$ რაციონალურ ფუნქციაში არგუმენტის $x^2 - 4 = 0$ პირობის დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობები არ შეიძლება შედიოდნენ მისი განსაზღვრის არეში. ეს მნიშვნელობებია $x = -2$ და $x = 2$. $g(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ სიმრავლეზე.

3. **კვადრატული ფესვის შეძველ ფუნქციებში** ფესვქვეშ გამოსახულებამ არ შეიძლება მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობა. განვიხილოთ ორ მაგალითზე:

1. $y = \sqrt{2x-6}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე x -ის $2x - 6 \geq 0$, $x \geq 3$ პირობის დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობებია. ე.ი ფუნქციის განსაზღვრის არე: $[3; +\infty)$ შუალედი. მეორე მხრივ, იმისათვის რომ კვადრატულ ფესვს აზრი გააჩნდეს, უნდა იყოს $2x - 6 \geq 0$ და ამ შემთხვევაში $\sqrt{2x-6} \geq 0$, ე.ი მიიღება $y \geq 0$ ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $y = \sqrt{2x-6}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არე $[0; +\infty)$ შუალედი.

2. იპოვეთ $y = \sqrt{4-x^2}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე. ამოხსნა: უნდა იყოს $4 - x^2 \geq 0$. ამ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე $[-2; 2]$ შუალედი. მაშასადამე მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე $[-2; 2]$ -ია. მეორე მხრივ, $4 - x^2 \leq 4$ - სათვის $y = \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{4} = 2$ და $4 - x^2 \geq 0$ - სათვის. $y = \sqrt{4-x^2} \geq 0$.

ამრიგად, $y \geq 0$ და $y \leq 2$. ე.ი, $0 \leq y \leq 2$.

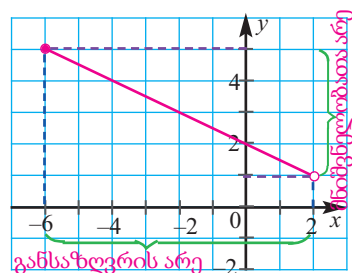
სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მნიშვნელობათა სიმრავლე $[0; 2]$ მონაკვეთია..

4. **გრაფიკით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არის მოძებნა.**

სურათზე $y = \frac{1}{2}x + 2$ წრფივი ფუნქციის განსაზღვრულ ინტერვალში აგებული გრაფიკია მოცემული. გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე უტოლობების სახით.

გრაფიკის წვეროებზე შიგნით გამუქებული და გაუმუქებელი წრეების აღნიშვნით განსაზღვრეთ შესაბამისი წერტილების, აბცისის განსაზღვრის არისათვის და ორდინატის მნიშვნელობათა სიმრავლისათვის მიკუთვნება-მიუკუთვნებლობა. ვინაიდან $(2; 1)$ წერტილში პატარა წრე გაუმუქებულია $x = 2$ წერტილი განსაზღვრის არეში, $y = 1$ მნიშვნელობა კი მნიშვნელობათა არეში არ შედის.

განსაზღვრის არე: $-6 \leq x < 2$ მნიშვნელობათა არე: $1 < y \leq 5$



ზოგერთი ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

სასწავლო დავალებები

1. იპოვეთ (შესაძლებლობის ფარგლებში) ფუნქციების $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ მნიშვნელობები. შესაბამისი მნიშვნელობის მოძებნის შეუძლებლობისას კი, განმარტეთ ამის მიზეზი.

ა) $f(x) = 4 - 2x$

ბ) $f(x) = 4 - \sqrt{x - 2}$

გ) $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$

დ) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

ე) $f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$

ვ) $f(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x + 2}$

2. უჩვენეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე.

ა) $f(x) = x^2$

ბ) $f(x) = |x|$

გ) $f(x) = \frac{1}{x}$

დ) $f(x) = x^3$

ე) $f(x) = \sqrt{x}$

3. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ა) $y = 3x + 2$

ბ) $y = 4x - x^2$

გ) $y = x^3 - 1$

დ) $y = \frac{x - 2}{x^2}$

ე) $y = \frac{\sqrt{x}}{x - 2}$

ვ) $y = \frac{x - 3}{x^2 - x - 2}$

ზ) $y = \sqrt{1 - x^2}$

თ) $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 3}$

ი) $y = \frac{\sqrt{x + 4}}{x - 4}$

4. იპოვეთ ფუნქციების განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე.

ა) $f(x) = 2x - 3$

ბ) $g(x) = -3(x + 1)^2 + 6$

გ) $h(x) = \sqrt{2 - x}$

დ) $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

ე) $u(x) = \sqrt{9 - x^2}$

ვ) $v(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$

5. იპოვეთ ფუნქციების განსაზღვრის არე.

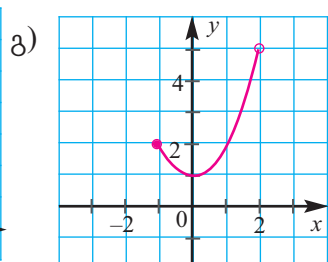
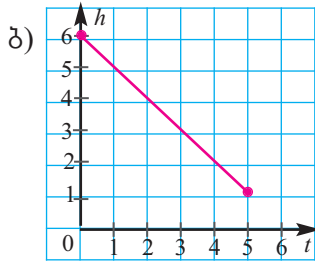
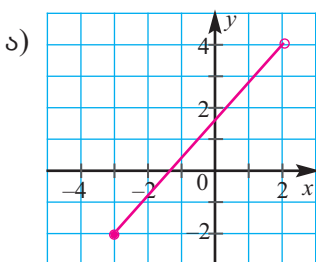
ა) $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x - 1}$

ბ) $f(x) = \sqrt{\frac{2x - x^2}{x - 1}}$

გ) $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{x - 1}}$

6. $y = \sqrt{x^2 - mx + 8}$ ფუნქციის გრაფიკი $M(2; 2)$ წერტილზე გადის. იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა და უჩვენეთ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

7. ფუნქციების გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ მისი ფორმულა. გრაფიკზე უჩვენეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე. დაწერეთ იგი ორმაგი უტოლობის სახით.



8. ღია ტიპის შეკითხვა. დაწერეთ რაიმე ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე მოცემულ რიცხვთა სიმრავლეა.

ა) ყველა ნამდვილი რიცხვი;

ბ) 2-ის გარდა ყველა ნამდვილი რიცხვი;

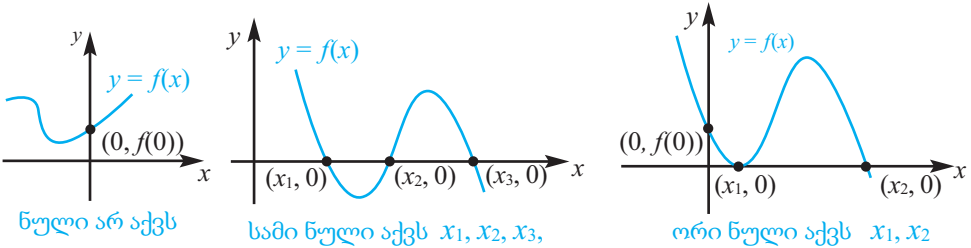
გ) 4-ზე არანაკლები ყველა ნამდვილი რიცხვი;

დ) ყველა ნამდვილი რიცხვი არაუმეტეს 3-სა.

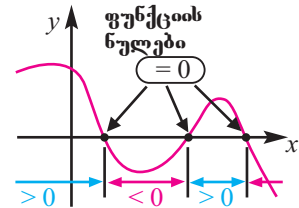
ფუნქციების თვისებები

ფუნქციის თვისებების საჩვენებლად ხელსაყრელია მისი გრაფიკით წარმოდგენა.

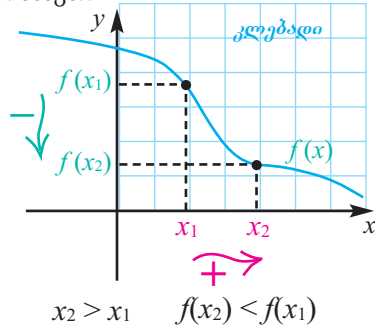
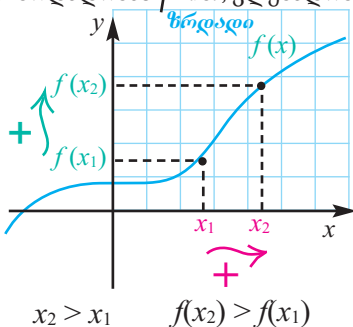
ფუნქციის ნულები. ფუნქციის გრაფიკზე წერტილების აბსცისის განსაზღვრით ხდება მისი განსაზღვრის არის პოვნა. ფუნქციის გრაფიკის აბსცისთა ღერძის გადაკვეთის წერტილებში $f(x) = 0$. არგუმენტის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც ფუნქციას ნულად აქცევენ **ფუნქციის ნულები** ეწოდება. $f(x)$ ფუნქციის ნულები $f(x) = 0$ განტოლების ფესვებია.



ფუნქციის ნულები, მის განსაზღვრის არეს რამდენიმე შუალედად ყოფენ და ამ შუალედებიდან თითოეულში ფუნქცია მუდმივი ნიშნის შენარჩუნების პირობებში დადებით ან უარყოფით მნიშვნელობებს იღებს. სურათზე მოცემულ გრაფიკზე ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები სქემატურადაა ნაჩვენები.



ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა. განსაზღვრის არის გარკვეული შუალედიდან აღებული ნებისმიერი x_1 და x_2 -სათვის თუ $x_2 > x_1$ პირობის დამაკმაყოფილებელი $f(x_2) > f(x_1)$ ანუ თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ფუნქციის მეტი მნიშვნელობა შეესაბამება, ამ **შუალედში $f(x)$ -ს ზრდადი**, ხოლო, თუ $f(x_2) < f(x_1)$ ანუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ფუნქციის ნაკლები მნიშვნელობა შეესაბამება **$f(x)$ -ს ამ შუალედში კლებადი ფუნქცია** ეწოდება. ფუნქციის მოცემულ შუალედში ზრდადობას $\uparrow$ -ით, კლებადობას კი $\downarrow$ -ით ავლენიშნავთ.



თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულ შუალედში ზრდადი (კლებადი), $-f(x)$ ფუნქცია ამ შუალედში კლებადი (ზრდადი).

მაგალითად, $f(x) = x^2$ ფუნქცია $[0; +\infty)$ შუალედში ზრდადი, $g(x) = -x^2$ ფუნქცია კი იმავე შუალედში კლებადი.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულ შუალედში ნულისაგან განსხვავებული, ზრდადი (კლებადი) ნიშანმუდმივი ფუნქციაა, მაშინ $\frac{1}{f(x)}$ ფუნქცია ამ შუალედში კლებადი (ზრდადი).

ფუნქციების თვისებები

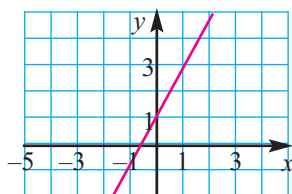
მაგალითად $f(x) = x^2 + 4$ ფუნქცია $[0; +\infty)$ შუალედში ზრდადია, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ ფუნქცია კი იგივე შუალედში კლებადია.

კუთხური კოეფიციენტის ნიშნის მიხედვით შეიძლება განვსაზღვროთ წრფივი ფუნქცია ზრდადია თუ კლებადია.

წრფივი ფუნქციები, რომელთა კუთხური კოეფიციენტი დადებითია, ზრდადია.

$$y = 2x + 1$$

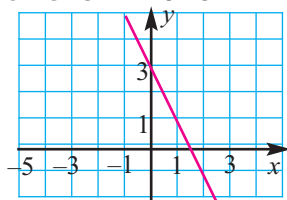
ფუნქცია
ზრდადია



წრფივი ფუნქციები, რომელთა კუთხური კოეფიციენტი უარყოფითია, კლებადია.

$$y = -2x + 3$$

ფუნქცია
კლებადია



ანალიტიკური ხერხით ვუჩვენოთ, რომ $f(x) = kx + b$ ფუნქცია, როცა $k > 0$ მთელ რიცხვით ღერძზე ზრდადია, ხოლო როცა $k < 0$ მაშინ კლებადია.

არგუმენტის $(-\infty; +\infty)$ შუალედიდან აღებული და $x_2 > x_1$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ორი მნიშვნელობისათვის განვიხილოთ $f(x_2) - f(x_1)$ სხვაობა:

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k \cdot (x_2 - x_1).$$

პირობის თანახმად, რადგან $x_2 > x_1$ ამიტომ $f(x_2) - f(x_1)$ სხვაობის ნიშანი k -ს ნიშანს ემთხვევა. მაშასადამე, როცა $k > 0$ მაშინ $f(x_2) > f(x_1)$, ანუ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო როცა $k < 0$ მაშინ კი $f(x_2) < f(x_1)$, ანუ ფუნქცია კლებადია.

ზრდად და კლებად ფუნქციებს მონოტონური ფუნქციები ეწოდება.

გრაფიკზე ზრდის კლებით შეცვლისა და კლების ზრდით შეცვლის წერტილები შესაბამისად ფუნქციის მაქსიმუმსა და მინიმუმს უჩვენებს.

x_0 წერტილის მომცველ ნებისმიერ მידამოს ამ **წერტილის მიდამო** ეწოდება.

x_0 -ის განსაზღვრულ მიდამოში, თუ ყველა x -ისათვის $f(x) \geq f(x_0)$, მაშინ x_0 -ს $f(x)$ -ის **მინიმუმის წერტილი**, $f(x_0)$ -ს კი **მინიმუმის მნიშვნელობა** ეწოდება.

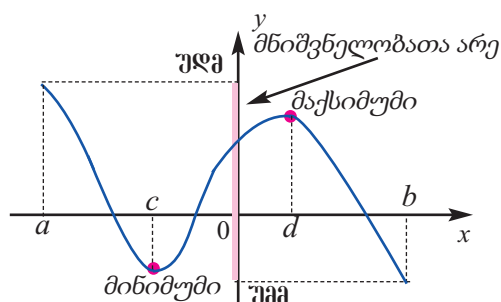
x_0 -ის განსაზღვრულ მიდამოში, თუ ყველა x -ისათვის $f(x) \leq f(x_0)$, მაშინ x_0 -ს $f(x)$ -ის **მაქსიმუმის წერტილი**, $f(x_0)$ -ს კი **მაქსიმუმის მნიშვნელობა** ეწოდება.

მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს $(x_{\min}, x_{\max})$ ექსტრემუმის წერტილები, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებში ექსტრემუმები ეწოდება

გრაფიკის მიხედვით ფუნქცია $x = c$ წერტილში აღწევს მინიმუმს, $x = d$ წერტილში კი მაქსიმუმს. ეს ასე იწერება:

$$x_{\min} = c, f_{\min} = f(c), x_{\max} = d, f_{\max} = f(d).$$

მთელ განსაზღვრის არეზე ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის უდიდესი **უღმ**-ით და ყველაზე პატარა კი **უჰმ**-ით (თუ არსებობს) შეიძლება აღინიშნოს. თუ ფუნქცია უწყვეტია **უღმ**-სა და **უჰმ**-ს შორის ყველა მნიშვნელობას იღებს.



ფუნქციების თვისებები

ნიმუში: ჩამოთვალეთ გრაფიკზე მოცემული ფუნქციის თვისებები.

ამოხსნა: 1. ფუნქციის განსაზღვრის არე $[-1; 5]$ შუალედი. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე $[-3; 3]$ შუალედი. $(5; 2)$ წერტილი კი გრაფიკს არ ეკუთვნის (შიგნიდან გაუმუქებული წრითაა აღნიშნული).

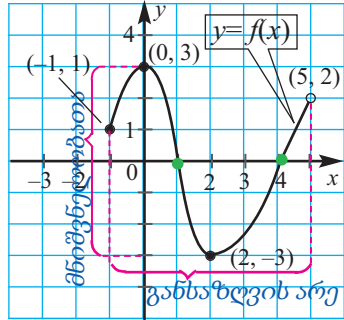
2. ფუნქციის ნულები გრაფიკის x ღერძთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისებია: $x = 1$ და $x = 4$ მაშასადამე $x = 1$ და $x = 4$ წერტილები ფუნქციის ნულებია. $f(1) = 0$ და $f(4) = 0$.

3. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა. ფუნქციის ნულები მისი განსაზღვრის არეს ფუნქციის ნიშანმდებლობის შენარჩუნებით სამ შუალედად ყოფს: $(-1; 1)$, $(1; 4)$, და $(4; 5)$. ფუნქცია $(1; 4)$ შუალედში უარყოფით, ხოლო $(-1; 1)$ და $(4; 5)$ შუალედებიდან თითოეულში დადებით მნიშვნელობას იღებს.

გრაფიკიდან ჩანს, რომ x -ის -1 დან 1 -მდე ზრდისას, y -ის მნიშვნელობა 1 -დან 3 -მდე იზრდება. x -ის 0 -დან 2 -მდე ზრდისას y -ის მნიშვნელობა 3 -დან -3 -მდე მცირდება. x -ის 2 -დან 5 -მდე ზრდისას კი y -ის მნიშვნელობა -3 -დან 2 -მდე იზრდება.

ფუნქცია $[-1; 0]$ და $[2; 5]$ შუალედებიდან თითოეულში ზრდადია, $[0; 2]$ შუალედში კლებადაა.

4. ფუნქციის ექსტრემუმი-მაქსიმუმი და მინიმუმი. გრაფიკზე $(0; 3)$ და $(2; -3)$ წერტილები ექსტრემუმის წერტილებია. ეს წერტილები შესაბამისად ფუნქციის მაქსიმუმსა და მინიმუმს უჩვენებს $x_{\max} = 0, f_{\max} = 3, x_{\min} = 2, f_{\min} = -3$.



სასწავლო დავალებები

1. იპოვეთ ფუნქციის ნულები.

ა) $y = \frac{1}{5}x - 4$

ბ) $y = 2x(x - 3)$

გ) $y = \sqrt{x} - 2$

დ) $y = \sqrt{x - 2}$

2. გამოსახეთ რაიმე ფუნქციის გრაფიკი, რომლის ნულები მოცემული რიცხვებია.

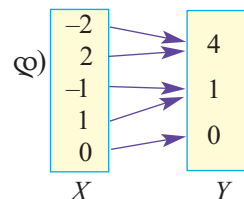
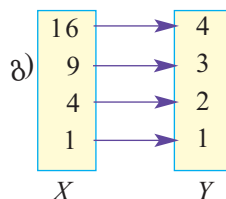
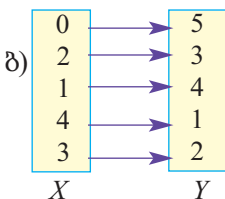
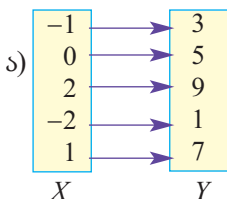
ა) $-1; 3$

ბ) $-2; 1; 4$

3. ა) გამოსახეთ რომელიმე ზრდადი ფუნქციის გრაფიკი, რომლის განსაზღვრის არეა $[1; 4]$.

ბ) გამოსახეთ რომელიმე კლებადი ფუნქციის გრაფიკი, რომლის განსაზღვრის არეა $[1; 4]$.

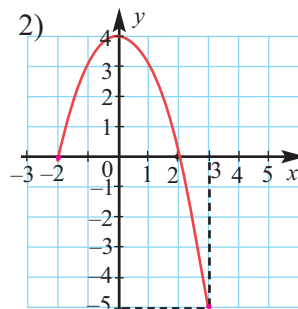
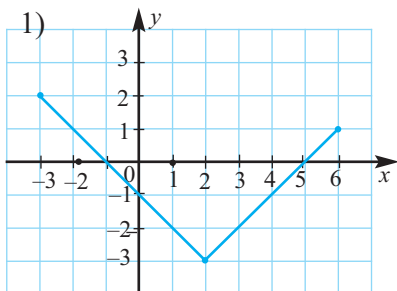
4. დაწერეთ დამოკიდებულების რუკით მოცემული ფუნქციების ა) განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე; ბ) ზრდისა და კლების შესახებ.



ფუნქციების თვისებები

5. სურათზე მოცემული გრაფიკისათვის იპოვეთ:

- ა) განსაზღვრის არე; ბ) ნულები; გ) დადებითნიშნისა და უარყოფითნიშნის შუალედები;
 დ) უარყოფითნიშნისა და დადებითნიშნის შუალედები; ე) ზრდადობის შუალედები;
 ვ) კლებადობის შუალედები; ზ) ექსტრემუმი; თ) მნიშვნელობათა არე.



6. $y = f(x)$ ფუნქცია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში განსაზღვრული კლებადი ფუნქციაა. დაალაგეთ ქვემოთ მოცემული მნიშვნელობები ზრდის რიგის მიხედვით:

- ა) $f(0), f(-4), f(2)$; ბ) $f(1), f(-1), f(3)$; გ) $f(-\sqrt{3}), f(-2), f(\sqrt{2})$

7. ცხრილში A და B კომპანიების კვირეული რეალიზაციის მოცულობებია მოცემული.

- ა) თითოეული კომპანიისათვის განსაზღვრეთ გაიზარდა თუ შემცირდა რეალიზაციის მოცულობა.
 ბ) თითოეული კომპანიისათვის მოცემული ცხრილი გამოსახეთ გრაფიკულად.

A კომპანია (ათი ათას მანეთობით)

კვირა	1	2	3	4
გაყიდვა	5	7,1	8,7	12

B კომპანია (ათი ათას მანეთობით)

კვირა	1	2	3	4
გაყიდვა	5,6	4,2	3,8	3

8. ააგეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. უჩვენეთ ზრდადია თუ კლებადი. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

- ა) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3, -2 \leq x \leq 4$ ბ) $f(x) = 3 - x, -1 \leq x \leq 4$

9. იპოვეთ ფუნქციის ნულები, გამოსახეთ გრაფიკი სქემატურად, გამოიკვლიეთ ნიშან-მუდმივობა, უჩვენეთ ზრდისა და კლების შუალედები, დაწერეთ ექსტრემუმი.

- ა) $y = x^2 - 4$ ბ) $y = |x| - 1$ გ) $y = -x^2 + 2x + 3$

10. დაწერეთ $f(x) = kx + b$ ფუნქციის ფორმულა, რომლის გრაფიკი A(1; -1) და B(2; 1) წერტილებზე გადის. დაალაგეთ ზრდის რიგის მიხედვით $f(-3), f(-4), f(2)$ მნიშვნელობები. განსაზღვრეთ არგუმენტის რა მნიშვნელობისათვისაა $f(x) \geq f(1)$.

11. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა (თუ არსებობს).

- ა) $f(x) = 2 + \sqrt{x - 4}$ ბ) $f(x) = 2 - |x - 1|$ გ) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

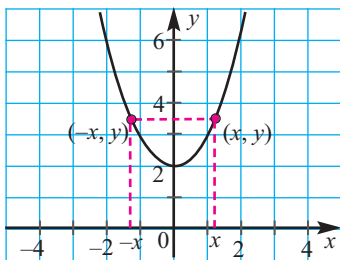
12. ააგეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი მოცემულ შუალედში. უჩვენეთ ექსტრემუმი. იპოვეთ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

- ა) $y = 2x - x^2, [-1; 2]$ ბ) $y = x^2 + 4x, [-2; 1]$

ლუწი ფუნქცია და კენტი ფუნქცია

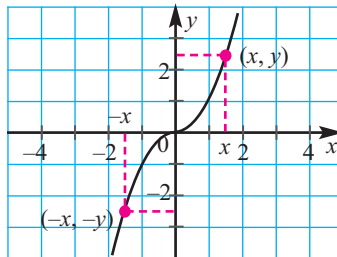
განვიხილოთ ფუნქციები, რომელთა განსაზღვრის არე $x = 0$ წერტილის მიმართ არის სიმეტრიული.

თუ განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი x -სათვის $f(-x) = f(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ლუწი ფუნქცია ეწოდება.



ლუწი ფუნქციის გრაფიკი ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიულია.

თუ განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი x -სათვის $f(-x) = -f(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას კენტი ფუნქცია ეწოდება.



კენტი ფუნქციის გრაფიკი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულია. თუ $f(x)$ კენტი ფუნქცია $x = 0$ წერტილშია განსაზღვრული, მაშინ $f(0) = 0$.

ყველა ფუნქცია კენტი ან ლუწი არაა. თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე $x = 0$ წერტილის მიმართ არ არის სიმეტრიული, მაშინ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი. განსაზღვრის არის 0-ის მიმართ სიმეტრიული ფუნქციისათვის $f(-x) = f(x)$ და $f(-x) = -f(x)$ პირობების დარღვევის შემთხვევაშიც ამზობენ, რომ ფუნქცია არც კენტია და არც ლუწი.

მაგალიტი 1. $f(x) = x^2 + x$ ფუნქციისათვის გამოიკვლიეთ ლუწ-კენტობა.

ამოხსნა: ფუნქციის განსაზღვრის არე-ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $x = 0$ წერტილის მიმართ სიმეტრიულია, თუმცა რადგან $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, ამიტომ $f(-x) \neq f(x)$ და $f(-x) \neq -f(x)$ მაშასადამე, მოცემული ფუნქცია არც კენტია და არც ლუწი.

მაგალიტი 2. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2}$ ფუნქციისათვის გამოიკვლიეთ ლუწ-კენტობა.

ამოხსნა: ფუნქციის განსაზღვრის არე ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა და

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 2} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 2} = \frac{-(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -\frac{(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -f(x)$$

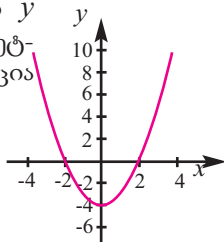
რადგან $f(-x) = -f(x)$ მოცემული ფუნქცია კენტი ფუნქციაა.

მაგალიტი 3. გამოიკვლიეთ ლუწ-კენტობა ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით.

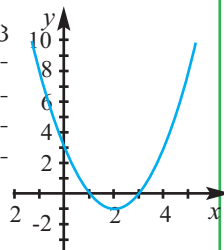
ა) $f(x) = x^2 - 4$

ბ) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

ფუნქციის გრაფიკი y ღერძის მიმართ სიმეტრიულია, ეს ფუნქცია ლუწი ფუნქციაა.



ფუნქციის გრაფიკი არც y ღერძის მიმართაა სიმეტრიული, არც კოორდინატთა სათავის მიმართ. ფუნქცია არც კენტია და არც ლუწი.



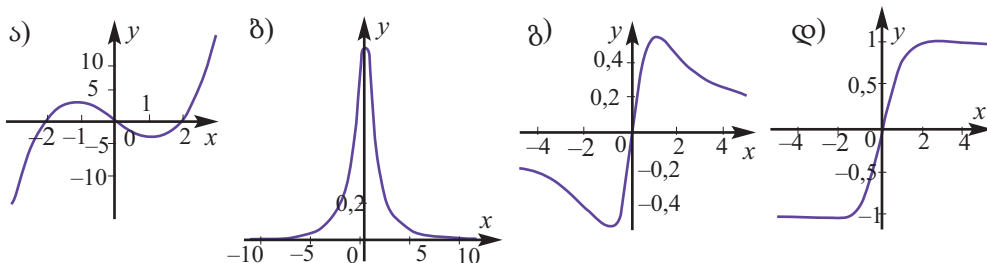
ლუწი ფუნქცია და კენტი ფუნქცია

სასწავლო დაფალებები

1. გამოიკვლიეთ მოცემული ფუნქციის ლუწ-კენტობა.

ა) $f(x) = 5x^3 + x$ ბ) $f(x) = \frac{2}{x^3 - 3x}$ გ) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ დ) $f(x) = 5x^3 + x^2 + 4$

2. მოცემული გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრეთ ფუნქციები კენტია თუ ლუწი.



3. გამოიკვლიეთ მოცემული ფუნქციების ლუწ-კენტობა.

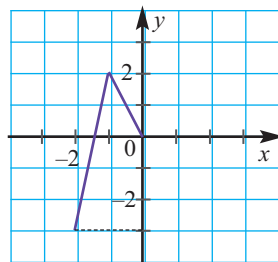
$f(x) = -x^2 + 6$	$f(x) = -x^3 + x$	$f(x) = x + 4$	$f(x) = x^{-2}$
$f(x) = x^2 + 1$	$f(x) = -3x^2 - 5$	$f(x) = x ^3$	$f(x) = \frac{ x }{x^2 + 1}$
$f(x) = -x^5$	$f(x) = 0$	$f(x) = -x(x^2 + 5)$	$f(x) = \frac{ x }{x^3 - 1}$

4. მოცემულია მთელ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია. იპოვეთ:

- ა) $f(4)$ -ის მნიშვნელობა, თუ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა და $f(-4) = 7$;
 ბ) $f(4)$ -ის მნიშვნელობა თუ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა და $f(-4) = 7$;
 გ) $f(3) + f(-5)$ თუ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა და $f(-3) = 8, f(5) = -2$;
 დ) $f(2) + f(0) + f(-4)$ თუ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა და $f(-2) = 3, f(4) = -7$.

5. მოცემულია იმ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ერთი ნაწილი, რომლის განსაზღვრის არეა $[-2; 2]$ დაასრულეთ გრაფიკი, თუ ცნობილია, რომ ფუნქცია არის:

- ა) ლუწი;
 ბ) კენტი.



6. თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე მოცემულ შუალედშია, მაშინ შეიძლება მოცემული ფუნქცია იყოს კენტი ან ლუწი?

- ა) $[-6; 6]$; ბ) $(-6; 6)$; გ) $(-6; 6]$; დ) $[-9; 10]$; ე) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

7. $f(x)$ ფუნქცია მთელ რიცხვით ღერძზეა განსაზღვრული და $[0; +\infty)$ შუალედში ზრდადია. 1) თუ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა, შეადარეთ:

- ა) $f(2)$ და $f(3)$; ბ) $f(5)$ და $f(7)$; გ) $f(-2)$ და $f(-3)$; დ) $f(-5)$ და $f(-7)$

2) ზრდადია თუ კლებადაა $f(x)$ ფუნქცია $(-\infty; 0]$ შუალედში?

8. სქემატურად გამოსახეთ რაიმე ლუწი ფუნქციის გრაფიკი, რომლის განსაზღვრის არეც არის $[-6; 6]$ მონაკვეთი, ზრდადია $[-6; 0]$ შუალედში და $x = -4$ წერტილში ნულის ტოლი ხდება. x -ის რა მნიშვნელობებისთვისაა $f(x) > 0$?

ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქციები

ხშირ შემთხვევაში რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციების ასახვისათვის გამოიყენება არა ერთი, არამედ რამდენიმე ფუნქცია და მათი განსაზღვრის არე.

ამოცანა. საბითუმო მაღაზიაში მინიმუმ 10 და მაქსიმუმ 20 სპორტული პერანგის მყიდველისათვის ერთი პერანგის ფასი 3 მანეთია, 20-ზე მეტი სპორტული პერანგის მყიდველისათვის ფასი 2 მანეთია. დაწერეთ ამ ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულება. გაყიდვიდან შემოსული თანხა აღნიშნეთ C -თი, პერანგების რაოდენობა n -ით.

ამ სიტუაციის ორი ფუნქციის, $C(n) = 3 \cdot n$, $10 \leq n \leq 20$ და $C(n) = 2 \cdot n$, $n > 20$ საერთო სახით ქვემოთ მოცემული ჩანაწერით გამოსახვა შეიძლება:

$$C(n) = \begin{cases} 3 \cdot n & 10 \leq n \leq 20 \\ 2 \cdot n & n > 20 \end{cases}$$

$n = 15$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ იპოვეთ $C(n)$ ფუნქციის მნიშვნელობები.

$n = 15$ და $n = 20$ მნიშვნელობებისათვის

$10 \leq n \leq 20$ პირობის დასაკმაყოფილებელი რიცხვისათვის თანხა $3 \cdot n$ ფორმულით უნდა გამოვთვალოთ:

$$C(15) = 3 \cdot n = 3 \cdot 15 = 45,$$

$$C(20) = 3 \cdot n = 3 \cdot 20 = 60$$

$n = 30$ და $n = 40$ მნიშვნელობები $n > 20$ პირობას შეესაბამება:

$$C(30) = 2 \cdot 30 = 60, C(40) = 2 \cdot 40 = 80.$$

ისეთ ფუნქციებს, რომლებშიც განსაზღვრის არე სხვადასხვა შუალედში სხვადასხვა ფორმულითაა მოცემული, ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქცია ეწოდება.

ნიმუში 1. ააგეთ ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & \text{როცა } x < 1 \\ x - 2, & \text{როცა } x \geq 1 \end{cases}$$

ამოხსნა: ფუნქციის გრაფიკი $x = 1$ წერტილის მარცხნივ

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{წრფის, } x = 1\text{-ის მარჯვნივ კი } y = x - 2$$

წრფეზეა, ვინაიდან $f(1) = -1$ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი

წვერო $(1; -1)$ წერტილში მქონე ტეხილია. თუ გრაფიკის

ასახვა ხდება კალმის “ფურცლიდან აულებლად” შეიძლება

ითქვას, რომ ფუნქცია უწყვეტია. ნიმუშში მოცემული ფუნ-

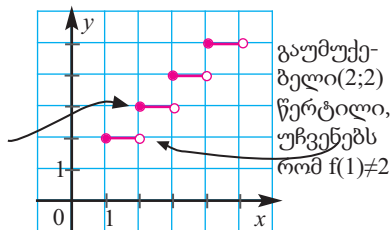
ქცია უწყვეტია.

ქცია უწყვეტია.

ნიმუში 2. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{თუ } 1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{თუ } 2 \leq x < 3 \\ 4, & \text{თუ } 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

მუქი $(2,3)$
წერტილი,
უჩვენებს რომ
 $f(2) = 3$



ამ ფუნქციის გრაფიკი საფეხურიანი ნაწილებისაგან შედგება. ვინაიდან გრაფიკი წყვეტილი ხაზებისაგან შემდგარი, ფუნქცია წყვეტადია.

მსგავსი ფუნქციები, როგორც მთელი ნაწილის ფუნქციები ზოგადად $f(x) = [x]$ სახით იწერება. აგებული გრაფიკი მთელი - ნაწილი ფუნქციის $[0; 4)$ შუალედში არსებული გრაფიკია.

ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქციები

სასწავლო დაფალებები

1. გამოთვალეთ ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობები არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობისათვის.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x \leq 4 \\ 3x+5 & x > 4 \end{cases} \quad \text{ა) } x = 1,5 \quad \text{ბ) } x = 4 \quad \text{გ) } x = -2 \quad \text{დ) } x = 12$$

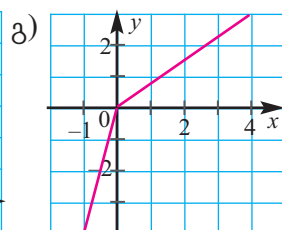
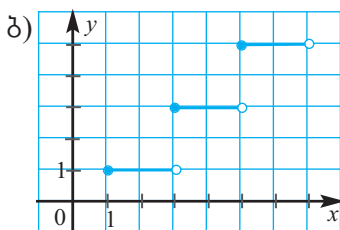
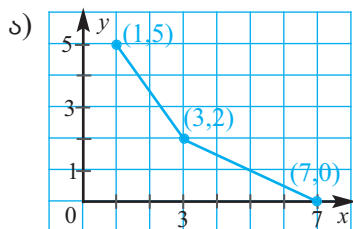
2. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$ იპოვეთ:

ა) $f(-2)$ ბ) $f(-1)$ გ) $f(0)$ დ) $f(1)$ ე) $f(4)$

3. ააგეთ ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით გამოიკვლიეთ ფუნქციის უკვეთობა.

ა) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -3 \leq x < 1 \\ 3x-1, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ ბ) $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 5, & 2 \leq x < 4 \\ 6, & 4 \leq x < 6 \end{cases}$ გ) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

4. დაწერეთ განტოლება ნაწილ-ნაწილ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით.



5. მოცემული ფუნქცია ფოტოსურათების გამრავლების კომპანიაში ფოტოსურათის x რაოდენობაზე დამოკიდებულებით $M(x)$ -ის დამაკმაყოფილებელ თანხას (მანეთობით) უჩვენებს.
- $$M(x) = \begin{cases} 0,15x, & 0 < x \leq 25 \\ 0,10x, & 26 \leq x \leq 100 \\ 0,07x, & 101 \leq x \leq 500 \\ 0,05x, & 501 \leq x \end{cases}$$

- 1) იპოვეთ 20 ფოტოსურათის დაბეჭდვისათვის გადახდილი თანხა.
- 2) სწორია მოსაზრება იმის შესახებ, რომ 150 სურათის დაბეჭდვისათვის 10 მანეთზე ნაკლებს გადახდა საჭირო?
- 3) რამდენი ფოტოსურათის დაბეჭდვა შეიძლება 40 მანეთად?

6. ავტოსადგომზე გადახდის წესი:

ყოველი ნახევარი საათი 0,50 ლ.

ნახევარი საათისათვის გადასახადი თუ 2 მანეთს მიაღწევს, ავტომობილს სადგომზე 12 საათი შეუძლია იდგეს.

- ა) გადახდის პირობა გამოსახეთ ნაწილ-ნაწილ ფუნქციით; ბ) ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი; გ) დაწერეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე.

მითითება: მოთხოვნილი ფუნქცია აღნიშნეთ $f(t)$ -თი და დაწერეთ 0,50; 1; 1,5; 2 მანეთის თანხის შესაბამისი დროის ინტერვალები.

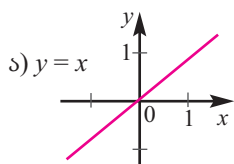
7. კომპანია თანამშრომლებს ხელფასს სამუშაო საათების მიხედვით ქვემოთ მოცემული წესით უხდის: თუ თანამშრომელი კვირის განმავლობაში 40 სთ-ის იმუშავეს, ყოველ სამუშაო საათში 8 მანეთი, 40 საათის ზევით თითოეული სამუშაო საათისათვის ნორმალური ტარიფიდან 1,5-ჯერ მეტს იღებს. დაწერეთ ამ კომპანიაში ანაზღაურების წესი ნაწილ-ნაწილი ფუნქციის სახით. რამდენ მანეთს მიიღებს თანამშრომელი, რომელმაც კვირაში 48 საათი იმუშავა?

$y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) მაჩვენებლიანი ფუნქცია

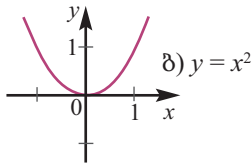
ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის $y = x^n$ სახის ფუნქციას

ნატურალურმაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

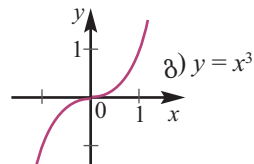
ქვემოთ მოცემულია მაჩვენებლიანი ფუნქციების გრაფიკები, როცა $n = 1$, $n = 2$ და $n = 3$.



$y = x$ ფუნქციის გრაფიკი წრფეა.



$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა.



$y = x^3$ ფუნქციის გრაფიკი კუბური პარაბოლაა.

$y = x^n$ ფუნქციის გრაფიკი n -ის ნებისმიერი ლუწი მნიშვნელობისათვის y ღერძის მიმართ სიმეტრიულია და $y = x^2$ ფუნქციის მსგავსია. n -ის ნებისმიერი კენტი მნიშვნელობისათვის $y = x^n$ ფუნქციის გრაფიკი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულია და n -ის 1-ზე მეტი კენტი მნიშვნელობისათვის $y = x^3$ ფუნქციის გრაფიკის - კუბური პარაბოლის მსგავსია.

$$D(x^{2k}) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(x^{2k}) = [0; +\infty)$$

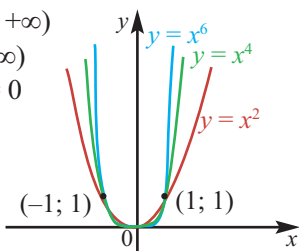
$$\text{ნულები: } x = 0$$

$$(-\infty; 0]$$

$$[0; +\infty)$$

$$x_{\min} = 0;$$

$$f_{\min} = 0$$



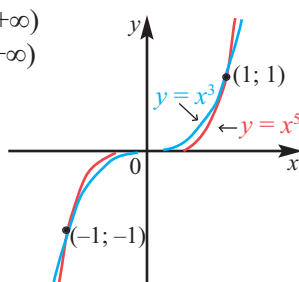
$$D(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$$

$$\text{ნულები: } x = 0$$

$$(-\infty; +\infty)$$

ექსტრემუმი არ აქვს



როცა $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ მაშინ x^n ფუნქციის გრაფიკს n რიგის პარაბოლა ეწოდება. როგორც გრაფიკებიდან ჩანს, როცა $n > m$, $(0; 1)$ შუალედში x^n ფუნქციის გრაფიკი x^m ფუნქციის გრაფიკზე ქვევით, $(1; +\infty)$ შუალედში კი ზევით მდებარეობს.

სასწავლო დავალებები

1. მოცემულ წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობები შეადარეთ ნულს $x = 0$; $x = -3$; $x = 5$.

ა) $f(x) = x^7$

ბ) $f(x) = x^6$

2. მოცემული ფუნქციის გრაფიკი გადის თუ არა მოცემულ წერტილზე?

ა) $y = x^4$, $A(-2; 16)$; ბ) $y = x^5$, $B(-2; 32)$; გ) $y = x^5$, $C(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{32})$

3. იკვეთება თუ არა მოცემული ფუნქციის გრაფიკი მოცემულ წრფესთან?

ა) $y = x^8$, $y = 2$; ბ) $y = x^6$, $y = -3$; გ) $y = x^5$, $y = 2$; დ) $y = x^7$, $y = -3$

4. მოცემულია ფუნქციები $f(x) = x^3$ და $g(x) = x^4$. შეადარეთ:

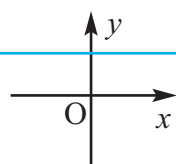
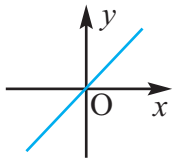
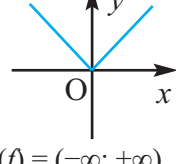
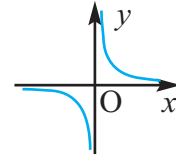
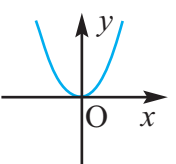
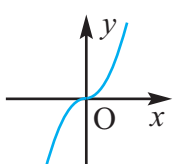
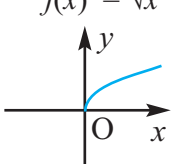
ა) $f(0,1)$ და $g(0,1)$; ბ) $f(\frac{1}{2})$ და $g(\frac{1}{2})$; გ) $f(2)$ და $g(2)$.

5. ერთი და იგივე საკოორდინატო სიბრტყეში ააგეთ $y = x^4$ და $y = 16$ ფუნქციის გრაფიკები და უჩვენეთ გადაკვეთის წერტილები. გრაფიკული გამოსახულების მიხედვით ამოხსენით უტოლობები $x^4 < 16$ და $x^4 > 16$.

ცვლადი სიდიდეები ძალიან სხვადასხვაგვარია, თუმცა ერთი შეხედვით ერთმანეთთან კავშირის უხილავ პროცესებში სიდიდეების ცვლილებები ერთიდაიგივე დამოკიდებულებით შეიძლება იქნეს მოცემული, ამიტომ ყველაზე ხშირად შემხვედრი დამოკიდებულებების შესაბამისად, საწყისი ფუნქციის საფუძვლად მიჩნევით ფუნქციები ერთ ოჯახში ერთიანდებიან.

მაგალითად, $y = 2x^2 + 1$, $y = (x - 1)^2 + 2$, $y = -3x^2$ ფუნქციათა გრაფიკები $y = x^2$ პარაბოლაზე ჩატარებული გარდაქმნებით მიიღება. ამიტომაც ეს ფუნქციები, ასევე $y = a(x - m)^2 + n$ ფორმულით მოცემული ყველა ფუნქცია, ერთ ოჯახში შეიყვანება და ამ ოჯახის მთავარ ფუნქციად $y = x^2$ ითვლება.

ქვემოთ მოცემულ ცხრილში ზოგიერთი ძირითადი ფუნქციის გრაფიკი და მათ შესახებ გარკვეული ინფორმაციაა მოცემული.

მუდმივი ფუნქცია $f(x) = c$  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $E(f) = \{c\}$	იგივერი ფუნქცია $f(x) = x$  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $E(f) = (-\infty; +\infty)$ ნულია: $x = 0$ ზრდადი ფუნქციაა ექსტრემუმი არა აქვს	მოდულიანი ფუნქცია $f(x) = x $  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $E(f) = [0; +\infty)$ ნულია: $x = 0$ $(-\infty; 0] \downarrow, [0; +\infty) \uparrow$ $(0; 0)$ წერტილში მინიმუმი	რაციონალური ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{x}$  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ნული არა აქვს $(-\infty; 0) \downarrow, (0; +\infty) \downarrow$ ექსტრემუმი არა აქვს
კვადრატული ფუნქცია $f(x) = x^2$  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $E(f) = [0; +\infty)$ ნულია: $x = 0$ $(-\infty; 0] \downarrow, [0; +\infty) \uparrow$ $(0; 0)$ წერტილში მინიმუმი	კუბური ფუნქცია $f(x) = x^3$  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $E(f) = (-\infty; +\infty)$ ნულია: $x = 0$ ზრდადი ფუნქციაა ექსტრემუმი არა აქვს	კვადრატული ფუნქციის ფუნქცია $f(x) = \sqrt{x}$  $D(f) = [0; +\infty)$ $E(f) = [0; +\infty)$ ნულია: $x = 0$ $[0; +\infty) \uparrow$ ექსტრემუმი არა აქვს	

ფუნქციათა კლასიფიკაცია

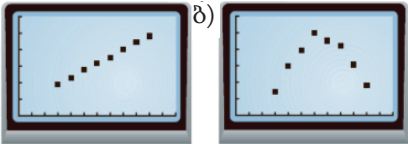
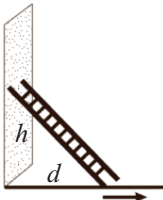
სასწავლო დაფალებები

1. 1) ააგეთ ცხრილში მოცემული ფუნქციათა გრაფიკები.
დაწერეთ თითოეული ფუნქციისათვის შესაბამისი კლასის ძირითადი ფუნქცია.
ა) ცხრილში 2002 წლიდან დაწყებული ბიზნესმენის წლიური შემოსავალი (მანეთობით) ნაჩვენებია. $x = 3$ მნიშვნელობა 2002 წელს შეესაბამება. რამდენი შემოსავალი ექნება ბიზნესმენს 2018 წელს?

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7931	8306	8800	9206	9588	10076	10444	10876

ბ) ცხრილში ნაჩვენებია 15:00-დან დაწყებული ყოველი მორიგი საათის განმავლობაში მაღაზიაში გაყიდული პურის რაოდენობა.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	15	30	40	50	45	42	31	18

 $x = 3$ მნიშვნელობა 15:00 საათს შეესაბამება. ივარაუდეთ 17 : 30 საათისათვის გაყიდული პურის რაოდენობა.
- 2) განსაზღვრეთ მოცემული ა) ბ) გრაფიკებიდან თითოეული ზემოთ მოცემულ რომელ სიტუაციას შეესაბამება.

3. $\frac{pV}{T} = const$ (იდეალური აირის მდგომარეობის განტოლება) ფორმულაში p , V და T სიდიდეებიდან რომელიმე ერთ-ერთი ჩათვალეთ მუდმივ სიდიდედ და განსაზღვრეთ დამოკიდებულების ხასიათი დანარჩენ ორს შორის. განიხილეთ ყველა შემთხვევა. თითოეული შემთხვევისათვის უჩვენეთ მთავარი ფუნქცია.
4. ცნობილია, რომ y და x ცვლადებს შორის დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციული ან უკუპროპორციულია. დაწერეთ $y = f(x)$ ფუნქციის ფორმულა და ააგეთ გრაფიკი, თუ ცნობილია, რომ $f(2) = 2$ და $f(4) = 1$.
5. 3 მ სიგრძის კიბე კედელზეა მიყუდებული. კიბის ქვედა წვერო კედლიდან d მეტრ მანძილზეა. ზედა წვერო კი მიწიდან h მეტრ სიმაღლეზეა.


ა) დაწერეთ h სიმაღლის d მანძილზე $h(d)$ დამოკიდებულების ფორმულა. ბ) განსაზღვრეთ ფუნქციის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არე, ააგეთ გრაფიკი. გ) გამოსახეთ კიბის მდებარეობა, როცა $d = 0$ და $d = 3$ მ.

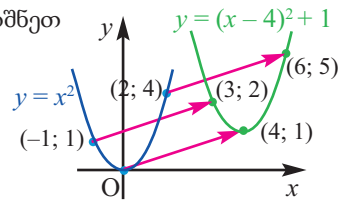
გრაფიკების გარდაქმნა

პრაქტიკული შეცადინება. 1) $y = x^2$ პარაბოლაზე აღნიშნეთ წერტილები: $(0; 0)$, $(-1; 1)$, $(2; 4)$.

2) ეს წერტილები $<4; 1>$ ვექტორით პარალელურად გადაიტანეთ.

$(0; 0) \rightarrow (4; 1)$ $(-1; 1) \rightarrow (3; 2)$ $(2; 4) \rightarrow (6; 5)$

3) პარალელური გადატანიდან მიღებული წერტილები შეამოწმეთ $y = (x - 4)^2 + 1$ პარაბოლაზე მდებარეობენ თუ არა.

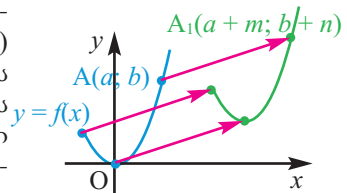


პარალელური გადატანა

პარალელური გადატანისას გრაფიკის ყველა წერტილი მოცემული მიმართულებით ერთი და იგივე მანძილით იცვლის ადგილს. გრაფიკის ფორმა კი არ იცვლება.

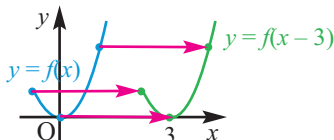
$y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის თითოეული წერტილი $<m; n>$ ვექტორით პარალელურად გადავიტანოთ: $A(a; b) \rightarrow A_1(a + m; b + n)$

თუ A წერტილის კოორდინატები $b = f(a)$ ტოლობას აკმაყოფილებენ A_1 წერტილის კოორდინატები $y - n = f(x - m)$ ტოლობას აკმაყოფილებენ. ანუ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $<m; n>$ ვექტორით პარალელური გადატანისას $y = f(x - m) + n$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება: მოცემული გრაფიკი ჰორიზონტალური მიმართულებით $|m|$ ერთეულით (როცა $m > 0$ მარჯვნივ, როცა $m < 0$ მარცხნივ), ვერტიკალური მიმართულებით $|n|$ ერთეულით (როცა $n > 0$ ზევით, როცა $n < 0$ ქვევით) მოცურდება.

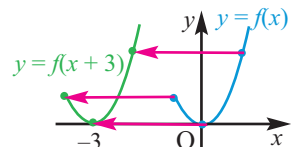


იმ შემთხვევაში, როცა $n = 0$ გრაფიკი მხოლოდ ჰორიზონტალური მიმართულებით პარალელურად გადაიტანება და ახალი ფუნქცია $y = f(x - m)$ ხდება.

ნიმუში:



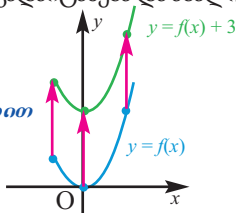
3 ერთეულით მარჯვნივ



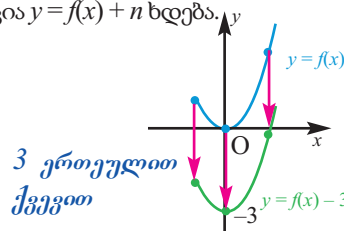
3 ერთეულით მარცხნივ

იმ შემთხვევაში, როცა $m = 0$ გრაფიკი მხოლოდ ვერტიკალური მიმართულებით პარალელურად გადაიტანება და ახალი ფუნქცია $y = f(x) + n$ ხდება.

ნიმუში:



3 ერთეულით ზევით



3 ერთეულით ქვევით

1. თითოეული ფუნქციისათვის განსაზღვრეთ m -ისა და n -ის მნიშვნელობა. დაწერეთ მოცურება ჰორიზონტალური იქნება თუ ვერტიკალური.

ა) $y - 4 = f(x)$ ბ) $y = f(x) - 4$ გ) $y = f(x + 1)$ დ) $y + 3 = f(x - 7)$

2. სამწევრის სრული კვადრატის გამოყოფით განმარტეთ, მოცემული ფუნქციების გრაფიკები $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკიდან რომელი გარდაქმნებითაა მიღებული.

ა) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

ბ) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

გრაფიკების გარდაქმნა

ნიმუში: $f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით ააგეთ მოცემული ფუნქქციათა გრაფიკები.

ა) $g(x) = \sqrt{x} - 1$

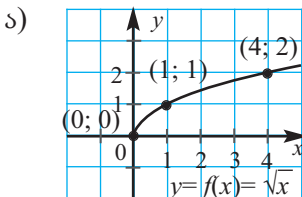
ბ) $h(x) = \sqrt{x-1}$

გ) $s(x) = \sqrt{x+3} - 2$

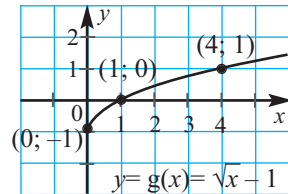
ამოხსნა:

ავაგოთ $f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი. ფუნქციის განსაზღვრის არე: $[0; \infty)$. ამ არიდან სრულკვადრატია 3 მნიშვნელობის $(0; 1; 4)$ შერჩევით შევადგინოთ ცხრილი.

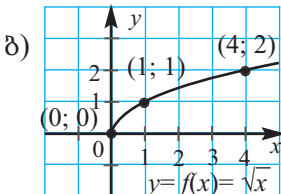
x	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
4	2	$(4, 2)$



$f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი 1 ერთეულით ქვევით მოცურდება. გრაფიკზე მდებარე თითოეული წერტილის ორდინატს 1 გამოაკლდება.

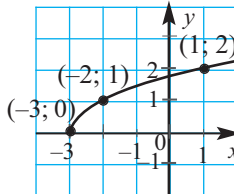
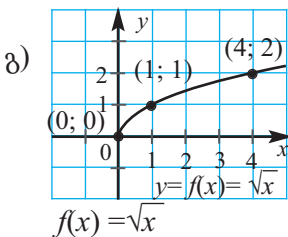
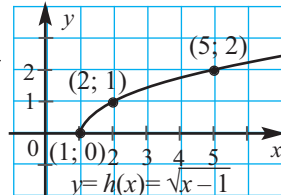


$g(x) = f(x) - 1$



$f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი 1 ერთეულით მარჯვნივ მოცურდება.

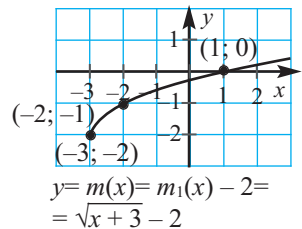
$h(x) = f(x - 1)$



$y = m_1(x) = f(x+3) = \sqrt{x+3}$

გრაფიკი 3 ერთეულით მარცხნივ მოცურდება

$m_1(x) = f(x+3)$



გრაფიკი 2 ერთეულით ქვევით მოცურდება.

$m(x) = f(x+3) - 2$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით ააგეთ მოცემული ფუნქქციების გრაფიკები. თითოეული გარდაქმნა დაწერეთ სიტყვიერად.

ა) $g(x) = \sqrt{x} - 3$

ბ) $h(x) = \sqrt{x-2}$

გ) $s(x) = \sqrt{x-1} + 2$

4. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მიმართულებით პარალელური გადატანით $y = f(x - m) + n$ მიიღება.

ა) უჩვენეთ, რომ გადატანის მიმდევრობას აქვს მნიშვნელობა. უჩვენეთ ნიმუშზე.

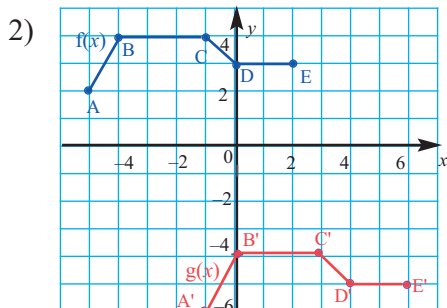
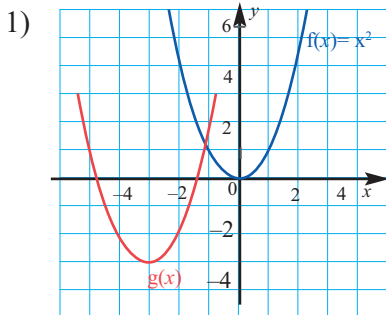
ბ) m და n პარამეტრების მნიშვნელობები რა გავლენას ახდენენ ფუნქციის განსაზღვრის არესა და მნიშვნელობათა არეზე?

გრაფიკების გარდაქმნა

5. გრაფიკების მიხედვით წარმოადგინეთ $f(x)$ ფუნქციის $g(x)$ ფუნქციად გარდაქმნა.

ა) $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების შესახებ დაწერეთ 5 წერტილის კოორდინატების შესაბამისობა.

ბ) გარდაქმნით მიღებული $g(x)$ ფუნქცია დაწერეთ $y = f(x - m) + n$ სახით.



6. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით თითოეული გარდაქმნისათვის:

- განსაზღვრეთ A' , B' , C' , D' და E' წერტილების კოორდინატები.

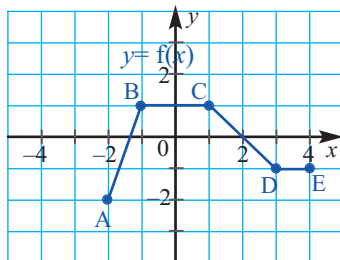
- დახაზეთ გარდაქმნის შედეგად მიღებული ფუნქციების გრაფიკები.

ა) $g(x) = f(x) + 2$

ბ) $g(x) = f(x - 3)$

გ) $g(x) = f(x + 1)$

დ) $g(x) = f(x) - 4$



7. თითოეული პარალელური გადატანისათვის განსაზღვრეთ m -ისა და n -ის მნიშვნელობა და დაწერეთ გარდაქმნის შედეგად მიღებული ფუნქცია $y = f(x - m) + n$ სახით. გამოთქვით მოსაზრებები თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არის და მნიშვნელობათა არის შესახებ.

ა) $f(x) = |x|$, 4 ერთეულით მარცხნივ და 2 ერთეულით ქვევით.

ბ) $f(x) = x^2$, 6 ერთეულით მარჯვნივ და 4 ერთეულით ზევით;

გ) $f(x) = \frac{1}{x}$, 5 ერთეულით მარცხნივ, 3 ერთეულით ქვევით;

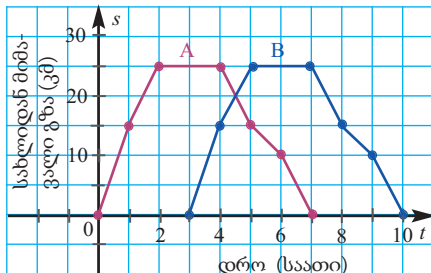
8. $f(x) = \frac{1}{x}$ ფუნქცია $x = 0$ წერტილში არ არის განსაზღვრული. რომელ წერტილში არ არის განსაზღვრული $f(x - 3)$ ფუნქცია? ერთი და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეში ააგეთ ერთი და იგივე კოორდინატთა სისტემაში $f(x)$ და $f(x - 3)$ ფუნქციების გრაფიკები.

9. შეუღებავი სახლის s ფართობის მქონე კედლების შეღებვისათვის საჭირო საღებავების ოდენობა (n ლიტრი) $n = f(s)$ ფუნქციით შეიძლება განისაზღვროს. სიტუაციის შესაბამისად წარმოადგინეთ $n = f(s) + 10$ და $n = f(s + 10)$ ცვლილებები.

10. ულქერი სახლიდან გამოვიდა, ველოსიპედით ქალაქგარეთ ტბაზე წავიდა და უკან დაბრუნდა. მან გავლილი გზა და დახარჯული დრო A გრაფიკით გამოსახა.

ა) როგორ შეიცვლებოდა ეს გრაფიკი თუ ულქერი სახლიდან 2 საათის შემდეგ გამოვიდოდა?

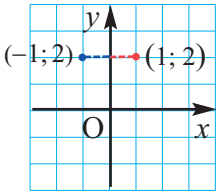
ბ) სურათზე მოცემულ B გრაფიკს სიტუაციის შესაბამისად როგორ წარმოადგენდით?



გრაფიკების გარდაქმნა

ასახვა

ორდინატა ღერძის მიმართ გრაფიკის თითოეული წერტილი y ღერძის მიმართ სიმეტრიულ წერტილად გარდაიქმნება.

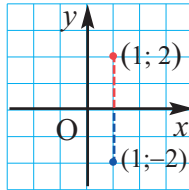


$$(1; 2) \rightarrow (-1; 2)$$

$$(x; y) \rightarrow (-x; y)$$

წერტილის **ორდინატი** ისევე ისე რჩება, **აბსცისა** კი ნიშანს იცვლის.

აბსცისთა ღერძის მიმართ გრაფიკის თითოეული წერტილი x ღერძის მიმართ სიმეტრიულ წერტილად გადაიქცევა.

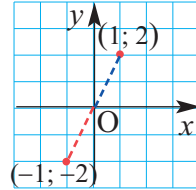


$$(1; 2) \rightarrow (1; -2)$$

$$(x; y) \rightarrow (x; -y)$$

წერტილის **აბსცისა** ისევე რჩება, **ორდინატი** კი ნიშანს იცვლის.

კოორდინატთა სათავის მიმართ. გრაფიკის თითოეული წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულ წერტილად იქცევა.



$$(1; 2) \rightarrow (-1; -2)$$

$$(x; y) \rightarrow (-x; -y)$$

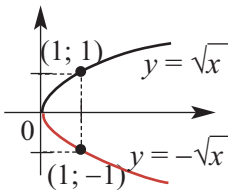
წერტილის **ორივე კოორდინატის ნიშანი იცვლება.**

ფუნქციის გრაფიკების ასახვა

x ღერძის მიმართ

$$f(x) \rightarrow -f(x)$$

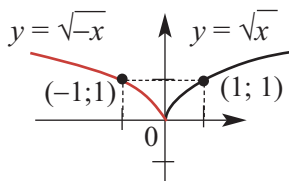
$$(x; y) \rightarrow (x; -y)$$



y ღერძის მიმართ

$$f(x) \rightarrow f(-x)$$

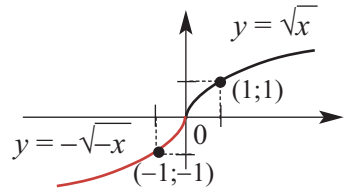
$$(x; y) \rightarrow (-x; y)$$



კოორდინატთა სათავის მიმართ

$$f(x) \rightarrow -f(-x)$$

$$(x; y) \rightarrow (-x; -y)$$



11. მოცემული წერტილების: ა) x ღერძის; ბ) y ღერძის მიმართ ასახვით გარდაქმნილი წერტილები ასახეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე, დაწერეთ ახალი კოორდინატები:

$A(5; 3), B(-5; -5), C(0; -3), D(-6; 2), F(9; 0)$

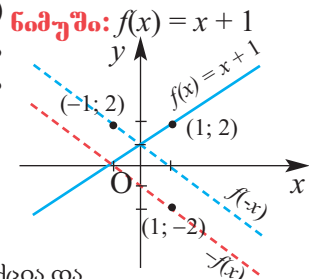
12. გამოიკვლიეთ ნიმუში. გამოსახეთ გრაფიკების საკოორდინატო ღერძის მიმართ ასახვით $-f(x)$ და $f(-x)$ ფუნქციების გრაფიკები.

ა) $f(x) = x + 1$

ბ) $f(x) = -x + 3$

ბ) $f(x) = x^3$

დ) $f(x) = \frac{1}{x}$



13. თითოეული ფუნქციისათვის დაწერეთ საწყისი ფუნქცია და გარდაქმნები.

ა) $y = -x^2 + 2$

ბ) $y = \sqrt{x} + 1$

გ) $y = \frac{1}{x-1}$

დ) $y = 1 - \frac{1}{x}$

გრაფიკების გარდაქმნა

- 14.** მოცემული წერტილთა სიმრავლის მიხედვით ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი. განსაზღვრეთ გრაფიკი $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$ ფუნქციებიდან რომლის გარდაქმნის შესაბამისია.

- ა) $\{(-2; 8), (-1; 1), (0; 0), (1; -1), (2; -8)\}$
 ბ) $\{(0; 0), (-1; 1), (-4; 2), (-9; 3), (-16; 4)\}$
 გ) $\{(-2; -4), (-1; -1), (0; 0), (1; -1), (2; -4)\}$
 დ) $\{(-4; 3), (-2; 1), (0; -1), (2; -3), (4; -5)\}$

- 15.** ააგეთ ცხრილში მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. უჩვენეთ მოცემული ფუნქცია რომელ ძირითადი ფუნქციისაგან და რომელი გარდაქმნებითაა მიღებული.

ა)

x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-2	0	-2	-4

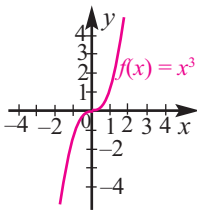
ბ)

x	0	1	4	9	16
y	0	-1	-2	-3	-4

- 16.** ნაბიჯ-ნაბიჯ დაწერეთ $y = x^2$ პარაბოლის რომელი გარდაქმნებით არის მიღებული $y = -(x+1)^2 + 3$ ფუნქციის გრაფიკი. თითოეული ნაბიჯი გამოსახეთ გრაფიკულად.

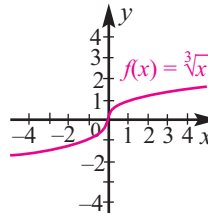
- 17.** ძირითადი ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით ააგეთ მოთხოვნილი ფუნქციების გრაფიკები.

1) ძირითადი ფუნქცია: $f(x) = x^3$



- ა) $f(x) = (x+1)^3$
 ბ) $f(x) = x^3 - 4$
 გ) $f(x) = -x^3$
 დ) $f(x) = -(x-2)^3$
 ე) $f(x) = -x^3 + 3$

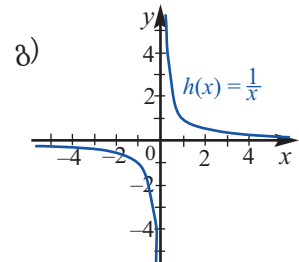
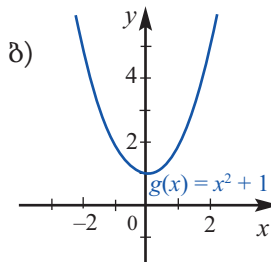
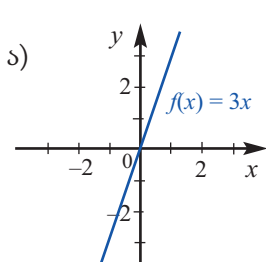
2) ძირითადი ფუნქცია: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



- ა) $g(x) = 3\sqrt[3]{x} + 2$
 ბ) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 4$
 გ) $g(x) = -\sqrt[3]{x}$
 დ) $g(x) = 3\sqrt[3]{-x}$
 ე) $g(x) = -3\sqrt[3]{x} - 3$

- 18.** გრაფიკების მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.

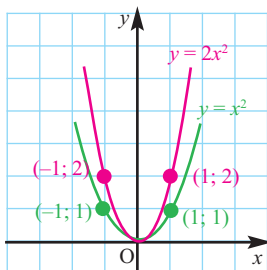
- 1) ფორმულით ჩაწერეთ x ღერძის მიმართ ასახვით მიღებული ფუნქციები.
 2) დაწერეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.



გრაფიკების გარდაქმნა

გრაფიკების მოჭერა და შეკუმშვა

x ღერძიდან 2-ჯერ მოჭერა



$(1; 1) \rightarrow (1; 2)$

გრაფიკზე არსებული თითოეული წერტილი აბსცისთა ღერძიდან 2-ჯერ შორდება.

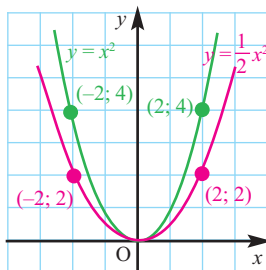
აბსცისთა ღერძიდან მოჭერისას და შეკუმშვისას წერტილების აბსცისები იგივე რჩება, ორდინატი იცვლება: $(a; b) \rightarrow (a; l \cdot b)$

თუ $A(a; b)$ წერტილი $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზეა, $b = f(a)$

მაშინ $A_1(a; l \cdot b)$ წერტილი $y = l \cdot f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს.

$y = l \cdot f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი $f(x)$ -ის გრაფიკის როცა $l > 1$ აბსცისთა ღერძიდან l -ჯერ მოჭრით, ხოლო როცა $0 < l < 1$, მაშინ კი აბსცისთა ღერძისაკენ $\frac{1}{l}$ -ჯერ შეკუმშვით მიიღება.

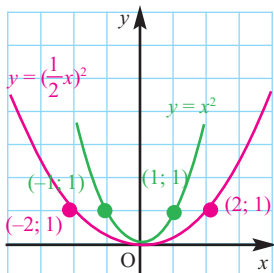
x ღერძისაკენ 2-ჯერ შეკუმშვა



$(2; 4) \rightarrow (2; 2)$

გრაფიკზე არსებული თითოეული წერტილი აბსცისთა ღერძს 2-ჯერ უახლოვდება.

y ღერძიდან 2-ჯერ მოჭერა



$(1; 1) \rightarrow (2; 1)$

გრაფიკზე არსებული თითოეული წერტილი ორდინატთა ღერძიდან 2-ჯერ შორდება.

ორდინატთა ღერძიდან მოჭერისას და შეკუმშვისას წერტილის ორდინატი რჩება იგივე, აბსცისა იცვლება:

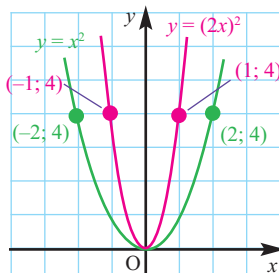
$$(a; b) \rightarrow (k \cdot a; b)$$

თუ $A(a; b)$ წერტილი $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ზედაპირზეა $b = f(a)$.

მაშინ $A_1(k \cdot a; b)$ წერტილი $y = f(\frac{x}{k})$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს.

$y = f(\frac{x}{k})$ ფუნქციის გრაფიკი $f(x)$ -ის გრაფიკის, როცა $k > 1$ ორდინატთა ღერძიდან k -ჯერ მოჭერით, როცა $0 < k < 1$ მაშინ კი ორდინატთა ღერძიდან $\frac{1}{k}$ -ჯერ შეკუმშვით მიიღება.

y ღერძისაკენ 2-ჯერ შეკუმშვა



$(2; 4) \rightarrow (1; 4)$

გრაფიკზე არსებული თითოეული წერტილი ორდინატთა ღერძს 2-ჯერ მოუახლოვდება.

- 19.** $y = x$ ძირითადი ფუნქციის მიხედვით ა) $y = 2x$, ბ) $y = \frac{1}{2}x$ ფუნქციის გრაფიკები ააგეთ ერთსა და იმავე კოორდინატთა სისტემაში. Oy და Ox ღერძების მიმართ განმარტეთ მიახლოება და დაშორება.

გრაფიკების გარდაქმნა

20. ააგეთ ფუნქციების გრაფიკები ძირითადი ფუნქციის მიხედვით.

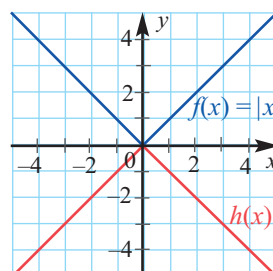
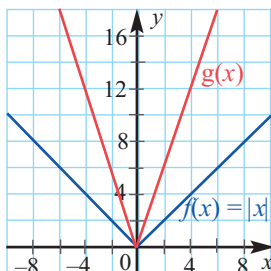
ა) $y = 2x^2$ ბ) $y = 2(x-1)^2$ გ) $y = 3|x|$ დ) $y = -|3x|$

21. ფუნქციები ერთმანეთისაგან განსაზღვრული გარდაქმნებითაა მიღებული. გამოსახეთ ეს გარდაქმნები.

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow g(x) = 2\sqrt{x-2} \rightarrow h(x) = 2\sqrt{x-2} + 3 \rightarrow k(x) = -2\sqrt{x-2} - 3$$

22. რეულში ჩაიხაზეთ გრაფიკები. თითოეულ გრაფიკზე ძირითადი ფუნქციის გამოყენებით განსაზღვრეთ სხვა ფუნქციების შესაბამისი ალგებრული ჩანაწერები და გრაფიკზე დაწერეთ.

x	$y=f(x)$	$y=g(x)$
-6	6	18
-4	4	12
-2	2	6
0	0	0
2	2	6
4	4	12
6	6	18



23. დაწერეთ თითოეული ფუნქცია მოცემული ძირითადი ფუნქციიდან რომელი გარდაქმნებითაა მიღებული.

1) $y = x$	ა) $y = 3x$	ბ) $y = -2x$	გ) $y = \frac{1}{2}x + 1$
2) $y = x^2$	ა) $y = x^2 + 3$	ბ) $y = (x-3)^2$	გ) $y = 2(x-1)^2 + 3$
3) $y = \sqrt{x}$	ა) $y = 2\sqrt{x}$	ბ) $y = \sqrt{2x}$	გ) $y = 2\sqrt{x-1} + 1$
4) $y = \frac{1}{x}$	ა) $y = \frac{2}{x}$	ბ) $y = \frac{1}{2x}$	გ) $y = \frac{1}{x} - 1$

24. **ღია ტიპის შეკითხვა.** მოცემული $f(x)$ ძირითადი ფუნქციის მიხედვით დაწერეთ მოთხოვნილი გარდაქმნებით მიღებული ფუნქციები.

- ა) პარალელურად გადატანილი: • მარცხნივ • მარჯვნივ • ზევით • ქვევით
 ბ) შეკეული: • x ღერძის მიმართ • y ღერძის მიმართ
 გ) მოჭერილი: • x ღერძიდან • y ღერძიდან
 დ) შეკუმშული: • x ღერძისაკენ • y ღერძისაკენ

1) $f(x) = x^3$ 2) $f(x) = |x|$ 3) $f(x) = \sqrt{x}$ 4) $f(x) = \frac{1}{x}$

25. **გამოყენებითი ხელოვნება. ხალხიკზე** სხვადასხვა გრაფიკების გარდაქმნებით შექმნილი მოხატულობების შემჩნევა შეიძლება.

სურათზე მოცემულ **ნამუშევარზე** რომელი ფუნქციების გარდაქმნების წარდგენა შესაძლებელია.



დაწერეთ ამ გარდაქმნებიდან $y = f(x - m)$ სახის შესაბამისი.

26. რომელი ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის:

- ა) აბსცისთა ღერძიდან 2-ჯერ მოჭერისას;
 ბ) ორდინატთა ღერძისაკენ 4-ჯერ შეკუმშვისას.

მოქმედებები ფუნქციებზე

მოცემულ ფუნქციებზე გამოთვლითი მოქმედებების ჩატარებით შეიძლება ახალი ფუნქციის მიღება. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებზე ჩატარებული გამოთვლითი ოპერაციების შედეგად მიღებული ფუნქციის განსაზღვრის არე ამ ორივე ფუნქციის განსაზღვრის არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ახალი ფუნქციის განსაზღვრის არე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეების თანაკვეთაა: $D = D(f) \cap D(g)$. ფუნქციების შეფარდება არგუმენტის D სიმრავლიდან მნიშვნელში არსებული ფუნქციის ნულისაგან განსხვავებული მნიშვნელობებისთვისაა განსაზღვრული. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები გარკვეულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულია, მათზე შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის მოქმედებები ქვემოთ მოცემული წესით შესრულდება.

მოქმედება	მათემატიკური ჩანაწერი	ნიმუში $f(x) = x + 5$ და $g(x) = 3x$
შეკრება	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$(x + 5) + 3x = 4x + 5$
გამოკლება	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$(x + 5) - 3x = -2x + 5$
გამრავლება	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$(x + 5) \cdot 3x = 3x^2 + 15x$
გაყოფა	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{x + 5}{3x}$

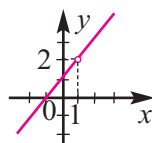
1) ორი ლუწი ფუნქციის ჯამი ლუწია, ორი კენტი ფუნქციის ჯამი კენტი ფუნქციაა.
2) ორი ლუწი ფუნქციისა და ორი კენტი ფუნქციის ნამრავლი (განაყოფი) ლუწი ფუნქციაა. ლუწი ფუნქციისა და კენტი ფუნქციის ნამრავლი (განაყოფი) კენტი ფუნქციაა.

ნიმუში 1. იპოვეთ $(f + g)(2)$, თუ $f(x) = x^2 + 1$ და $g(x) = x + 2$.

ამოხსნა: $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, $g(2) = 2 + 2 = 4$, $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 5 + 4 = 9$

ნიმუში 2. იპოვეთ $(\frac{f}{g})(x)$, თუ $f(x) = x^2 - 1$ და $g(x) = x - 1$.

ამოხსნა: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$



მნიშვნელში მყოფი ფუნქციის $g(x) \neq 0$ პირობის თანახმად $x \neq 1$ ამ ფუნქციის გრაფიკი $y = x + 1$ წრფიდან $(1; 2)$ წერტილის გადაწვეთ მიიღება.

ნიმუში 3. იპოვეთ ა) $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$,

ბ) $\frac{f}{g}$ ფუნქციების განსაზღვრის არე, როცა $f(x) = 3x^2 - 1$ და $g(x) = \sqrt{2x - 1}$

ამოხსნა: ა) $f(x) = 3x^2 - 1$ ფუნქციის განსაზღვრის არე მთელი ნამდვილი რიცხვთა $(-\infty; +\infty)$ სიმრავლეა. $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $2x - 1 \geq 0$ უტოლობიდან მოიძებნება. $[\frac{1}{2}; +\infty)$

$f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ ფუნქციების განსაზღვრის არეა $(-\infty; +\infty) \cap [\frac{1}{2}; +\infty) = [\frac{1}{2}; +\infty)$

ბ) $\frac{f}{g}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $2x - 1 > 0$ უტოლობის ამონახსნითა სიმრავლე $(\frac{1}{2}; +\infty)$ შუალედი.

მოქმედებები ფუნქციებზე

სასწავლო დაფალებები

1. მოცემული $f(x) = \sqrt{3x-2}$ და $g(x) = -x+1$ ფუნქციებისათვის გამოთვალეთ $(f+g)(1)$, $(f-g)(2)$, $(f \cdot g)(6)$.

2. მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებისათვის დაწერეთ $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ფუნქციების გამოსახულებები და უჩვენეთ განსაზღვრის არე.

ა) $f(x) = x^2 - 2x$ და $g(x) = 2x - 4$

ბ) $f(x) = x^2 + x$ და $g(x) = x + 1$

გ) $f(x) = x^2 + 6x + 9$ და $g(x) = 2x + 6$

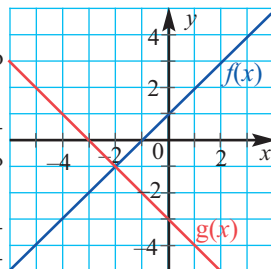
დ) $f(x) = x^2 - 1$ და $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

3. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების გრაფიკების მიხედვით ააგეთ

$h(x) = (f+g)(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. ამოხსენით ამოცანა ორი ხერხით:

1) $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრული მნიშვნელობათა ცხრილიდან $h(x)$ -ის მნიშვნელობათა ცხრილის აგებით.

2) $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრული ფორმულების მიხედვით $f(x) + g(x)$ ფუნქციის ფორმულის განსაზღვრითა და მნიშვნელობათა ცხრილის შედგენით.



4. $f(x) = x$, $x \in [-1; 9]$ და $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; 16]$

ფუნქციებია მოცემული: $h(x) = (f+g)(x)$ იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა ცხრილის შედგენით ააგეთ გრაფიკი.

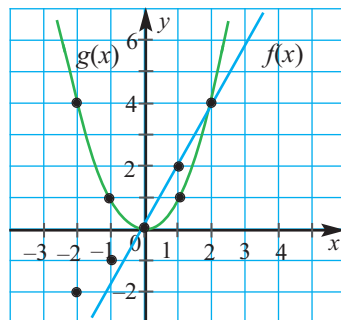
5. მოცემული: $f(x) = 2x$ და $g(x) = x^2$

ა) შეადგინეთ $(f \cdot g)(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი.

ბ) ააგეთ $h(x) = (f \cdot g)(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

გ) განსაზღვრეთ $h(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

x	$(f \cdot g)(x)$
-4	
-2	
-1	
1	
2	
4	



გამოყენებითი დაფალებები

6. ქალბატონი სამაისი მიერ შეკერილი მოხატული სუფრები “ხელმარჯვეობა, თვალის სინათლე” მაღაზიაში იყიდება. მან, ამ სუფრების გამზადებისათვის ერთდროულად 40 მანეთის საჭირო მასალები შეიძინა. თითოეული სუფრის ქსოვილზე 5 მანეთს ხარჯავს და ერთ სუფრას 10 მანეთად ყიდის.

ა) ფორმულით დაწერეთ n რაოდენობის სუფრის გაყიდვიდან მიღებული ფულის შესაბამისი $s(n)$ ფუნქცია და n რაოდენობის სუფრის თვითღირებულების შესაბამისი $m(n)$ ფუნქცია.

ბ) ერთი და იმავე კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ ამ ფუნქციების გრაფიკები. რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციის შესაბამისად წარმოადგინეთ ამ გრაფიკების საერთო წერტილი.

გ) მოგება საქონლის რეალიზაციიდან მიღებულ ფულსა და თვითღირებულებას შორის სხვაობაა. დაწერეთ სუფრების გაყიდვიდან მიღებული მოგების ფუნქციის ფორმულა.

როული ფუნქცია

გამოკვლევა. 1 ლ ბენზინის ფასი 0,95 მანეთია. ფერიდის ავტომობილი ყოველ კილომეტრზე 0.08 ლ ბენზინს ხარჯავს.

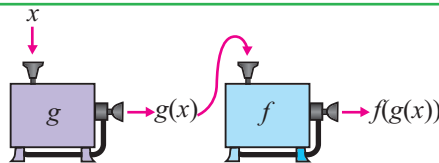
ა) როგორ შეგიძლიათ გამოთვალოთ 50 კმ მანძილზე მოხმარებული ბენზინისათვის ფერიდის მიერ დახარჯული ფული? რამდენ ნაბიჯად შეიძლება ამ გამოთვლის შესრულება?

ბ) დაწერეთ მოხმარებული ბენზინის გავლილ მანძილზე დამოკიდებულების მაჩვენებელი $V(d)$ ფუნქცია.

გ) დაწერეთ ბენზინზე დახარჯული ფულის მის მოცულობაზე დამოკიდებულების $M(V)$ ფუნქცია.

დ) დაწერეთ ფერიდის გავლილ მანძილზე ბენზინის დახარჯული ფულის მაჩვენებელი $M(d)$ ფუნქცია ბ) და გ) პუნქტებში მოცემულ ფუნქციებთან შეერთებით. აქ რომელი ცვლადის მნიშვნელობები შეადგენს არგუმენტის მნიშვნელობებს?

ხშირ შემთხვევაში ფუნქციის არგუმენტის შესაძლო მისაღები მნიშვნელობები სხვა ფუნქციის მნიშვნელობებით განისაზღვრება. დავუშვათ, რომ f და g ფუნქციებია მოცემული. სქემატურ გამოსახულებებზე განვიხილოთ ორი სიტუაცია.

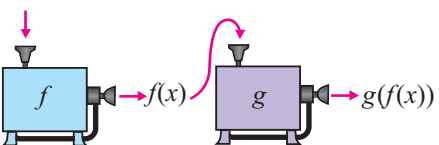


1. x რიცხვები g ფუნქციის განსაზღვრის არეში, $g(x)$ -ები კი f ფუნქციის განსაზღვრის არეში შედის. ამ შემთხვევაში თითოეულ $x \in D(g)$ რიცხვს $f(g(x))$ რიცხვი შეუპირისპირდება.

ფუნქციას f და g ფუნქციების რთული ფუნქცია

(კომპოზიცია) ეწოდება და $(f \circ g)(x)$ სახით იწერება

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

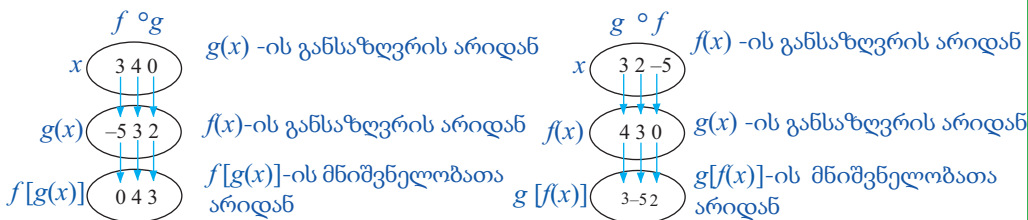


2. x რიცხვები შედიან f ფუნქციის განსაზღვრის

არეში, $f(x)$ -ები კი g ფუნქციის განსაზღვრის არეში. ამ შემთხვევაში f და g ფუნქციების

კომპოზიცია $(g \circ f)(x)$ სახის იწერება: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

მიაქციეთ ყურადღება! $(f \circ g)(x)$ და $(g \circ f)(x)$ ჩანაწერები, (ამასთან $f(g(x))$ და $g(f(x))$ ჩანაწერები) ორ განსხვავებულ რთულ ფუნქციას გამოსახავენ. $f(g(x))$ კომპოზიცია, როცა $E(g) \subset D(f)$, ხოლო $g(f(x))$ კომპოზიცია კი როცა, $E(f) \subset D(g)$ მაშინ შეიძლება აიგოს.



$$f \circ g = \{(3, 0); (4, 4); (0, 3)\}$$

$$g \circ f = \{(3, 3); (2, -5); (-5, 2)\}$$

როგორც სქემატური გამოსახვიდანაც ჩანს $f \circ g$ კომპოზიცია $f(x)$ ფუნქციაში x არგუმენტის ნაცვლად $g(x)$ -ის ჩაწერით მიიღება. ანალოგიური წესით $g \circ f$ კომპოზიცია $g(x)$ ფუნქციაში x არგუმენტის ნაცვლად $f(x)$ -ის ჩაწერით მიიღება.

ნიმუში 1. თუ $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$ მაშინ დაწერეთ ა) $(f \circ g)(x)$ და $(g \circ f)(x)$ კომპოზიციების ფორმულები; ბ) $x = 3$ მნიშვნელობისათვის გამოთვალეთ $(f \circ g)(x)$ და $(g \circ f)(x)$ კომპოზიციების მნიშვნელობები.

როტული ფუნქცია

ამოხსნა: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x - 3 + 2 = x^2 - 2x - 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) - 3 = x^2 + 2x - 3$

მაშასადამე $f(g(x)) = x^2 - 2x - 1$ და $g(f(x)) = x^2 + 2x - 3$

$(f \circ g)(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$

$(g \circ f)(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 12$

ნიმუში 2. თუ $h(x) = f(g(x))$, მონაცემების მიხედვით $f(x)$ ფუნქცია დაწერეთ ფორმულით.

ა) $h(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) + 1$; $g(x) = x - 2$

ბ) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$; $g(x) = x^3 + 1$

ამოხსნა:

ა) $f(g(x)) = (g(x))^2 + g(x) + 1$; $f(x) = x^2 + x + 1$

ბ) $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$; $f(x) = \sqrt{x}$

სასწავლო დაგეგმვები

1. $(f \circ g)(x)$ და $(g \circ f)(x)$ კომპოზიციებისათვის განსაზღვრეთ არგუმენტისა და ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობათა წყვილები (თუ არსებობს).

$f = \{(2; 8), (4; 0), (6; 3), (5; -1)\}$

$g = \{(8; 4), (0; 6), (3; 5), (-1; 2)\}$

$f = \{(4; 5), (1; 3), (-2; 12), (2; 7)\}$

$g = \{(3; 4), (5; 2), (7; -2), (14; 1)\}$

2. ჩაიხაზეთ ცხრილი რვეულში და შეავსეთ.

g-ის წერტილები	f-ის წერტილები	f ∘ g-ის წერტილები
(3; 4)		(3; 1)
(2; 1)	(1; 5)	
(1; ■)	(0; -1)	
(■; 1)	(■; 5)	(0; ■)
	(3; ■)	(-1; 2)

3. მოცემულია $f(x) = x^2$ და

$g(x) = \sqrt{x} - 1$ ფუნქციები.

იპოვეთ:

ა) $f(g(4))$;

ბ) $g(g(25))$;

გ) $g(f(3))$;

დ) $g(g(4))$;

ე) $f(f(-3))$.

4. $f(x) = 4x$, $g(x) = 2x^2 - 1$ და $h(x) = x^2 + 1$ ფუნქციების მიხედვით გამოთვალეთ.

ა) $f(g(-1))$

ბ) $h(g(2))$

გ) $g(f(3))$

დ) $f(h(-4))$

ე) $g(g(7))$

ვ) $f(f(-3))$

ზ) $(f \circ (h \circ g))(1)$

თ) $(h \circ (g \circ f))(\frac{1}{2})$

ი) $(f \circ (g \circ h))(2)$

5. $f(x) = 2x + 1$ და $g(x) = x^2 - 3$ ფუნქციების მიხედვით ფორმულით დაწერეთ როტული ფუნქციები.

ა) $f(g(a))$

ბ) $g(f(a))$

გ) $f(g(x))$

დ) $g(f(x))$

ე) $f(f(x))$

ვ) $g(g(x))$

6. მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების მიხედვით განსაზღვრეთ $f(g(x))$ და $g(f(x))$ ფუნქციები.

ა) $f(x) = 1 - x^2$ და $g(x) = 2x + 5$

ბ) $f(x) = 2x$ და $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

გ) $f(x) = \sqrt{x} - 1$ და $g(x) = x^2 + 2$

დ) $f(x) = x^3 + 1$ და $g(x) = \frac{2}{x}$

ე) $f(x) = x^3 - 4$ და $g(x) = \sqrt[3]{x + 4}$

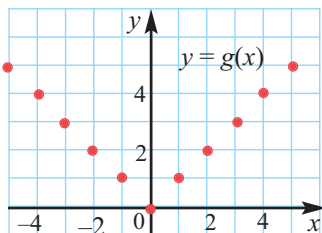
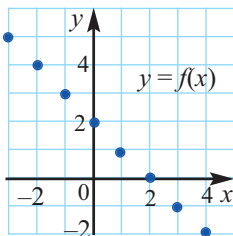
ვ) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ და $g(x) = x + 1$

7. ა) ამოხსენით $f(g(x)) < 0$ უტოლობა, თუ $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

ბ) ამოხსენით $f(g(x)) > 0$ უტოლობა, თუ $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x + 1$.

როტული ფუნქცია

8. მოცემულია $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების გრაფიკები: 1) მნიშვნელობათა ცხრილის აგებით; 2) ფუნქციის ფორმულების დაწერით ააგეთ: ა) $f(g(x))$ ბ) $g(f(x))$ როტული ფუნქციის გრაფიკი. უზენეთი განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.



9. მოცემულია ფუნქციები $f(x) = |x|$ და $g(x) = x - 1$. ააგეთ ამ ფუნქციების
ა) $y = f(g(x))$; ბ) $y = g(f(x))$ კომპოზიციების გრაფიკები. უზენეთი განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

10. ა) $f(x) = 2x - 1$ და $g(x) = x^2$ ფუნქციების მიხედვით განსაზღვრეთ $f(g(x))$ ფუნქციის ფორმულა.

ბ) ერთი და იმავე კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ $f(x)$, $g(x)$ და $f(g(x))$ ფუნქციების გრაფიკები.

გ) წარმოადგინეთ $f(g(x))$ ფუნქციის გრაფიკი, როგორც $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნა.

11. **წარმოება.** ავეჯის მწარმოებელი კომპანიის 2012 წლიდან დაწყებული კვირეული წარმოებული სკამების რაოდენობის $N(t) = 120 + 25t$ ფორმულით მოდელირება შეიძლება. სადაც t არის დრო წლიდან ($t = 0$ მნიშვნელობა შეესაბამება 2012 წელს), N უზენეს სკამების რაოდენობას. სამუშაო ძალის მოცულობა ამ შემთხვევაში განსაზღვრული იყო, როგორც $W(N) = 3\sqrt{N}$.

ა) დაწერეთ სამუშაო ძალაზე მოთხოვნილების დროზე დამოკიდებულების ფუნქცია.

ბ) ამ ფუნქციის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არე წარმოადგინეთ რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციის შესაბამისად.

12. თუ $h(x) = f(g(x))$, მონაცემების მიხედვით დაწერეთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ა) $h(x) = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 1$, $g(x) = x + 1$

ბ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$, $g(x) = x + 2$

გ) $h(x) = \sqrt{2x + 3}$, $g(x) = x + 1$

დ) $h(x) = x + \sqrt{x - 1}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$

13. ა) თუ $f(x - 1) = x + 3$, იპოვეთ $f(1)$, $f(4)$, $f(-1)$, $f(0)$ მნიშვნელობები.

დაწერეთ $f(x)$ ფუნქციის გამოსახულება.

ბ) თუ $f(x + 1) = 2x + 3$, იპოვეთ $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(0)$ მნიშვნელობები.

დაწერეთ $f(x)$ ფუნქციის გამოსახულება.

14. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

ა) იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე. შეადგინეთ მნიშვნელობათა ცხრილი და ააგეთ გრაფიკი.

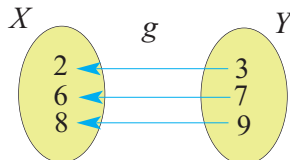
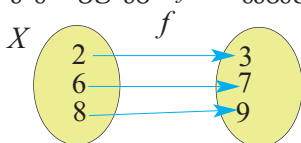
ბ) დაწერეთ $f(2x)$ ფუნქციის გამოსახულება, იპოვეთ განსაზღვრის არე.

15. $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[-1; 3]$. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე. ა) $f(2x)$; ბ) $f(\frac{1}{2}x)$; გ) $f(-x)$; დ) $f(x - 1)$

შექცეული ფუნქცია

გამოკვლევა: 1) დაწერეთ იმ კვადრატის ფართობის ფორმულა, რომლის გვერდის სიგრძე a -ს ტოლია: $S = a^2$; 2) მოცემული ფართობის მიხედვით იპოვეთ კვადრატის გვერდის სიგრძე; 3) მიწის ზედაპირიდან v_0 სიწყის სიჩქარით ასროლილი სხეულის მიწიდან დაშორება მოიძებნება $h = v_0 t - \frac{g t^2}{2}$ ფორმულით. h -ის მოცემული მნიშვნელობის მიხედვით t -ს ერთმნიშვნელოვნად პოვნა შეიძლება?

ნამუშო 1: სურათზე X სიმრავლესა და Y სიმრავლეს შორის f შესაძლებლობა ისრებითაა მოცემული. თუ ისრების მიმართულებას შევცვლით, სხვა შესაბამისობა - Y სიმრავლესა და X სიმრავლეს შორის g შესაბამისობას მივიღებთ. g შესაბამისობა f -ის შექცეული შესაბამისობაა. მოცემული f ფუნქციისათვის თუ შექცეული შესაბამისობა იქნება ფუნქცია f -ის შექცეული ფუნქცია ეწოდება.

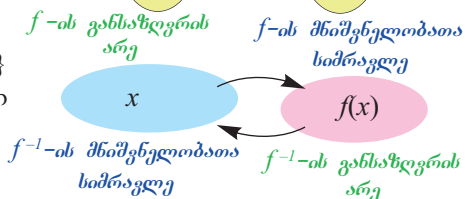


ნამუშო 2: $f(x) = x + 4$ ფუნქციით

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ სიმრავლიდან $B = \{5, 6, 7, 8\}$

სიმრავლის მიღება ქვემოთ მოცემულივით შეიძლება გამოისახოს:

$f(x) = x + 4: \{(1; 5), (2; 6), (3; 7), (4; 8)\}$.

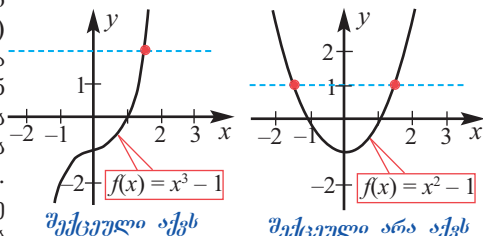


ამ ფუნქციის შებრუნებული და f^{-1} -ით აღნიშნული ფუნქცია კი B სიმრავლიდან A სიმრავლის ელემენტების მიღებას გამოსახავს და იგი $f^{-1}(x) = x - 4: \{(5; 1), (6; 2), (7; 3), (8; 4)\}$ სახით შეიძლება აღინიშნოს $f(x)$ და $f^{-1}(x)$ ურთიერთშექცეული ფუნქციებია.

როგორც სქემატური გამოსახვიდან და კოორდინატა წყვილებიდან ჩანს. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე შექცეული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე კი განსაზღვრის არეა და პირიქით. ანუ $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$. აქედან მიიღება, რომ $f(f^{-1}(x)) = x$ და $f^{-1}(f(x)) = x$ ნიმუშის მონაცემების თანახმად: $f(f^{-1}(x)) = f(x - 4) = (x - 4) + 4 = x$
 $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + 4) = (x + 4) - 4 = x$

ნებისმიერი ფუნქციის შებრუნებული ფუნქციის არსებობა ყოველთვის შესაძლებელია? მაგალითად, $y = 2x + 5$ დამოკიდებულებიდან x -ის y -ის საშუალებით ცალსახად გამოსახვა შესაძლებელია და ამ შემთხვევაში შებრუნებული ფუნქცია არსებობს: $x = \frac{y - 5}{2}$

აქ y -ის თითოეულ მნიშვნელობას x -ის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა შეესაბამება $y = x^2$ ფუნქციაში კი y -ის ერთ მნიშვნელობას, მაგალითად, $y = 9$ მნიშვნელობას რადგან არგუმენტის $x = 3$ და $x = -3$ სახის ორი მნიშვნელობა შეესაბამება, ამიტომ $(-\infty; +\infty)$ შუალედში ამ ფუნქციას შექცეული ფუნქცია არა აქვს. ფუნქცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ შეიძლება იყოს შექცეული, როცა მის თითოეულ მნიშვნელობას, არგუმენტის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისათვის იღებს. თუ ნებისმიერი ჰორიზონტალური წრფე ფუნქციის გრაფიკზე გადაკვეთს არაუმეტეს ერთი წერტილისა, მაშინ ამ ფუნქციას შექცეული ფუნქცია გააჩნია.

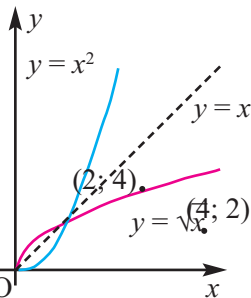


შექცეული ფუნქცია

$y = x^2$ ფუნქციას მთელ რიცხვით ღერძზე შექცეული ფუნქცია არა აქვს. თუმცა ზრდისა და კლების შუალედებში ამ ფუნქციებს შექცეული ფუნქცია აქვთ.

ნიმუში 4. განსაზღვრეთ $y = x^2, x \geq 0$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და ააგეთ გრაფიკები ერთი და იგივე კოორდინატთა სიბრტყეზე. დაწერეთ ამ გრაფიკებზე მდებარე რამდენიმე წერტილის კოორდინატები.

ამოხსნა: მოცემულია ფუნქცია: $y = x^2, x \geq 0$. შექცეული ფუნქცია: $x = y^2, y = \sqrt{x}$. $(2, 4)$ წერტილი $y = x^2$ ფუნქციის, $(4; 2)$ წერტილი მისი შექცეული $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს. შექცეული ფუნქციის შესახებ მართებულია შემდეგი თეორემა: თუ X განსაზღვრის არისა და Y მნიშვნელობათა სიმრავლის შუალედების მქონე ფუნქცია ზრდადია (კლებადაა), მაშინ მას შექცეული ფუნქცია გააჩნია და Y შუალედში განსაზღვრული f^{-1} შექცეული ფუნქცია ზრდადია (კლებადაა).



სასწავლო დაგეგმვები

1. ფუნქცია წყვილთა სიმრავლითაა მოცემული: $\{(8; 2), (1; 1), (\frac{1}{8}; \frac{1}{2}), (-8; -2)\}$;

მოცემული შესაბამისობა და მისი შექცეული შესაბამისობა უზენეთ ღერძების დახმარებით.

2. ცხრილში მოცემული ფუნქციის მიხედვით ააგეთ შექცეული ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობათა ცხრილი.

x	1	2	3	4	5
y	-1	-2	-3	-4	-5

3. $f(x)$ და $g(x)$ ურთიერთშექცეული ფუნქციებია. როცა $x = 10$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა 85 იქნება. როგორ შეიძლება მივაკუთვნოთ ეს მნიშვნელობები $g(x)$ ფუნქციას?
4. f ფუნქცია წყვილების დახმარებითაა მოცემული. თანაც ცნობილია, რომ წყვილების მეორე ელემენტები ერთი და იგივეა (მაგალითად, $(6; 5)$ და $(7; 5)$ სახით) იმისათვის, რომ გავიგოთ შექცევადია თუ არა ფუნქცია ეს საკმარისია?
5. თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია და $f(1) = 7$; $f(-3) = 9$, $f(6) = 2$, იპოვეთ შექცეული ფუნქციის $f^{-1}(9)$; $f^{-1}(7)$ და $f^{-1}(2)$ მნიშვნელობები.
6. დაწერეთ მოცემული ფუნქციების შექცეული ფუნქციები. მოცემული ფუნქცია და მისი შექცეული ფუნქცია ზრდადია თუ კლებადაა?

ა) $y = 4x$

ბ) $y = 2x - 8$

გ) $y = 3x - 14$

დ) $y = -2x + 5$

ე) $y = 3x - \frac{3}{5}$

ვ) $y = \frac{12x}{3} + 6$

ზ) $y = -\frac{2}{3}x$

თ) $y = -\frac{8}{8}x + \frac{3}{8}$

ი) $y = \frac{3}{4}x + 6$

7. ერთი და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეში ააგეთ მოცემული თითოეული ფუნქციისა და მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკები.

ა) $f(x) = 4x$

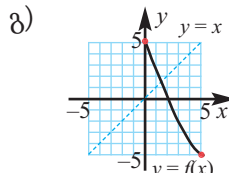
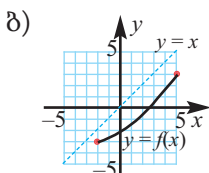
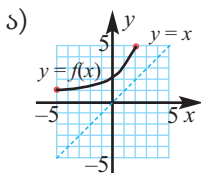
ბ) $f(x) = 2x - 3$

გ) $f(x) = x^2, x \geq 0$

დ) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$,

შექცეული ფუნქცია

8. ფუნქციების გრაფიკების მიხედვით ააგეთ შექცეული ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.



9. უჩვენეთ, რომ მოცემულ ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია. იპოვეთ შექცეული ფუნქცია, უჩვენეთ მისი განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე, ააგეთ გრაფიკი.

ა) $f(x) = x^3$

ბ) $f(x) = x^4, x \geq 0$

10. ააგეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. თითოეული ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ აქვს თუ არა მას შექცეული ფუნქცია.

ა) $f(x) = -2x + 3$

ბ) $f(x) = x + 3$

გ) $f(x) = x^2 + 1$

დ) $f(x) = -3x^2$

ვ) $f(x) = x^3 + 3$

ზ) $f(x) = 2x^3$

თ) $f(x) = |x| + 2$

ი) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$

კ) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

11. შეამოწმეთ არის თუ არა მოცემული ფუნქციები შექცეული ფუნქციები.

ა) $f(x) = x + 7, g(x) = x - 7$

ბ) $f(x) = 3x - 1, g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

გ) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1, g(x) = 2x - 2$

დ) $f(x) = -2x + 4, g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

ე) $f(x) = \frac{2}{x} - 3, g(x) = \frac{2}{x+3}$

ვ) $f(x) = \frac{1}{x-3}, g(x) = \frac{1+3x}{x}$

ზ) $f(x) = 8x^3, g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$

თ) $f(x) = 256x^4, x \geq 0; g(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{4}$

12. მოცემულ თითოეულ მაჩვენებლიან ფუნქციას დაუწერეთ შექცეული ფუნქციის ფორმულა.

ა) $f(x) = x^7$

ბ) $f(x) = -x^6, x \geq 0$

გ) $f(x) = \frac{1}{4}x^4, x \leq 0$

დ) $f(x) = \frac{1}{32}x^5$

ვ) $f(x) = -8x^3$

ზ) $f(x) = \frac{4}{9}x^2, x \geq 0$

13. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ფორმულა უჩვენებს ტემპერატურის ფარენჰეიტისა და ცელსიუსის საზომებს შორის დამოკიდებულებას. ამ დამოკიდებულების მიხედვით დაწერეთ შექცეული დამოკიდებულების, ტემპერატურის ფარენჰეიტის საზომის ცელსიუსის საზომზე დამოკიდებულების მაჩვენებელი ფორმულა. იპოვეთ ცელსიუსით $15^\circ, 20^\circ, 0^\circ$ ტემპერატურის ზომა ფარენჰეიტით.

14. ჰეკი თევზის სახეობაა. ამ თევზების მასასა (კგ) და სიგრძეს (სმ) შორის ქვემოთ მოცემული დამოკიდებულებაა. $m = (9.37 \times 10^{-6})l^3$ ასეთი დამოკიდებულების მიხედვით დაწერეთ შექცეული ფუნქცია. დაახლოებით რამდენი სანტიმეტრი იქნება თევზის სიგრძე, რომლის მასა 0,875 კგ-ია?

განმარტოვადელი დავალებები

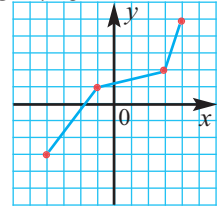
1. $f(x) = \sqrt{x}$ ძირითადი ფუნქციის მიხედვით განსაზღვრეთ $g(x) = -\sqrt{x}$, $k(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = \sqrt{x} + 2$ ფუნქციების გარდაქმნები. როგორ იცვლება ამ გარდაქმნის დროს ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე?

2. ა) $f(x) = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური მიმართულებით რამდენი ერთეულით პარალელური გადატანისას გაივლის მიღებული გრაფიკი (5; 16) წერტილზე?

ბ) $f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის y ღერძის გასწვრივ რამდენი ერთეულით პარალელური გადატანისას გაივლის მიღებული გრაფიკი (4; -1) წერტილზე?

3. ა) დაწერეთ $f(x) = x^3 - 1$ ფუნქციის $g(x)$ შექცეული ფუნქცია.

ბ) ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით დახაზეთ მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკი.



4. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ა) $f(x) = \sqrt{4x - 2}$ ბ) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{4 - x}}$ გ) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 2x - 3}$

დ) $f(x) = \sqrt{12 - 3x}$ ე) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$ ვ) $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$

5. იპოვეთ ფუნქციის ნულები.

ა) $f(x) = 4x + 6$ ბ) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ გ) $f(x) = 3 - \sqrt{5 + x^2}$

დ) $f(x) = x^2 - x - 6$ ე) $f(x) = x^4 - 1$ ვ) $f(x) = \sqrt{x - 1} - 2$

6. 1) გამოიკვლიეთ ფუნქციის ლუწ-კენტობა.

ა) $f(x) = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$ ბ) $f(x) = (x - 4)^2 - (x + 4)^2$

2) გამოიკვლიეთ ფუნქციის ლუწ-კენტობა $y = x^2 + (m - 1)x + 3$:

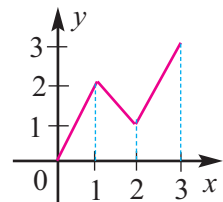
ა) როცა $m = 1$; ბ) როცა $m = 0$.

7. ცნობილია, რომ $f(x) = x \cdot f(x - 1) + 2$ იპოვეთ $f(2)$.

8. მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის ერთი ნაწილი, რომლის განსაზღვრის არეა $[-3; 3]$. გრაფიკის მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.

ა) დაასრულეთ გრაფიკი, თუ ცნობილია, რომ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა. უჩვენეთ ფუნქციის ზრდისა და კლების შუალედები. დაწერეთ ფუნქციის ექსტრემუმები.

ბ) დაასრულეთ გრაფიკი, თუ ცნობილია, რომ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა. უჩვენეთ ფუნქციის ზრდისა და კლების შუალედები. დაწერეთ ფუნქციის ექსტრემუმები.



განმაზოგადებელი დაგალებები

9. ააგეთ ნაწილ-ნაწილ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები.

$$ა) f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{როცა } x \geq 1 \\ -x + 3, & \text{როცა } x < 1 \end{cases}$$

$$ბ) f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

10. არგუმენტის რა მნიშვნელობისათვის არის:

$$ა) f(x) = \sqrt{2x + 6} \quad \text{ფუნქციის მნიშვნელობა 3-ის ტოლი?}$$

$$ბ) f(x) = \frac{3x}{x^2 - 7} \quad \text{ფუნქციის მნიშვნელობა } \frac{1}{2} \text{-ის ტოლი?}$$

11. მოცემულია $f: \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$ და $g(x) = 2x + 1$.

გამოთვალეთ რთული ფუნქციის მნიშვნელობა ცვლადის მოცემული მნიშვნელობისათვის.

$$ა) (g \circ f)(0) \quad ბ) (g \circ f)(1) \quad გ) (g \circ f)(2) \quad დ) (g \circ f)(3)$$

$$ე) (f \circ g)(-0,5) \quad ვ) (f \circ g)(0) \quad ზ) (f \circ g)(1) \quad თ) (f \circ g)(0,5)$$

12. 1) უჩვენეთ, რომ მოცემულ ფუნქციებს $(-\infty; +\infty)$ შუალედში შექცეული ფუნქცია არ გააჩნიათ.

$$ა) f(x) = x^2 - 6x$$

$$ბ) f(x) = |x + 10|$$

2) მოცემული ფუნქციები ბრუნვითი ფუნქციებია. დაწერეთ ამ ფუნქციების შესაბამისი შექცეული ფუნქციები.

$$ა) f(x) = \frac{1}{2x - 1}$$

$$ბ) f(x) = \frac{1 - x}{x - 2}$$

13. ა) მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$.

იპოვეთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე

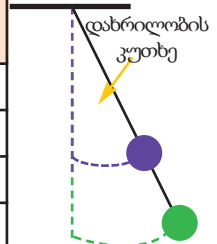
ბ) ამოხსენით უტოლობა: $f(x - 4) < 0$.

14. ქანქარას ერთი სრული ბრუნისათვის დათმობილი დრო (რხევის პერიოდი) თვით ქანქარას ღერძის სიგრძეზე არის დამოკიდებული. რაც უფრო გრძელია ქანქარას ღერძი, საჭირო დრო მით უფრო იზრდება.

ა) მოცემული ინფორმაციის მიხედვით ააგეთ გრაფიკი.

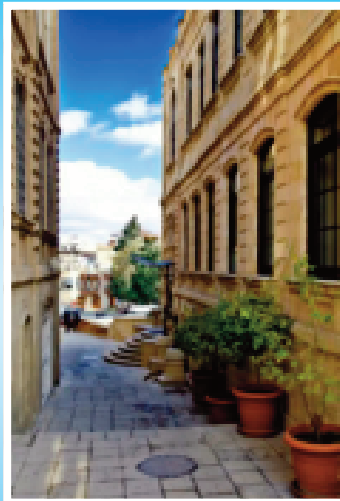
ბ) განსაზღვრეთ რომელი ფუნქციების კლასს მიეკუთვნება იგი.

ქანქარას ღერძის სიგრძე (მ)	დრო (წმ)
2	2,8
4	4
6	4,9
8	5,7
10	6,3



გ) გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ ერთი სრული ბრუნისათვის საჭირო დრო, თუ ქანქარას ღერძის სიგრძეა 5 მ, 12 მ.

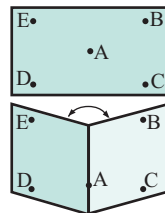
წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში
წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა
წრფისა და სიბრტყის მართობულობა
საში მართობის თეორემა
ორ სიბრტყეს შორის კუთხე.
ორწახნაგა კუთხე
სიბრტყეთა მართობულობა
სიბრტყეთა პარალელურობა
გეგმილები და ამოცანების ამოხსნა



წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში

პრაქტიკული მეცადინეობა. ქაღალდის ფურცელზე სურათზე მოცემულის მსგავსად აღნიშნეთ A, B, C, D და E წერტილები. ქაღალდი A წერტილზე გამავალი წრფის გასწვრივ სურათზე ნაჩვენებებით გადაკეცეთ, შემდეგ ქაღალდი გარკვეულად გაშალეთ. ორად დაკეცილი ქაღალდის თითოეული ნაწილი ერთი სიბრტყის მოდელია.

- 1) რომელი წერტილი ეკუთვნის ამ სიბრტყეებიდან ორივეს?
- 2) ამ სიბრტყეებიდან თითოეულისათვის უჩვენეთ წერტილები, რომლებიც მას ეკუთვნის და წერტილები, რომლებიც არ ეკუთვნის.



გეომეტრიის პლანიმეტრიის ნაწილში შეისწავლება ფიგურები, რომლის ყველა წერტილი ერთ სიბრტყეში მდებარეობს. ასეთ ფიგურებს სიბრტყითი ფიგურები ეწოდება. თუმცა ჩვენ რეალობაში გვხვდება სამგანზომილებიანი საგნები, ობიექტები. მათ სამი განზომილება სიგრძე, სიგანე და სიმაღლე (სიღრმე) გააჩნიათ. ასეთ ფიგურებს სივრცითი ფიგურები ეწოდება. გეომეტრიის იმ ნაწილს, რომელიც სივრცით ფიგურებს შეისწავლის **სტერეომეტრია** ეწოდება. წერტილი, წრფე და სიბრტყე მიღებულია ჩაითვალოს ასევე სივრცით ფიგურებად.

სიბრტყე უსასრულოა, პირობითად, როგორც წესი, პარალელოგრამის ფორმით გამოსახება, ერთი პატარა ასოთი ან (ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილის მაჩვენებელი)



სამი წერტილით აღინიშნება მაგალითად, α სიბრტყე ან ABC სიბრტყე.

სივრცის თითოეულ სიბრტყეზე პლანიმეტრიიდან ცნობილი აქსიომები და თეორემები მართებულია. სივრცეში მიღებულია დამატებითი ქვემოთ მოცემული აქსიომები.

აქსიომა 1. ნებისმიერი სიბრტყისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ამ სიბრტყეს ეკუთვნის და წერტილები, რომლებიც ამ სიბრტყეს არ ეკუთვნის.

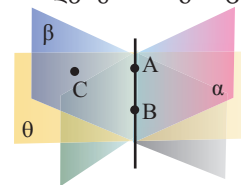
A წერტილი α სიბრტყეს ეკუთვნის. $A \in \alpha$



N წერტილი α სიბრტყეს არ ეკუთვნის. $N \notin \alpha$

აქსიომა 2. თუ ორ სხვადასხვა სიბრტყეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ისინი ამ წერტილზე გამავალ წრფეზე იკვეთებიან.

წრფე ორი წერტილით განისაზღვრება, ანუ ორ წერტილზე ერთი და მხოლოდ ერთი წრფის გავლება შესაძლებელი (ერთ წერტილზე - რამდენის?). რამდენი წერტილით შეიძლება სიბრტყის დადგენა? ორი წერტილით სიბრტყე არ განისაზღვრება. როგორც სურათიდან ჩანს A და B წერტილებზე უამრავი სიბრტყის გავლება შეიძლება. თუმცა მათ შორის ისეთი სიბრტყე არსებობს, რომ C წერტილი მხოლოდ მასზეა. მაშასადამე, სიბრტყე ერთ წრფეზე არამდებარე 3 წერტილით განისაზღვრება. ერთ წრფეზე მდებარე წერტილებს კოლინეარული წერტილები ეწოდება. C წერტილი A და B წერტილების კოლინეარული არ არის.



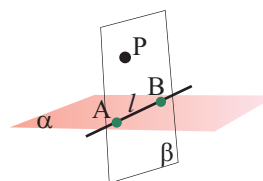
აქსიომა 3. ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე შეიძლება სიბრტყის გაგდება და მასთან მხოლოდ ერთის.

ვუჩვენოთ რომ, თუ წრფის ორი წერტილი სიბრტყეზე ძევს, მაშინ ამ წრფის ყველა წერტილი სიბრტყეზე ძევს.

მართლაც, l წრფის A და B ორი წერტილი α სიბრტყეზეა.

ავიღოთ l წრფე და α სიბრტყეზე არამდებარე P წერტილი.

P, A და B წერტილებზე გავავლოთ β სიბრტყე.

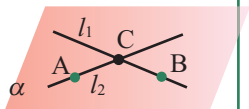


წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში

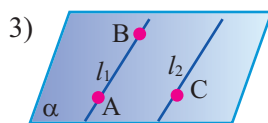
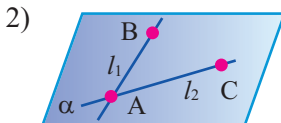
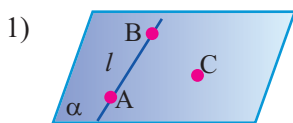
ვინაიდან α და β სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე A და B წერტილებზე გაივლის ამიტომ l წრფეს ემთხვევა. ვინაიდან გადაკვეთის წრფის თითოეული წერტილი α სიბრტყის წერტილია, l წრფის თითოეული წერტილიც α სიბრტყეზეა. სტერეომეტრიის აქსიომებიდან ქვემოთ მოცემული შედეგები მიიღება.

1. წრფეზე და იმ წერტილზე, რომელიც ამ წრფეზე არ ძევს, შეიძლება სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

2. ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეზე შეიძლება სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

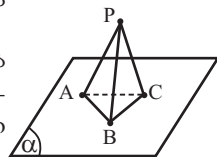


3. ორ პარალელურ წრფეზე შეიძლება სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის. ამრიგად, სიბრტყე შეიძლება განისაზღვროს: 1) წრფითა და მასზე არამდებარე ერთი წერტილით; 2) ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფით; 3) ორი პარალელური წრფით.



ნიმუში: ერთ წრფეზე არამდებარე A, B, C წერტილები და მათთან ერთ სიბრტყეზე არამდებარე P წერტილია მოცემული. ჩამოთვალეთ ყველა სიბრტყე, რომელიც ამ წერტილებიდან სამ წერტილზე გადის.

ამოხსნა: A, B და C წერტილებზე გავავლოთ α სიბრტყე და ავღნიშნოთ ამ სიბრტყეზე არამდებარე P წერტილი. ამ წერტილებზე შეიძლება გავავლოთ ABP, BPC, ABC და APC - ოთხი სიბრტყე.

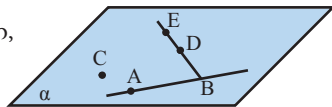


ერთსა და იმავე სიბრტყეში მდებარე წერტილებს კომპლანარული წერტილები ეწოდება. ნიმუშში მოცემული A, B, C და P წერტილები კომპლანარული არ არის.

სასწავლო დავალებები

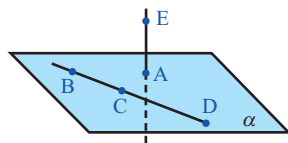
1. თუ α სიბრტყის სამი ასოთი გამოსახვას მოისურვებთ, რომელ სამ ასოს ვერ აირჩევთ?

ა) ABE ბ) ACE გ) BDE დ) DAC

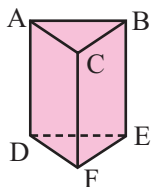
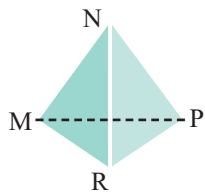


2. B, C და D წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ (კოლინეარულებია). A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ (კომპლანარულებია). E წერტილი ამ სიბრტყის გარეთ მდებარეობს. რამდენი სიბრტყე გადის ამ წერტილებზე?

ა) A, B და C; ბ) B, C და D; გ) A, B, C, და D; დ) A, B, C და E



3. დაწერეთ ფიგურის წახანაგების მომცველი სიბრტყეები.



4. სამფეხა მაგიდა ადგილზე ყოველთვის მყარად იდგამება. განმარტეთ მიზეზი.

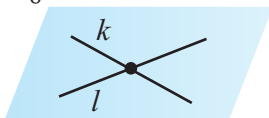
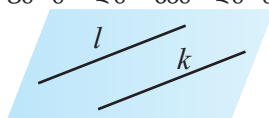
5. ა) რამდენი სიბრტყის გავლება შეიძლება წყვილ-წყვილად გადამკვეთ სამ წრფეზე?

ბ) რამდენი სიბრტყის გავლება შეიძლება ხუთ სხვადასხვა წერტილზე? განიხილეთ ყველა შემთხვევა.

წერტილი, წრე და სიბრტყე სივრცეში

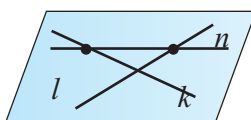
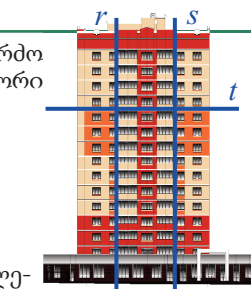
წრფეთა ურთიერთმდებარეობა სივრცეში

სივრცეში ორი წრფე შეიძლება იყოს პარალელური (კერძო შემთხვევაში შეიძლება ემთხვეოდეს ერთმანეთს). სივრცეში ორი წრფე შეიძლება კვეთდეს ერთმანეთს.

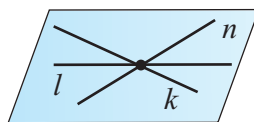


ცნობილია, რომ თუ l და k წრფეები იკვეთებიან ან პარალელურები არიან, მაშინ ისინი ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ.

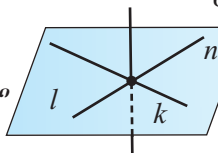
თუ სივრცეში ორი ურთიერთგადაკვეთი წრფე მესამე წრფეს სხვადასხვა წერტილებში გადაკვეთს, მაშინ ეს წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ. თუ სივრცეში ორი წრფე მესამე წრფეს ერთ წერტილში კვეთენ, ეს წრფეები შეიძლება ერთ სიბრტყეში მდებარეობდნენ ან არ მდებარეობდნენ.



წრფეები ერთ სიბრტყეზე მდებარეობენ.



წრფეები ერთ სიბრტყეზე ძეგს. ასეთ წრფეებს კომპლანური წრფეები ეწოდება.



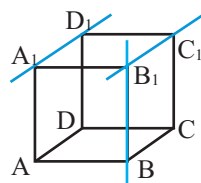
წრფეები სხვადასხვა სიბრტყეებში ძეგს. ეს წრფეები არ არიან კომპლანური.

სივრცეში არაპარალელური ორი წრფე შეიძლება არ კვეთდეს ერთმანეთს. წრფეებს, რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთს და პარალელური არ არის, აცდენილი წრფეები ეწოდება.

a და b წრფეების აცდენილობა $a \nparallel b$ სახით აღინიშნება. ორი აცდენილი წრფიდან ორივეზე ერთი სიბრტყის გავლება შეუძლებელია. ორ აცდენილ წრფეს შორის კუთხე შესაბამისად, მათ პარალელურ ორ მკვეთ წრფეს შორის შექმნილ კუთხეს ეწოდება.

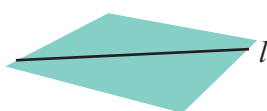
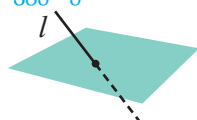


ნიშუში: კუბის მოდელზე $A_1 D_1 \nparallel B B_1$. რადგან $A_1 D_1 \parallel B_1 C_1$ ამიტომ $A_1 D_1$ და $B B_1$ აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე $B_1 C_1$ და $B B_1$ წრფეებს შორის კუთხის ტოლია ანუ 90° -ია.



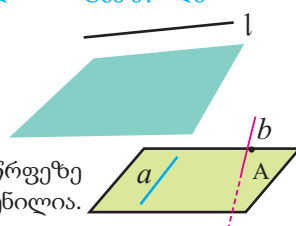
წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა

თუ წრფესა და სიბრტყეს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ეს წრფე და სიბრტყე იკვეთებიან.



თუ წრფის ორი წერტილი სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ ეს წრფე მთლიანად ამ სიბრტყეს ეკუთვნის.

საერთო წერტილის არამქონე წრფესა და სიბრტყეს პარალელური წრფე და სიბრტყე ეწოდება,

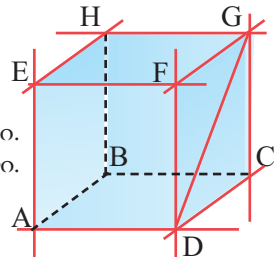


თუ ორი წრფიდან ერთი მეორის მდებარე სიბრტყეს ამ წრფეზე არამდებარე წერტილში გადაკვეთს, მაშინ ეს წრფეები აცდენილია.

წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში

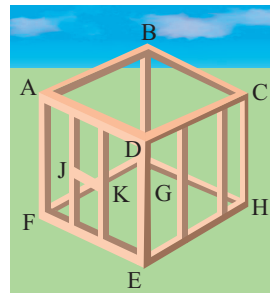
6. კუბის მაგალითზე შეასრულეთ დავალებები მკვეთი, პარალელური და აცდენილი წრფეების შესახებ.

- დაწერეთ AB წრფის პარალელური წრფეები.
- დაწერეთ BC წრფის მკვეთი წრფეები.
- დაწერეთ EF წრფის აცდენილი წრფეები.
- უჩვენეთ B წერტილის კომპლანარული სამი წერტილი.
- უჩვენეთ B წერტილის არაკომპლანარული სამი წერტილი.
- უჩვენეთ ABC სიბრტყის მკვეთი წრფეები.
- უჩვენეთ CDF სიბრტყეში მდებარე წრფეები.
- იპოვეთ კუთხე AB და CG წრფეებს შორის.
- იპოვეთ კუთხე AB და DG წრფეებს შორის.



7. სურათზე მოცემული გამოსახულების მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.

- ჩამოთვალეთ პარალელური წრფეები.
- უჩვენეთ აცდენილი წრფეები.
- უჩვენეთ მონაკვეთი, რომელიც ორ მკვეთ წრფეს კვეთს და მათთან ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.

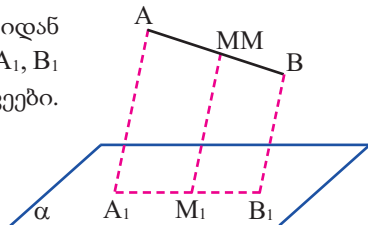


8. მონაცემების მიხედვით დახაზეთ ფიგურა. AC წრფე α სიბრტყეში ძევს. BE წრფე AC წრფის კომპლანარულია. Z წერტილი A და C წერტილების, X წერტილი კი B და E წერტილების კოლინეარულია.

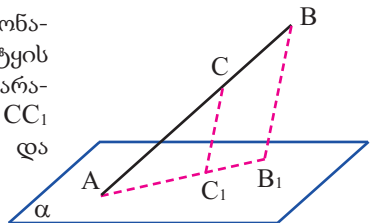
9. ოთხფეხა მაგიდა როგორც წესი მიწაზე მყარად არ იდგმება. განმარტეთ მიზეზი.

10. სიბრტყის არამკვეთი AB მონაკვეთის წვეროებიდან და M წერტილიდან გავლებულია α სიბრტყის A_1, B_1 და M_1 წერტილებში მკვეთი პარალელური წრფეები. იპოვეთ MM_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ:

- $AA_1 = 12$ სმ, $BB_1 = 4$ სმ;
- $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.



11. AB მონაკვეთის A წვერო α სიბრტყეშია. მონაკვეთის B წვეროდან და C წერტილიდან α სიბრტყის შესაბამისად B_1 და C_1 წერტილებში მკვეთი პარალელური წრფეებია გავლებული. იპოვეთ CC_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC : CB = 3 : 2$ და $BB_1 = 10$ სმ.



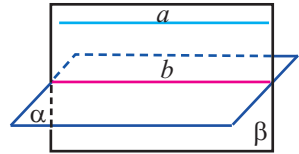
12. მოცემულია ABCD პარალელოგრამი და მისი არამკვეთი α სიბრტყე. პარალელოგრამის წვეროებიდან გავლებული პარალელური წრფეები α სიბრტყეს A_1, B_1, C_1 და D_1 წერტილებში კვეთს. იპოვეთ DD_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ: $AA_1 = 3$ სმ, $BB_1 = 4$ სმ და $CC_1 = 7$ სმ.

13. დაამტკიცეთ, რომ წრფეზე არამდებარე წერტილზე ამ წრფის პარალელური მხოლოდ ერთი წრფის გავლება შეიძლება.

წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა

თეორემა 1. (წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი) თუ სიბრტყეში არამდებარე წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე რაიმე წრფის პარალელურია, მაშინ ის თვით ამ სიბრტყის პარალელურიცაა.

დამტკიცება: α სიბრტყეში არამდებარე a წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე b წრფის პარალელურია. a და b წრფეებზე გავავლოთ β სიბრტყე. α და β სიბრტყეები b წრფეზე გადაიკვეთებიან. თუ a წრფე α სიბრტყეს გადაკვეთს, გადაკვეთის წერტილი b წრფეზე უნდა იყოს. ეს კი შეუძლებელია, რადგან $a \parallel b$. მაშასადამე, $a \parallel \alpha$.

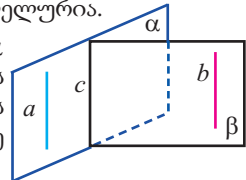


შედეგი. თუ ერთი სიბრტყე მეორე სიბრტყის პარალელურ წრფეზე გადის და მას გადაკვეთს, მაშინ ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე მოცემული წრფის პარალელურია.

შედეგი. ურთიერთგადამკვეთი ორი სიბრტყიდან თითოეულის პარალელური წრფე ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფის პარალელურია.

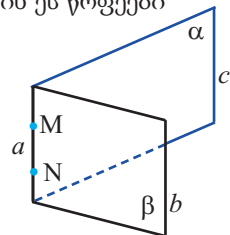
თეორემა 2. თუ ორი პარალელური წრფიდან თითოეულზე გამავალი სიბრტყეები იკვეთებიან, მაშინ მათი გადაკვეთის წრფე ამ წრფეების პარალელურია.

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ $a \parallel b$. a წრფეზე გავავლოთ α სიბრტყე, ხოლო b წრფეზე - β სიბრტყე. ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე ავღნიშნოთ c ასოთი. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშნის თანახმად $a \parallel \beta$. აქედან $a \parallel c$. ასევე რადგან $b \parallel \alpha$, ამიტომ $b \parallel c$.



თეორემა 3. თუ ორი წრფე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ეს წრფეები ურთიერთპარალელურია.

დამტკიცება: როცა წრფეები ერთ სიბრტყეში ძევს, მაშინ პირობა სწორია დავუშვათ, რომ a , b და c წრფეები ერთ სიბრტყეში არ ძევს და $a \parallel c$, $b \parallel c$. a და c წრფეებზე გავავლოთ α სიბრტყე. რადგან $b \parallel c$, ამიტომ $b \parallel \alpha$ იქნება. a წრფეზე ავიღოთ M წერტილი, ამ წერტილზე და b წრფეზე გავავლოთ β სიბრტყე. α და β სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე MN არის b და c წრფეების პარალელური.



M წერტილზე c წრფის პარალელური მხოლოდ ერთი წრფის გავლება შეიძლება, ამიტომაც MN და a წრფეები ემთხვევა, რადგან $MN \parallel b$, ამიტომ $a \parallel b$.

- ა) მოცემული წერტილიდან გაავლეთ მოცემული სიბრტყის პარალელური წრფე. რამდენი ასეთი წრფის გავლება შეიძლება?

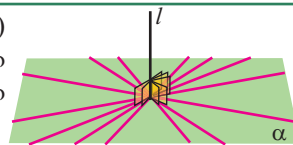
ბ) მოცემული წერტილიდან გაავლეთ მოცემული წრფის პარალელური სიბრტყე. რამდენი ასეთი სიბრტყის გავლება შეიძლება?
- პარალელოგრამის ერთ-ერთი გვერდი α სიბრტყეზეა. რა მდებარეობა უკავია α სიბრტყესთან მიმართებაში მის დანარჩენ გვერდებს?
- ABC სამკუთხედის AB გვერდის პარალელური სიბრტყე, ამ სამკუთხედის AC გვერდს A_1 წერტილში, BC გვერდს B_1 წერტილში გადაკვეთს. იპოვეთ A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ:

ა) $AB = 18$ სმ და $AA_1 : A_1C = 2 : 1$; ბ) $B_1C = 6$ სმ და $AB : BC = 3 : 4$;

გ) $AA_1 = a$, $AB = b$ და $A_1C = c$.

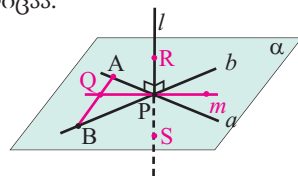
წრფისა და სიბრტყის მართობულობა

განსაზღვრება: თუ სიბრტყის (α) გადამკვეთი წრფე (l) სიბრტყეში მდებარე და გადაკვეთის წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის მართობულია, მაშინ ეს წრფე მოცემული სიბრტყისადმი მართობულია და ეს $l \perp \alpha$ სახით იწერება.



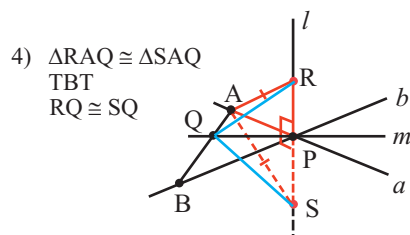
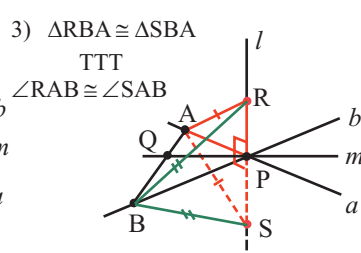
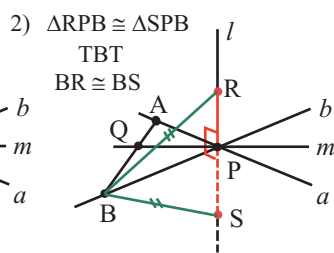
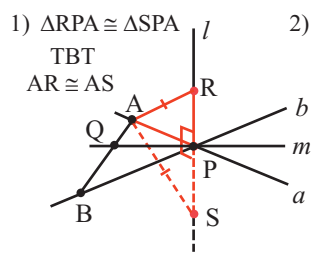
თეორემა 1. (წრფის სიბრტყისადმი მართობულობის ნიშანი). თუ სიბრტყის გადამკვეთი წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე და გადაკვეთის წერტილზე გამავალი ორი წრფის მართობულია, მაშინ იგი თვით ამ სიბრტყის მართობულიცაა.

მოცემულია. a და b ურთიერთგადამკვეთი წრფეები
 α სიბრტყეში ძევს. $l \perp a$, $l \perp b$.

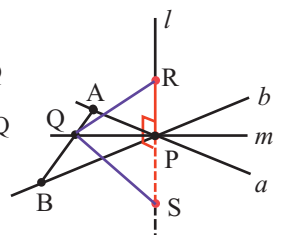


დაამტკიცეთ. $l \perp \alpha$

ვთქვათ, l წრფე α სიბრტყეში მდებარე P წერტილში გადამკვეთი a და b წრფეების მართობულია. გავავლოთ α სიბრტყეში P წერტილში გადამკვეთი ნებისმიერი m წრფე და a , b და m წრფეების შესაბამისად A , B და Q წერტილებში მკვეთი წრფე. გამოვყოთ P წერტილიდან დაწყებული l წრფეზე PR და PS კონგრუენტული მონაკვეთები.



5) $\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$
TTT
 $\angle RPQ \cong \angle SPQ$



$\triangle RQS$ ტოლფერდა სამკუთხედში PQ მედიანა სიმაღლეცაა. აქედან $m \perp l$. განსაზღვრების თანახმად მივიღებთ, რომ $l \perp \alpha$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. წრფეზე მდებარე წერტილზე შეიძლება ამ წრფის მართობული სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

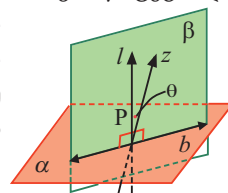
თეორემა 3. სიბრტყის მოცემულ წერტილზე შეიძლება ამ სიბრტყის მართობული წრფის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

დავამტკიცოთ თეორემა 3.

მოცემულია. l წრფე P წერტილში α სიბრტყის მართობულია.

დავამტკიცოთ. l წრფე P წერტილში α სიბრტყის მართობული ერთადერთი წრფეა.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემა საწინააღმდეგოს დაშვებით. დავუშვათ, რომ α სიბრტყეში P წერტილის მართობული l წრფის გარდა, არსებობს სხვა z წრფეც. l და z წრფეები α სიბრტყის b წრფეზე მკვეთ β სიბრტყეში ძვეს. l და z წრფეების გადაკვეთით წარმოიქმნება θ კუთხე. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის განსაზღვრების თანახმად, l წრფე (ასევე z წრფე) α სიბრტყეში არსებული ნებისმიერი წრფის, მათ შორის b წრფის მართობულიცაა.



მაშინ თან l , თანაც z წრფეც α სიბრტყის მართობული უნდა იყოს. თუმცა რადგან $\theta + 90^\circ + 90^\circ > 180^\circ$ ეს შეუძლებელია. მაშასადამე, α სიბრტყეში P წერტილში მართობული მხოლოდ და მხოლოდ ერთი წრფე არსებობს. თეორემა დამტკიცებულია.

სივრცის A წერტილზე გამავალი და P წერტილში α სიბრტყის მართობული წრფის AP მონაკვეთს A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებული მართობი ეწოდება. A წერტილისა და α სიბრტყის დანარჩენი წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთებს დახრილი ეწოდება.

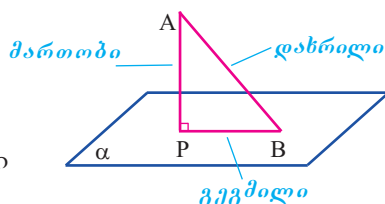
AP მონაკვეთს - სიბრტყის მართობი,

AB მონაკვეთს - დახრილი,

P წერტილს - მართობის ფუძე,

B წერტილს - დახრილის ფუძე,

BP მონაკვეთს - სიბრტყეზე დახრილის გეგმილი (პროექცია) ეწოდება.



თუ სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილიდან გავლებულია მართობი და დახრილი:

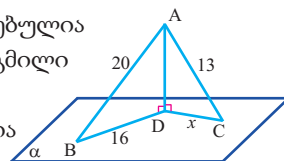
- 1) მართობი დახრილზე ნაკლებია;
- 2) ტოლი გეგმილების მქონე დახრილები ტოლია;
- 3) მეტი გეგმილის მქონე დახრილი მეტია.

ნამუშა: სივრცის ერთი წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია 20 სმ და 13 სმ სიგრძის ორი დახრილი. დიდი დახრილის გეგმილი 16 სმ-ია. იპოვეთ მცირე დახრილის გეგმილი.

ამოხსნა: დავუშვათ, AD მართობია, AB და AC დახრილებია BD და CD კი მათი გეგმილებია. $\triangle ABD$ -დან პითაგორას თეორემის თანახმად:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ (სმ)}$$

$$\triangle ADC\text{-დან პითაგორას თეორემის თანახმად: } DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (სმ)}$$

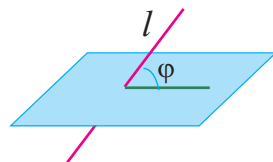


კუთხე წრფესა და სიბრტყის შორის

კუთხეს წრფესა და სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება.

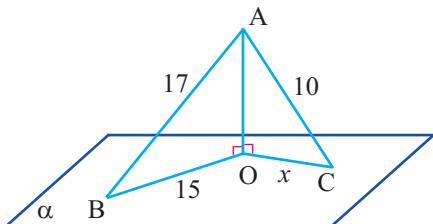
კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის, წრფის მიერ სიბრტყეში მდებარე სხვა წრფეებთან შექმნილი კუთხეებიდან არც ერთზე მეტი არ არის.

როცა წრფე სიბრტყის მართობულია, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის 90° -ის ტოლია.



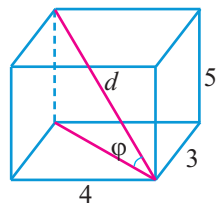
წრფისა და სიბრტყის მართობულობა

1. ხელოსანმა ახალი სატელეფონო ბოძის დაყენებისას აღნიშნა, რომ ვინაიდან ბოძის მიწის ზედაპირზე აღებული ორი მკვეთი წრფის მართობულობაში დარწმუნებულია, იგი ბოძის მართობულობაშიც დარწმუნებულია. დაამტკიცეთ, რომ ხელოსანი მართალია.
2. თუ სამკუთხედის წვეროზე გამავალი წრფე სამკუთხედის ამ წვეროებიდან გამოსული გვერდების მართობულია, მაშინ ის მესამე გვერდის მართობულიც იქნება?
3. სურათის მონაცემებით იპოვეთ x .

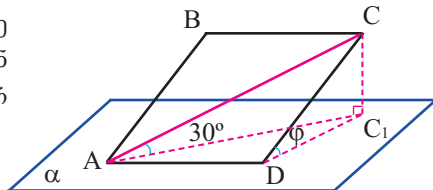


4. სივრცის ერთი წერტილიდან მოცემულ სიბრტყეზე 8 სმ სიგრძის მართობი და 16 სმ სიგრძის დახრილია გავლებული. იპოვეთ:
 - ა) დახრილის გეგმილი;
 - ბ) გეგმილების დახრილზე გეგმილები.

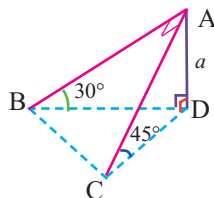
5. 10 სმ სიგრძის მონაკვეთი სიბრტყეს გადაკვეთს. მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან 5 სმ და 3 სმ მანძილზეა. იპოვეთ მონაკვეთის გეგმილი სიბრტყეზე.
6. 8 სმ სიგრძის მონაკვეთი სიბრტყეს კვეთს. მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან 1 სმ და 3 სმ მანძილზეა. იპოვეთ კუთხე მოცემულ მონაკვეთსა და სიბრტყეს შორის.
7. მართკუთხა პარალელებიპედის ფუძის გვერდები 4 სმ და 3 სმ-ია. პარალელებიპედის სიმაღლე 5 სმ-ია იპოვეთ პარალელებიპედის დიაგონალი და კუთხე დიაგონალსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.



8. ABCD კვადრატის AD გვერდი სიბრტყეზე ძევს. AC დიაგონალი სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ CD გვერდის მიერ სიბრტყესთან შექმნილი კუთხე.



9. სიბრტყიდან a მანძილით დაშორებული A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი AB და AC დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ 30° -იან და 45° -იან კუთხეს, ურთიერთშორის კი მართ კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილის ფუძეებს შორის.



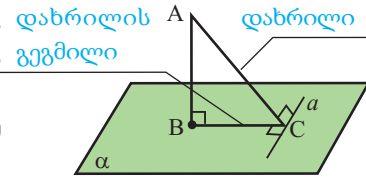
10. ერთი წერტილიდან მოცემული სიბრტყისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი. დახრილებს შორის კუთხე 60° -ია. გეგმილებს შორის კუთხე კი მართი კუთხეა. იპოვეთ კუთხე თითოეულ დახრილს და მის გეგმილებს შორის.
11. წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი. იპოვეთ ამ დახრილების სიგრძე. თუ:
 - ა) დახრილებიდან ერთი მეორეზე 8 სმ-ით მეტია და გეგმილები კი 8 სმ და 20 სმ-ია.
 - ბ) დახრილების სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3 და გეგმილები კი 2 სმ და 7 სმ-ია.

სამი მართობის თეორემა

თეორემა. თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის ფუძეზე გადის და ამ დახრილის გეგმილის მართობულია, მაშინ იგი თვით ამ დახრილის მართობულიც არის.

ანუ თუ α სიბრტყეში C წერტილზე გამავალი a წრფე BC -ს მართობულია, მაშინ AC -ს მართობულიცაა.

მოკლე ჩანაწერი: თუ $a \perp BC$ და $BC \perp BA$, მაშინ $a \perp AC$.



ამ თეორემის შებრუნებული თეორემაც ჭეშმარიტია.

შებრუნებული თეორემა. თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე სიბრტყისადმი გავლებული დახრილის მართობულია, მაშინ ის ამ დახრილის გეგმილის მართობულიც არის. ანუ, თუ α სიბრტყეში C წერტილზე გამავალი a წრფე AC -ს მართობულია, BC -ს მართობულიცაა.

მოკლე ჩანაწერი: თუ $a \perp AC$ და $BC \perp BA$, მაშინ $a \perp BC$.

დავამტკიცოთ თეორემა.

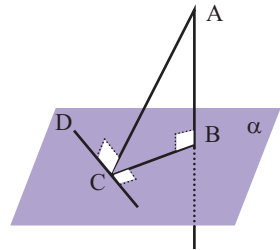
მოცემულია: $AB \perp \alpha$

$AC \in \alpha$ სიბრტყისადმი გავლებული დახრილია.

BC მონაკვეთი AC დახრილის გეგმილია.

$CD \in \alpha$, $CD \perp BC$

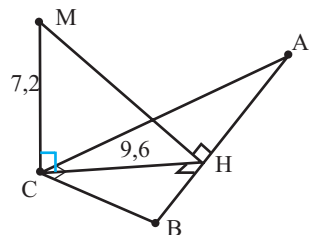
დაამტკიცეთ: $CD \perp AC$



პირობა	საფუძველი
$CD \perp BC$	მოცემულია
$AB \perp CD$	წრფისა და სიბრტყის მართობულობა.
$CD \perp ABC$ სიბრტყის	AB და BC ABC სიბრტყეზე ორი მკვეთი წრფეა და $CD \perp AB$, $CD \perp BC$
$CD \perp AC$	$CD \perp ABC$ სიბრტყის (წრფის სიბრტყისადმი მართობულობა).

შებრუნებული თეორემა დამოუკიდებლად დაამტკიცეთ

ნიმუში 1: მართკუთხა ABC სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი გავლებული CM მართობის სიგრძე 7,2 ერთეული, სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე გავლებული სიმაღლის სიგრძე კი 9,6 ერთეულია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის ჰიპოტენუზამდე.



ამოხსნა: სამი მართობის თეორემის თანახმად, $CH \perp AB$ ხოლო, $MH \perp AB$.

M წერტილიდან ჰიპოტენუზამდე მანძილი MH მონაკვეთის სიგრძის ტოლია. ΔMCH -დან პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ:

$$MH = \sqrt{7,2^2 + 9,6^2} = 12 \text{ ერთეული.}$$

ნიმუში 2: სამკუთხედის გვერდები 10, 17 და 21 ერთეულია. ამ სამკუთხედის უდიდესი კუთხის წვეროდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი 15 ერთეულის სიგრძის მქონე მართობია აღმართული. იპოვეთ მანძილი მართობის წვეროს წერტილიდან დიდ გვერდამდე.

ამოხსნა: თუ $BF \perp AC$ მაშინ, $KF \perp AC$. მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ KF მონაკვეთის სიგრძე.

ჰერონის ფორმულის მიხედვით ვიპოვოთ $\triangle ABC$ -ის ფართობი.

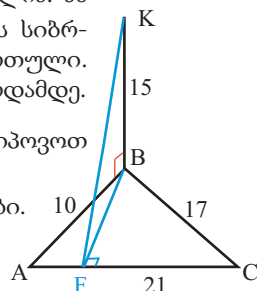
$$p = \frac{(a + b + c)}{2} = \frac{(10 + 17 + 21)}{2} = 24$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot (24-10)(24-17)(24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = \sqrt{3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 4^2} = 84$$

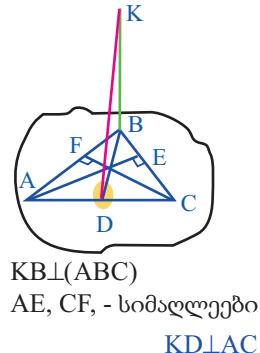
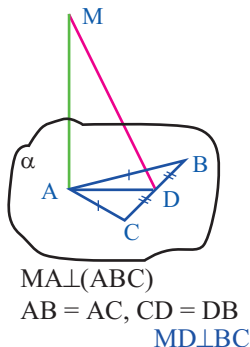
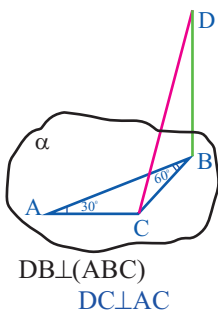
მეორე მხრივ $S = \frac{1}{2} AC \cdot BF$. აქედან $BF = \frac{2 \cdot S}{AC} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$

რადგან KB მონაკვეთი BF -ის მართობულია, $\triangle KBF$ მართკუთხა სამკუთხედი.

$$KF = \sqrt{KB^2 + BF^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$$



1. სურათზე მონაცემების მიხედვით დაამტკიცეთ მოთხოვნილი პირობა



2. 10 სმ, 10 სმ და 12 სმ გვერდებიან სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის სიბრტყისადმი $h = 4$ სმ სიგრძის მართობია აღმართული. იპოვეთ მანძილი მართობის წვეროდან შესაბამისი სამკუთხედის გვერდებამდე.
3. სივრცის M წერტილი 6 სმ და 8 სმ კათეტების მქონე ABC მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებიდან ტოლ მანძილზეა. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე, თუ $MA = MB = MC = 13$ სმ.
4. სივრცის M წერტილი ტოლგვერდა სამკუთხედის სიბრტყიდან $\sqrt{3}$ სმ მანძილზეა. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე, თუ სამკუთხედის გვერდები 3 სმ-ია.
5. სივრცის M წერტილი 5 სმ მანძილზეა იმ სამკუთხედის გვერდებიდან, რომლის გვერდებიც 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

ორ სიბრტყეს შორის კუთხე. ორწახნაგა კუთხე

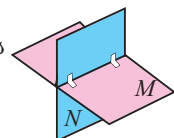
პრაქტიკული მეცადინეობა. ქაღალდის დაკეცვა.

აიღეთ ორი ქაღალდის ფურცელი. ერთზე აღნიშნეთ M ასო, ხოლო მეორეზე N ასო. ორივე ფურცელი შუამდე გაჭერით. ფურცლები ერთმანეთზე წებოვანი ლენტით (სკოჩი) დაამაგრეთ. შეასრულეთ დავალებები.

1. აღნიშნეთ ისეთი ორი D და E წერტილი, რომ ორივე სიბრტყეს ეკუთვნოდეს.

2. გაავლეთ D და E წერტილებზე გამავალი წრფე.

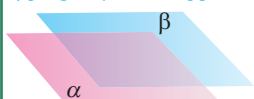
3. გამოთქვით მოსაზრებები სიბრტყეების გადაკვეთის შესახებ.



სიბრტყეების ურთიერთმდებარეობა

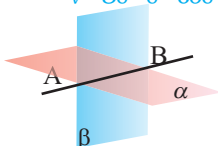
პარალელური სიბრტყეები

პარალელურ სიბრტყეებს არცერთი საერთო წერტილი არა აქვთ.



ურთიერთგადაკვეთი სიბრტყეები

ორი სიბრტყე ერთ წრფეზე იკვეთება α და β სიბრტყეები AB წრფეზე იკვეთება.



თანხვედრილი სიბრტყეები

ორ სიბრტყეს ერთ წრფეზე არამდებარე სამი საერთო წერტილი აქვს.



საერთო საზღვრების მქონე ორი ნახევარსიბრტყით შედგენილ ფიგურას **ორწახნაგა კუთხე** ეწოდება. ნახევარსიბრტყეებს ორწახნაგა კუთხის წახნაგები, მათ საერთო საზღვარს კი ორწახნაგა კუთხის წიბო ეწოდება. ორი სიბრტყის გადაკვეთისას 4 ორწახნაგა კუთხე მიიღება.

თუ ორწახნაგა კუთხის წიბოზე ავიღებთ რაიმე ერთ წერტილს, ამ წერტილიდან თითოეულ ნახევარსიბრტყეში გავავლებთ მართობულ სხივებს, მიღებულ კუთხეს ორწახნაგა კუთხის წრფივი კუთხე ეწოდება.

ორწახნაგა კუთხე მისივე წრფივი კუთხით იზომება. წრფივი კუთხის გრადუსული ზომა ორწახნაგა კუთხის გრადუსულ ზომას უნდევნებს.

ორწახნაგა კუთხის ყველა წრფივი კუთხე პარალელური გადატანით ერთმანეთს შეუთავსდება. მაშასადამე, გრადუსული ზომები ტოლია (ერთი და იმავე წრფის მართობული წრფეები პარალელურია).

წრფივი კუთხის მნიშვნელობა მისი წვერის წერტილის მდებარეობაზე არ არის დამოკიდებული. ორწახნაგა კუთხის ზომები 0° -დან 180° -მდეა.

ნამუშაუ: 30° -იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე აღებული წერტილიდან მეორე წახნაგამდე მანძილი a -ს ტოლია. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე.

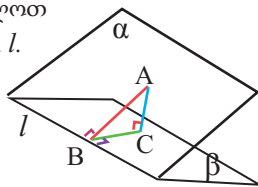
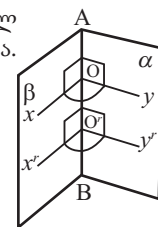
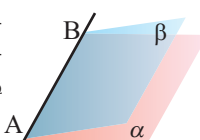
ამოხსნა: $A \in \alpha$ ჩავთვალოთ მოცემულ წერტილად. გავავლოთ

$AB \perp l$, $AC \perp \beta$ სამი მართობის თეორემის თანახმად $BC \perp l$.

მაშასადამე, $\angle ABC$ წრფივი კუთხეა და $\angle ABC = 30^\circ$.

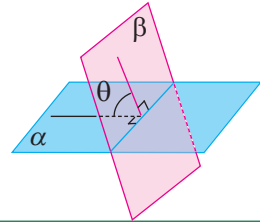
30° -იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის

ნახევრის ტოლია, ამიტომ $AC = \frac{AB}{2}$. აქედან $AB = 2a$

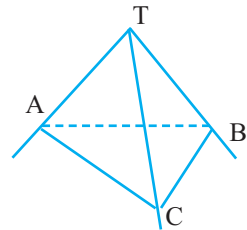


ორ სიბრტყეს შორის კუთხე. ორწახნაგა კუთხე

არამართობული ორი სიბრტყის გადაკვეთის დროს მიღებული ორწახნაგა კუთხეებიდან მნიშვნელობით ნაკლები მიღებულია ორ სიბრტყეს შორის კუთხედ. სურათზე მოცემულ α და β სიბრტყეებს შორის მდებარე კუთხე არის ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფის მართობული გვერდების მქონე θ კუთხე.



სიბრტყეზე ავიღოთ ABC სამკუთხედი და მისი სიბრტყის გარეთ მდებარე T წერტილი. გავავლოთ TA, TB, TC სხივები. T საერთო წვეროსა და საერთო გვერდების მქონე, ერთ სიბრტყეზე არამდებარე $\angle ATC$, $\angle ATB$ და $\angle BTC$ სამი სიბრტყითი კუთხისაგან შემდგარ ფიგურას სამწახნაგა კუთხე ეწოდება. სიბრტყით კუთხეებს სამწახნაგა კუთხის წახნაგები, მათ გვერდებს სამწახნაგა კუთხეების წიბოები, საერთო წვეროს სამწახნაგა კუთხის წვერო ეწოდება. თითოეული წიბო იმავდროულად ერთი ორწახნაგა კუთხის წიბოა.



თეორემა 1. სამწახნაგა კუთხის სიბრტყითი კუთხეების ჯამი 360° -ზე ნაკლებია.

თეორემა 2. სამწახნაგა კუთხის თითოეული სიბრტყითი კუთხე დანარჩენი ორი სიბრტყითი კუთხის ჯამზე ნაკლებია.

ნიმუში 2: არსებობს თუ არა ისეთი სამწახნაგა კუთხე, რომლის სიბრტყითი კუთხის ზომებია: ა) $130^\circ, 100^\circ, 140^\circ$; ბ) $70^\circ, 80^\circ, 100^\circ$?

ამოხსნა: ა) არ არსებობს. რადგან $130^\circ + 100^\circ + 140^\circ = 370^\circ > 360^\circ$

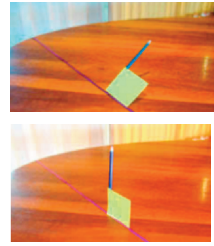
ბ) არსებობს. რადგან $70^\circ + 80^\circ + 100^\circ < 360^\circ$ და მოცემული სიბრტყითი კუთხეებიდან თითოეული დანარჩენი ორის ჯამზე ნაკლებია.

1. საკლასო ოთახში უჩვენეთ სამწახნაგა კუთხის ნიმუშები. ივარაუდეთ ამ სამწახნაგა კუთხის სიბრტყითი კუთხეებისა და ორწახნაგა კუთხეების მნიშვნელობები.
2. არსებობს თუ არა სამწახნაგა კუთხე, რომლის სიბრტყითი კუთხეების გრადუსული ზომებიც არის:
ა) $30^\circ; 70^\circ; 50^\circ$ ბ) $120^\circ; 150^\circ; 100^\circ$ გ) $60^\circ; 100^\circ; 170^\circ$
3. 45° -იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მეორე წახნაგიდან a მანძილზე ერთი წერტილია აღნიშნული. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.
4. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 6 სმ და 8 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი მართი კუთხის წვეროდან სამკუთხედის სიბრტყესთან 30° -იანი კუთხის შემდგენ ჰიპოტენუზაზე გამავალ სიბრტყემდე.
5. სამწახნაგა კუთხის ორი სიბრტყითი კუთხიდან თითოეული 45° -ია, მესამე კი 60° -ია. იპოვეთ მესამე სიბრტყითი კუთხის მოპირდაპირე ორწახნაგა კუთხე.
6. მოცემულია ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $AB = 18, BC = 12, AC = 10$. გავვლოთ α სიბრტყე, რომელიც AC გვერდიდან სამკუთხედის სიბრტყესთან ადგენს 45° -იან კუთხეს. იპოვეთ მანძილი B წვეროდან α სიბრტყემდე.

სიბრტყეთა მართობულობა

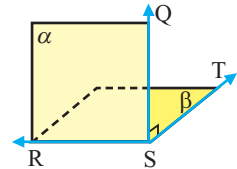
პრაქტიკული მეცადინეობა

ქაღალდის ფურცელი მიამაგრეთ ფანქარზე წებოვანი ლენტით. ფანქარი წრფის, ხოლო ფურცელი კი სიბრტყის მოდელია. მაგიდის სიბრტყის მიმართ ფანქრის სხვადასხვა მდგომარეობაში მოთავსებით გამოთქვით მოსაზრებები ქაღალდის ფურცელსა და მაგიდის სიბრტყეს შორის ორწახნაგა კუთხეების მნიშვნელობების შესახებ.

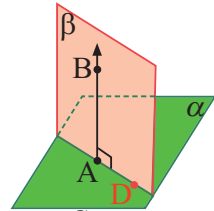


განსაზღვრება. თუ ორი სიბრტყის გადაკვეთისას მიღებული ორწახნაგა კუთხე მართი კუთხე იქნება, ამ სიბრტყეებს მართობული სიბრტყეები ეწოდება.

α სიბრტყეზე $SQ \perp SR$ და β სიბრტყეზე $TS \perp SR$. წახნაგები α და β სიბრტყეები, წიბო კი RS მქონე ორწახნაგა კუთხის ზომა $\angle QST$ - წრფივი კუთხის ზომის ტოლია. თუ $\angle QST$ მართი კუთხეა, მაშინ $\alpha \perp \beta$.



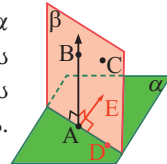
თეორემა. (სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი) თუ სიბრტყე გადაის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულები არიან.



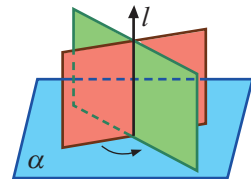
მოცემულია: AB წრფე α სიბრტყესთან A წერტილშია მართობული. C კი α სიბრტყეზე არამდებარე რაიმე წერტილია.

დაამტკიცეთ: A , B და C წერტილებზე გამავალი β სიბრტყე α სიბრტყის მართობულია.

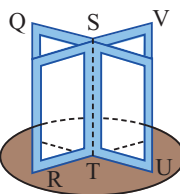
დამტკიცება: α და β სიბრტყეების გადაკვეთა ავლნიშნოთ AD სახით. AD ამ სიბრტყეებით შექმნილი ორწახნაგა კუთხის წიბოა. გავავლოთ α სიბრტყეზე მდებარე AD -ს მართობული AE წრფე. რადგან $AB \perp \alpha$ ამიტომ AB წრფე A წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის მართობულია. ანუ $AB \perp AD$, $AB \perp AE$. $\angle BAE$ ორწახნაგა კუთხის წრფივი კუთხეა. რადგან $AB \perp AE$ ორწახნაგა კუთხე მართი კუთხეა. მაშასადამე $\beta \perp \alpha$. თეორემა დამტკიცებულია.



წრფეზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყის β სიბრტყის l წრფის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებულ სიბრტყესავით მოდელირება შეიძლება.



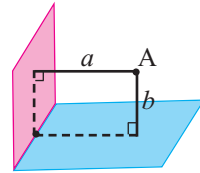
გამოყენების ნიმუში: სასტუმროების, სავაჭრო ცენტრების შესასვლელ კარებში მბრუნავი კარები მართობული სიბრტყეების ნიმუშად გამოდგება. კარების სქემატური გამოსახვიდან ჩანს, რომ ST წრფე იატაკის მართობულია და კარების ამ წრფის გარშემო ბრუნვის კვალობაზე STU , STR სიბრტყეებიც RTU იატაკის სიბრტყის მართობულები რჩებიან.



სიბრტყეთა მართობულობა

7. სახლში და სკოლაში თქვენს გარშემო უჩვენეთ მართობული სიბრტყეების ნიმუშები და დაასაბუთეთ მათი მართობულობა.

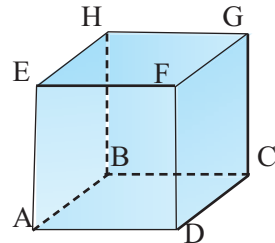
8. წერტილი, მართობული ორი სიბრტყიდან a და b მანძილზეა. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სიბრტყეების გადაკვეთის წერტილამდე.



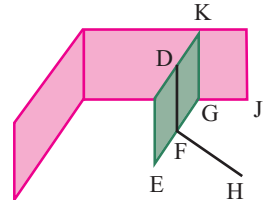
9. ა) დაწერეთ კუბის ADC სიბრტყის მართობული წიბოები

ბ) რომელი სიბრტყის მართობულია AE წიბო? განმარტეთ თქვენი პასუხი წრფისა და სიბრტყის მართობულობის შესახებ თეორემის მიხედვით.

გ) დაწერეთ მართობული სიბრტყეების სამი წყვილის სახელი. განმარტეთ მათი მართობულობა შესწავლილი თეორემების დაწერით.



10. წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ საკლასო ოთახი გადასატიხრი დაფებით სურათზე ნაჩვენებებით ორ ნაწილად უნდა გაყოთ. ოსტატმა, რომელიც თქვენ გეხმარებოდათ გადატიხრულზე ცარცით DF, ხოლო იატაკზე კი FH წრფეები გაავლო.



ა) ამ ორი წრფისა და კუთხედის დახმარებით, როგორ განსაზღვრავდით ტიხარის მოდელის - EFD სიბრტყის, იატაკის მაჩვენებელი EFH სიბრტყის მიმართ მართობულობას?

ბ) რომელი შემოწმებით შეიძლება იმაში დაწრმუნება, რომ ტიხარი კედლის (KGJ) მართობულია?

11. ა) გაავლეთ NML სიბრტყე და ამ სიბრტყის მართობული AM წრფე.

ბ) გაავლეთ AM წრფეზე გამავალი და NML სიბრტყის მართობული სამი სიბრტყე.

12. რომელი მოსაზრება არის ჭეშმარიტი და რომელია მცდარი?

ა) წრფეზე აღებული რომელიმე წერტილიდან ამ წრფეზე მხოლოდ ერთი მართობის გავლება შეიძლება.

ბ) თუ A წერტილი α სიბრტყეზე, ხოლო B წერტილი β სიბრტყეზე იქნება, AB წრფის არც ერთი სხვა წერტილი არ შეიძლება იყოს α სიბრტყეზე.

გ) თუ ორი მკვეთი სიბრტყიდან თითოეული იქნება მესამე სიბრტყის მართობული, ეს სიბრტყეები ერთმანეთის მართობულებიც იქნებიან.

დ) თუ AB წრფე A წერტილში α სიბრტყის მართობულია და AB წრფე β სიბრტყეში ძვეს, მაშინ $\alpha \perp \beta$.

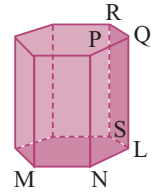
ე) წრფეზე მოცემული წერტილიდან ამ წრფეზე მხოლოდ ერთი მართობული სიბრტყის გავლება შეიძლება.

ვ) თუ სიბრტყე ორი მკვეთი წრფიდან მართობული იქნება, მაშინ მეორის მართობულიცაა.

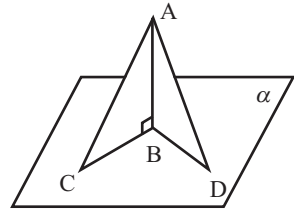
სიბრტყეთა მართობულობა

13. ა) PN-ის MNL სიბრტყისადმი მართობულობა. კიდევ რომელი სიბრტყისა და MNL სიბრტყის მართობულობას უზენებს?

ბ) იმისათვის, რომ როგორც RSL, ისე PNL სიბრტყე იყოს MNL სიბრტყის მართობული, რომელი წრფე უნდა იყოს MNL სიბრტყის მართობული?



14. AB არის B წერტილში α სიბრტყის მართობული. α სიბრტყეზე მოცემული BC და BD მონაკვეთები კონგრუენტულია $BC \cong BD$. ორვეტიანი ცხრილის შევსებით დაამტკიცეთ, რომ $AC \cong AD$ დამტკიცება რვეულში ჩაიწერეთ.



მოცემულია: $AB \perp \alpha$, $BC \cong BD$ C და $D \in \alpha$

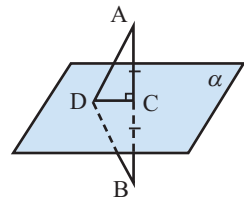
დაამტკიცეთ: $AC \cong AD$

პირობა	საფუძველი
1. $AB \perp \alpha$, $BC \cong BD$, C და $D \in \alpha$	1. მოცემულია
2. $AB \perp BC$, $AB \perp BD$	2.
3. $\angle ABC$ და $\angle ABD$ მართი კუთხეებია	3. პერპენდიკულარის განსაზღვრების თანახმად
4. $\angle ABC \cong \angle ABD$	4. ორივე მართი კუთხეა
5. $\triangle ABC \cong \triangle ABD$	5.
6. $AC \cong AD$	6.

15. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედი α სიბრტყეზე მდებარეობს. AD მონაკვეთი α სიბრტყის მართობულია. დაამტკიცეთ, რომ $BD \cong CD$.

16. AB საერთო ფუძის მქონე ABC და ABD ტოლგვერდა სამკუთხედების სიბრტყეები მართობულია. $AB = 16$ სმ, $AC = BC = 17$ სმ, $AD \perp CD$. იპოვეთ CD მანძილი.

17. AB მონაკვეთი α სიბრტყეზე C წერტილში მართობულია და $AC \cong CB$. დაამტკიცეთ, რომ α სიბრტყეზე ნებისმიერი წერტილი A და B წერტილებიდან ტოლ მანძილზეა.



18. ორ მართობულ სიბრტყეზე არსებული A და B წერტილებიდან სიბრტყეების გადაკვეთის წრფის მიმართ AC და BD მართობებია გავლებული. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ:

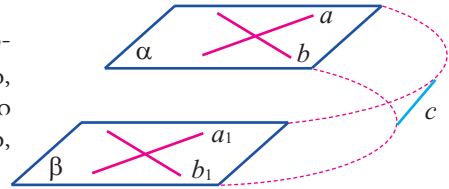
ა) $AC = 8$ სმ, $BD = 9$ სმ, $CD = 12$ სმ;

ბ) $AD = 6$ მ, $BC = 7$ მ, $CD = 8$ მ;

გ) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$.

თეორემა 1: (სიბრტყეთა პარალელურობის ნიშანი). თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფე შესაბამისად მეორე სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის პარალელურია, მაშინ ეს სიბრტყეები ერთმანეთის პარალელურია.

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ ურთიერთგადამკვეთი a და b წრფეები α სიბრტყეში, ხოლო a_1 და b_1 წრფეები კი β სიბრტყეში მდებარეობენ და $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. ვუჩვენოთ, რომ $\alpha \parallel \beta$.



დავუშვათ საპირისპირო. ვთქვათ, რომ α და β სიბრტყეები c წრფეზე იკვეთებიან. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშნის თანახმად $a \parallel c$ და $b \parallel c$. ასე გამოდის, რომ c წრფე მკვეთი a და b წრფეებიდან თითოეულის პარალელურია. ეს კი შესაძლებელი არაა მივდივართ წინააღმდეგობამდე. თეორემა დამტკიცებულია.

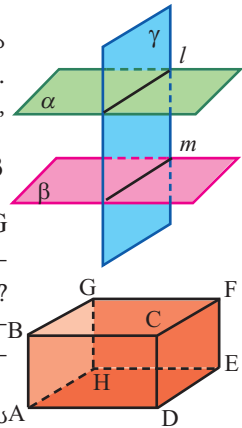
თეორემა 2: თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, მაშინ გადაკვეთის წრფეები პარალელურია. ანუ თუ პარალელურ α და β სიბრტყეებს γ სიბრტყე გადაკვეთს, მათი გადაკვეთის l და m წრფეები პარალელურია.

მოკლე ჩანაწერი: თუ $\alpha \parallel \beta$, γ სიბრტყე გადაკვეთს α და β სიბრტყეებს, $l \parallel m$.

გამოყენებითი ნიმუში: მართკუთხა პარალელები ABG და DCF სიბრტყეები პარალელურია: რომელი სიბრტყეები წარმოქმნიან პარალელურ წიბოებს ამ სიბრტყეების გადაკვეთისას?

ამოხსნა: 1. ABC სიბრტყე ABG და DCF პარალელური სიბრტყეების გადაკვეთისას AB და CD პარალელურ წიბოებს წარმოქმნის $AB \parallel CD$.

2. HGF სიბრტყე ABG და DCF პარალელური სიბრტყეებისა გადაკვეთისას GH და FE პარალელურ წიბოებს წარმოქმნის: $GH \parallel FE$



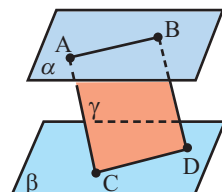
თეორემის დამტკიცება:

მოცემულია: $\alpha \parallel \beta$, γ სიბრტყის α სიბრტყესთან გადაკვეთა l , β სიბრტყესთან გადაკვეთა კი m წრფეა.

დაამტკიცეთ: $m \parallel l$

დამტკიცება: ვინაიდან m და l წრფეები γ სიბრტყეზე მდებარეობენ, აცდენილები ვერ იქნებიან. ისინი არც შეიძლება იკვეთებოდნენ, წინააღმდეგ შემთხვევაში α და β სიბრტყეებს საერთო წერტილი ექნებოდათ. მართლაც, l და m წრფეები თუ რაიმე წერტილში გადაიკვეთებიან, ეს წერტილი l წრფეზე, ანუ α სიბრტყეზე უნდა იყოს, თანაც m წრფეზე, ანუ β სიბრტყეზე უნდა იყოს. თუმცა α და β სიბრტყეები პარალელურია, არცერთი საერთო წერტილი არა აქვთ. მაშასადამე $m \parallel l$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3: პარალელურ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების მონაკვეთები ტოლია. თეორემა დამოუკიდებლად დაამტკიცეთ.

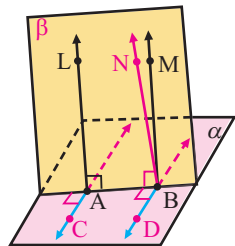


თეორემა 4: ერთი და იმავე სიბრტყის მართობული ორი წრფე პარალელურია.

მოცემულია: α სიბრტყე, $LA \perp \alpha$, $MB \perp \alpha$

დაამტკიცეთ: $LA \parallel MB$

თეორემის დამტკიცებისათვის გაავლეთ LA -ს პარალელური BN წრფე. უნდა ვუჩვენოთ, რომ BN და BM წრფეები ემთხვევა ერთმანეთს. თეორემა ქვემოთმოცემული ნაბიჯებით დაამტკიცეთ.



1. უჩვენეთ, რომ $\angle LAC$ არის α და β სიბრტყეებით შექმნილი მართი ორწახნაგა კუთხის წრფივი კუთხე.
2. თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთი მესამე წრფის მართობულია, მეორეც ამ წრფის მართობულია. $LA \perp AB$ პირობის თანახმად უჩვენეთ, რომ $NB \perp AB$.
3. α სიბრტყეზე გაავლეთ $BD \perp AB$. α და β სიბრტყეების მართი ორწახნაგა კუთხის გამოყენებით უჩვენეთ, რომ $BD \perp NB$.
4. უჩვენეთ, რომ MB არის α სიბრტყის B წერტილში გავლებული ერთადერთი მართობი.

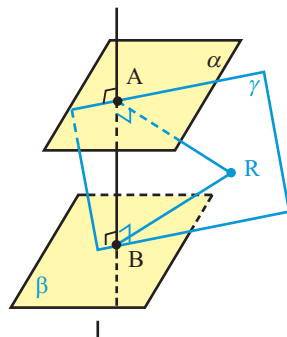
თეორემა 5: ერთი და იმავე წრფის მართობული ორი სიბრტყე პარალელურია.

თეორემის დამტკიცება:

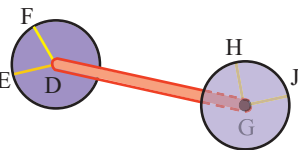
მოცემულია: α სიბრტყე $\perp AB$, β სიბრტყე $\perp AB$.

დაამტკიცეთ: $\alpha \parallel \beta$

დამტკიცება: წარმოვიდგინოთ საწინააღმდეგო. დავუშვათ, რომ α და β სიბრტყეები იკვეთებიან და R წერტილი ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე მდებარე წერტილია. A , B და R წერტილებზე კი γ სიბრტყე გადის. γ სიბრტყეზე $RB \perp AB$, $RA \perp AB$, თუმცა სიბრტყეზე ერთი და იმავე წრფის მიმართ მართობული წრფეები პარალელური უნდა იყოს, მაშასადამე, α და β სიბრტყეების გადაკვეთის შესახებ გამოთქმული მოსაზრება არ არის ჭეშმარიტი ეს სიბრტყეები პარალელურია $\alpha \parallel \beta$. თეორემა დამტკიცებულია.



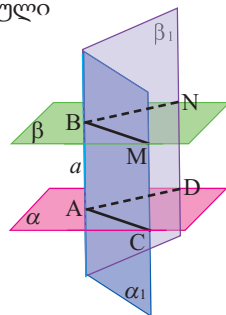
გამოყენებითი ნიმუში: ქერიმმა მუყაოსაგან ავტომობილის მოდელი დაამზადა. საბურავების შემაერთებელი DG ღერძი საბურავების მართობული უნდა იყოს. რომელი წრფეების მართობული უნდა იყოს ღერძი, რომ ის დარწმუნებული იყოს საბურავების პარალელურობაში?



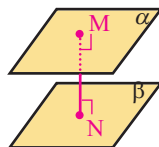
ამოხსნა: თუ DG ღერძი EFD სიბრტყეზე არსებული ED და FD ურთიერთგადამკვეთი წრფეებისა და HGJ სიბრტყეზე HG და GJ ურთიერთგადამკვეთი წრფეების მართობული იქნება, მაშინ ქერიმს შეუძლია დარწმუნებული იყოს საბურავების პარალელურობაში.

თეორემა 6: ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთის მართობული წრფე მეორე სიბრტყის მართობულიცაა.

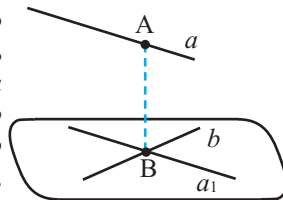
დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \alpha$. a წრფეზე გამავალი α_1 და β_1 სიბრტყეები მოცემულ α და β სიბრტყეებს პარალელურ წრფეებზე კვეთენ: $AC \parallel BM$, $AD \parallel BN$. რადგან $a \perp AC$, $a \perp AD$, ამიტომ $a \perp BM$ და $a \perp BN$. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშნის თანახმად, მიიღება, რომ $a \perp \beta$.
თეორემა დამტკიცებულია.



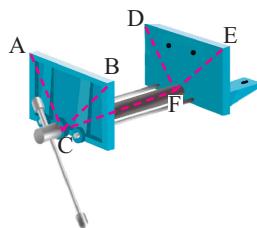
მანძილი ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი ამ სიბრტყეებიდან ერთ-ერთის ნებისმიერი წერტილიდან მეორის მიმართ გავლებული მართობის სიგრძის ტოლია.



მანძილი ორ აცდენილ წრფეს შორის. ორი აცდენილი წრფიდან თითოეულზე მეორის პარალელური სიბრტყის გავლება შეიძლება, მაგალითად, b წრფეზე გავავლოთ a წრფის პარალელური სიბრტყე. ამისათვის გავავლოთ b წრფის გადამკვეთი და a -ს პარალელური a_1 წრფე. a_1 და b ურთიერთგადამკვეთ წრფეებზე თუ გავავლებთ სიბრტყეს, ეს სიბრტყე a წრფის პარალელური იქნება. a წრფის ნებისმიერი წერტილიდან ამ სიბრტყემდე მანძილი a და b აცდენილ წრფეებს შორის მანძილის ტოლია. თუ $b \cap a_1 = B$, მაშინ α სიბრტყის მართობული AB მონაკვეთი იქნება a და b აცდენილი წრფეების საერთო მართობი.



1. დურგლები, ხელოსნები დეტალების დამუშავებისათვის მათ ორ პარალელურ დაფას (გირაგი) შორის ამაგრებენ, მოუჭერენ და მასზე საჭირო სამუშაოებს ასრულებენ. სურათზე ნაჩვენებია ორი დაფის პარალელურობისათვის, რომელი წრფეები უნდა იყოს მართობული?

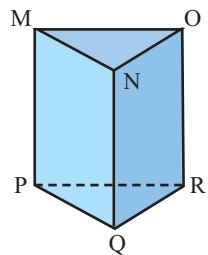


2. AB წრფე α სიბრტყის პარალელური და β სიბრტყის მართობულია. CD წრფე β სიბრტყეზე მდებარეობს.
 - ა) დახაზეთ პირობის შესაბამისი სურათი;
 - ბ) რომელი პირობაა მართებული?

ა) $\alpha \parallel \beta$	ბ) $\alpha \perp \beta$	გ) $AB \parallel CD$	დ) $CD \perp \alpha$
-----------------------------	-------------------------	----------------------	----------------------
3. მოცემული პირობები ასახეთ სურათზე.
 α და β სიბრტყეები იკვეთებიან CD წრფეზე. AB წრფე CD -ს E წერტილში კვეთს. A, B, C, D და E წერტილები ერთსა და იმავე სიბრტყეში მდებარეობენ.

სიბრტყეთა პარალელურობა

4. რადგან MNO და PQR სიბრტყეები პარალელური სიბრტყეებია და $MP \parallel NQ \parallel QR$, შეიძლება ითქვას, რომ $NO = QR$? პასუხი განმარტეთ.



5. სურათზე ნიმუშის ჩვენებით განმარტეთ მოცემული პირობა ჭეშმარიტია თუ მცდარი.

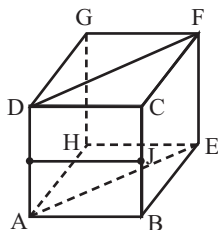
ა) თუ ორი სიბრტყე მართობულია, ამ სიბრტყეებიდან ერთის პარალელური წრფე მეორის მართობულიც იქნება.

ბ) თუ ორი სიბრტყე ერთი და იგივე წრფის პარალელურია, მაშინ ეს სიბრტყეები ერთიერთპარალელურია.

გ) ერთი და იმავე მართობული წრფეები პარალელურები არიან.

დ) ერთი და იგივე სიბრტყის მართობული ორი სიბრტყე ერთმანეთის პარალელურია.

ე) ორი პარალელური წრფიდან ერთის აცდენილი წრფე მეორისთვისაც აცდენილია.



6. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის BC ფუძე α სიბრტყეში ძევს. α სიბრტყის პარალელური β სიბრტყე AB გვერდს D წერტილში და AC გვერდს E წერტილში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ ADE სამკუთხედიც ტოლფერდა სამკუთხედი.

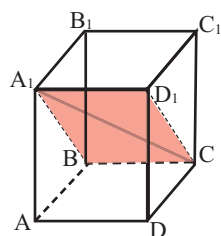
7. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი 8 სმ-ია. 10 სმ სიგრძის მონაკვეთის ბოლოები ამ სიბრტყეებშია. იპოვეთ მონაკვეთის გეგმილი ორივე სიბრტყეზე.

8. ორ პარალელურ α და β სიბრტყეებს შორის AC და BD მონაკვეთებია გავლებული (A და B წერტილები α სიბრტყეშია). $AC = 17$ სმ, $BD = 10$ სმ. AC და BD -ს სიბრტყეებიდან ერთ-ერთზე გეგმილების ჯამი 21 სმ-ია. იპოვეთ ამ გეგმილების სიგრძეები და მანძილი სიბრტყეებს შორის.

9. მოცემულია: მართკუთხა პარალელებიპედი, $AB = AD = 15$ სმ, $AA_1 = 20$ სმ.

იპოვეთ მანძილი A_1C წრფესა და AD -ს თავისთავში მომცველ წრფეს შორის.

მითითება: A_1C დიაგონალზე გაავლეთ AD -ს პარალელური სიბრტყე.



10. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის 4 მ სიგრძის მართობი და 6 მ სიგრძის დახრილია გავლებული. თითოეულ სიბრტყეზე მათ წვეროებს შორის მანძილი 3 მ-ია. იპოვეთ მანძილი მართობისა და დახრილის შუაწერტილებს შორის.

11. მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან a და b მანძილზეა ($a > b$). იპოვეთ მანძილი მონაკვეთის შუაწერტილიდან სიბრტყემდე:

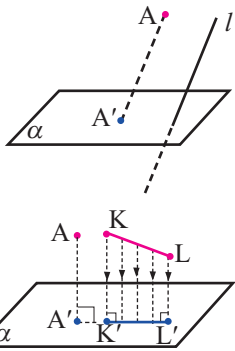
ა) თუ მონაკვეთი სიბრტყეს არ კვეთს;

ბ) თუ მონაკვეთი სიბრტყეს კვეთს.

12. სიბრტყის არამკვეთი მონაკვეთის წვეროები სიბრტყიდან 15 სმ და 25 სმ მანძილზეა. იპოვეთ მანძილი მონაკვეთის 3 : 7 შეფარდებით გამოყოფი წერტილიდან სიბრტყემდე. (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

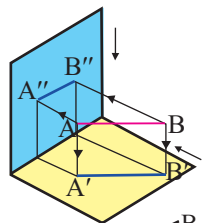
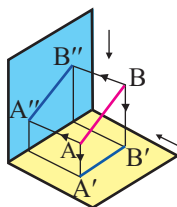
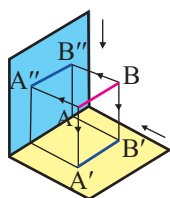
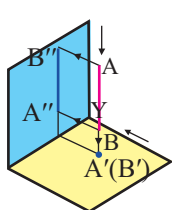
საყოფაცხოვრებო საგნების, სამრეწველო მოწყობილობების, მანქანებისა და მექანიზმების წარმოების უფრო ზუსტი ორგანიზებისათვის სხვადასხვა მხრიდან სურათების გადაღებით მიმდინარეობს ფორმების დაზუსტების სამუშაო. ამისათვის საგნებისა და მოწყობილობების სხვადასხვა გვერდებიდან ხედების სურათების გადაღება ხდება.

სივრცითი ფიგურების სიბრტყეზე ასახვისათვის დაგეგმილება გამოიყენება. ავიღოთ α სიბრტყის მკვეთი ნებისმიერი l წრფე. ფიგურის A წერტილიდან l წრფის პარალელური α სიბრტყესთან A' გადაკვეთის წერტილი A წერტილის ასახვა იქნება. ამ წესით თითოეული წერტილის ასახვის აგებით ფიგურის ასახვა მიიღება. ამ შემთხვევაში ფიგურის პარალელური მონაკვეთები პარალელური მონაკვეთებით გამოისახება და პარალელური წრფეთა მონაკვეთების შეფარდება შენარჩუნდება. კერძო შემთხვევაში, როცა l წრფე α სიბრტყის მართობულია, მიღებული გამოსახულება ფიგურის **ორთოგონალური გეგმილი** იქნება.



ორთოგონალი გეგმილი იქნება.

სურათზე სხვადასხვა მდებარეობაში მყოფი მონაკვეთის ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ სიბრტყეზე ორთოგონალური გეგმილის შესახებ ნიმუშებია მოცემული.



მონაკვეთის გეგმილის სიგრძის პოვნისათვის გამოიყენება $A'B' = AB \cos \alpha$ დამოკიდებულება.

$\triangle ABC$ -ს AC გვერდზე გამავალ α სიბრტყესა და სამკუთხედის სიბრტყეს შორის არსებული კუთხე თუ φ იქნება, ვიპოვოთ α სიბრტყეზე ამ სამკუთხედის ორთოგონალური გეგმილის ფართობი.

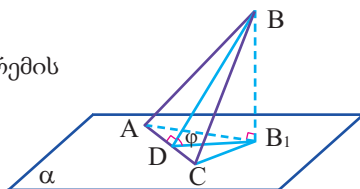
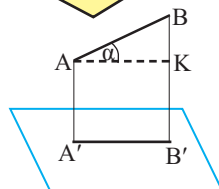
თუ $BD \perp AC$ და $BB_1 \perp \alpha$, სამი მართობის თეორემის თანახმად $B_1D \perp AC$ იქნება.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \text{ რადგან}$$

$$\triangle BB_1D \text{-დან, } \cos \varphi = \frac{B_1D}{BD}, \text{ ამიტომ } B_1D = BD \cdot \cos \varphi$$

$$S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot B_1D = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \cos \varphi = S_{ABC} \cos \varphi$$

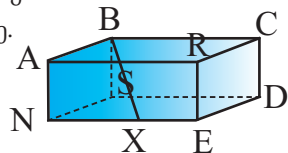
საერთოდ, თუ მრავალკუთხედის სიბრტყესა და გეგმილის სიბრტყეს შორის კუთხე იქნება φ , $S_p = S_f \cdot \cos \varphi$ ფორმულა მართებულია. სადაც S_f -მრავალკუთხედის ფართობი, S_p -ორთოგონალური გეგმილის ფართობია.



გეგმილები და ამოცანების ამოხსნა

ნიშუა. მართკუთხა პრიზმა ზემოდან შუქდება. დახაზეთ მოთხოვნილი მონაკვეთების გეგმილები ფუძის სიბრტყეზე.

- ა) BD ბ) NB გ) BE დ) BX



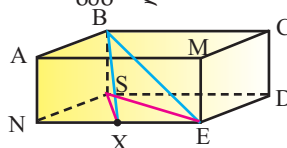
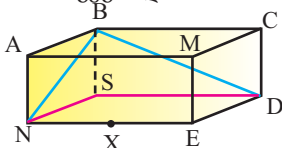
გეგმილები ფუძის სიბრტყეზე:

- ა) BD-ს გეგმილი არის SD.

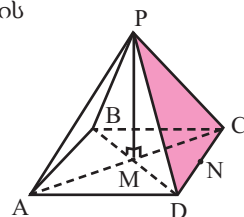
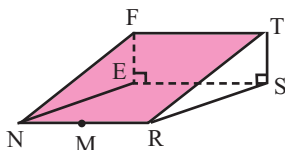
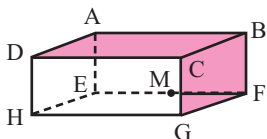
- გ) BE-ს გეგმილი არის SE.

- ბ) NB-ს გეგმილი არის NS.

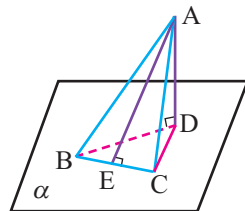
- დ) BX-ს გეგმილი არის SX.



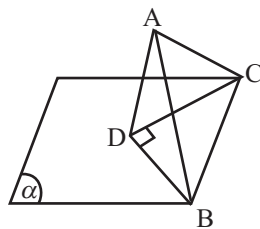
- 1.** გაფარდებით უჩვენეთ ფერადი ნაწილების გეგმილი ფუძის სიბრტყეზე.



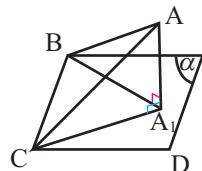
- 2.** ABC ტოლფერდა სამკუთხედის α სიბრტყეზე ორთოგონალური გეგმილი ტოლგვერდა სამკუთხედი. იპოვეთ $\triangle BCD$ -ს ფართობი, თუ $AD \perp BD$, $AE \perp BC$, $\triangle ABC = 48$ სმ², $AE = 16$ სმ.



- 3.** ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის α სიბრტყეზე ორთოგონალური გეგმილი BDC მართკუთხა სამკუთხედი. იპოვეთ CD თუ $AC = 8$ სმ.



- 4.** ABC სამკუთხედის სიბრტყისა და α სიბრტყეს შორის კუთხე 30° -ია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის α სიბრტყეზე ორთოგონალური გეგმილის ფართობი, თუ $BC = 12$ სმ, $AA_1 \perp \alpha$ და $AA_1 = 8$ სმ.



- 5.** მოცემულია ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდია a . იპოვეთ ამ სამკუთხედის იმ სიბრტყეზე ორთოგონალური გეგმილი რომელ-თანაც მისი სიბრტყე ადგენს:

- ა) 30° -იან; ბ) 45° -იან; გ) 60° -იან კუთხეს.

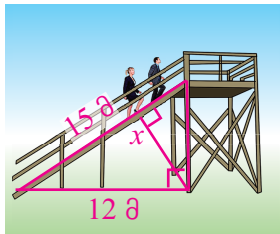
განმაზოგადებელი დავალებები

1. სურათის მიხედვით შეასრულეთ:

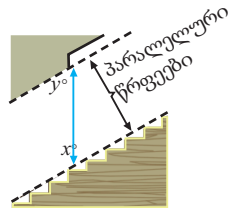
ა) უჩვენეთ, რომ ABC და BCD სამკუთხედები მართკუთხა სამკუთხედებია.

ბ) სურათზე მოცემული ზომები ისე შეცვალეთ, რომ BCD სამკუთხედი კვლავ მართკუთხა სამკუთხედი იყოს, ABC სამკუთხედი კი აღარ იყოს მართკუთხა სამკუთხედი.

2. იპოვეთ x სურათის მონაცემების მიხედვით.



3. კიბის სახელური ჭერის პარალელურია. იპოვეთ y კუთხე, თუ: $\angle x = 122^\circ$.



4. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდების სიგრძე 6 სმ-ია. სამკუთხედის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყეზე 3 სმ სიგრძის მართობია აღმართული. იპოვეთ მანძილი მართობის წვეროდან სამკუთხედის გვერდებამდე.

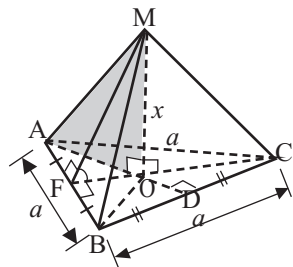
5. A და B წერტილებსა და სიბრტყეს შორის მანძილი შესაბამისად a და b -ს, ამ წერტილებიდან სიბრტყისადმი გავლებული მართობების ფუძეებს შორის მანძილი c -ს ტოლია. გაითვალისწინეთ, რომ A და B წერტილები შეიძლება სიბრტყის ერთსა და იმავე ან სხვადასხვა მხარეს მდებარეობდნენ და იპოვეთ AB მანძილი თუ $a = 7$ სმ, $b = 2$ სმ და $c = 12$ სმ.

6. ტოლგვერდა სამკუთხედის თითოეული გვერდის სიგრძეა a . ამ სამკუთხედის O ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულ მართობზე გამოყოფილი OM მონაკვეთის სიგრძეა x .

ა) უჩვენეთ, რომ $MA \perp BC$.

ბ) რისი ტოლი უნდა იყოს $OM = x$, რომ ABM და ABC სიბრტყეებს შორის ორწახნაგა კუთხე იყოს 60° ?

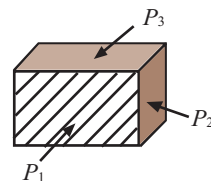
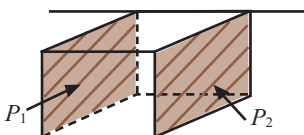
გ) რისი ტოლი უნდა იყოს $OM = x$, რომ MA, MB და MC მონაკვეთები წყვილ-წყვილად ურთიერთმართობულები იყვნენ?



მოცემული სურათების მიხედვით განსაზღვრეთ, ქვემოთ მოცემული მოსაზრებებიდან რომელია ჭეშმარიტი და რომელია მცდარი. სურათები ჩაიხაზეთ რვეულში და პასუხები დაწერეთ.

1. თუ ორი სიბრტყე ერთი და იმავე წრფის მართობულია, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

2. თუ ორი სიბრტყიდან თითოეული მესამე სიბრტყის მართობულია, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.



მობრუნების კუთხეები

კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომები

რკალის სიგრძე. სექტორის ფართობი

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ერთეულოვანი წრეწირი და ნებისმიერი კუთხის

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

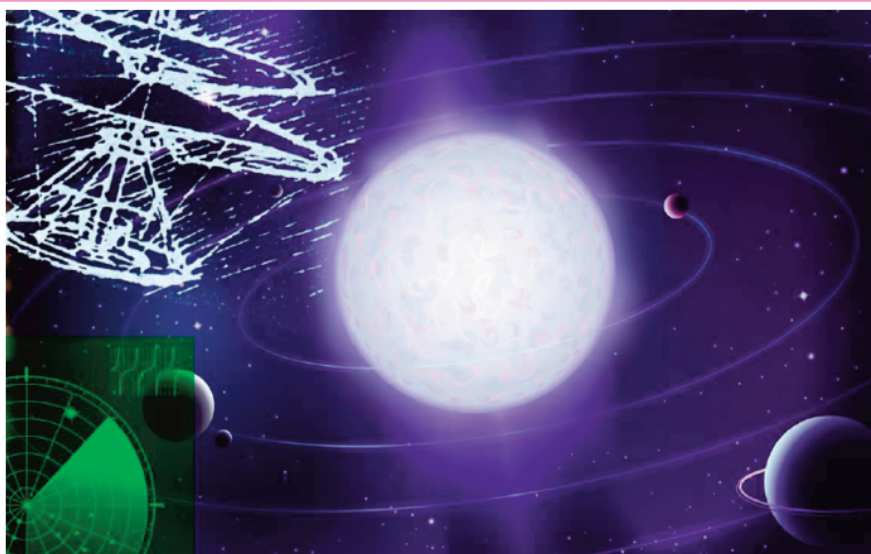
დაყვანის ფორმულები

ტრიგონომეტრიული იგივეობები

შეკრების ფორმულები

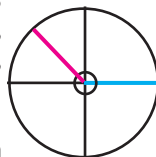
შეკრების ფორმულებიდან მიღებული შედეგები

ტრიგონომეტრიული გამოსახულებების გამარტივება

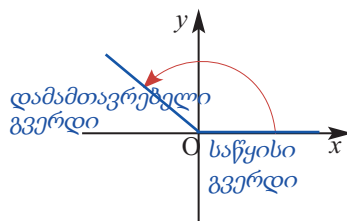


მობრუნების კუთხე

ჩვენ აქამდე კუთხეზე საუბრისას ორ უძრავ გვერდს შორის დარჩენილ კუთხეებს ვგულისხმობდით. კუთხე ასევე შეიძლება განხილულ იქნას როგორც მობრუნების საზომი. მაგალითად, უძრავი Ox ღერძის გარშემო მბრუნავი ბორბლის თავიდან ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში მდებარე რადიუსი გარკვეული დროის შემდეგ თავდაპირველ მდგომარეობასთან გარკვეულ კუთხეს შექმნის. თანაც ამ კუთხის მნიშვნელობა დამოკიდებული იქნება იმაზე, თუ რომელი მიმართულებით მოხდა მობრუნება. ნებისმიერი კუთხე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სხივის საკუთარი სათავის წერტილის გარშემო ბრუნვით მიღებული ფიგურა.

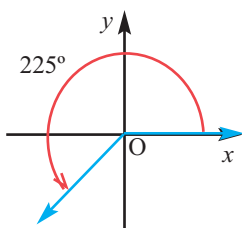


სხივის საწყისი მდებარეობა კუთხის ერთ გვერდს, სხივის ბოლო მდებარეობა კი კუთხის მეორე გვერდს შეესაბამება. საკოორდინატო სისტემაზე სხივის კოორდინატთა სათავის მიმართ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ან საპირისპირო მიმართულებით მობრუნებით სხვადასხვა ზომის კუთხეების შექმნა შეიძლება.

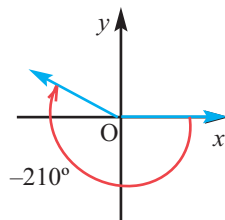


მობრუნების კუთხეების საწყისი გვერდები ერთი და იგივეა და აზსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებას ემთხვევა. კოორდინატთა სათავის (კუთხის წვერო) გარშემო მბრუნავ გვერდს კი დამამთავრებელი (ბოლო) გვერდი ეწოდება. როცა მობრუნება საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით ხდება კუთხის ზომა დადებითად, ხოლო როცა საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ხდება, მაშინ უარყოფითად არის მიღებული.

დადებითი კუთხე

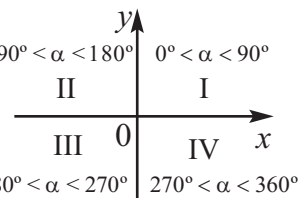


უარყოფითი კუთხე

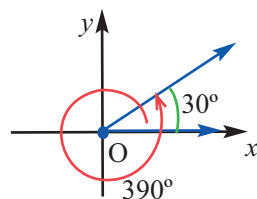


საკოორდინატო ღერძები საკოორდინატო სისტემას ოთხ მეოთხედად ყოფს. იმაზე დამოკიდებულებით, თუ კუთხის დამამთავრებელი გვერდი რომელ მეოთხედშია, მისი მნიშვნელობა განსაზღვრულ ინტერვალში იცვლება.

დამამთავრებელმა გვერდმა კოორდინატთა სათავის გარშემო შეიძლება მოახდინოს ერთი ან მრავალჯერადი $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

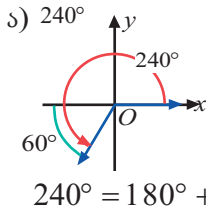


მობრუნება. ერთი სრული მობრუნებით იქმნება 360° -იანი კუთხე. საწყისი და დამამთავრებელი გვერდების თანხვედრაში მყოფი უსასრულო რაოდენობის მობრუნების კუთხეები არსებობს. მაგალითად, 30° -იანი კუთხისა და 390° -იანი კუთხის დამამთავრებელი გვერდები ერთმანეთს ემთხვევა. სხვა სიტყვებით, α° და $\alpha^\circ + 360^\circ \cdot n$ (სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია) მობრუნების კუთხეების დამამთავრებელ გვერდებს ერთი და იგივე მდებარეობა უკავიათ, ერთმანეთს ემთხვევიან.

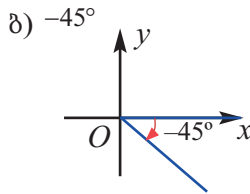


კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომები

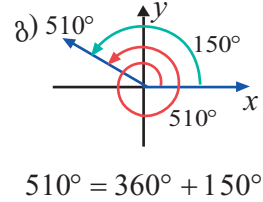
ნიმუში 1. გაავლეთ მოცემული ზომის მობრუნების კუთხეები და განსაზღვრეთ დამამთავრებელი გვერდი რომელ მეოთხედშია.



კუთხის ნიშანი დადებითია. კუთხის ბოლო გვერდი საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით საწყისი გვერდიდან $180^\circ + 60^\circ$ მობრუნებით გაივლება, დამამთავრებელი გვერდი III მეოთხედშია.



კუთხის ნიშანი უარყოფითია. კუთხის დამამთავრებელი გვერდი საწყისი მდგომარეობიდან საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მობრუნებით აბსცისა ღერძთან 45° -იანი კუთხის შექმნით გაივლება. კუთხის დამამთავრებელი გვერდი IV მეოთხედშია.



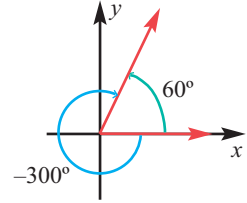
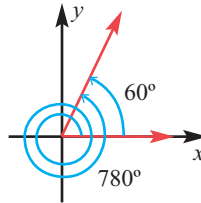
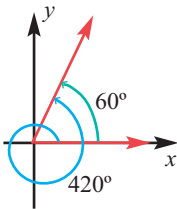
კუთხის დამამთავრებელი გვერდი საწყისი გვერდიდან საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით საწყისი გვერდიდან 150° -იანი კუთხის შექმნით გაივლება, დამამთავრებელი გვერდი II მეოთხედშია.

ნიმუში 2. საკოორდინატო სისტემაზე უჩვენეთ 60° -იან კუთხესთან დამამთავრებელი გვერდის თანხვედრაში მყოფი დადებითი და უარყოფითი მობრუნების კუთხეები და დაწერეთ მათი გრადუსული ზომები.

$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$

$60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$

$60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$



სასწავლო დაფალებები

1. რომელი მეოთხედის კუთხეა α კუთხე? დახაზეთ, უჩვენეთ.

- ა) $\alpha = 170^\circ$ ბ) $\alpha = 290^\circ$ გ) $\alpha = -100^\circ$ დ) $\alpha = 320^\circ$ ე) $\alpha = -10^\circ$

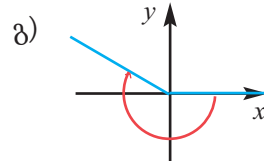
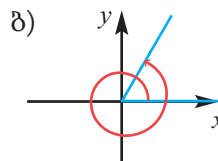
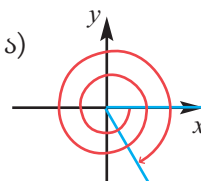
2. $0^\circ - 360^\circ$ შუალედში უჩვენეთ ისეთი მობრუნების α კუთხე, რომელიც ტოლია:

- ა) 420° ბ) -210° გ) -330° დ) 700° ე) -200°

3. დაწერეთ და დახაზეთ ერთი დადებითი და ერთი უარყოფითი კუთხის გრადუსული ზომები, რომლის დამამთავრებელი გვერდი მოცემულ კუთხეს ემთხვევა.

- ა) 200° ბ) 80° გ) -100° დ) 130° ე) -70°

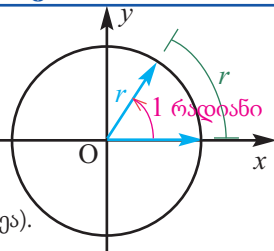
4. რომელი ზომა რომელ კუთხეს შეესაბამება? 1) -210° 2) 420° 3) -780°



კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომები

კუთხის რადიანული ზომა

კუთხის რადიანული ზომა ეწოდება შესაბამისი რკალის სიგრძის შეფარდებას წრეწირის რადიუსთან. რადიანი არის რკალი, რომლის სიგრძე რადიუსის ტოლია. ამ რკალის შესაბამისი ცენტრალური კუთხის ზომა ერთი რადიანია.

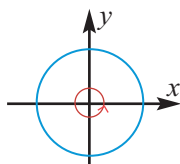


რადიანის განსაზღვრების თანახმად $\frac{l}{r} = \alpha$ (l -რკალის სიგრძე).

წრეწირის სიგრძე $2\pi r$ -ია. თუ რადიუსის (r) ტოლი რკალის

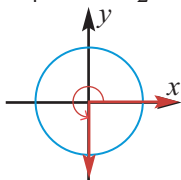
შესაბამისი ცენტრალური კუთხე 1 რადიანია, $2\pi r$ -ის ტოლი რკალის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე 2π იქნება. ქვემოთ ნაჩვენებია განსაზღვრული მოზრუნეების შესაბამისი კუთხეების რადიანული ზომები.

სრული ბრუნა:
 2π რადიანი



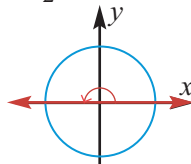
3/4 ბრუნა:

$$\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$



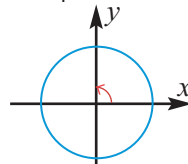
1/2 ბრუნა:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$



1/4 ბრუნა:

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$



ერთი სრული ბრუნით შექმნილი კუთხის რადიანული ზომაა 2π , გრადუსული ზომა კი 360° -ია, ანუ 2π რადიანი $= 360^\circ$. აქედან შეიძლება განისაზღვროს დამოკიდებულება კუთხის რადიანულ და გრადუსულ ზომებს შორის.

რადიანის გრადუსებში გადაყვანა:

$$2\pi \text{ რადიანი} = 360^\circ$$

$$1 \text{ რადიანი} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1 \text{ რადიანი} \approx 57^\circ$$

გრადუსის რადიანებში გადაყვანა:

$$2\pi \text{ რადიანი} = 360^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$$

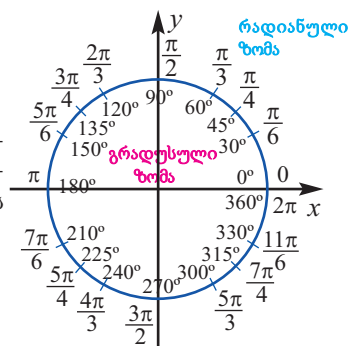
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0175 \text{ რადიანი}$$

მაშასადამე, π რად $= 180^\circ$. მაშინ გასაგებია, რომ

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ, \frac{\pi}{3} = 60^\circ, \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

პირველ მეოთხედში მდებარე ზოგიერთი კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომების ურთიერთმნიშვნელობების მიხედვით ამ კუთხეების ჯერადი კუთხეების რადიანული ზომების პოვნა შეიძლება.

მაგალითად, რადგან $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, ამიტომ $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$.



რადიანის განსაზღვრების თანახმად $\frac{l}{r} = \alpha$ (l -რკალის სიგრძე)

ნამუშაო 1. რამდენი რადიანია 4 სმ-იანი რადიუსის მქონე წრეწირის 12 სმ სიგრძის რკალის შესაბამისი ცენტრული კუთხე?

1 რადიანი 4 სმ სიგრძის რკალს შეესაბამება.

12 სმ რკალის შესაბამისი კუთხე $12 : 4 = 3$ რადიანი იქნება.

კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომები

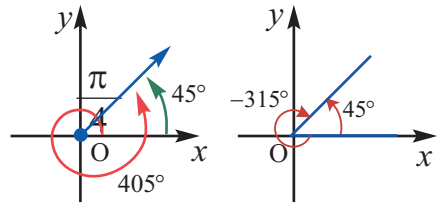
ნიმუში 2. გრადუსულ ზომებში გამოსახული კუთხე გამოსახეთ რადიანებში, ხოლო რადიანებში გამოსახული კუთხე კი გრადუსულ ზომამი. ა) 60° ბ) $\frac{5\pi}{3}$

ამოხსნა: ა) $60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180}$ რადიანი $= \frac{\pi}{3}$ რადიანი $\approx 1,047$ რადიანი
ბ) $\frac{5\pi}{3}$ რადიანი $= \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$

ნიმუში 3. გრადუსებში და რადიანებში გამოსახეთ კუთხეები, რომელთა დამამთავრებელი გვერდი ემთხვევა 45° -იან კუთხეს.

45° -იანი კუთხისა და 405° -იანი და -315° -იანი კუთხეების დამამთავრებელი გვერდები ერთმანეთს ემთხვევა.

$405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$; $-315^\circ = 45^\circ - 360^\circ$,
 $45^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, $45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$; $45^\circ + 3 \cdot 360^\circ$,
 $45^\circ - 3 \cdot 360^\circ$ კუთხეები ან $45^\circ \pm 360^\circ$,
 $45^\circ \pm 2 \cdot 360^\circ$, $45^\circ \pm 3 \cdot 360^\circ$ და ა. შ. უსასრულო რაოდენობის კუთხეების დამამთავრებელი გვერდები 45° -იანი კუთხის დამამთავრებელ გვერდს ემთხვევა.



ეს რადიანებში შეიძლება ქვემოთ მოცემული სახით ჩაიწეროს $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \pm 4\pi$ და ა.შ. ზოგადი სახით კი $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi n$ ($n \in \mathbb{N}$) სახის კუთხეების დამამთავრებელი გვერდები და $\frac{\pi}{4}$ რადიანული კუთხის დამამთავრებელი გვერდები ერთმანეთს ემთხვევა.

სასწავლო დაგვარებები

5. იპოვეთ r რადიუსიანი წრეწირის l სიგრძის რკალის შესაბამისი კუთხის რადიანული ზომა.

ა) $r = 4$ სმ, $l = 16$ სმ ბ) $r = 5$ მ, $l = 4$ მ გ) $r = 3,2$ სმ, $l = 7,2$ სმ

6. საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახეთ მოცემული ზომის მობრუნების კუთხე.

ა) 40° ბ) 310° გ) -150° დ) 150° ე) 780°
ვ) $\frac{2\pi}{3}$ ზ) $-\pi$ თ) $\frac{5\pi}{2}$ ი) -400° კ) $\frac{3\pi}{2}$

7. გრადუსულ ზომებში მოცემული კუთხეები გამოსახეთ რადიანებში. მეასედებამდე დამრგვალებით იპოვეთ მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ა) 60° ბ) 120° გ) -45° დ) 450° ე) -270° ვ) $15,5^\circ$

8. იპოვეთ რადიანულ ზომებში მოცემული კუთხეების გრადუსული ზომები.

ა) $\frac{\pi}{6}$ ბ) $\frac{2\pi}{3}$ გ) $-\frac{3\pi}{8}$ დ) $-\frac{5\pi}{2}$ ე) 1 ვ) 2 ზ) 3

9. დაწერეთ მოცემულ კუთხესთან დამამთავრებელი გვერდის თანხვედრაში მყოფი და მოცემულ შუალედში მდებარე მობრუნების კუთხეები.

ა) 65° , $90^\circ \leq \theta < 720^\circ$ ბ) -40° , $-180^\circ \leq \theta < 360^\circ$ გ) 140° , $-720^\circ \leq \theta < 720^\circ$
დ) $\frac{\pi}{4}$, $-2\pi \leq \theta < 2\pi$ ე) $\frac{3\pi}{4}$, $-4\pi \leq \theta < 4\pi$ ვ) $\frac{2\pi}{3}$, $-2\pi \leq \theta < 4\pi$

კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომები

ნამუში: ა) $65^\circ, 90^\circ \leq \theta < 720^\circ$

65° -იან კუთხესთან თანხვედრაში მყოფი მობრუნების კუთხეები

$65^\circ + 360 \cdot n$ და $65^\circ - 360 \cdot n$ ($n \in N$) ფორმულებით შეგვიძლია ვიპოვოთ.

$$n = 1 \quad 65^\circ + 360 \cdot 1 = 425^\circ \quad 65^\circ - 360 \cdot 1 = -295^\circ$$

$$n = 2 \quad 65^\circ + 360 \cdot 2 = 785^\circ \quad 65^\circ - 360 \cdot 2 = -655^\circ$$

როგორც ხედავთ, მოცემულ ინტერვალში შემავალი მხოლოდ 425° -იანი კუთხეა.

ნამუში: ე) $-\frac{3\pi}{4}, -4\pi \leq \theta < 4\pi$ მოცემულ კუთხესთან დამამთავრებელი

გვერდის თანხვედრაში მყოფი მობრუნების კუთხეები $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ და

$\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$ ($n \in N$) ფორმულებით შეგვიძლია ვიპოვოთ.

n	1	2	3
$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{27\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{21\pi}{4}$

$-4\pi \leq \theta < 4\pi$ ინტერვალში

$\frac{3\pi}{4}$ კუთხესთან დამამთავრე-

ბელი გვერდის თანხვედრაში

მყოფი კუთხეები:

$$\frac{11\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}$$

- 10.** გრადუსულ ზომებში მოცემული კუთხე გამოსახეთ რადიანებში, ხოლო რადიანებში მოცემული კუთხე გამოსახეთ გრადუსულ ზომებში.

1) 225° 2) -15° 3) 135° 4) $\frac{7\pi}{6}$ 5) $-\frac{5\pi}{4}$ 6) $-\frac{2\pi}{3}$

- 11.** დაწერეთ კუთხის დამამთავრებელი გვერდის მოცემული ბრუნვით შექმნილი კუთხეების გრადუსული და რადიანული ზომები

1) წრეწირის $\frac{1}{9}$ 2) წრეწირის $\frac{1}{24}$ 3) წრეწირის $\frac{1}{18}$
 4) წრეწირის $\frac{2}{3}$ 5) წრეწირის $\frac{7}{12}$ 6) წრეწირის $\frac{4}{5}$

- 12.** მოცემულ კუთხეებთან დამამთავრებელი გვერდების თანხვედრაში მყოფი და $(0; 2\pi)$ ინტერვალში მდებარე კუთხე გამოსახეთ რადიანებში.

1) $-\frac{\pi}{3}$ 2) $-\frac{3\pi}{4}$ 3) $-\frac{19\pi}{4}$ 4) $\frac{16\pi}{3}$
 5) $-\frac{7\pi}{5}$ 6) $\frac{45\pi}{8}$ 7) 8 8) 12

- 13.** ა) განსაზღვრეთ ოთხი კუთხე, რომელთა დამამთავრებელი გვერდები ემთხვევა მოცემულ კუთხეებს.

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{7\pi}{5}$ 3) $-\frac{\pi}{6}$ 4) $-\frac{4\pi}{3}$

ბ) მოცემული მობრუნების კუთხეებიდან, რომელი ორის დამამთავრებელი გვერდები ემთხვევა ერთმანეთს?

1) $\frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ 2) $\frac{5\pi}{2}, -\frac{9\pi}{2}$ 3) $410^\circ, -410^\circ$ 4) $227^\circ, -493^\circ$

გ) ზოგადი სახით დაწერეთ კუთხეები, რომელთა დამამთავრებელი გვერდები ემთხვევა მოცემულ კუთხეებს.

1) -60° 2) $\frac{\pi}{5}$ 3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) 100°

რკალის სიგრძე. სექტორის ფართობი

რკალის სიგრძე. სექტორის ფართობი

რკალის სიგრძე. r რადიუსიან წრეწირში m° -იანი ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძის ფორმულა: $l = \frac{\pi m}{180} \cdot r$.

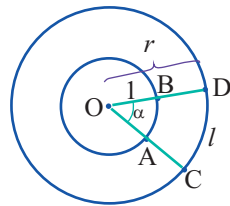
რკალის სიგრძის კუთხის რადიანული ზომის გამოყენებით უფრო მარტივი სახით დაწერა შეიძლება.

რადიანის განსაზღვრების თანახმად, რადგან $\frac{l}{r} = \alpha$, ამიტომ

რკალის სიგრძე კუთხის რადიანული ზომისა და რადიუსის

ნამრავლის ტოლია. $l = \alpha \cdot r$

რკალის სიგრძე წრეწირის რადიუსის პირდაპირპროპორციულია.



სექტორის ფართობი. m° -იანი ცენტრალური კუთხის შესაბამისი სექტორის ფართობია

$S = \frac{\pi m}{360} r^2$; თუ გავითავალისწინებთ, რომ $\frac{\pi m}{180}$ არის m° -იანი ცენტრალური კუთხის რადიანული ზომა და ავლნიშნავთ α სახით, ამ სექტორის ფართობის ფორმულა $S = \frac{1}{2} \alpha r^2$ იქნება.

ნიმუში 1. საათის წამების ისრის სიგრძე 12 სმ-ია. განსაზღვრეთ წამების

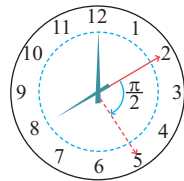
ისრის წვეროს წერტილების 15 წამში შემოხაზული რკალის სიგრძე.

ამოხსნა: წამების ისარი 60 წამში ერთ სრულ ბრუნს ასრულებს. ეს კი 2π რადიანია.

15 წამს სრული ბრუნის $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ ნაწილი შეესაბამება:

$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ რადიანი.

მაშასადამე, წამების ისარი 15 წამის განმავლობაში $\frac{\pi}{2}$ რადიანის ცენტრალური კუთხის შესაბამის რკალს შემოხაზავს. ამ რკალის სიგრძე $l = \alpha r = \frac{\pi}{2} \cdot 12 = 6\pi \approx 6 \cdot 3,14 = 18,84$ (სმ) იქნება.



ნიმუში 2. იპოვეთ 8 სმ რადიუსიანი წრის გაფერადებული სექტორის

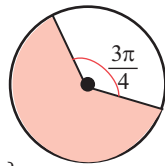
ფართობი და ამ სექტორის პერიმეტრი.

გაფერადებული ნაწილის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე: $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

სექტორის ფართობი: $S = \frac{1}{2} \cdot \alpha r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{4} \cdot 8^2 = 40\pi$ (სმ²)

სექტორის პერიმეტრი = ორი რადიუსის სიგრძე + სექტორის რკალის სიგრძე

$P = 2 \cdot 8 + \frac{5\pi}{4} \cdot 8 = 32 + 20\pi \approx 95$ (სმ)



სასწავლო დავალებები

1. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი სიდიდეები. აქ r - წრეწირის რადიუსია, α - ცენტრალური კუთხე, l - რკალის სიგრძე.

ა) $r = 8,5$ სმ, $\alpha = 75^\circ$, $l =$ სმ

ბ) $r = 5$ მ, $l = 13$ მ, $\alpha =$ რადიანი

გ) $r =$ მმ, $\alpha = 1,8$ რადიანი, $l = 4,5$ მმ

2. იპოვეთ მოცემული ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძე და სექტორის ფართობი.

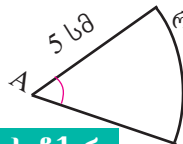
ა) $r = 30$ სმ; $\alpha = \frac{\pi}{3}$

ბ) $r = 12,5$ მ; $\alpha = 90^\circ$

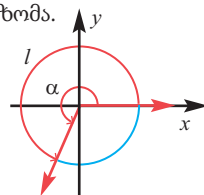
გ) $r = 2,8$ დმ; $\alpha = \frac{5\pi}{3}$

რკალის სიგრძე. სექტორის ფართობი

3. სურათზე ნაჩვენებია წრის სექტორის პერიმეტრი 16 სმ-ია. იპოვეთ A ცენტრალური კუთხის რადიანული ზომა, თუ შესაბამისი წრის რადიუსი 5 სმ-ია.

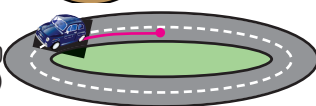
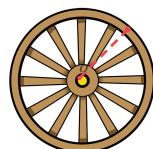


4. 20 სმ რადიუსიანი წრეწირის l რკალის სიგრძე 85 სმ-ია. იპოვეთ შესაბამისი ცენტრალური კუთხის რადიანული ზომა.



წრფივი სიჩქარე და კუთხური სიჩქარე

წრეწირის გარშემო მოძრაობისას, მაგალითად, ბორბლის O წერტილის გარშემო ბრუნვის დროს მასზე აღებული რომელიმე P წერტილის სიჩქარე ორნაირად შეიძლება შეფასდეს. მათ შორის ერთი წერტილის ბორბლის ბრუნვის დროს გავლილი მანძილის მიხედვით განსაზღვრული სიჩქარეა. მას წრფივი სიჩქარე ეწოდება. მეორე კი ბრუნვის კუთხის (ცენტრალური კუთხის) მიხედვით არსებული სიჩქარეა და მას კუთხური სიჩქარე ეწოდება. თუ სხეული წრეწირის გარშემო მოძრაობს, წრფივი სიჩქარე გავლილი მანძილის (შესაბამისი წრეწირის რკალის სიგრძის) დროსთან შეფარდების ტოლია.



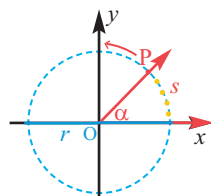
$$\text{წრფივი სიჩქარე} = \frac{\text{გავლილი მანძილი}}{\text{დრო}}$$

$$v_x = \frac{\alpha r}{t}$$

$$\text{კუთხური სიჩქარე} = \frac{\text{ბრუნვის კუთხე}}{\text{დრო}}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

თუ სხეული წრეწირის გარშემო მოძრაობს, კუთხური სიჩქარე მობრუნების კუთხის დროსთან შეფარდების ტოლია.



სადაც α (რადიანებში) t დროში ბრუნვის კუთხეა.

კუთხურ სიჩქარესა და წრფივ სიჩქარეს შორის კავშირის შემდეგი სახით გამოსახვა შეიძლება:

$$\text{წრფივი სიჩქარე} = r \cdot \text{კუთხური სიჩქარე} \quad v_x = r \cdot \omega$$

ნამუში 3. კარუსელი წუთში 8 სრულ ბრუნს ასრულებს.

ა) რამდენი რადიანია კარუსელის ერთ წუთში არსებული კუთხური სიჩქარე?

ბ) რამდენ მეტრ მანძილს გაივლის ერთ წუთში ცენტრიდან 3 მ მანძილზე მყოფი ცხენი?

გ) რამდენ მეტრ მანძილს გაივლის ერთ წუთში ცენტრიდან 2 მ მანძილზე მყოფი ცხენი?



ამოხსნა: ა) ერთი სრული ბრუნვის შესაბამისი ბრუნვის (ცენტრალური) კუთხეა 2π . 8 ბრუნის დროს ეს კუთხე $8 \cdot 2\pi = 16\pi$ იქნება. ერთ წუთში კუთხური სიჩქარე იქნება $\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{16\pi}{1} = 16\pi$ რადიანი/წუთი.

ბ) ცენტრიდან 3 მ მანძილზე მყოფი ცხენი 3 მ რადიუსით მოძრაობს წრეწირის გარშემო.

$$\text{წრფივი სიჩქარე: } v_x = r \cdot \omega = 3 \cdot 16\pi = 48\pi \approx 151 \text{ მ/წუთ}$$

გ) ცენტრიდან 2 მ მანძილზე მყოფი ცხენი 2 მ რადიუსით მოძრაობს წრეწირის გარშემო.

$$\text{წრფივი სიჩქარე: } v_x = r \cdot \omega = 2 \cdot 16\pi = 32\pi \approx 100 \text{ მ/წუთ}$$

როგორც ხედავთ, იმ შემთხვევაში, როცაორი სხეულის კუთხური სიჩქარე ტოლია, ცენტრიდან უფრო შორს მყოფი სხეული უფრო სწრაფად მოძრაობს, ანუ მისი წრფივი სიჩქარე უფრო მეტია.

რკალის სიგრძე. სექტორის ფართობი

5. საათის ისრის სიგრძე 10 სმ-ია.

ა) იპოვეთ წამების ისრის კუთხური სიჩქარე ($\frac{\text{რად}}{\text{წმ}}$ -ობით).

ბ) რა მანძილს გაივლის ისრის წვეროს წერტილი 2 წუთისა და 15 წამის განმავლობაში?

გ) იპოვეთ წამების ისრის წრფივი სიჩქარე ($\frac{\text{სმ}}{\text{წმ}}$ -ობით).



6. ავტომობილის საბურავის რადიუსი 40 სმ-ია. რამდენი რადიანია მოცემული მანძილების გავლამდე საბურავების ბრუნვით მიღებული კუთხე?

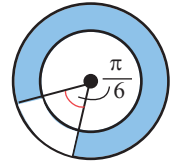
ა) 100 მ

ბ) 15 მ

გ) 1 კმ

დ) 300 მ

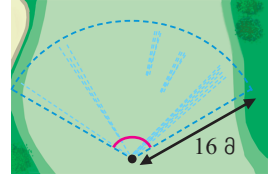
7. სურათზე მოცემულია კონცენტრული (საერთო ცენტრის მქონე) წრეწირები. მცირე წრეწირის რადიუსი 4 სმ-ია, დიდი წრეწირის რადიუსი კი 6 სმ-ია. იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



8. წყალმფრქვევი ყოველ 15 წამში ერთ ბრუნს ასრულებს. იგი მაქსიმუმ 16 მ მანძილზე აფრქვევს წყალს.

ა) იპოვეთ წყალმფრქვევის $\frac{3\pi}{2}$ მობრუნებისას მორწყული სექტორის ფართობი.

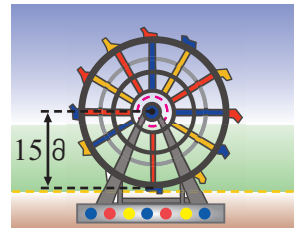
ბ) რადიანებში და გრადუსებში გამოსახეთ წყალმფრქვევის მიერ 2 წუთის განმავლობაში ბრუნვით მიღებული კუთხე.



9. კარუსელი წუთში 1,5 ბრუნს აკეთებს. იპოვეთ:

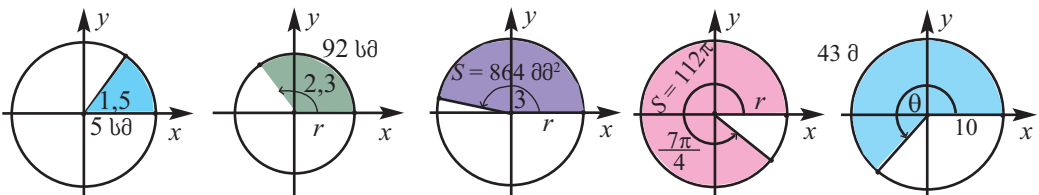
ა) კარუსელის კუთხური სიჩქარე.

ბ) კარუსელის ღერძიდან 15 მ მანძილზე მყოფი წერტილის წრფივი სიჩქარე ($\frac{\text{მ}}{\text{წთ}}$).



10. 65 სმ დიამეტრიანი ველოსიპედის საბურავი 0,05 წამში 45° -ით ბრუნავს. რა მანძილს გადის ველოსიპედი 30 წამში?

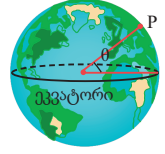
11. თითოეულ სურათზე მონაცემების მიხედვით ისეთი გამოთვლები აწარმოეთ, რომ ყველა წრისათვის განსაზღვრული იქნას რადიუსი, ცენტრალური კუთხე, რკალის სიგრძე და სექტორის ფართობი.



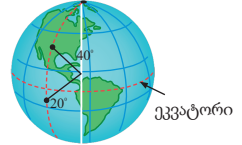
12. 2 მ რადიუსის მქონე წრეწირზე მოძრაობს სხეული ყოველ 20 წამში 5 მ მანძილს გადის. იპოვეთ სხეულის წრფივი და კუთხური სიჩქარეები.

რკალის სიგრძე. სექტორის ფართობი

13. ა) ბაქო ჩრდილოეთი განედის 40° -იან წრეზე მდებარეობს. იპოვეთ მერიდიანის მიხედვით მანძილი ბაქოდან ეკვატორამდე. დედამიწის რადიუსი მიახლოებით 6400 კმ-ია.

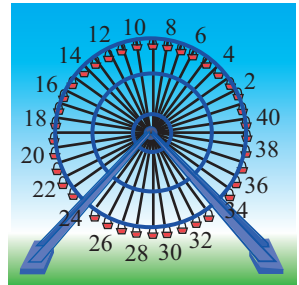


ბ) იპოვეთ მანძილი მერიდიანის მიხედვით 40° ჩრდილოეთი განედის წრეზე მდებარე პუნქტსა და 20° სამხრეთ განედის წრეზე მდებარე პუნქტს შორის.



14. 21 სმ სიგრძის ქანქარას მოძრაობის დროს წვეროს მიერ შემოხაზული უდიდესი რკალის სიგრძე 10,5 სმ-ია. რამდენ გრადუსიან კუთხეს შემოხაზავს ამ დროს ქანქარა?

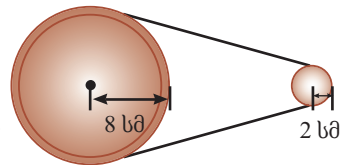
15. კარუსელის კაბინები 1-დან 40-მდე არის დანომრილი. წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ ხართ ნომერ 3 კაბინაში. რომელი ნომერი კაბინა იქნება, თქვენი ამჟამინდელი კაბინის ადგილას, თუ კარუსელი $\frac{37\pi}{10}$ -ით მობრუნდება? განიხილეთ ორივე მიმართულებით მობრუნების შემთხვევა.



16. 65 სმ დიამეტრიანი საბურავების მქონე ველოსიპედის სიჩქარე 30 კმ/სთ-ია. რამდენ სრულ ბრუნს აკეთებენ ველოსიპედის საბურავები წუთში?

17. დედამიწიდან მზემდე მანძილი დაახლოებით $1,5 \cdot 10^8$ კმ-ია. განსაზღვრეთ წრფივი სიჩქარე $(\frac{\text{კმ}}{\text{სთ}})$, თუ წარმოვიდგენთ რომ დედამიწის შვის გარშემო წრიული მოძრაობისას ერთ სრულ ბრუნს სჭირდება 365 დღე.

18. 2 სმ და 8 სმ რადიუსიანი 2 დისკი ღვედის საშუალებით სურათზე ნაჩვენები წესითაა შეერთებული. იპოვეთ რამდენ ბრუნს აკეთებს წუთში დიდი დისკი, თუ პატარა დისკი 3 ბრუნს ასრულებს. **მითითება:** ორივე დისკის წრეწირზე მყოფი წერტილები ერთი და იგივე წრფივი სიჩქარით მოძრაობენ.



19. იპოვეთ სხეულის t დროში r რადიუსიან წრეწირზე ω კუთხური სიჩქარით გავლილი მანძილი.

ა) $r = 6$ დმ, $\omega = \frac{\pi}{15}$ რად/წმ, $t = 10$ წთ;

ბ) $r = 12$ მ, $\omega = \frac{3\pi}{2}$ რად/წმ, $t = 100$ წმ;

გ) $r = 30$ სმ, $\omega = \frac{\pi}{10}$ რად/წმ, $t = 25$ წმ.



20. წყალმფრქვევს დამაგრებული ადგილიდან 400 მ მანძილზე წრიულად წყლის მიწოდება შეუძლია. თუმცა ფერმერი მხოლოდ 120000 მ² ფართობის მორწყვას გეგმავს. წყალმფრქვევის რამდენ გრადუსიანი კუთხით მობრუნებით შეიძლება ამ ფართობის მორწყვა?

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

პრაქტიკული მეცადინეობა

1) დახაზეთ α ბრუნვითი კუთხე, რომლის დამამთავრებელი გვერდი $P(4; 3)$ წერტილზე გადის. იპოვეთ მანძილი P წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.

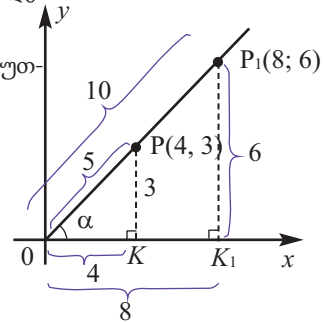
$$OP = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

2) დაწერეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები OPK მართკუთხა სამკუთხედის α მახვილი კუთხისათვის.

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

3) დაწერეთ OP სხივის მომცველი წრფის განტოლება.

$$k = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{3}{4}x$$



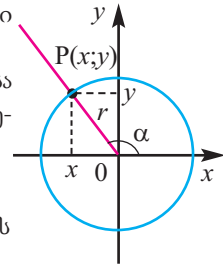
4) შეამოწმეთ, რომ $P_1(8; 6)$ წერტილიც OP სხივზე მდებარეობს და $\triangle OP_1K_1$ -დან დაწერეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები α კუთხისათვის.

$$r_1 = OP_1 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \quad \sin \alpha = \frac{6}{10} \quad \cos \alpha = \frac{8}{10} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8}$$

მე-2 და მე-4 ნაბიჯზე ჩანაწერებში ძირითადად განმარტეთ:

α მობრუნების კუთხის ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების მნიშვნელობები არის თუ არა დამოკიდებული იმაზე, თუ კუთხის გვერდზე რომელ წერტილს ავლენიშნავთ?

კუთხის ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების მნიშვნელობები მხოლოდ კუთხის მნიშვნელობებზეა დამოკიდებული. კოორდინატთა სათავეში ცენტრის მქონე r რადიუსიანი წრეწირისა და α მობრუნების კუთხის დამამთავრებელი გვერდის გადაკვეთის წერტილი იყოს $P(x; y)$.



- P წერტილის ორდინატის რადიუსის სიგრძესთან შეფარდებას α კუთხის სინუსი ეწოდება.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

- P წერტილის აბსცისის რადიუსის სიგრძესთან შეფარდებას α კუთხის კოსინუსი ეწოდება.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

- P წერტილის ორდინატის აბსცისთან შეფარდებას α კუთხის ტანგენსი ეწოდება:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (\text{სადაც } x \neq 0, \text{ ანუ } P \text{ წერტილი ორდინატთა ღერძზე არ მდებარეობს})$$

- P წერტილის აბსცისის ორდინატთან შეფარდებას α კუთხის კოტანგენსი ეწოდება:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (\text{სადაც } y \neq 0, \text{ ანუ } P \text{ წერტილი აბსცისთა ღერძზე არ მდებარეობს})$$

- α კუთხის კოსეკანსი ამ კუთხის სინუსის შებრუნებულია:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y} \quad (\text{სადაც } y \neq 0)$$

- α კუთხის სეკანსი ამ კუთხის კოსინუსის შებრუნებულია:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x} \quad (\text{სადაც } x \neq 0)$$

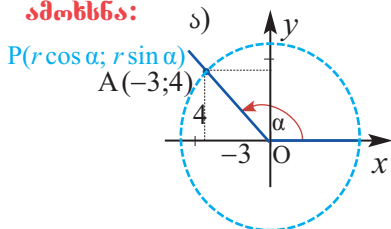
ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ნამუში 1: A (-3; 4) წერტილი α მობრუნებული კუთხის დამამთავრებელ გვერდზე ძევს.

ა) დახაზეთ ამოცანის პირობის ამსახველი სურათი.

ბ) განსაზღვრეთ α კუთხისათვის ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების მნიშვნელობები, წრეწირზე მდებარე წერტილის კოორდინატები.

ამოხსნა:



ბ) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

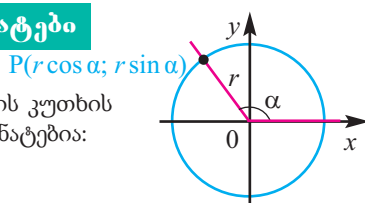
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = -\frac{5}{3} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}$$

წრეწირზე მდებარე წერტილის კოორდინატები

თუ წრეწირზე მოცემული P წერტილი α მობრუნების კუთხის დამამთავრებელ გვერდზე მდებარეობს, მისი კოორდინატებია:

$P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$.



ნამუში 2: სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ P წერტილის კოორდინატები.

P წერტილი II მეოთხედში მდებარეობს და კოსინუსი უარყოფითია.

$$\cos 150^\circ = \frac{x}{r}$$

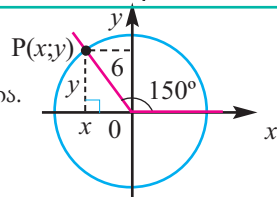
$$\sin 150^\circ = \frac{y}{r}$$

$$-\cos 30^\circ = \frac{x}{6}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{6}$$

$$x = -6 \cos 30^\circ = -3\sqrt{3}$$

$$y = 6 \sin 30^\circ = 3$$



ზოგჯერ კუთხის დამამთავრებელი გვერდი ერთ-ერთ საკოორდი-

ნატო ღერძზე ძევს. ამ შემთხვევაში შექმნილი მობრუნების

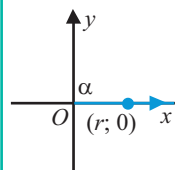
კუთხეების ზომა $\varphi = 0^\circ$ ან $\varphi = 0$ რადიანი, $\varphi = 90^\circ$ ან

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ რადიანი, $\varphi = 180^\circ$ ან $\varphi = \pi$ რადიანი, $\varphi = 270^\circ$

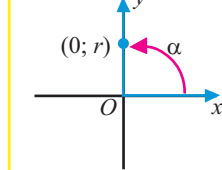
ან $\frac{3\pi}{2}$ რადიანი შეიძლება იყოს. ამ შემთხვევაში x და y კოორდი-

ნატები ან ნულია ან კიდევ აბსოლუტური მნიშვნელობით წრეწირის რადიუსის ტოლია.

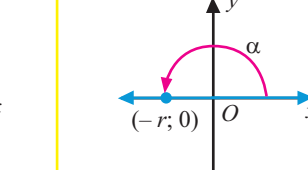
$\alpha = 0^\circ$ ან
0 რადიანს



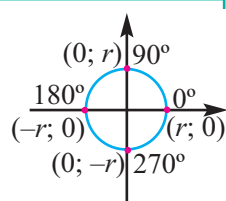
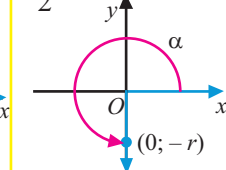
$\alpha = 90^\circ$ ან $\frac{\pi}{2}$ რადიანს



$\alpha = 180^\circ$ ან π რადიანს



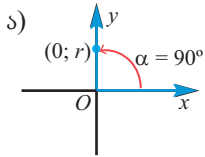
$\alpha = 270^\circ$ ან
 $\frac{3\pi}{2}$ რადიანს



ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მაგნი 3: იპოვეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების მნიშვნელობები, თუ:

ა) $\alpha = 90^\circ$; ბ) $\alpha = 180^\circ$; გ) $\alpha = 270^\circ$.



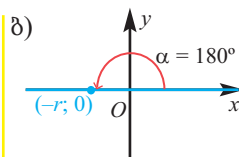
$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{r}{0}$$

არ არის განსაზღვრული.

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{r} = 0$$



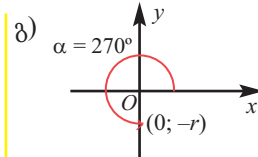
$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-r} = 0$$

$$\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{r}{0}$$

არ არის განსაზღვრული.



$$\sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\operatorname{tg} 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-r}{0}$$

არ არის განსაზღვრული.

$$\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-r} = 0$$

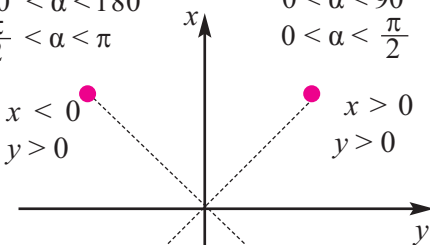
α -ს დასაშვებ თითოეულ მნიშვნელობას $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ -ს ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება. ამიტომ ეს ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები α კუთხის ფუნქციებია. მათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ეწოდება.

რადგან $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, კოსინუსის ნიშანი x -ის ნიშანს ემთხვევა,

რადგან $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, სინუსის ნიშანი y -ის ნიშანს ემთხვევა.

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$



$$180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$0 < \alpha < 90^\circ$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x > 0$$

$$y < 0$$

$$270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

II მეოთხედი

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha, \operatorname{cosec} \alpha & + \\ \cos \alpha, \sec \alpha & - \\ \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha & - \end{array}$$

III მეოთხედი

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha, \operatorname{cosec} \alpha & - \\ \cos \alpha, \sec \alpha & - \\ \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha & + \end{array}$$

I მეოთხედი

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha, \operatorname{cosec} \alpha & + \\ \cos \alpha, \sec \alpha & + \\ \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha & + \end{array}$$

IV მეოთხედი

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha, \operatorname{cosec} \alpha & - \\ \cos \alpha, \sec \alpha & + \\ \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha & - \end{array}$$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

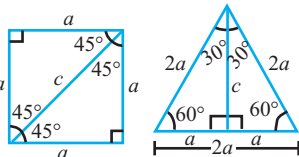
სასწავლო დავალებები

1. 1) განსაზღვრეთ დამამთავრებელი გვერდის მოცემულ წერტილზე გამავალი α მობრუნების კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

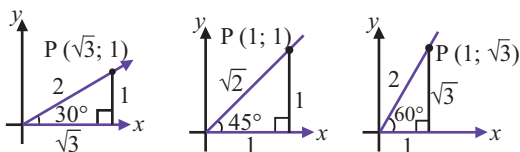
ა) $A(1; 2)$ ბ) $B(2; 4)$ გ) $C(4; 8)$

2) შეადარეთ მიღებული შედეგები.

2. ა) სურათზე მონაცემების მიხედვით განსაზღვრეთ, რომ თუ სამკუთხედის კუთხეებია $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ და $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ მათი გვერდების შეფარდება შესაბამისად იქნება $1:1:\sqrt{2}$, $1:\sqrt{3}:2$.



ბ) სურათზე მოცემული სამკუთხედიდან განსაზღვრეთ $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ -იანი კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები.



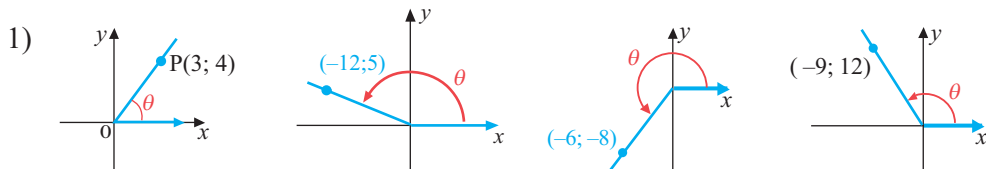
3. განსაზღვრეთ თითოეული კუთხის შესაბამისი ტრიგონომეტრიული თანაფარდობის ნიშანი.

ა) $\sin 20^\circ$ გ) $\cos 100^\circ$ ე) $\tan 250^\circ$ ზ) $\sin 200^\circ$
 ბ) $\cos 50^\circ$ დ) $\tan 140^\circ$ ვ) $\sin 310^\circ$ თ) $\cos 280^\circ$

4. განსაზღვრეთ გამოსახულების ნიშანი.

ა) $\sin \frac{5\pi}{4}$ ბ) $\cos \frac{3\pi}{4}$ გ) $\tan \frac{5\pi}{6}$ დ) $\cotg \frac{11\pi}{6}$

5. დამამთავრებელი გვერდების მოცემულ წერტილზე გამავალი კუთხეებისათვის გამოთვალეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების მნიშვნელობები.



2) ა) $(-12; -9)$ ბ) $(-1; 1)$ გ) $(8; 6)$ დ) $(-1; 0)$
 ე) $(4; -3)$ ვ) $(1; -1)$ ზ) $(-3; -4)$ თ) $(-15; -20)$

6. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ რომელი მეოთხედის კუთხეა α .

ა) $\sin \alpha > 0$ და $\cos \alpha < 0$ ბ) $\sin \alpha < 0$ და $\cos \alpha < 0$
 გ) $\cos \alpha < 0$ და $\tan \alpha > 0$ დ) $\cotg \alpha < 0$ და $\sin \alpha > 0$

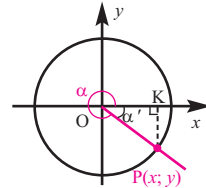
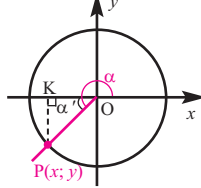
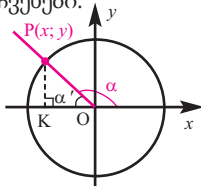
7. უჯრიან ფურცელზე 1 უჯრის ერთეულად ჩათვლით დახაზეთ 5 ერთეულიანი რადიუსის მქონე წრეწირი, რომლის ცენტრიც კოორდინატა სათავეში მდებარეობს.

ა) გამოსახეთ ორი სხვადასხვა მობრუნების კუთხე, რომელთა სინუსი $\frac{3}{5}$ -ის ტოლია.
 ბ) გამოსახეთ მობრუნების კუთხეები, რომელთა კოსინუსი $\frac{4}{5}$ -ის ტოლია.
 გ) გამოსახეთ მობრუნების კუთხეები, რომელთა სინუსი $-\frac{3}{5}$ -ის ტოლია.
 დ) გამოსახეთ მობრუნების კუთხეები, რომელთა კოსინუსი $-\frac{4}{5}$ -ის ტოლია.

ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობის შესაბამისი მახვილი კუთხის მიხედვით პოვნა.

გამოკვლევა: 1) გაავლეთ r რადიუსიანი წრეწირი და დამამთავრებელი გვერდის სხვადასხვა მეოთხედებში მოთავსებით სხვადასხვა მოზრუნების კუთხეები გამოსახეთ ისე, როგორც სურათზეა ნაჩვენები.



2) თითოეული შემთხვევისათვის α მოზრუნების კუთხის ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განსაზღვრების თანახმად გამოსახეთ $P(x; y)$ წერტილის კოორდინატებით.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

3) ΔOPK -ში კატეტების სიგრძეები გამოსახეთ $P(x; y)$ წერტილის კოორდინატებით:

$$PK = |y| \quad OK = |x|$$

4) დაწერეთ ΔOPK -ში ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები α' მახვილი კუთხისათვის:

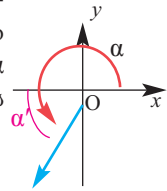
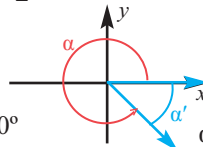
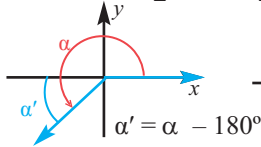
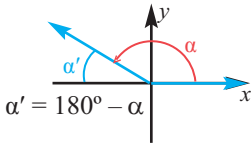
$$\sin \alpha' = \frac{|y|}{r} \quad \cos \alpha' = \frac{|x|}{r} \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{|y|}{|x|} \quad \operatorname{ctg} \alpha' = \frac{|x|}{|y|}$$

5) შეადარეთ მე-2 და მე-4 ნაბიჯებზე მოცემული შედეგები.

90° -ზე მეტი კუთხეების შესაბამისი ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოთვლებისათვის ხელსაყრელი ხდება მათი შესაბამისი მახვილი კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით გამოსახვა. ნებისმიერი α კუთხის შესაბამისი მახვილი კუთხე α' კუთხის დამამთავრებელი გვერდის მიერ აბსცისა ღერძთან შექმნილი α' მახვილი კუთხეა.

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ; \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ; \quad 270^\circ < \alpha < 360^\circ;$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$



შესაბამისი მახვილი კუთხის გამოყენებით, ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების განსაზღვრა შეიძლება. ეს მნიშვნელობები 30° , 45° და 60° -სათვის ზუსტად შეიძლება მოიძებნოს, მახვილი კუთხეების ყველა დანარჩენი მნიშვნელობისათვის კი, კალკულატორის გამოყენებით, მიახლოებით გამოითვლება.

ნიმუში 1: ა) განსაზღვრეთ მოცემული კუთხეების შესაბამისი მახვილი კუთხეები.

$$\text{ა) } \alpha = 300^\circ \quad \text{ბ) } \alpha = \frac{7\pi}{6}$$

ამოხსნა: ა) 300° -იანი კუთხის დამამთავრებელი გვერდი IV მეოთხედშია. შესაბამისი

მახვილი კუთხეა: $360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

ბ) $\frac{7\pi}{6}$ კუთხის დამამთავრებელი გვერდი III მეოთხედშია. შესაბამისი მახვილი კუთხეა:

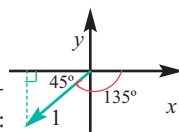
$$\frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$$

ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ნამუშაუ 2: გამოთვალეთ $\alpha = -135^\circ$ -იანი კუთხის ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები. ამოხსნის ნაბიჯები:

1. მოიძებნება დამამთვარებელი გვერდის მოცემულ კუთხესთან თანხვედრაში მყოფი და მისი 360° -მდე შემავსებელი უმცირესი დადებითი კუთხე: $-135^\circ + 360^\circ = 225^\circ$.
2. მოიძებნება 225° -ის შესაბამისი მახვილი კუთხე $225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$.
3. განსაზღვრება მოცემული კუთხის მეოთხედი. -135° -იანი კუთხე III მეოთხედის კუთხეა.
4. 45° -იანი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობისა და III მეოთხედის ნიშნების გათვალისწინებით ჩაიწერება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები.

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad \operatorname{ctg} \alpha = 1$$



ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები შეიძლება განისაზღვროს ქვემოთ მოცემული გზით:

- განსაზღვრეთ შესაბამისი მახვილი კუთხე;
- იპოვეთ მახვილი კუთხის შესაბამისი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები;
- განსაზღვრეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნები იმის მიხედვით, თუ რომელ მეოთხედში მდებარეობს მოცემული კუთხე.

თუ კუთხე მთელი რაოდენობის პერიოდებით იცვლება, მაშინ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები არ იცვლება.

ნებისმიერი α ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$) კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა დამამთავრებელი გვერდების α კუთხესთან თანხვედრაში მყოფი $\alpha + 360^\circ \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების ტოლია.

$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$$

ავღნიშნოთ, რომ კუთხის მთელი პერიოდის ნახევრით შეცვლის დროსაც ტანგენსისა და კოტანგენსის მნიშვნელობები არ იცვლება.

მართლაც, α მობრუნების კუთხის შესაბამისი წერტილი თუ არის $P(a; b)$, მაშინ $\alpha + 180^\circ$ (ან $\alpha + \pi$) მობრუნების კუთხის შესაბამისი წერტილი $P'(-a; -b)$ იქნება, ამიტომ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{და} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$$

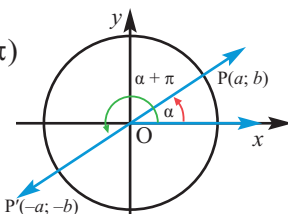
ზოგადად მართებულია ქვემოთ მოცემული ტოლობები:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg} \alpha$$



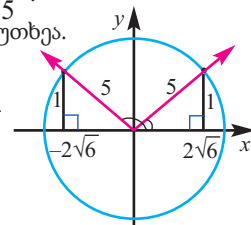
ნამუშაუ 3. იპოვეთ $\cos \alpha$ -ს შესაძლო მნიშვნელობები, თუ $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

რადგან სინუსი დადებითია, კუთხე ან I, ან კიდევ II მეოთხედის კუთხეა.

$$\sin \alpha = \frac{1}{5}, \text{ მაშასადამე, თუ } r = 5, \text{ მაშინ } y = 1.$$

$$\text{შესაბამისი წერტილის აბსცისა } x = \pm \sqrt{r^2 - y^2} = \pm \sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$$

$$\text{მაშინ } \cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{ან} \quad \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$



ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

სასწავლო დაგეგმვები

1. მოცემული კუთხეების მიხედვით გაავლეთ შესაბამისი მახვილი კუთხეები.

- 1) 240° 2) -515° 3) -170° 4) 315° 5) $\frac{25\pi}{4}$ 6) $-\frac{11\pi}{3}$ 7) $-\frac{3\pi}{4}$

2. მოცემული კუთხეებისათვის გამოთვალეთ $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ და $\operatorname{ctg} \alpha$ -ს მნიშვნელობები.



3. კალკულატორის გამოუყენებლად გამოთვალეთ მოცემული კუთხეების შესაბამისი ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.

- 1) $\sin 405^\circ$ 2) $\cos 420^\circ$ 3) $\operatorname{tg} 405^\circ$ 4) $\sin 390^\circ$ 5) $\operatorname{cosec} 450^\circ$
 6) $\operatorname{ctg} 390^\circ$ 7) $\sec 420^\circ$ 8) $\cos \frac{33\pi}{4}$ 9) $\sin \frac{9\pi}{2}$ 10) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$

4. რამდენი გრადუსია -60° -იანი კუთხის შესაბამისი მახვილი კუთხე? იპოვეთ $\cos(-60^\circ)$, $\sin(-60^\circ)$, $\operatorname{tg}(-60^\circ)$, $\operatorname{ctg}(-60^\circ)$. შეადარეთ -60° -იანი და 60° -იანი კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები.

5. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა კალკულატორის გამოყენების გარეშე.

- ა) $\cos(-60^\circ)$ გ) $\sin(-315^\circ)$ ე) $\sin 495^\circ$ ზ) $\cos 600^\circ$
 ბ) $\sin(-120^\circ)$ დ) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$ ვ) $\cos(-225^\circ)$ თ) $\operatorname{tg} 420^\circ$

6. რადგან $\sin 25^\circ \approx 0,42$ და $\cos 25^\circ \approx 0,91$ კალკულატორის გამოუყენებლად გამოთვალეთ:

- ა) $\sin 155^\circ$ გ) $\cos 335^\circ$ ე) $\sin 205^\circ - \cos 155^\circ$
 ბ) $\cos 205^\circ$ დ) $\sin 335^\circ$ ვ) $\cos 385^\circ - \sin 515^\circ$

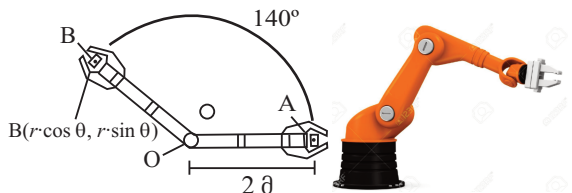
7. ა) ცნობილია, რომ $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ და α კუთხე II მეოთხედის კუთხეა. გამოთვალეთ $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ და $\operatorname{ctg} \alpha$ -ს მნიშვნელობები.

ბ) ცნობილია, რომ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ და α კუთხე IV მეოთხედის კუთხეა. იპოვეთ $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ და $\operatorname{ctg} \alpha$ -ს მნიშვნელობები.

8. კალკულატორის გამოუყენებლად გამოთვალეთ:

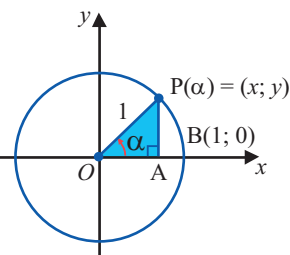
- ა) $\sin 400^\circ - \sin 40^\circ$ ბ) $\frac{\cos 410^\circ}{\cos 50^\circ}$ გ) $\frac{\operatorname{tg} 200^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ}$

9. რობოტმა, რომლის მკლავის სიგრძე 2 მ-ია, საგანი A წერტილიდან B წერტილში გადაიტანა. ამ დროს რობოტის მკლავი 140° -ით იყო მობრუნებული. რობოტის მოძრაობის მობრუნების კუთხის სახით ასახვის მიხედვით იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები.



ერთეულოვანი წრეწარი და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები მხოლოდ α კუთხის მნიშვნელობაზე არის დამოკიდებული და არ არის დამოკიდებული წრეწარის რადიუსზე. ამიტომაც, საერთო წესის დაურღვევლად შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $R = 1$. წრეწარს, რომლის რადიუსია 1-ის ტოლია და ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია ერთეულოვანი წრეწარი ეწოდება. ერთეულოვან წრეწარზე მდებარე წერტილების კოორდინატები $x^2 + y^2 = 1$ განტოლებას აკმაყოფილებენ.



თუ $P(\alpha) = (x; y)$ წერტილი α კუთხის დამამთავრებელი გვერდის ერთეულოვან წრეწართან გადაკვეთის წერტილი იქნება, მაშინ ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა და წერტილის კოორდინატებს შორის არსებული ურთიერთკავშირი შეიძლება გამოისახოს შემდეგნაირად:

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x$$

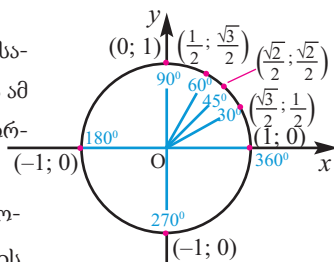
მაშასადამე, ერთეულოვან წრეწარზე ნებისმიერი α წერტილის კოორდინატები $P(\alpha) = (\cos \alpha; \sin \alpha)$ სახით შეიძლება ჩაიწეროს.

ამასთან მოცემული კოორდინატების მიხედვით შეიძლება $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, seca და coseca ტრიგონომეტრიული ფუნქციების პოვნა.

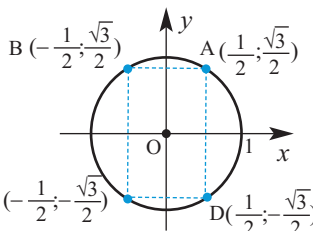
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{seca} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{coseca} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

რადგან $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$ ამიტომ ერთეულოვან წრეწარზე განსაზღვრული მობრუნების შესაბამისი წერტილების კოორდინატების განსაზღვრა შეიძლება. ამისათვის შევასრულოთ ქვემოთ მოცემული მოქმედებები.

1) $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ მობრუნების კუთხეების შესაბამისი წერტილები ავღნიშნოთ ერთეულოვან წრეწარზე და ამ წერტილების კოორდინატები $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$ ფორმულების მიხედვით გამოვთვალოთ.



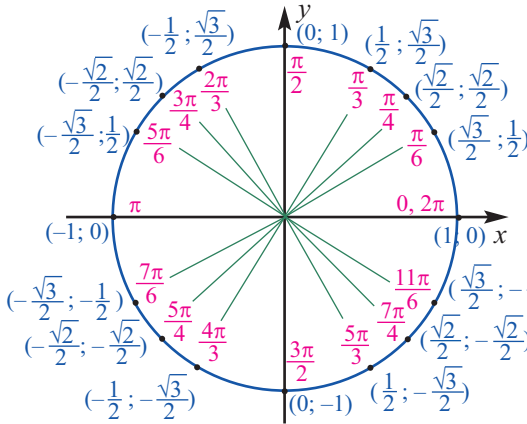
2) განვსაზღვროთ ერთეულოვან რადიუსიან წრეწარზე რომელიმე წერტილის, მაგალითად, $A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ წერტილის შესაბამისი სიმეტრიული წერტილების კოორდინატები. როგორც სურათიდან ჩანს, A წერტილის სიმეტრიული II, III და IV მეოთხედებში მდებარე კიდევ 3 წერტილი არსებობს.



B წერტილი A წერტილის y ღერძის მიმართ, C წერტილი კოორდინატთა სათავეს მიმართ, D წერტილი კი x ღერძის მიმართ არის სიმეტრიული. ამ ოთხი წერტილის შესაბამისი კოორდინატების აბსოლუტური მნიშვნელობები ტოლია. ისინი მხოლოდ ნიშნებით განსხვავდებიან.

3) I მეოთხედში განსაზღვრული სხვა წერტილების კოორდინატებიდან ამ წესის გამოყენებით ახალი წერტილების კოორდინატების განსაზღვრა შეგვიძლია. შედეგად მობრუნებითი კუთხეების და შესაბამისი წერტილების კოორდინატების აღნიშნული ერთეულოვანი წრეწარი მიიღება.

ერთეულოვანი წრეწარი და ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები



ერთეულოვან წრეწარზე ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები

$$-1 \leq x \leq 1 \quad -1 \leq y \leq 1$$

პირობას აკმაყოფილებენ. ანუ:

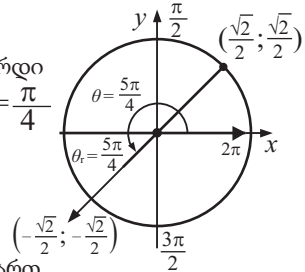
$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

ანუ, $\sin \alpha$ და $\cos \alpha$ -ს უდიდესი მნიშვნელობა 1-ის, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობა -1-ის ტოლია.

ნიმუში 1. $\frac{5\pi}{4}$ მობრუნების კუთხისათვის იპოვეთ ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

ამოხსნა: $\frac{5\pi}{4}$ რადიანის შესაბამისი მობრუნებისას კუთხის გვერდი III მეოთხედშია. ამ კუთხის შესაბამისი მახვილი კუთხე $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$ იქნება. $\frac{5\pi}{4}$ კუთხის დამამთავრებელი გვერდი III მეოთხედში მდებარეობს და მისი დამამთავრებელი გვერდის ერთეულოვან წრეწართან გადაკვეთის წერტილი $\frac{\pi}{4}$ კუთხის შესაბამისი $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ წერტილის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.



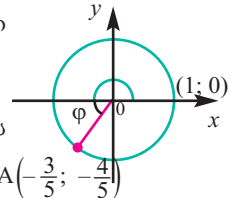
მაშასადამე $\frac{5\pi}{4}$ კუთხის მარცხენა გვერდი ერთეულოვან წრეწარს $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ წერტილში

კვეთს. აქედან $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = 1$, $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} = 1$

ნიმუში 2. აბსცისი $-\frac{3}{5}$ მქონე III მეოთხედში მდებარე A წერტილი ერთეულოვან წრეწართან φ კუთხის გვერდის გადაკვეთის წერტილია.

ა) იპოვეთ A წერტილის ორდინატი.

ბ) დახაზეთ ამოცანის პირობის ამსახველი სურათი და φ კუთხისათვის განსაზღვრეთ ექვსი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა



ამოხსნა $(-\frac{3}{5})^2 + y^2 = 1$, $y^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, $y = \pm \frac{4}{5}$.

ვინაიდან წერტილი III მეოთხედში მდებარეობს $y = -\frac{4}{5}$

b) $\sin \varphi = -\frac{4}{5}$ $\cos \varphi = -\frac{3}{5}$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$ $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{3}{4}$ $\sec \varphi = -\frac{5}{3}$ $\operatorname{cosec} \varphi = -\frac{5}{4}$

ნიმუში 3. იპოვეთ $3 + 2 \sin \alpha$ გამოსახულების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

ამოხსნა: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

ორივე მხარე გაგაძრავლოთ 2-ზე

$$-2 \leq 2 \sin \alpha \leq 2$$

ორივე მხარეს მივუმატოთ 3

$$-2 + 3 \leq 3 + 2 \sin \alpha \leq 2 + 3$$

$$1 \leq 3 + 2 \sin \alpha \leq 5$$

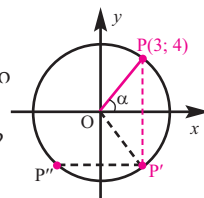
მაშასადამე, $3 + 2 \sin \alpha$ გამოსახულების უმცირესი 1-ის და უდიდესი 5-ის ტოლია.

სასწავლო დავალებები

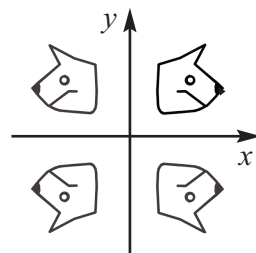
1. ა) ერთეულოვან წრეწარზე რამდენი წერტილი არსებობს, რომლის აბსცისა $\frac{1}{2}$ -ის ტოლია? იპოვეთ ამ წერტილების ორდინატები. მიუთითეთ თითოეული წერტილის შესაბამისი მობრუნების კუთხე. ბ) ერთეულოვან წრეწარზე ორდინატი რამდენი წერტილი არსებობს, რომლის ორდინატი $\frac{1}{2}$ -ის ტოლია? იპოვეთ ამ წერტილების აბსცისები. მიუთითეთ თითოეული წერტილის შესაბამისი მობრუნების კუთხე.
2. იპოვეთ $-\frac{7\pi}{6}$ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები ერთეულოვან წრეწარის გამოყენებით.
3. იპოვეთ $\frac{13\pi}{6}$ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.
4. $A(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ ერთეულოვანი წრეწარისა და φ კუთხის გვერდის გადაკვეთის წერტილია, ააგეთ შესაბამისი ნახაზი. იპოვეთ φ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები.
5. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $\alpha = 30^\circ$.
 ა) $3 \sin \alpha$ ბ) $\sin 3\alpha$ გ) $2 \cos \alpha$ დ) $\cos 2\alpha$
6. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\sin \alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$:
 ა) როცა $\alpha = 30^\circ$ ბ) როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$
7. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $\alpha = 15^\circ$.
 ა) $2 \sin(3\alpha + 15^\circ) + 3 \operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha)$ ბ) $\operatorname{tg}(4\alpha - 15^\circ) - 2 \cos(2\alpha + 30^\circ)$
8. სწორია უტოლობა?
 ა) $\sin 45^\circ + \cos 60^\circ > 1$ ბ) $\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} > 1$
9. იპოვეთ გამოსახულების უმჯ და უმმ.
 ა) $2 + 3 \sin \alpha$ ბ) $1 - \sin \alpha$ გ) $1 + \cos \alpha$ დ) $3 - 2 \cos \alpha$
10. იპოვეთ გამოსახულების უმჯ და უმმ.
 ა) $2 + |\sin \alpha|$ ბ) $2 - |\cos \alpha|$ გ) $1 + \sin^2 \alpha$ დ) $4 + \cos^2 \alpha$
11. შესაძლებელია ტოლობა?
 ა) $\sin \alpha = \frac{7}{12}$ ბ) $\cos \beta = \frac{4}{3}$ გ) $\sin \alpha = \sqrt{5} - 1$ დ) $\cos \beta = \sqrt{2} - 1$
12. ერთეულოვან წრეწარზე უჩვენეთ მოცემული პირობის დამაკმაყოფილებელი α მობრუნების კუთხის შესაბამისი წერტილები.
 ა) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ბ) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ გ) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
13. ერთეულოვან წრეწარზე $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ პირობის დამაკმაყოფილებელი მობრუნების კუთხის შესაბამისი რამდენი წერტილი არსებობს? დაწერეთ ამ წერტილის შესაბამისი მობრუნების კუთხეების ზოგადი გამოსახულება.
14. ცნობილია, რომ ერთეულოვან წრეწარზე $P(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ წერტილის შესაბამისი მობრუნების კუთხეა $\frac{7\pi}{4}$. უჩვენეთ დამამთავრებელი გვერდის ამ კუთხესთან თანხვედრაში მყოფი უარყოფითი კუთხე და იპოვეთ ამ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობა.
15. ერთეულოვანი წრეწარის გამოყენებით $[0; 2\pi]$ შუალედში უჩვენეთ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ტოლობის დამაკმაყოფილებელი მობრუნების კუთხეები.

პრაქტიკული მეცადინეობა

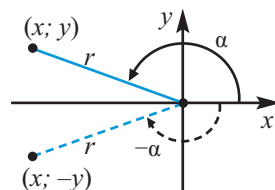
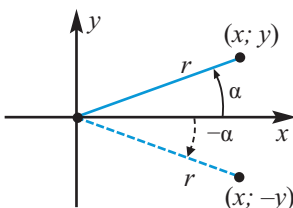
- 1) წერტილზე, რომლის რადიუსი 5-ის ტოლია აღნიშნეთ $P(3; 4)$ წერტილი.
- 2) x ღერძის მიმართ ასახვაში უჩვენეთ P წერტილის გარდაქმნით მიღებული P' წერტილის კოორდინატები.
- 3) P' წერტილი y ღერძის მიმართ ასახვისას რომელ წერტილად გარდაიქმნება?
- 4) შეადარეთ P და P'' წერტილების კოორდინატები.
- 5) P'' და P წერტილები კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულებია?
- 6) თუ P წერტილი α მობრუნების კუთხეს შეესაბამება, P' წერტილი და P'' წერტილი რომელი მობრუნების კუთხეს შეესაბამებან?



საკოორდინატო სიბრტყეზე I მეოთხედში არსებული ობიექტის y ღერძის მიმართ ასახვით იგი II მეოთხედში მოთავსდება. II მეოთხედში მოთავსებული ობიექტის x ღერძის მიმართ ასახვით კი ეს ობიექტი III მეოთხედში მოთავსდება. ის კი I მეოთხედში არსებული საწყისი ობიექტის კოორდინატთა სათავის მიმართ ასახვას ემთხვევა. ამასთან გაითვალისწინეთ, რომ y ღერძის მიმართ ასახვა x ღერძის მიმართ ასახვის 180° მობრუნებით ერთმანეთს ემთხვევა.



x ღერძის მიმართ კუთხის დამამთავრებელი გვერდის ასახვა კი მასზე მდებარე წერტილების კოორდინატებს სურათზე ნაჩვენებივით ცვლის. ანუ, x ღერძის მიმართ ასახვის დროს მხოლოდ y კოორდინატის ნიშანი იცვლება. მაშასადამე, კოსინუსი x კოორდინატზე



დამოკიდებულებით არ იცვლება, სინუსი კი ნიშანს იცვლის. ამრიგად, α და $-\alpha$ კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირი ქვემოთ მოცემული სახისაა:

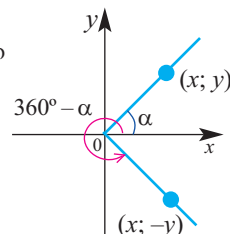
$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

მაშასადამე, **სინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი კენტი ფუნქციებია, კოსინუსი კი ლუწი ფუნქციაა.**

ნიმუში: $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$ $\operatorname{ctg}(-45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$

α და $360^\circ - \alpha$ მობრუნებით კუთხეების დამამთავრებელი გვერდები x ღერძის მიმართ სიმეტრიულია. ანუ: $(x; y) \rightarrow (x; -y)$. აქედან მივიღებთ:

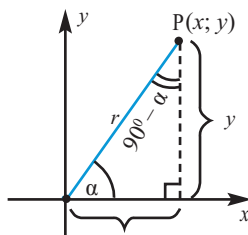
$$\begin{aligned} \sin(360^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$



დაყვანის ფორმულები

α მახვილი კუთხის მქონე მართკუთხა სამკუთხედში α და $90^\circ - \alpha$ მახვილი კუთხეებისათვის დავწეროთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} & \sin(90^\circ - \alpha) &= \frac{x}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} & \cos(90^\circ - \alpha) &= \frac{y}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} & \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \frac{x}{y} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{x}{y} & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$



ტოლობების წყვილ-წყვილად შედარებით α და $90^\circ - \alpha$ კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის არის შემდეგი ურთიერთკავშირი:

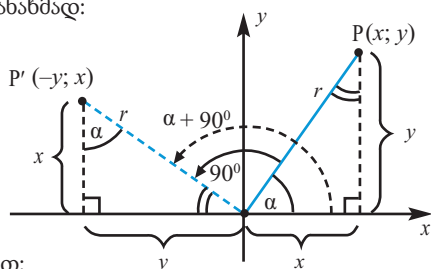
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

α მოზრუნების კუთხის დამამთავრებელი გვერდი კიდეც 90° -ით მოვაზრუნოთ. ამ დროს მათზე არსებული $P(x; y)$ წერტილი $P'(-y; x)$ წერტილად გარდაიქმნება.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრების თანახმად:

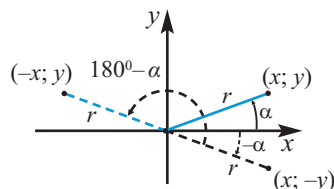
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 90^\circ) &= \frac{x}{r} = \cos \alpha, \\ \cos(\alpha + 90^\circ) &= -\frac{y}{r} = -\sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) &= -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ) &= -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$



ეს ფორმულები დავწეროთ ქვემოთ მოცემულის სახით:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

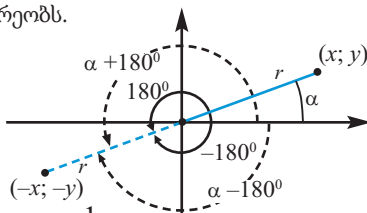
როგორც სურათიდან ჩანს, y ღერძის მიმართ ასახვა x ღერძის მიმართ ასახვის 180° -იანი მოზრუნების ეკვივალენტურია. კოორდინატების ცვლილება შეიძლება გამოისახოს ქვემოთ მოცემული სახით:



$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

როგორც სურათიდან ჩანს, α კუთხის დამამთავრებელი გვერდი 180° -ით მოზრუნებისას მოპირდაპირე პოლუსზე ყოფნით იგივე წრფეზე მდებარეობს.

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$



მაგალიტი 2: $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

დაყვანის ფორმულები

$270^\circ + \alpha$ მობრუნების კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისათვისაც მსგავსი ფორმულების მისაღებად $270^\circ + \alpha = 90^\circ + (180^\circ + \alpha)$ სახით ჩაწერა და შესაბამისი ფორმულების მიმდევრობითი გამოყენება საკმარისია. მაგალითად:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ + (180^\circ + \alpha)) = \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$

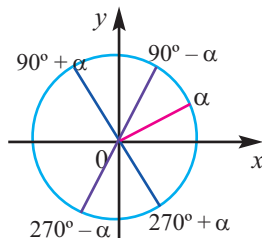
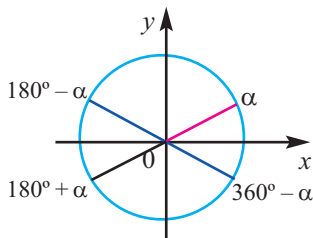
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \cos(90^\circ + (180^\circ + \alpha)) = -\sin(180^\circ + \alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$$

ახლა კი $270^\circ - \alpha$ მობრუნების კუთხეებისათვის დავეწროთ შესაბამისი ფორმულები. მაგალითად:

$$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin(270^\circ + (-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos(270^\circ + (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

მიღებული ფორმულების გამოყენებით ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მოძებნა მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მოძებნაზე დაიყვანება. ამ ფორმულებს დაყვანის ფორმულები ეწოდება. დაყვანის ფორმულებისათვის განსაზღვრული კანონზომიერებების არსებობა ადვილად შეიმჩნევა.



1) თუ არგუმენტი $90^\circ \pm \alpha$ და $270^\circ \pm \alpha$ სახისაა, მაშინ ამ არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქცია α არგუმენტის „შეწყვილებულ“ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციად იქცევა.

(სინუსი კოსინუსად და პირიქით, ტანგენსი კოტანგენსად და პირიქით)

2) თუ არგუმენტი $180^\circ \pm \alpha$, $360^\circ \pm \alpha$ იქნება, მაშინ ამ არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, α არგუმენტის იგივე დასახელების ფუნქციად გარდაიქმნება.

ორივე შემთხვევაში მიღებული ფუნქციის ნიშანი α კუთხის მახვილ კუთხედ მიღების გარდაქმნილი ფუნქციის მოცემულ მეოთხედში არსებულ ნიშანს ემთხვევა.

სასწავლო დაფალები

1. 1) იპოვეთ $\alpha = 32^\circ$ -იანი კუთხის დამამთავრებელი გვერდის:

ა) x ღერძის მიმართ;

ბ) y ღერძის მიმართ;

გ) კოორდინატთა სათავის მიმართ

ასახვით მიღებული უმცირესი დადებითი კუთხე.

2) შეასრულეთ იგივე დავალები, თუ $\alpha = 220^\circ$.

2. გამოთვალეთ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები ორი ხერხით:

1) იმ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გამოთვლით, რომელიც $[0^\circ; 360^\circ]$ შუალედში მდებარეობს და მისი დამამთავრებელი გვერდი მოცემულ კუთხეს ემთხვევა;

2) $-\alpha$ და α კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის არსებული ურთიერთკავშირის გამოყენებით:

ა) $\alpha = -30^\circ$

ბ) $\alpha = -120^\circ$

გ) $\alpha = -60^\circ$

დაყვანის ფორმულები

3. გაამარტივეთ.

ა) $\sin(180^\circ + \alpha)$ ბ) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ გ) $\cos(180^\circ + \alpha)$
 დ) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$ ე) $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)$ ვ) $\cos(180^\circ - \alpha)$

4. $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ იგივეობის ჭეშმარიტება α კუთხის I მეოთხედში მდებარეობის შემთხვევისათვის დაავამტკიცეთ. დაამტკიცეთ იგივეობა კუთხის II მეოთხედში მოთავსებით.

5. $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ იგივეობაა. უჩვენეთ, რომ $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ კუთხეებისათვისაც ჭეშმარიტია.

6. დაყვანის ფორმულების გამოყენებით, მოცემული გამოსახულებები გამოსახეთ მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით და გამოთვალეთ მნიშვნელობები.

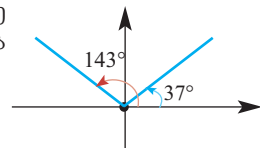
ა) $\cos 210^\circ$ ბ) $\cos 120^\circ$ გ) $\sin 150^\circ$ დ) $\operatorname{tg} 300^\circ$
 ე) $\cos \frac{5\pi}{4}$ ვ) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$ ზ) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$ თ) $\sin \frac{2\pi}{3}$

7. $[0^\circ; 360^\circ]$ შუალედში იპოვეთ ყველა კუთხე, რომლის სინუსიც მოცემული რიცხვის ტოლია. ა) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ბ) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ გ) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. $[0^\circ; 360^\circ]$ შუალედში იპოვეთ ყველა კუთხე, რომლის სინუსიც მოცემული რიცხვის ტოლია. ა) $\sin \alpha = 0,6$ ბ) $\sin \alpha = 0,3$ გ) $\sin \alpha = 0,8$

ნიშუში. $0 \leq \alpha \leq 360$ ინტერვალში იპოვეთ ყველა კუთხე, რომელთა $\sin \alpha = 0,6$.

კალკულატორზე asin დილაკზე დაჭერით (0.6) აკრიფეთ. ეკრანზე გამოჩნდება $\approx 37^\circ$. ვინაიდან სინუსი II მეოთხედშიც დადებითია $180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$ კუთხის სინუსიც $\approx 0,6$ იქნება, რადგან $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.



9. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\sin(\alpha - 180^\circ)$ ბ) $\cos(\alpha - 270^\circ)$ გ) $\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ)$
 დ) $\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2})$ ე) $\cos(\alpha - \pi)$ ვ) $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{3\pi}{2})$

10. გაამარტივეთ:

ა) $\sin^2(\pi + \alpha)$ ბ) $\cos^2(180^\circ - \alpha)$ გ) $\operatorname{ctg}^2(90^\circ + \alpha)$

11. დაიყვანეთ 0° -დან 90° -მდე კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე.

ა) $\sin(-170^\circ)$ ბ) $\cos(-160^\circ)$ გ) $\operatorname{tg} 130^\circ$ დ) $\operatorname{ctg} 320^\circ$

12. უჩვენეთ, რომ მოსაზღვრე კუთხეების სინუსები ტოლია, კოსინუსები კი ურთიერთ-მოპირდაპირე რიცხვებია.

13. დაამტკიცეთ, რომ α, β, γ სამკუთხედის კუთხეებია:

ა) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$ ბ) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$

14. გაამარტივეთ გამოსახულება.

ა) $\frac{\sin 72^\circ}{\cos 10^\circ}$ ბ) $\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ}$ გ) $\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ$ დ) $\sin 72^\circ - \cos 18^\circ$

15. გაამარტივეთ.

ა) $\sin(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) - \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$
 ბ) $\cos(20^\circ - \alpha) + \sin(250^\circ + \alpha)$

ტრიგონომეტრიული იგივეობები

პრაქტიკული მეცადინეობა

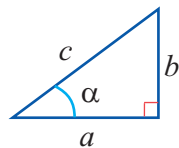
მართკუთხა სამკუთხედში α მახვილი კუთხისათვის $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

უჩვენეთ ეს ქვემოთ მოცემული ნაბიჯებით:

1) დაწერეთ პითაგორას თეორემა: $a^2 + b^2 = c^2$

2) ტოლობის ორივე მხარე გაყავით c^2 -ზე:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$



3) გამოიყენეთ ხარისხის თვისებები:

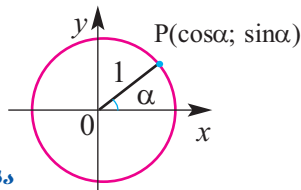
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$$

4) იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{a}{c} = \cos \alpha$ და $\frac{b}{c} = \sin \alpha$ მივიღებთ:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

დამოკიდებულებები ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის

ნებისმიერი α კუთხისათვის $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ იგივეობის მართებულობა ერთეულოვან წრეწირზე აღებული წერტილების კოორდინატების მიხედვითაც ადვილად შეიძლება განიმარტოს.



$x^2 + y^2 = r^2$ **წრეწირის განტოლება**

$x^2 + y^2 = 1$ **ერთეულოვან რადიუსიან წრეწირის განტოლება**

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ **x და y კოორდინატების ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით ჩანაცვლება.**

$\cos \alpha \neq 0$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ნებისმიერი α კუთხისათვის $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\sin \alpha \neq 0$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ნებისმიერი α კუთხისათვის $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

ამ ტოლობიდან მიიღება, რომ ერთდროულად $\cos \alpha \neq 0$ და $\sin \alpha \neq 0$ პირობის დამაკმაყოფილებელი α კუთხისათვის $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ იგივეობა მართებულია.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ტოლობის ორივე მხარეს თუ გავყოფთ $\cos^2 \alpha$ -ზე მივიღებთ:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ქ.ი.} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ტოლობის ორივე მხარეს თუ გავყოფთ $\sin^2 \alpha$ -ზე მივიღებთ:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

ამ ტოლობებს ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები ეწოდება. ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობების მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \begin{cases} \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \begin{cases} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{cases}$$

ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობების დახმარებით მოცემული ტრიგონომეტრიული გამოსახულების გამარტივება და ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიდან ერთის მნიშვნელობის მიხედვით მეორის მნიშვნელობის გამოთვლა ხდება.

ტრიგონომეტრიული იგივეობები

ნამუშაო 1: ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობების გამოყენებით დაამტკიცეთ:

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{2}{\cos x}$$

დამტკიცება:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{(1 + \sin x)^2 + \cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \\ &= \frac{1 + 2\sin x + 1}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{2 + 2\sin x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{2(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{2}{\cos x} \end{aligned}$$

ნამუშაო 2: $\sin \beta = -\frac{4}{5}$ და β კუთხე III მეოთხედის კუთხეა. გამოთვალეთ დანარჩენი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები.

ამოხსნა: $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ ფორმულიდან მივიღებთ, რომ $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$

ვინაიდან β III მეოთხედის კუთხეა $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - (-\frac{4}{5})^2} = -\frac{3}{5}$

$$\text{მაშინ } \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \text{ და } \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{3}{4}$$

სასწავლო დავალებები

1. გაამარტივეთ.

a) $1 - \sin^2 \alpha$

b) $1 - \cos^2 \alpha$

c) $\sin^2 \beta - 1$

d) $\cos^2 \beta - 1$

e) $1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

f) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$

g) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha$

h) $\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

2. თუ $\sin \alpha = 0,6$ და $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ იპოვეთ, $\cos \alpha$ და $\operatorname{tg} \alpha$.

3. თუ $\cos \alpha = 0,8$ და $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ იპოვეთ, $\sin \alpha$ და $\operatorname{ctg} \alpha$.

4. მოწინააღმდეგეთ მიხედვით იპოვეთ β კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები.

ა) $\sin \beta = -\frac{4}{5}$ და $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

ბ) $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ და $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

გ) $\operatorname{tg} \beta = 1$ და $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

დ) $\operatorname{ctg} \beta = -\sqrt{3}$ და $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

5. გაამარტივეთ.

ა) $(1 - \cos^2 \alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$

ბ) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

ბ) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$

დ) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

ე) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} : (1 + (\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha})^2)$

ვ) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} : (1 + (\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha})^2)$

ტრიგონომეტრიული იგივეობები

6. იპოვეთ მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობა, თუ $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

ა) $\frac{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}{\cos \alpha}$

ბ) $\frac{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{4 \sin \alpha + \cos \alpha}$

7. გამარტივეთ გამოსახულება: $\sqrt{4 - 4 \sin^2 \alpha}$

ა) თუ $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

ბ) თუ $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$

8. დაამტკიცეთ იგივეობები.

ა) $\frac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{\sin x} = 2 \cos x$

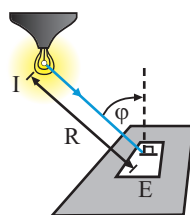
ბ) $\frac{1 + \sec x}{\sin x + \operatorname{tg} x} = \operatorname{cosec} x$

ბ) $\frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \operatorname{tg}^2 x$

დ) $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin x + \cos x} = \sec x$

9. განათება უჩვენებს რაიმე წყაროდან ზედაპირზე დაცემული

სინათლის ნაკადის რაოდენობას და $E = \frac{I}{R^2 \cos \varphi}$ ფორმულით განისაზღვრება. სადაც I არის სინათლის ძალა, R კი მანძილი სინათლის წყაროდან. დაამტკიცეთ, რომ ეს ფორმულა $E = \frac{I \cdot \operatorname{tg} \varphi}{R^2 \sin \varphi}$ ფორმულის ეკვივალენტურია.



10. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, თუ $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

11. გამარტივეთ გამოსახულება და მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მისი მნიშვნელობა.

ა) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$

ბ) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$

თუ $\cos \alpha = 0,1$

თუ $\sin \alpha = -\frac{1}{8}$

12. იპოვეთ $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ნამრავლი, თუ ცნობილია, რომ $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,6$.

13. იპოვეთ $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{4}$.

14. არსებობს თუ არა ისეთი მობრუნების კუთხე, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ ტოლობას?

ა) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ და $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

ბ) $\sin \beta = \frac{1}{3}$ და $\cos \beta = \frac{2}{3}$

გ) $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{4}$ და $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{4}{3}$

დ) $\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{3}$ და $\operatorname{ctg} \theta = \frac{3}{4}$

15. გამარტივეთ გამოსახულება.

ა) $(1 - \sin(-\alpha)) \cdot (1 - \sin \alpha)$

ბ) $\cos(-\alpha) + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2(-\alpha)$

გ) $\frac{1 - \sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} - \operatorname{tg}(-\alpha)$

დ) $\sin^2(-\alpha) + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha)$

16. დაამტკიცეთ, რომ β -ს დასაშვებ მნიშვნელობებში გამოსახულების მნიშვნელობა არ არის β -ზე დამოკიდებული.

ა) $(\sin \beta + \cos \beta)^2 + (\sin \beta - \cos \beta)^2$

ბ) $(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta)^2 - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2$

17. იპოვეთ გამოსახულების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

ა) $3 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha$

ბ) $\sin \alpha - 2 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha$

ტრიგონომეტრიული იგივეობები

პრაქტიკული მეცადინეობა

1) როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ მაშინ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ ტოლობის მართებულობა უჩვენეთ ქვემოთ მოცემული ნაბიჯებით.

ა) ტოლობის მარცხენა მხარეში გამოსახულების მნიშვნელობა გამოთვალეთ α და β -ს მოცემული მნიშვნელობისათვის.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

ბ) იპოვეთ ტოლობის მარჯვენა მხარის გამოსახულების მნიშვნელობა.

$$\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = \sin\frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{3} = 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

2) 45° -იანი და 30° -იანი კუთხის ტრიგონომეტრიული მნიშვნელობების მიხედვით, როგორ შეიძლება გამოვთვალოთ $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ -იანი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები?

ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

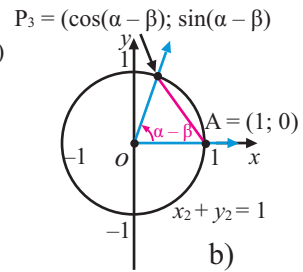
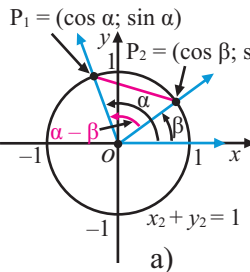
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

▶ ჯერ დავამტკიცოთ იგივეობა $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

ერთეულოვან წრეწირში ა) სურათზე ნაჩვენებია α კუთხის გვერდზე მდებარე P_1 წერტილის კოორდინატები არის $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ და β კუთხის დამამთავრებელ გვერდზე მდებარე P_2 წერტილის კოორდინატები არის $(\cos\beta, \sin\beta)$. $\alpha - \beta$ კუთხე განვითავსოთ როგორც ბ) სურათზე. $\alpha - \beta$ კუთხის დამამ-



თავრებელ გვერდზე მდებარე P_3 წერტილის კოორდინატები იქნება $(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$.

ბმბ ნიშნის თანახმად $\triangle P_1OP_2 \cong \triangle P_3OA$, ამიტომ $P_1P_2 \cong P_3A$.

$$P_1P_2 = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$

ორ წერტილის შორის მანძილის ფორმულა

$$P_3A = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}$$

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2 \quad \text{ტოლობის თვისება}$$

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha \sin\beta + \sin^2\beta =$$

$$= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) \quad \text{სხვადასხვა გამრავლების ფორმულების გამოყენება}$$

$$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) =$$

$$= (\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 \quad \text{შეკრების მოქმედების თვისებებისა და ტრიგონომეტრიული იგივეობების გამოყენება}$$

$$2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \quad \text{ტოლობის თვისება}$$

$$2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = 2\cos(\alpha - \beta) \quad \text{ტოლობის თვისება გამოყენებულია.} \blacksquare$$

შეკრების ფორმულები

► $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ იგივეობის დამტკიცება
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta)$

ვაგვიტოვოთ წინაოთ, რომ $\cos(-\beta) = \cos\beta$ $\sin(-\beta) = -\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ ტოლობის მართებულობა დამტკიცებულია ■

► $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ იგივეობის დამტკიცება

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

დაყვანის ფორმულის თანახმად დაჯგუფება

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

ხსავობის კოსინუსის ფორმულის თანახმად დაყვანის ფორმულების გათვალისწინებით

► $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ იგივეობის დამტკიცება:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

ნიმუში 1. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\cos \frac{7\pi}{12}$.

ამოხსნა: $\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

ნიმუში 2. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ და $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ იპოვეთ $\sin(\alpha - \beta)$ -ს მნიშვნელობა.

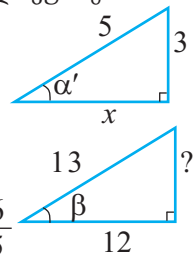
ამოხსნა: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$. თუ α -ს შესაბამისი მახვილი კუთხე α' იქნება $\sin\alpha' = \frac{3}{5}$. როცა მოპირდაპირე კათეტი 3-ია, ჰიპოტენუზა 5

მიმდებარე კათეტი $x = \sqrt{25 - 9} = 4$ და α III მეოთხედის

კუთხეა, ამიტომ $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

რადგან $\cos\beta = \frac{12}{13}$ ანალოგიური წესით მივიღებთ $\sin\beta = \frac{5}{13}$.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = -\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{16}{65}$$



ტანგენსისა და კოტანგენსისათვის შეკრების ფორმულები ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} =$$

ვანსაზღვრებთ თანახმად შეკრების ფორმულების თანახმად

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad \text{მამასადამე:} \\ &= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \end{aligned}$$

პრიცხვებისა და მნიშვნელების

$\cos\alpha \cdot \cos\beta$ ნამრავლზე გაყოფით

ანალოგიური წესით შეიძლება ჩვენება, რომ $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$

შეკრების ფორმულები

სასწავლო დავალებები

1. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\sin 75^\circ$ ბ) $\cos 75^\circ$ გ) $\sin(-15^\circ)$ დ) $\cos 105^\circ$

ე) $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})$ ვ) $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$ ზ) $\sin \frac{\pi}{12}$ თ) $\cos \frac{7\pi}{12}$

2. გაამარტივეთ და გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$ 2) $\sin \frac{3\pi}{5} \cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{3\pi}{5} \sin \frac{\pi}{15}$

3) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$ 4) $\sin \frac{7\pi}{5} \cos \frac{\pi}{15} - \cos \frac{7\pi}{5} \sin \frac{\pi}{15}$

3. შეკრების ფორმულების გამოყენებით შეამოწმეთ ტოლობების მართებულობა.

ა) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ბ) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

გ) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ დ) $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$

4. გაამარტივეთ.

ა) $\sin 12^\circ \cdot \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 18^\circ$ ბ) $\cos 17^\circ \cdot \cos 43^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 43^\circ$

გ) $\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 22^\circ$ დ) $\sin 23^\circ \cdot \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cdot \cos 97^\circ$

5. გაამარტივეთ.

ა) $\cos(36^\circ + \alpha) \cdot \cos(24^\circ - \alpha) - \sin(36^\circ + \alpha) \cdot \sin(24^\circ - \alpha)$

ბ) $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

6. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \cdot \sin 9^\circ}$ ბ) $\frac{\cos 66^\circ \cdot \cos 6^\circ + \sin 6^\circ \cdot \sin 24^\circ}{\cos 65^\circ \cdot \cos 5^\circ + \sin 65^\circ \cdot \sin 5^\circ}$

7. ა) იპოვეთ $\sin(\frac{\pi}{6} + \alpha)$, თუ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ და $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ბ) იპოვეთ $\cos(\frac{\pi}{3} + \beta)$, თუ $\sin \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

8. $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$, α III მეოთხედის, β კი IV მეოთხედის კუთხეა. იპოვეთ:

ა) $\sin(\alpha + \beta)$ ბ) $\cos(\alpha - \beta)$

9. α და β III მეოთხედის კუთხეებია და $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ იპოვეთ:

ა) $\sin(\alpha - \beta)$ ბ) $\cos(\alpha + \beta)$

10. სამკუთხედის ორი მახვილი კუთხის სინუსები შესაბამისად $\frac{7}{25}$ და $\frac{4}{5}$ ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე კუთხის კოსინუსი.

შეკრების ფორმულები

11. გაამარტივეთ.

$$ა) \frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 47^\circ} \quad ბ) \frac{\operatorname{tg} 46^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ}{1 + \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 1^\circ}$$

12. იპოვეთ $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$, თუ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

13. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$ იპოვეთ:

$$ა) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \quad ბ) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

14. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

$$ა) \operatorname{tg} 15^\circ \quad ბ) \operatorname{tg} 75^\circ \quad გ) \operatorname{ctg} 105^\circ$$

15. $\cos 72^\circ \sin 48^\circ + \cos 18^\circ \sin 42^\circ$ გამოსახულების მნიშვნელობა გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულებისა და შეკრების ფორმულების გამოყენებით.

16. გაამარტივეთ.

$$ა) \frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \sin \beta} \quad ბ) \frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$$

17. გაამარტივეთ.

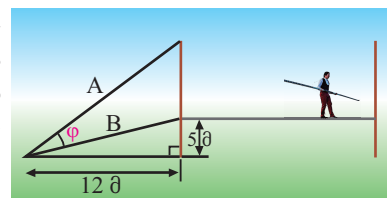
$$ა) \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad ბ) \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8} + \alpha) + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8} - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8} + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8} - \alpha)}$$

18. ა) იპოვეთ $\operatorname{tg} 2\beta$, თუ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -1$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$.

ბ) იპოვეთ, $\operatorname{tg} 2\alpha$, თუ $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 2$, $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = 1$.

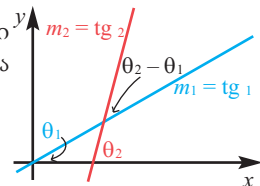
გამოყენებითი დაჯგუფებები

19. თოვზე მოსიარულის მოწყობილობის A თოკი 9 მ სიმაღლის საყრდენზეა დაბმული. თოვზე მოსიარულე B თოვზე 5 მ სიმაღლეზე იმყოფება. A და B თოკები საყრდენიდან 12 მ-ის დაშორებით მიწაშია დამაგრებული. იპოვეთ მათ შორის მოთავსებული ფ კუთხე.



20. ორი წრფის კუთხური კოეფიციენტებია k_1 და k_2 . მათი გადაკვეთისა მიღებული $\theta_2 - \theta_1$ მახვილი კუთხე შეიძლება განისაზღვროს ქვემოთ მოცემული ფორმულით.

$$\operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$



იპოვეთ წრფეთა გადაკვეთიდან მიღებული მახვილი კუთხე თუ ეს წრფეებია:

$$ა) y = 2x - 1 \text{ და } y = \frac{1}{2}x - 1; \quad ბ) y = x + 2 \text{ და } y = 3x - 1.$$

შეკრების ფორმულებიდან მიღებული შედეგები

პრაქტიკული მეცადინეობა

$\sin 70^\circ + \sin 10^\circ$ ჯამი ქვემოთ მოცემული ნაბიჯებით გადააქციეთ ნამრავლად.

1) $\begin{cases} x + y = 70^\circ \\ x - y = 10^\circ \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით იპოვეთ ორი ისეთი კუთხე, რომ ჯამი იყოს 70° -ის, ხოლო სხვაობა 10° -ის ტოლი: $x = 40^\circ$ $y = 30^\circ$

2) $70^\circ = 40^\circ + 30^\circ$, $10^\circ = 40^\circ - 30^\circ$ ჩაწერით გაამარტივეთ მოცემული გამოსახულება.

$$\sin 70^\circ + \sin 10^\circ = \sin(40^\circ + 30^\circ) + \sin(40^\circ - 30^\circ) = \sin 40^\circ \cos 30^\circ + \cos 40^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sin 40^\circ \cos 30^\circ - \cos 40^\circ \sin 30^\circ = 2 \sin 40^\circ \cos 30^\circ = \sqrt{3} \sin 40^\circ$$

ჯამის (სხვაობის) ნამრავლად გარდაქმნა

$$\begin{aligned} \alpha &= x + y \\ \beta &= x - y \end{aligned} \quad , \text{ მაშინ } x = \frac{\alpha + \beta}{2}, y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y =$$

$$= 2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{ანალოგიური წესით მივიღებთ:}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

1. გადააქციეთ ნამრავლად: ა) $\sin 52^\circ + \sin 32^\circ$ ბ) $\sin 72^\circ - \sin 32^\circ$
გ) $\cos 32^\circ + \cos 2^\circ$ დ) $\cos 42^\circ - \cos 22^\circ$

2. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\cos 130^\circ + \sin 80^\circ - \sin 20^\circ$ ბ) $\sin 40^\circ + \sin 120^\circ - \cos 10^\circ$

3. ჯამი (სხვაობა) გარდაქმენით ნამრავლად.

$$\sin 6x + \sin 2x \quad | \quad \cos 4x - \cos 2x \quad | \quad \sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} \quad | \quad \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$$

4. გაამარტივეთ.

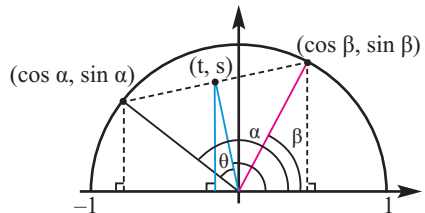
ა) $\frac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha}$ ბ) $\frac{\cos 7\alpha + \cos 2\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}$ გ) $\frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha}$

5. ქვემოთ მოცემული ტოლობები დააკავშირეთ სურათთან და უჩვენეთ, რომ ისინი მართებულია.

$$\theta = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} = s = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} = t = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$



6. წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით: ა) $\frac{1}{2} + \sin \alpha$ ბ) $\frac{1}{2} + \cos \alpha$ გ) $2 \cos \alpha - \sqrt{3}$

შეკრების ფორმულებიდან მიღებული შედეგები

ნამრავლის ჯამად გარდაქმნის ფორმულები

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

ამ იგივეობის მართებულობა ვუჩვენოთ შეკრების ფორმულების გამოყენებით.

ნაწილ-ნაწილ იკრიბება

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

ნაწილ-ნაწილ იკრიბება

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

ქვემოთ მოცემული იგივეობა დაამტკიცეთ ანალოგიური წესით.

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

7. გამოთვალეთ ნამრავლის ჯამად გარდაქმნის იგივეობების გამოყენებით.

ა) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$

ბ) $\sin 105^\circ \cdot \sin 15^\circ$

გ) $\cos 75^\circ \cdot \cos 75^\circ$

8. გამოსახეთ ნამრავლები ჯამის ან სხვაობის სახით.

$$\sin 6x \cdot \sin 2x$$

$$\sin x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 9x \cdot \cos 2x$$

$$\cos \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$$

$$\cos 7x \cdot \cos 3x$$

$$\sin 8x \cdot \sin 4x$$

$$\sin 2x \cdot \cos 3x$$

$$\cos \frac{5x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$$

9. დაამტკიცეთ, რომ $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$.

10. გამოთვალეთ.

ა) $2 \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 20^\circ$

ბ) $2 \sin 40^\circ \cdot \sin 10^\circ + \cos 50^\circ$

11. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\sin 15^\circ \cdot \cos 7^\circ - \cos 79^\circ \cdot \cos 11^\circ - \sin 86^\circ \cdot \sin 4^\circ$

ბ) $\cos 73^\circ \cdot \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \cdot \cos 21^\circ - \cos 86^\circ \cdot \cos 4^\circ$

12. დაშალეთ მამრავლებად.

ა) $\sin 2x \cdot \cos 4x - \sin 6x \cdot \cos 8x$

ბ) $\cos 5x \cdot \cos x - \cos 4x \cdot \cos 2x$

შეკრების ფორმულებიდან მიღებული შედეგები

ორმაგი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

შეკრების ფორმულები $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ გამოსახულებების α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციით გამოსახვის შესაძლებლობას იძლევა.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

ამრიგად, მივიღებთ ორმაგი კუთხის ფორმულებად წოდებულ იგივეობებს:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

ნახევარი არგუმენტის ფორმულები

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

აქედან:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

ამ ფორმულებში α -ს ნაცვლად $\frac{\alpha}{2}$ -ის ჩაწერით მივიღებთ:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

ნახევარი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული იგივეობები:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

ამ ტოლობებში მარჯვენა მხარის ნიშანი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელ მეოთხედში მდებარეობს $\frac{\alpha}{2}$ კუთხე.

ნიმუში 1. გაამარტივეთ გამოსახულება $\sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha$.

ამოხსნა: $\sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$

ნიმუში 2. კალკულატორის გამოუყენებლად იპოვეთ $\sin 2\alpha$ და $\cos 2\alpha$ გამოსახულების

მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ α IV მეოთხედის კუთხეა და $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

ამოხსნა:

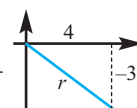
$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2(-\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2(\frac{4}{5})^2 - 1 = \frac{7}{25}$$



შეკრების ფორმულებიდან მიღებული შედეგები

ნიმუში 3. გამოთვალეთ $\cos \frac{\pi}{8}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ ნახევარი კუთხის იგივეობები: $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
 $\frac{\pi}{8}$ კუთხე I მეოთხედში მდებარეობს და ამ მეოთხედში კოსინუსის ფუნქციები დადებითია.

$$\cos \frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (\sqrt{2}/2)}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

სასწავლო დაგეგმვა

13. გამარტივეთ.

ა) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}$

ბ) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \cos \alpha$

გ) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot \sin 2\alpha$

დ) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

14. ცნობილია, რომ $\cos \alpha = -0,8$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. იპოვეთ:

ა) $\sin 2\alpha$

ბ) $\cos 2\alpha$

გ) $\operatorname{tg} 2\alpha$

15. ცნობილია, რომ $\sin \beta = -\frac{13}{12}$ და β III მეოთხედის კუთხეა. იპოვეთ:

ა) $\sin 2\beta$

ბ) $\cos 2\beta$

გ) $\operatorname{tg} 2\beta$

16. გამარტივეთ.

ა) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$

ბ) $\frac{\sin 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\sin \alpha}$

17. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$

ბ) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$

გ) $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$

დ) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$

ე) $\frac{2 \operatorname{tg} 22^\circ 30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22^\circ 30'}$

ვ) $\frac{4 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$

18. იპოვეთ:

ა) $\sin 22^\circ 30'$

ბ) $\cos 22^\circ 30'$

გ) $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$

დ) $\operatorname{tg} 15^\circ$

ე) $\cos 67,5^\circ$

19. ცნობილია, რომ $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. იპოვეთ:

ა) $\sin \frac{\alpha}{2}$

ბ) $\cos \frac{\alpha}{2}$

გ) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

20. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ: $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \left| \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}; \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \left| \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right.$$

21. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ: $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

ა) $\cos \alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ბ) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

შეკრების ფორმულებიდან მიღებული შედეგები

- 22.** ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული იგივეობის გამოყენებით დაამტკიცეთ ქვემოთ მოცემული იგივეობების მართებულობა:

ა) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

ბ) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

- 23.** ცნობილია, რომ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ და $\sin \alpha = \frac{8}{17}$:

ა) იპოვეთ $\sin 2\alpha$ -ს მნიშვნელობა.

ბ) იპოვეთ $\cos 2\alpha$ -ს მნიშვნელობა.

გ) კალკულატორის დახმარებით გამოთვალეთ α კუთხის რადიანული ზომა.

დ) კალკულატორით შეამოწმეთ a და b პუნქტებში წარმოებული გამოთვლების მართებულობა.

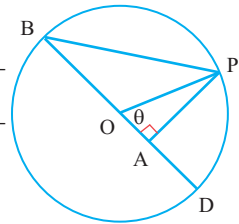
- 24.** დაამტკიცეთ იგივეობები.

ა) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

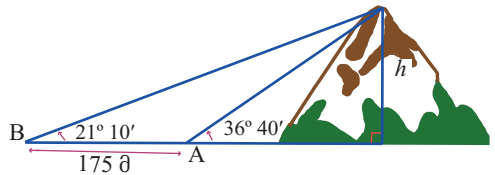
ბ) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

გამოყენებითი დაგვალბები

- 25. გეომეტრია.** O ცენტრის მქონე ერთეულოვან წრეწირზე მონაცემებით დაამტკიცეთ $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ იგივეობის მართებულობა.



- 26.** მთის სიმაღლის გამოთვლისათვის გეგმაზე არჩეულ ორ A და B წერტილის შორის მანძილი 175 მ-ია და გაზომილია ამ წერტილებიდან მთის წვეროზე მიმართული კუთხე.



კუთხეების ზომებია: $\angle A = 36^\circ 40'$, $\angle B = 21^\circ 10'$. რამდენი მეტრია გეგმის მიხედვით ამ მთის სიმაღლე?

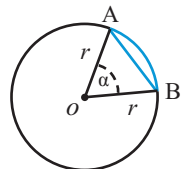
- 27.** დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ $\triangle ABC$ -ში, რომლის კუთხეებია A , B და C მართებულია ქვემოთ მოცემული იგივეობები (გაითვალისწინეთ, რომ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$).

ა) $\sin (\angle A + \angle B) = \sin \angle C$

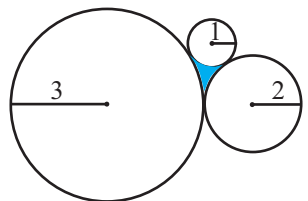
გ) $\cos \angle C = \sin \angle A \cdot \sin \angle B - \cos \angle A \cdot \cos \angle B$

- 28.** ა) უჩვენეთ, რომ სეგმენტის ფართობისათვის $S_{\text{სეგ}} = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin \alpha)$ ფორმულა მართებულია.

ბ) წრეში, რომლის რადიუსი 2 სმ-ია, იპოვეთ იმ სეგმენტის ფართობი, რომელიც 3 სმ-იანი ქორდით არის გამოყოფილი.



- 29.** სამი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 1, 2 და 3 სურათზე ნაჩვენები სახით გარედან ეხება ერთმანეთს. გამოთვალეთ გაფერადებული ფართობი.



ტრიგონომეტრიული გამოსახულებების გამარტივება

ნიმუში 1. გამარტივეთ გამოსახულება $\cos x (\operatorname{tg} x - \sec x)$.

ამოხსნა: $\cos x (\operatorname{tg} x - \sec x) =$
 $= \cos x \cdot \operatorname{tg} x - \cos x \cdot \sec x =$ *გამრავლების განრიგებადობის კანონი.*
 $= \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} =$ *$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ და $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ჩასმა*
 $= \sin x - 1$ *გამარტივება*

ნიმუში 2. გამარტივეთ მამრავლებად დაშლით: $\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$

ამოხსნა: $\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x =$
 $= \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) =$ *საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა*
 $= \cos^2 x \cdot 1 = \cos^2 x$ *$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ფორმულის გამოყენება*

ნიმუში 3. გამარტივეთ გამოსახულება: $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x$

ამოხსნა:
 $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} =$ *$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ჩასმა*
 $= \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} =$ *მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლება-გაყოფა*
 $= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} =$ *გაერთმნიშვნელოანება*
 $= \frac{1 + \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} =$ *$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ფორმულის გამოყენება*
 $= \frac{1}{\cos x} = \sec x$ *გამარტივება*

ნიმუში 4. გაათავისუფლეთ მნიშვნელი ფესვის ნიშნისაგან $\sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} x}}$ სადაც $\operatorname{tg} x > 0$.

ამოხსნა:
 $\sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} x}} = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}} = \sqrt{\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}$

სასწავლო დაფალებები

1. გამარტივეთ ფრჩხილებისაგან განთავისუფლებით.

1) $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$ 3) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin 2\alpha$
 2) $\operatorname{tg} x (\cos x + \operatorname{ctg} x)(1 - \sin x)$ 4) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 - \sec^2 \alpha$

2. დაშალეთ მამრავლებად:

1) $\sin^2 x \cos x + \cos^3 x$ 2) $\sin^4 x - \cos^4 x$ 3) $\sin^3 x + 27$
 4) $4\sin^2 y + 8\sin y + 4$ 5) $3\operatorname{ctg}^2 \beta + 6\operatorname{ctg} \beta + 3$ 6) $2\cos^2 x + \cos x - 3$

ტრიგონომეტრიული გამოსახულებების გამარტივება

3. გამარტივეთ.

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha + 1} & 2) \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - \frac{1}{\cos^2 x} & 3) \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \\
 4) \frac{4\cos^3 x}{\sin^2 x} \cdot \left(\frac{\sin x}{4\cos x}\right)^2 & 5) \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha - 2}{2 \sin \alpha - 4} & 6) \frac{\sin^2 \alpha - 9}{2 \cos \alpha + 1} \cdot \frac{10 \cos \alpha + 5}{3 \sin \alpha + 9}
 \end{array}$$

4. დაწერეთ გამოსახულებები ერთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციით გამოსახული მამრავლების ნამრავლის (მაგალითად, $(\sin x - 3)(1 + 2 \sin x)$) სახით.

$$1) \cos^2 x + 2 \cos x + 1 \qquad 2) \cos x - 2 \sin^2 x + 1 \qquad 3) \sin x - \cos^2 x - 1$$

5. გაათავისუფლეთ მნიშვნელი ფესვის ნიშნისაგან.

$$\text{ა) } \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \qquad \text{ბ) } \sqrt{\frac{\cos^2 y}{2 \sin^2 y}} \qquad \text{გ) } \sqrt{\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}}$$

6. გამარტივეთ.

$$\begin{array}{ll}
 \text{ა) } \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}\right) \cdot \sin 2\alpha & \text{ბ) } \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha} \\
 \text{გ) } \frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} & \text{დ) } \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}
 \end{array}$$

7. დაამტკიცეთ იგივეობა.

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{\cos \theta}{1 - \operatorname{tg} \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \operatorname{ctg} \theta} = \sin \theta + \cos \theta & 2) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} + 1 = 2 \cos^2 \theta \\
 3) \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta} + 1 = 2 \sin^2 \theta & 4) \operatorname{tg} \theta + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \sec \theta \\
 5) \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha & 6) \frac{1 - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \cos^4 \alpha
 \end{array}$$

8. იპოვეთ გამოსახულების უღმ და უმმ.

$$\text{ა) } \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha \qquad \text{ბ) } \sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha \qquad \text{გ) } \sin \alpha + \cos \alpha$$

მითითება: $a \sin x + b \cos x$ გამოსახულება დაწერეთ $c \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot \sin x + \frac{b}{c} \cdot \cos x\right)$ სახით და $\frac{a}{c} = \cos \varphi$, $\frac{b}{c} = \sin \varphi$ აღნიშვნით შემოიტანეთ დამხმარე კუთხე, სადაც $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned}
 \text{ნამუშაო: } \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha &= 2\left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha\right) = \\
 &= 2(\cos 60^\circ \cdot \sin \alpha + \sin 60^\circ \cdot \cos \alpha) = 2 \sin(\alpha + 60^\circ) \qquad \text{უღმ} = 2 \quad \text{უმმ} = -2
 \end{aligned}$$

9. გამარტივეთ გამოსახულება $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$, თუ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

10. გამარტივეთ გამოსახულება $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha}$.

$$\text{ა) თუ } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \qquad \text{ბ) თუ } 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

11. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა: $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ$.

განმაზოგადებელი დაგვლებები

1. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3 : 5. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეების რადიანული ზომები.

2. აქვს თუ არა გამოსახულებას აზრი?

ა) $\sqrt{\sin 170^\circ}$ ბ) $\sqrt{\cos 150^\circ}$ გ) $\sqrt{\lg 200^\circ}$

3. რომელი მეოთხედის კუთხეა α , თუ $|\sin \alpha| = \sin \alpha$, $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$?

4. დაამტკიცეთ, რომ $\lg 1^\circ \cdot \lg 2^\circ \cdot \lg 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg 87^\circ \cdot \lg 88^\circ \cdot \lg 89^\circ = 1$

5. ცნობილია, რომ $\sin 10^\circ = a$, a -ს საშუალებით გამოსახეთ:

ა) $\cos 80^\circ$ ბ) $\cos 100^\circ$ გ) $\sin 170^\circ$ დ) $\sin 190^\circ$

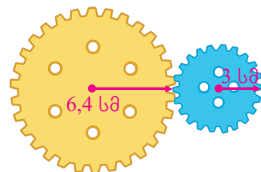
6. გამოთვალეთ კალკულატორის გამოუყენებლად.

ა) $\frac{2\lg \frac{\pi}{8}}{1 - \lg^2 \frac{\pi}{8}}$ ბ) $4\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}$

7. რომელი ტოლობა ჭეშმარიტი და რომელია მცდარი?

ა) $\sin 151^\circ = \sin 29^\circ$ ბ) $\cos 135^\circ = \sin 225^\circ$ გ) $\lg 135^\circ = \lg 225^\circ$
 დ) $\sin 60^\circ = \cos 330^\circ$ ე) $\sin 270^\circ = \cos 180^\circ$ ვ) $\cos(-60^\circ) = -\sin 330^\circ$

8. ორი კბილანებიანი ჩარხიდან ერთის რადიუსია 6,4 სმ, მეორისა კი 3 სმ. რამდენი გრადუსით უნდა მობრუნდეს დიდი ჩარხი, თუ პატარა ჩარხი მობრუნდება 170° -ით?



9. ა) წყალმფრქვევი სისტემა მაქსიმუმ 140° -იანი კუთხით მობრუნებით 35 მეტრ მანძილზე აფრქვევს წყალს. სქემატურად გამოსახეთ მორწყვა შესაძლებელი ნაწილი და გამოთვალეთ ფართობი.

ბ) 70 მ მანძილზე წყლის მიმწვდენი წყალმფრქვევით 3000 მ² ფართობის მორწყვისათვის რამდენი გრადუსით უნდა მობრუნდეს წყალმფრქვევი?

10. დაამტკიცეთ.

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x - \cos x} = -\operatorname{ctg} 2x \quad \frac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 3x$$

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x \quad \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 4x} = \operatorname{tg} 3x$$

11. ცნობილია, რომ $\alpha - \beta = 90^\circ$. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა: $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$.

12. დაამტკიცეთ, რომ: ა) $\cos(60^\circ - \alpha) = \sin(30^\circ + \alpha)$ ბ) $\operatorname{ctg}(80^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(10^\circ + \alpha)$.

13. უჩვენეთ, რომ: $\frac{\cos 20^\circ - \cos 50^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 11^\circ} = \frac{\sin 80^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 29^\circ - \sin 19^\circ}$

განმაზოგადებელი დაგალებები

14. იპოვეთ $\left| \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \right|$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,4$.

15. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)$

ბ) $\sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos^3 \frac{\pi}{16} - \sin^3 \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16}$

17. გამოთვალეთ.

ა) $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$

ბ) $8 \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$

18. გაამარტივეთ: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$

19. იპოვეთ გამოსახულებების მნიშვნელობები, თუ:

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ და $\sin \beta = -\frac{1}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

ა) $\sin(\alpha + \beta)$

ბ) $\cos(\alpha + \beta)$

გ) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

დ) $\sin(\alpha - \beta)$

ე) $\cos(\alpha - \beta)$

ვ) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$

20. გაამარტივეთ.

ა) $\frac{6 \cos 64^\circ}{\sqrt{3} \cos 34^\circ - \sin 34^\circ}$

ბ) $\frac{\cos 36^\circ + \sqrt{3} \sin 36^\circ}{4 \cos 24^\circ}$

21. სითხისმფრქვევით α კუთხით d მანძილზე ობიექტს თუ სითხე ეფრქვევა, უჩვენეთ,

რომ სითხის შეფრქვევის ფართობის

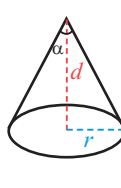
ა) $S = \pi d^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ ამასთან $S = \frac{\pi d^2 (1 - \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha}$ ფორმულებით გამოთვლა

შესაძლებელია.

ბ) რა ფართობზე მოეფრქვევა სითხე, თუ

სითხემფრქვევი $d = 30$ სმ მანძილზე

$\alpha = 45^\circ$ კუთხით აფრქვევს სითხეს?



22. 1) დაამტკიცეთ იგივეობები. ა) $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ბ) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

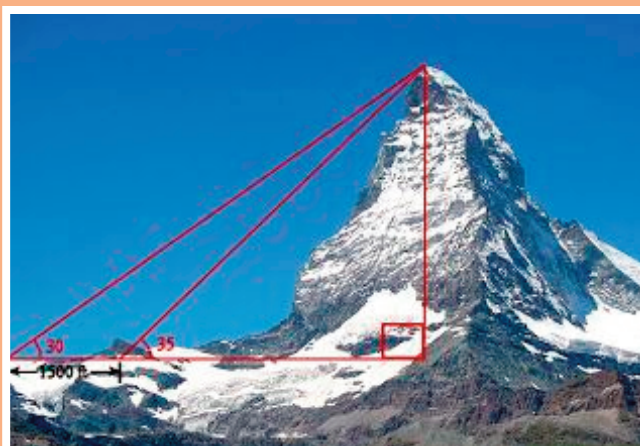
2) იპოვეთ: ა) $\sin 2\alpha$ ბ) $\cos 2\alpha$ თუ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

4

სინუსებისა და კოსინუსების თეორემა

სინუსების თეორემა კოსინუსების თეორემა

XII საუკუნეში მცხოვრებმა და კაცობრიობის მეცნიერების ისტორიაში განსაკუთრებული ადგილის მქონე გენიალურმა აზერბაიჯანელმა მეცნიერმა ნასრედინ თუსიმ დიდი წვლილი შეიტანა ასტრონომიის, მათემატიკისა და ფილოსოფიის მეცნიერებების განვითარებაში. ნასრედინ თუსიმ პირველმა გამოყო ტრიგონომეტრია ასტრონომიისაგან და მოგვცა სინუსების თეორემის დამტკიცება.

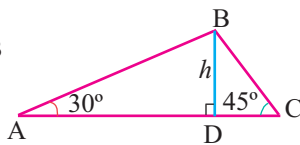


სინუსების თეორემა

პრაქტიკული მეცადინეობა

1) სურათის მონაცემების მიხედვით h -ით გამოსახეთ $\triangle ABC$ -ს AB და BC გვერდები.

2) $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A}$ ტოლობის სისწორე შეამოწმეთ.



3) h -ით გამოსახეთ AC გვერდის სიგრძე და რადგან $\angle B = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$ გამოთვალეთ $\sin \angle B$.

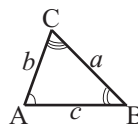
4) იპოვეთ $\frac{AC}{\sin \angle B}$ შეფარდება და იგი მე-2 პუნქტში არსებულ შეფარდებებთან შეადარეთ.

5) რა კავშირი არის $\triangle ABC$ -ს გვერდებსა და მოპირდაპირე კუთხეების სინუსებს შორის?

სინუსების თეორემა

ნებისმიერ $\triangle ABC$ -ში, თუ a , b , c გვერდების შესაბამისად მოპირდაპირე კუთხეებია $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, მაშინ:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$



სამკუთხედის გვერდები მათი მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია.

დამტკიცება: მართკუთხა სამკუთხედისათვის თეორემის სისწორე თქვენ უჩვენეთ.

დავამტკიცოთ თეორემა მახვილკუთხა და ზღაგვეკუთხა სამკუთხედებისათვის სამკუთხედის C წვეროდან AB გვერდზე გაავლოთ h_c სიმაღლე. მიღებული ორივე მართკუთხა სამკუთხედიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{h_c}{b} = \sin \angle A \quad \text{და} \quad \frac{h_c}{a} = \sin \angle B.$$

ზღაგვეკუთხა სამკუთხედიდანაც ჩანს, რომ

$$\frac{h_c}{a} = \sin(180^\circ - \angle B) = \sin \angle B.$$

ამ თანაფარდობებიდან ვიპოვოთ h_c ცვლადი: $h_c = b \sin \angle A$, $h_c = a \sin \angle B$

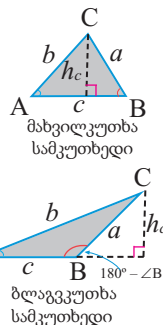
აქედან $b \sin \angle A = a \sin \angle B$ ან $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B}$

ანალოგიური წესით A წვეროდან BC გვერდზე სიმაღლის გავლებით შეიძლება იმის ჩვენება,

რომ $\frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle B}$ ტოლობისთვის თანახმად შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} \quad \text{თეორემა დამტკიცებულია.}$$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ეს შეფარდებები სამკუთხედზე შემთხვევითი წრეწირის დიამეტრის ტოლია.



დასკვნა. 1) სამკუთხედში ტოლი კუთხეების პირდაპირ მდებარე გვერდების სიგრძეები ტოლია.

2) სამკუთხედში მეტი კუთხის პირდაპირ მეტი გვერდი ძვეს და მეტი გვერდის პირდაპირ მეტი კუთხე ძვეს.

სინუსების თეორემა

მართლაც, თუ α და β კუთხეები მახვილია, მაშინ როცა $\alpha > \beta$, მაშინ $\sin \alpha > \sin \beta$. რადგან, $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$, ამიტომ მიიღება, რომ $a > b$. თუ α ზღავე კუთხეა, მაშინ $(180^\circ - \alpha)$ მახვილი კუთხეა, თანაც $(180^\circ - \alpha)$ კუთხე სამკუთხედის β კუთხის არამოსაზღვრე გარე კუთხე β -ზე მეტია. ამიტომაც, $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) > \sin \beta$ აქედან მიიღება, რომ $a > b$.

როდესაც მოცემულია სამკუთხედის ორი კუთხე და ერთი გვერდი, ან ორი გვერდი და ამ გვერდებიდან ერთ-ერთის მოპირდაპირე კუთხე, მაშინ სინუსების თეორემის გამოყენებით შესაძლებელია დანარჩენი კუთხეებისა და გვერდების პოვნა.

I შემთხვევა.

მოცემულია სამკუთხედის ორი კუთხე და ერთი გვერდი.

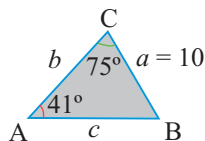
ნიმუში 1. $\triangle ABC$ -ში $a = 10$, $\angle A = 41^\circ$, $\angle C = 75^\circ$

ამოხსნა: რადგან სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180° -ია, ამიტომ მოცემული ორი კუთხის მიხედვით შეგვიძლია ვიპოვოთ მესამე კუთხე, ხოლო სინუსების თეორემის მიხედვით კი ვიპოვოთ დანარჩენი ორი გვერდი.

$$\angle B = 180 - (\angle A + \angle C) = 180 - (41^\circ + 75^\circ) = 64^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} \Rightarrow b = \frac{a \sin \angle B}{\sin \angle A} \Rightarrow \frac{10 \sin 64^\circ}{\sin 41^\circ} \approx \frac{10 \cdot 0,899}{0,656} \approx 13,7$$

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{c}{\sin \angle C} \Rightarrow c = \frac{a \sin \angle C}{\sin \angle A} \Rightarrow \frac{10 \sin 75^\circ}{\sin 41^\circ} \approx \frac{10 \cdot 0,966}{0,656} \approx 14,7$$

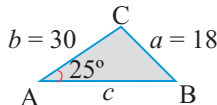


II შემთხვევა. მოცემულია სამკუთხედის ორი გვერდი და ერთი კუთხე.

ნიმუში 2. 1) $\triangle ABC$ -ში $a = 18$, $\angle A = 25^\circ$, $b = 30$

ამოხსნა: $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B}$

$$\sin \angle B = \frac{b \sin \angle A}{a} = \frac{30 \sin 25^\circ}{18} \approx 0,7044$$



0,7044 რიცხვს შევიყვანოთ კალკულატორში $\boxed{\sin^{-1}}$ ღილაკს ავღნიშნავთ და დავინახავთ, რომ B კუთხე $44,8^\circ$ -ია: $\angle B \approx 44,8^\circ$

რადგან $\sin \angle B = \sin (180 - \angle B)$, ამიტომ აქ B კუთხეს მეორე მნიშვნელობაც აქვს: $\angle B \approx 180^\circ - 44,8^\circ = 135,2^\circ$

როცა $\angle B = 44,8^\circ$ მაშინ

$$\angle C = 180^\circ - (25^\circ + 44,8^\circ) = 110,2^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

$$c = \frac{a \sin \angle C}{\sin \angle A}$$

$$c = \frac{18 \sin 110,2^\circ}{\sin 25^\circ} \approx \frac{10 \cdot 0,938}{0,423} \approx 40$$

როცა $\angle B = 135,2^\circ$ მაშინ

$$\angle C = 180^\circ - (25^\circ + 135,2^\circ) = 19,8^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

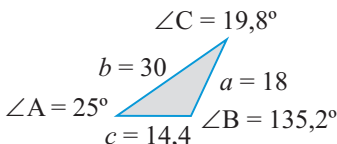
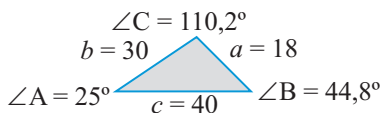
$$c = \frac{a \sin \angle C}{\sin \angle A}$$

$$c = \frac{18 \sin 19,8^\circ}{\sin 25^\circ} \approx \frac{10 \cdot 0,938}{0,423} \approx 14,4$$

სინუსების თეორემა

მაშასადამე, მოცემული მნიშვნელობების შესაბამისი ორი სამკუთხედი არსებობს.

1. $\angle B = 44,8^\circ$, $\angle C = 110,2^\circ$, $c = 40$ 2. $\angle B = 135,2^\circ$, $\angle C = 19,8^\circ$, $c = 14,4$



II შემთხვევისათვის ქვემოთ მოცემული მდგომარეობაც გაითვალისწინოთ.

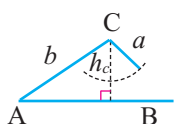
- 1) $\triangle ABC$ -ში $a = 5$, $\angle A = 30^\circ$, $b = 12$

სინუსების თეორემის თანახმად

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} \quad \sin \angle B = \frac{b \sin \angle A}{a} = \frac{12 \cdot \sin 30^\circ}{5} = 1,2$$

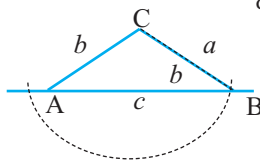
რადგან ნებისმიერი კუთხისათვის, $|\sin \angle B| \leq 1$, ამიტომ არ შეიძლება, რომ $\sin \angle B = 1,2$. მაშასადამე, ასეთი სამკუთხედის აგება შეუძლებელია.

სამკუთხედის ორი გვერდისა და ერთი კუთხის მოცემისას შესაძლო შემთხვევების - სამკუთხედების რაოდენობა გვერდების სიგრძის რიცხვით მნიშვნელობებზე და კუთხის სახეობზე (გრადუსულ ზომებზე) დამოკიდებულებით იცვლება.

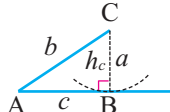


ა) $a < h_c < b$
ამონახსენი არა აქვს

დ) $a = b$ ერთი
ამონახსენი აქვს

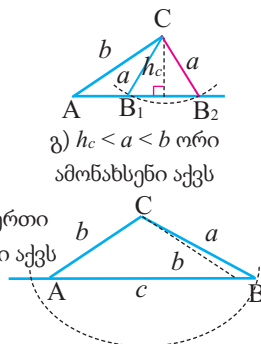


როცა $\angle A \leq 90^\circ$ -ზე



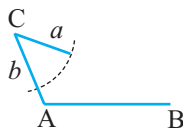
ბ) $a = h_c < b$ ერთი
ამონახსენი აქვს

ვ) $a > b$ ერთი
ამონახსენი აქვს

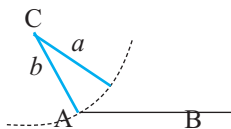


გ) $h_c < a < b$ ორი
ამონახსენი აქვს

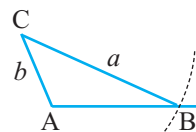
როცა $\angle A > 90^\circ$ -ზე



ა) $a < b$ ამონახსენი
არა აქვს



ბ) $a = b$ ამონახსენი
არა აქვს



ა) $a > b$ ერთი
ამონახსენი აქვს

სასწავლო დავალებები

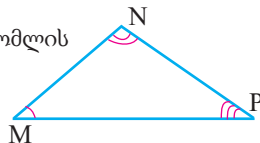
1. იპოვეთ უცნობი კუთხე ან გვერდი.

ა) $\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$ ბ) $\frac{a}{\sin 35^\circ} = \frac{10}{\sin 40^\circ}$

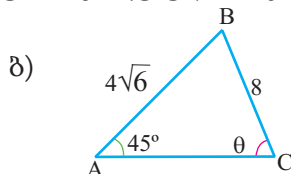
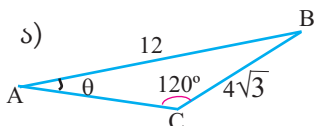
გ) $\frac{\sin \angle B}{12} = \frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{3}}$ დ) $\frac{\sin \angle A}{25} = \frac{\sin 62^\circ}{32}$

სინუსების თეორემა

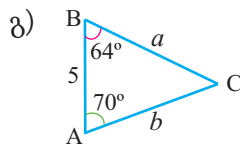
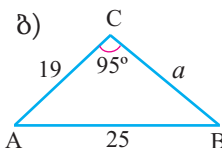
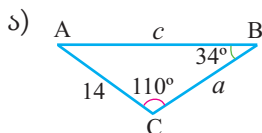
2. დაწერეთ სინუსების თეორემა სამკუთხედისათვის, რომლის წვეროები აღნიშნულია წერტილებით M, N და P.



3. ნახაზის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ θ კუთხის გრადუსული ზომები.



4. იპოვეთ უცნობი გვერდები და კუთხეები.



5. მონაცემების მიხედვით რომელ შემთხვევაშია შესაძლებელი ერთი, რომელ შემთხვევაში ორი სამკუთხედის აგება, რომელ შემთხვევაში ამოცანას არა აქვს ამონახსენი? გამოთვლებით უჩვენეთ.

1) $a = 10, \angle A = 35^\circ, \angle B = 25^\circ$

2) $b = 40, \angle B = 75^\circ, c = 35$

3) $\angle A = 40^\circ, \angle B = 45^\circ, c = 15$

4) $a = 5, \angle A = 42^\circ, b = 7$

5) $a = 40, \angle A = 25^\circ, c = 30$

6) $a = 5, \angle A = 47^\circ, b = 9$

7) $a = 12, \angle A = 94^\circ, b = 15$

8) $a = 15, \angle A = 94^\circ, b = 12$

9) $a = 22, \angle A = 50^\circ, c = 27$

10) $a = 11, \angle A = 50^\circ, c = 20$

6. $\frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sin 80^\circ}$ ტოლობის მიხედვით დახაზეთ სამკუთხედი. იპოვეთ x -ის მნიშვნელობა.

7. მონაცემების მიხედვით დახაზეთ $\triangle ABC$ და იპოვეთ მოთხოვნილი გვერდი.

ა) **მოცემულია:** $\triangle ABC, \angle A = 57^\circ, \angle B = 73^\circ, AB = 24$ სმ.
 $AC = ?$

ბ) **მოცემულია:** $\triangle ABC, \angle B = 38^\circ, \angle C = 56^\circ, BC = 63$ სმ
 $AB = ?$

გ) **მოცემულია:** $\triangle ABC, \angle A = 50^\circ, \angle B = 50^\circ, AC = 27$ მ, $AB = ?$

დ) **მოცემულია:** $\triangle ABC, \angle A = 23^\circ, \angle C = 78^\circ, AB = 15$ სმ, $BC = ?$

8. ა) $\triangle ABC$ -ში $AC = 7$ სმ, $AB = 11$ სმ, $\angle B = 25^\circ$ - ია. იპოვეთ $\angle C$.

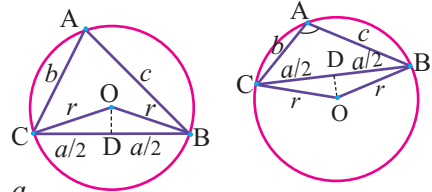
ბ) $\triangle KLM$ -ში $LM = 16,8$ სმ, $KM = 13,5$ სმ, იპოვეთ $\angle L$, თუ $\angle K = 56^\circ$.

ორივე ამოცანაში საძიებელი კუთხის შესახებ "ერთი მახვილია", "ერთი კუთხე ზღაგვია" ორი კუთხის შესაბამისად მოსაზრება მართებულია?

სინუსების თეორემა

9. სამკუთხედის გვერდებიდან ერთის სიგრძე 43 მ-ია, მეორისა კი 11 მ, ამ გვერდებიდან ერთის მოპირდაპირე კუთხე 35° -ია. იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი გვერდი და კუთხეები.

10. დაამტკიცეთ სინუსების თეორემა წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედის გამოყენებით.



დამტკიცების გეგმა: ჯერ უჩვენეთ, რომ $\frac{a}{\sin \angle A} = 2R$, შემდეგ ანალოგიური წესით $\frac{b}{\sin \angle B} = 2R$ და $\frac{c}{\sin \angle C} = 2R$ ტოლობა უჩვენეთ.

11. კუთხეების უფრო ზუსტად გაზომვისათვის გრადუსულ საზომ ერთეულთან ერთად უფრო მცირე ერთეულები მინუტი (') და სეკუნდი (") გამოიყენება. $1^\circ = 60'$ და $1' = 60''$ გათვალისწინებით კუთხეების ზომები გამოსახეთ გრადუსებში ათწილადების სახით.

ა) $20^\circ 15' 36''$

ბ) $45^\circ 12' 18''$

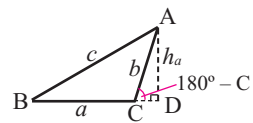
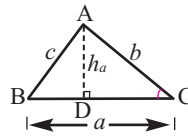
გ) $34^\circ 20' 54''$

12. სამკუთხედის ფართობის ფორმულების თანახმად:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \angle A$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \angle B$$



მონაცემების მიხედვით იპოვეთ სამკუთხედების ფართობები.

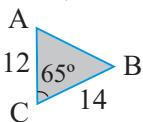
1) $\angle B = 42^\circ$, $a = 6$ მ, $c = 8$ მ

2) $\angle A = 17^\circ 12'$, $b = 10$ სმ, $c = 13$ სმ

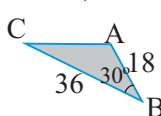
3) $\angle C = 82^\circ 54'$, $a = 4$ დმ, $b = 6$ დმ

4) $\angle C = 75,16^\circ$, $a = 1,5$ მ, $b = 2,1$ მ

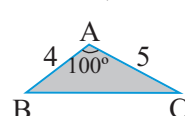
5)



6)

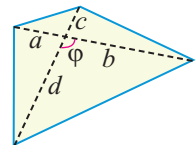


7)



13. დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილი ოთხკუთხედის ფართობი დიაგონალებისა და მათ შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$$



14. ა) პარალელოგრამის დიაგონალები 10 სმ და 12 სმ-ია. მათ შორის კუთხე 60° -ია. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

ბ) ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები $12\sqrt{2}$ სმ-ია. მათ შორის კუთხე 45° -ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობი.

სინუსების თეორემა

15. სინუსების თეორემის ორსვეტიანი ცხრილით დამტკიცება რვეულში დაასრულეთ.

პირობა	საფუძველი
$\frac{1}{2} b c \sin \angle A = \frac{1}{2} a c \sin \angle B = \frac{1}{2} a b \sin \angle C$	
$b c \sin \angle A = a c \sin \angle B = a b \sin \angle C$	
$\frac{b c \sin \angle A}{a b c} = \frac{a c \sin \angle B}{a b c} = \frac{a b \sin \angle C}{a b c}$	
$\frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin \angle B}{b} = \frac{\sin \angle C}{c}$	
$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$	

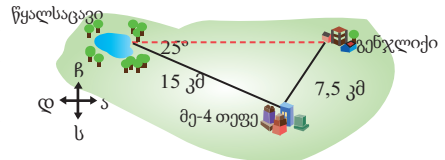
16. თითოეული შესაძლო შემთხვევისათვის ააგეთ შესაბამისი ერთი სამკუთხედი.

- როცა $\triangle ABC$ -ში $\angle A = 30^\circ$, $AC = 50$ სმ, იმისათვის რომ ამოცანას ორი ამონახსენი ჰქონდეს, რომელ ინტერვალში უნდა იცვლებოდეს BC გვერდის სიგრძე?
- $\angle A = 60^\circ$ და $AC = 12\sqrt{3}$ სმ BC გვერდის სიგრძის რომელ ინტერვალში ყოფნისას იქნება შეუძლებელი სამკუთხედის აგება?
- თუ $\angle A = 45^\circ$ და $AC = 18\sqrt{2}$ სმ, BC გვერდის სიგრძის რომელი მნიშვნელობებისათვისაა მხოლოდ ერთი სამკუთხედის ამოხსნა შესაძლებელი?

გამოყენებითი დაგვალბები

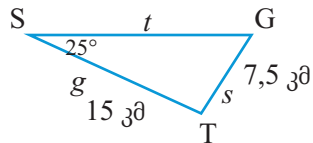
ნიმუში.

წყალსაცავი მე-4 თეფე საცხოვრებელი პუნქტიდან 25° - ჩრდილოეთ - აღმოსავლეთი მიმართულებით 15 კმ. საცხოვრებელი პუნქტი გენჯლიქი კი საცხოვრებელი პუნქტი მე-4 თეფედან ჩრდილო-აღმოსავლეთი მიმართულებით 7,5 კმ მანძილზე მდებარეობს. წყალსაცავიდან რა მანძილზე მდებარეობს საცხოვრებელი პუნქტი გენჯლიქი?



ამოხსნა:

გვერდის შესაბამისად ხელახლა დავზაზოთ სამკუთხედი და წვეროები ობიექტების სახელების შესაბამისად ავლნიშნოთ: წყალსაცავი S -ით, მე-4 თეფე - T , გენჯლიქი - G ასოთი. მანძილების შესაბამისად იყოს s , t და g .



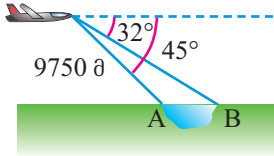
სინუსების თეორემის თანახმად:

$$\frac{s}{\sin \angle S} = \frac{g}{\sin \angle G} \quad \frac{7,5}{\sin 25^\circ} = \frac{15}{\sin \angle G} \quad \sin \angle G = \frac{15 \cdot \sin 25^\circ}{7,5} \approx \frac{15 \cdot 0,4226}{7,5} = 0,8452$$

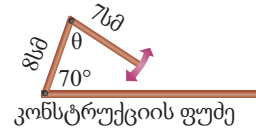
$$\angle G \approx 58^\circ \quad \angle T \approx 180^\circ - 25^\circ - 58^\circ \approx 97^\circ$$

$$\frac{s}{\sin \angle S} = \frac{t}{\sin \angle T} \quad \frac{7,5}{\sin 25^\circ} = \frac{t}{\sin 97^\circ} \quad t \approx \frac{7,5 \cdot \sin 97^\circ}{\sin 25^\circ} = \frac{7,5 \cdot 0,9925}{0,4226} \approx 17,6 \text{ კმ}$$

17. დაკვირვების მწარმოებელი თვითმფრინავიდან ტბის ორ სხვადასხვა ნაპირზე მყოფი A და B წერტილებისადმი დახრის კუთხე შესაბამისად 32° და 45° -ია. სურათზე მითითებული მონაცემების მიხედვით, დაახლოებით რამდენი მეტრია ამ ორ წერტილს შორის სიგანე?

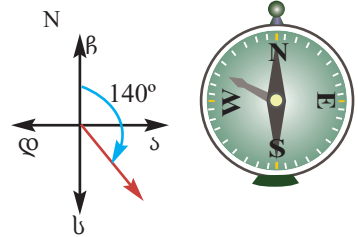


18. 8 სმ სიგრძის ფიცრის ნაჭერი კონსტრუქციის ფუძეზე 70° -იანი კუთხით იყო დაწებებული, 7 სმ სიგრძის ნაჭერი მეორე ბოლოზე და კონსტრუქციის ბოლოზე იყო დამაგრებული. იპოვეთ ამისათვის სურათზე ნაჩვენები θ კუთხის შესაძლო გრადუსული ზომა.

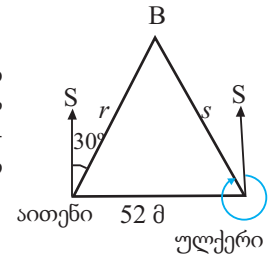


19. **ნავიგაცია**-მოიცავს საზღვაო და საჰაერო გზებზე ტრანსპორტის ადგილისა და მოძრაობის კურსის განსაზღვრის სამუშაოებს.

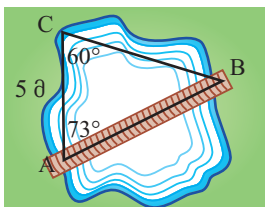
ნავიგაციაში მიმართულება, როგორც წესი აზიმუტით განისაზღვრება. აზიმუტი საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და ჩრდილოეთ მიმართულებასა და მოცემულ მიმართულებას შორის დარჩენილი კუთხეა. მაგალითად, სურათზე 140° აზიმუტია ასახული.



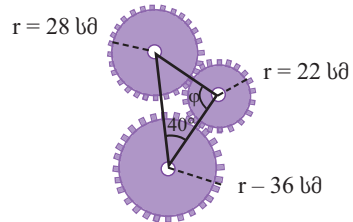
ულქერის იალქნიანი ნავი აითენის ნავიდან აღმოსავლეთ მიმართულებით 52 მ მანძილზე. აითენი ზღვაში მყოფ ცოცხალ ორგანიზმებზე დამკვირვებელ კვლევით სადგურს 30° აზი-მუტით, ულქერი კი 320° აზიმუტით ხედავენ. რამდენ მეტრ მანძილზე იმყოფება ულქერის ნავი კვლევითი სადგურიდან?



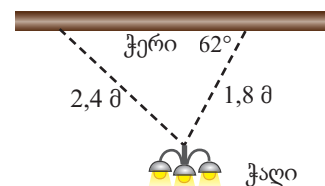
20. **ხიდშენებლობა**. სურათის მონაცემების მიხედვით, რამდენი მეტრი იქნება ასაგები ხიდის სიგრძე?



21. **კონსტრუქცია**. სურათზე მოცემული მოწყობილობის კონსტრუქციის მიხედვით იპოვეთ θ კუთხე.



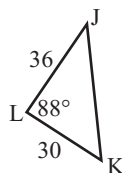
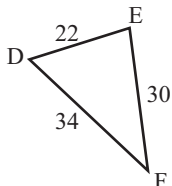
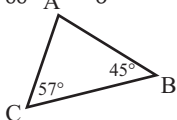
22. ჭალი ფიცრის ჭერზე 1,8 მ და 2,4 მ ჯაჭვითაა დამაგრებული. 1,8 მ სიგრძის ჯაჭვი ჭერთან 62° -იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ კუთხე მეორე ჯაჭვსა და ჭერს შორის.



კოსინუსების თეორემა

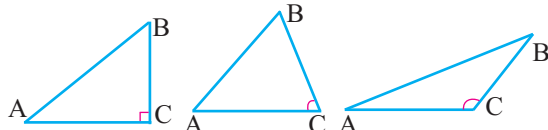
გამოკვლევა 1. მოცემული ზომების მიხედვით თითოეული სამკუთხედისათვის შეასრულეთ დავალებები:

- 1) დაწერეთ სამკუთხედის კუთხეები ზრდის რიგის მიხედვით.
- 2) შესაძლებელია თუ არა სინუსების თეორემის გამოყენებით უცნობი გვერდებისა და კუთხეების პოვნა?



გამოკვლევა 2. 1) რეგულში ჩაიხაზეთ სამკუთხედები მოცემული ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მიხედვით და გაზომეთ მესამე გვერდის სიგრძე.

1. $a = 3$ სმ, $b = 4$ სმ, $\angle C = 90^\circ$
2. $a = 3$ სმ, $b = 4$ სმ, $\angle C = 60^\circ$
3. $a = 3$ სმ, $b = 4$ სმ, $\angle C = 120^\circ$



- 2) ამ სამკუთხედებისათვის შეავსეთ ქვემოთ მოცემული ცხრილი.

სამკუთხედის გვერდები (სმ-ობით)	c^2	$a^2 + b^2$	$2ab \cos \angle C$
$a = 3, b = 4, c = 5$			
$a = 3, b = 4, c = \blacksquare$			
$a = 3, b = 4, c = \blacksquare$			

- 3) შეადარეთ $a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$ და c^2 გამოსახულებების მნიშვნელობები.

კოსინუსების თეორემა

a, b და c გვერდებიან ნებისმიერ ABC სამკუთხედში

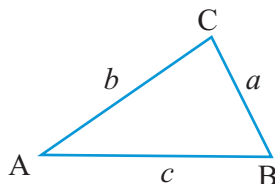
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$$

სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის კვადრატია ტოლია:

დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი.

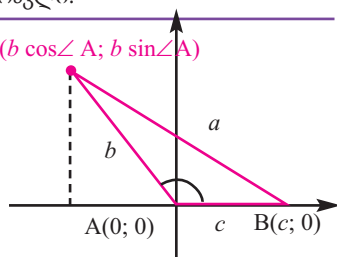


დამტკიცება: კოსინუსების თეორემის დამტკიცები- $C(b \cos \angle A; b \sin \angle A)$

სათვის ABC სამკუთხედი საკოორდინატო სისტემაში ისე მოვათავსოთ, რომ A წვერო კოორდინატა სათავეში აღმოჩნდეს. ამ შემთხვევაში წვეროს წერტილების კოორდინატებია:

$A(0; 0)$, $B(c; 0)$, $C(b \cdot \cos \angle A; b \cdot \sin \angle A)$. ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A - 0)^2 = \\ &= c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A + b^2 \sin^2 \angle A = \\ &= c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A + b^2(\cos^2 \angle A + \sin^2 \angle A) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A \end{aligned}$$



კოსინუსების თეორემა

ამრიგად, დამტკიცდა, რომ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A$.

სამკუთხედის დანარჩენი გვერდებისათვის ფორმულების მართებულობის დამტკიცება სამკუთხედის დანარჩენი კუთხეების (B და C კუთხეების) კოორდინატთა სათავეში მოთავსებით შეიძლება.

შენიშვნა: დავუშვათ, რომ $\angle C = 90^\circ$. რადგან $\cos 90^\circ = 0$, ამიტომ მოცემული $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C$ ფორმულა $c^2 = a^2 + b^2$ სახეს მიიღებს. ეს კი პითაგორას თეორემას გამოსახავს. ამიტომაც კოსინუსების თეორემას ზოგჯერ განზოგადოებულ პითაგორას თეორემასაც უწოდებენ.

ნიმუში 1. სამკუთხედის ამოხსნა მოცემული ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მიხედვით.

ამოხსენით სამკუთხედი, თუ $\triangle ABC$ -ში $a = 12$ სმ, $c = 16$ სმ და $\angle B = 38^\circ$.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$$

კოსინუსების თეორემა

$$b^2 = 144 + 256 - 2 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \cos 38^\circ$$

შეიტანება a, c და $\angle B$ -ს

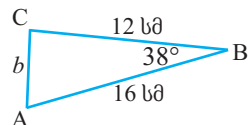
მნიშვნელობები

$$b^2 \approx 400 - 384 \cdot 0,788 \approx 97,4$$

მარტივდება

$$b \approx \sqrt{97,4} \approx 9,87 \text{ (სმ)}$$

ამოიღება კვადრატული ფესვი



როდესაც ცნობილია სამკუთხედის სამი გვერდი და ერთი კუთხე, შეიძლება სინუსების თეორემის გამოყენება. ვიპოვოთ $\angle A$ კუთხე. მონაცემების თანახმად, რადგან a გვერდი c გვერდზე ნაკლებია, მისი წინამდებარე კუთხეც ნაკლები უნდა იყოს, ანუ $\angle A$ არ შეიძლება იყოს ბლაგვი კუთხე.

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} \quad \frac{12}{\sin \angle A} = \frac{9,87}{\sin 38^\circ} \quad \sin \angle A = \frac{12 \sin 38^\circ}{9,87} \approx 0,7485$$

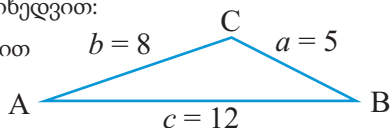
კალკულატორზე $\sin^{-1}$ ღილაკისა და 0,7485 რიცხვის შეყვანით შეიძლება გამოთვლა, რომ $\angle A = \sin^{-1}(0,7485) \approx 48,5^\circ$. უკვე ცნობილია $\triangle ABC$ სამკუთხედის სამი გვერდი და ორი კუთხე. მესამე კუთხე კი სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის ფორმულით შეგვიძლია ვიპოვოთ:

$$180^\circ - (38^\circ + 48,5^\circ) = 93,5^\circ \quad \angle C \approx 93,5^\circ$$

$$a = 12 \text{ სმ}, b = 9,87 \text{ სმ}, c = 16 \text{ სმ}, \angle A \approx 48,5^\circ, \angle B = 38^\circ, \angle C \approx 93,5^\circ$$

ნიმუში 2. სამკუთხედის ამოხსნა სამი გვერდის მიხედვით:

$\triangle ABC$ -ში $a = 5$ სმ $b = 8$ სმ $c = 12$ სმ. ამოხსენით სამკუთხედი.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$$

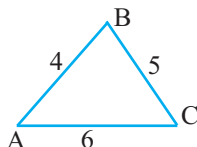
$$\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos \angle A = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{183}{192} \approx 0,9531$$

$$\angle A \approx \cos^{-1}(0,9531) \approx 18^\circ$$

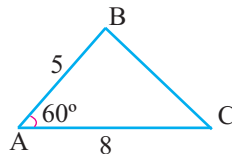
მსგავსი წესით მოიძებნება სამკუთხედის B და C წვეროს კუთხეები.

სასწავლო დაგეგმვა

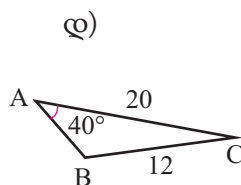
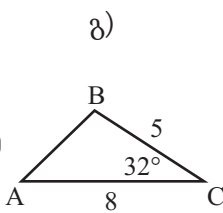
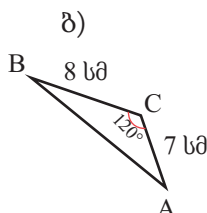
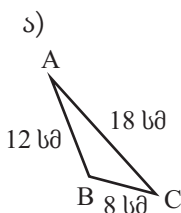
1. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები მისი სამი გვერდის მიხედვით. დაამრგვალეთ პასუხები მეთოდებამდე.



2. სამკუთხედის ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მიხედვით იპოვეთ უცნობი გვერდი და კუთხეები.



3. ამოხსენით სამკუთხედები ნახაზზე მოცემული მონაცემების მიხედვით. პასუხები დაამრგვალეთ მეთოდებამდე.



4. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ საძიებელი სიდიდე. პასუხი დაამრგვალეთ მეთოდებამდე.

1) მოცემულია:

$\triangle ABC$ -ში

$a = 27, b = 22$

$\angle C = 40^\circ$,

იპოვეთ: c გვერდი.

2) მოცემულია: $\triangle ABC$,

$a = 18, c = 15$

$\angle B = 110^\circ$.

იპოვეთ: b გვერდი.

3) მოცემულია:

$\triangle ABC$,

$a = 9, b = 10, c = 11$.

იპოვეთ: $\angle A$

4) მოცემულია: $\triangle ABC$,

$a = 120, b = 90, c = 105$.

იპოვეთ: სამკუთხედის უდიდესი კუთხე.

5) მოცემულია: $\triangle ABC$,

$a = 16, b = 21, c = 19$.

იპოვეთ: სამკუთხედის უმცირესი კუთხე.

5. ა) იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი სიმაღლე, თუ მისი გვერდებია 5 მ, 6 მ და 7 მ.

ბ) იპოვეთ სამკუთხედის უმცირესი სიმაღლე, თუ მისი გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ.

გ) იპოვეთ სამკუთხედის მედიანები, თუ მისი გვერდებია 10 სმ, 12 სმ და 14 სმ.

6. $\triangle ABC$ -ს ამოხსნისათვის გამოიყენეთ სინუსების, კოსინუსებისა და პითაგორას თეორემები. პასუხები დაამრგვალეთ მეთოდებამდე.

ა) $A = 96^\circ, B = 39^\circ, b = 13$

ბ) $A = 34^\circ, b = 17, c = 48$

გ) $A = 48^\circ, B = 51^\circ, c = 36$

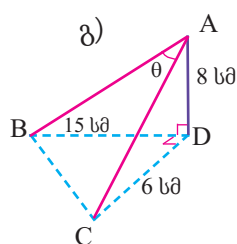
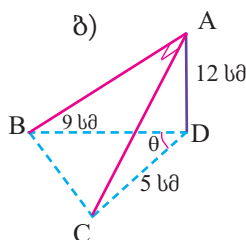
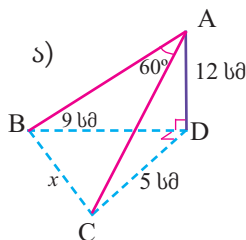
დ) $C = 104^\circ, b = 11, c = 32$

ე) $a = 48, b = 51, c = 36$

ვ) $C = 90^\circ, a = 4, b = 11$

კოსინუსების თეორემა

7. ა) იპოვეთ პარალელოგრამის დიაგონალები, თუ მისი გვერდებია 6 სმ და 8 სმ, მახვილი კუთხე კი 60° -ია.
 ბ) პარალელოგრამის გვერდებია a და b , ხოლო დიაგონალებია d_1 და d_2 დაამტკიცეთ, რომ $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.
8. AD მონაკვეთი $\triangle BCD$ სიბრტყის მართობულია. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადი.



გამოყენებითი დავალებები

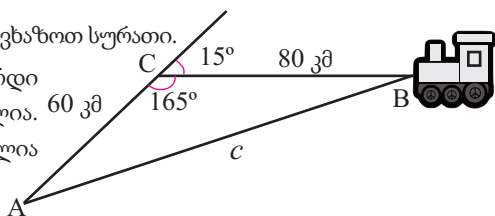
ნიმუში. A პუნქტიდან მოძრაობა დაიწყო მატარებელმა. 60 კმ გაიარა და C პუნქტში მოსვლის შემდეგ, მოძრაობის მიმართულების 15° -იანი კუთხით შეცვლის შემდეგ კიდევ 80 კმ გაიარა. რამდენი კილომეტრით არის დაშორებული მატარებელი A პუნქტიდან?

ამოხსნა: ამოცანის პირობის შესაბამისად დავხაზოთ სურათი.

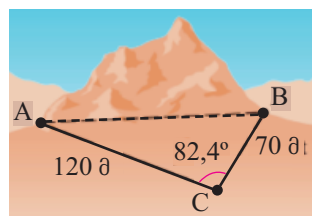
ნახაზიდან ჩანს, რომ სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე ცნობილია. კოსინუსების თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია ვიპოვოთ c წვერო:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$$

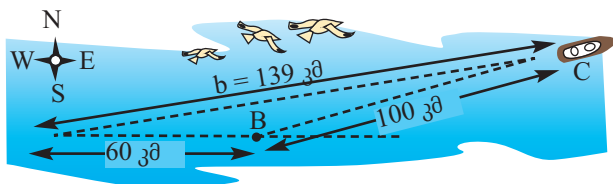
$$c^2 = 80^2 + 60^2 - 2 \cdot 80 \cdot 60 \cos 165^\circ \approx 19273; \quad c \approx 139 \text{ კმ}$$



9. მთის A და B წერტილებს შორის ნაწილში გვირაბის მშენებლობა იგეგმება. სურათის მონაცემების მიხედვით განსაზღვრეთ რამდენი მეტრი იქნება გვირაბის სიგრძე.



10. გემმა 60 კმ აღმოსავლეთით მოძრაობის შემდეგ მიმართულება სურათზე ნაჩვენებით ჩრდილოეთის მიმართულებით შეიცვალა და კიდევ 100 კმ გაიარა.



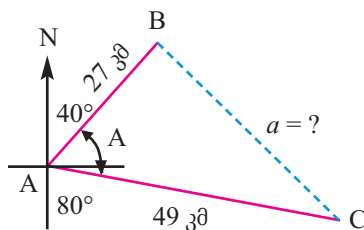
სურათის მონაცემების მიხედვით განსაზღვრეთ აზიმუტის კუთხე.

აზიმუტი არის კუთხე რომელიც იქმნება ჩრდილოეთისა და საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ნაჩვენებ გადაადგილების მიმართულებას შორის.

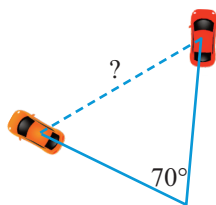
11. A პუნქტიდან მოძრაობის დამწყები ორი გემიდან ერთმა B, მეორემ კი C პუნქტს მიაღწია. ამ მოძრაობების ამსახველი ნახაზის გამოყენებით:

ა) იპოვეთ კუთხე გემების მოძრაობის მიმართულებებს შორის;

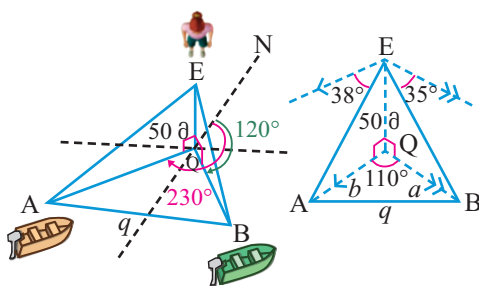
ბ) იპოვეთ მანძილი B და C პუნქტებს შორის.



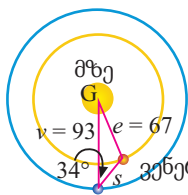
12. შენობის ეზოდან ერთდროულად მოძრაობის დამწყები ორი ავტომობილის მოძრაობის მიმართულებები 70° -იან კუთხეს ქმნიან. მათ შორის ერთის საშუალო სიჩქარე 35 კმ/სთ-ია, მეორისა კი 45 კმ/სთ. ავტომობილებმა 45 წუთის შემდეგ სამუშაო ადგილებს მიაღწიეს. დაახლოებით რამდენი კილომეტრია მანძილი ამ ორ სამუშაო ადგილს შორის?



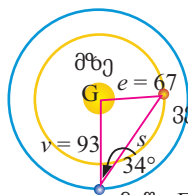
13. ლეილა დგას ხიდეზე და მდინარეში მოძრავ ნაგებს აკვირდება. A გემი 230° , B გემი კი 120° აზიმუტით მოძრაობს. ლეილა ვარაუდობს, რომ A ნავს 38° -ით, B ნავს კი 35° დახრის კუთხით აკვირდება. მოცემული ინფორმაციების თანახმად, იპოვეთ მანძილი ნაგებს შორის.



14. **ასტრონომია.** წელიწადის განსაზღვრულ დროებში დილაობით შესაძლებელია პლანეტა ვენერას ცაზე დანახვა. პლანეტა ვენერასა და მზეს შორის მანძილი დაახლოებით 67 მილიონი მილი, დედამიწასა და მზეს შორის მანძილი 93 მილიონი მილია. უჩვენეთ, რომ თუ მზე და ვენერა 34° -იან კუთხეს ქმნიან, დედამიწასა და ვენერას შორის მანძილი 35 მილიონი მილი ან 119 მილიონი მილი იქნება.

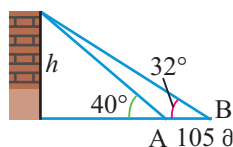


დედამიწა, E



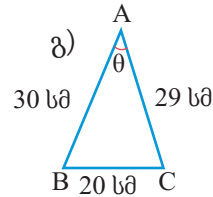
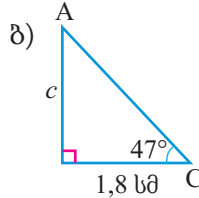
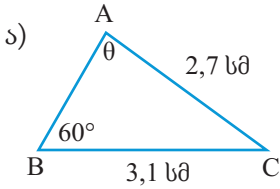
დედამიწა, E

15. ერთმანეთისაგან 105 მ მანძილზე მყოფი A და B წერტილებიდან h სიმაღლის ობიექტის ზედა წვეროსთან კუთხე შესაბამისად 40° და 32° -ია. რას უდრის ობიექტის სიმაღლე?



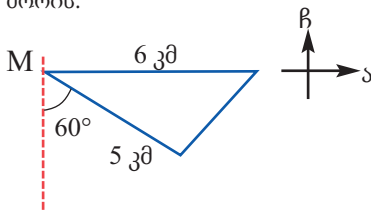
განმაზოგადებელი დაგვლებები

1. ნახაზის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადით აღნიშნული კუთხე ან გვერდი. პასუხები დაამრგვალეთ მეათედებამდე.

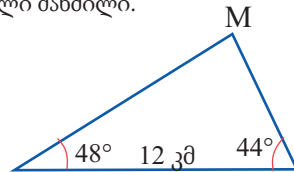


2. ამოხსენით ამოცანები ორი მოთხილამურის M წერტილიდან დაწყებული მოძრაობის შესახებ ინფორმაციის ამსახველი სურათების მიხედვით.

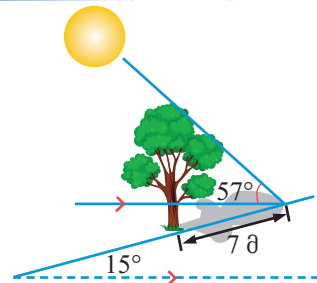
ა) იპოვეთ მანძილი მოთხილამურეთა შორის.



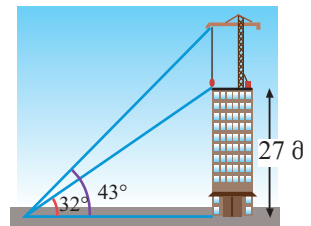
ბ) იპოვეთ თითოეული მოთხილამურის გავლილი მანძილი.



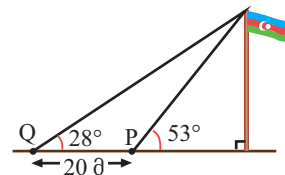
3. განსაზღვრეთ აღმართზე გაზრდილი ხის სიმაღლე, თუ აღმართი ჰორიზონტთან ადგენს 15° -იან კუთხეს, მზის სხივები ჰორიზონტის ხაზთან ქმნის 57° -იან კუთხეს და ხის ჩრდილის სიგრძე 7 მ-ია.



4. ა) შენობის მშენებლობაზე გამოყენებული ამწის უმაღლესი წერტილისა და შენობის უმაღლეს წერტილთან მიწაზე მყოფი დამკვირვებლის გაზომვების თანახმად ამაღლების კუთხეები შესაბამისად 43° და 32° -ია. შენობის სიმაღლე 27 მ-ია. რამდენი მეტრია მანძილი ამწის უმაღლეს წერტილსა და დამკვირვებელს შორის?



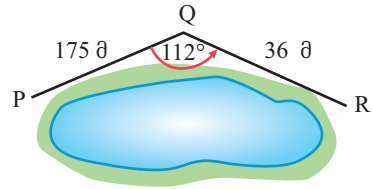
ბ) ელდარს უნდა, რომ განსაზღვროს პარკში დროშის სიმაღლე. მან ჯერ Q, შემდეგ კი P წერტილიდან გაზომა ამაღლების კუთხე. იცოდა რა, რომ ამ ორ წერტილს შორის მანძილი 20 მ-ია გამოთვალა დროშის სიმაღლე. თქვენც გამოთვალეთ დროშის სიმაღლე, თუ ცნობილია, რომ $\angle Q = 28^\circ$ და $\angle P = 53^\circ$.



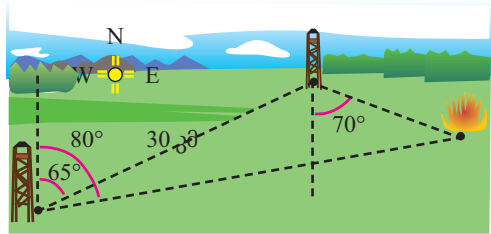
5. ეჭმედმა და რეზადმა ერთი და იგივე წერტილიდან დაიწყეს სირბილი ისეთი მიმართულებით, რომ მათ შორის კუთხე 120° -ია. ეჭმედის სიჩქარე იყო 8 კმ/სთ, ხოლო რეზადის სიჩქარე კი 7 კმ/სთ. რა მანძილი იქნება მათ შორის 30 წუთის შემდეგ? ამოხსენით ამოცანა შესაბამისი სურათის დახატვით.

განმაზოგადებელი დაგვლებები

6. იბრაჰიმი P წერტილიდან R წერტილში, ჯერ Q წერტილში, იქიდან კი R წერტილში წასასვლელი გახდა. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მანძილი P და R წერტილებს შორის.

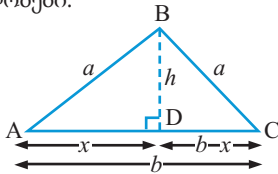


7. სურათის მონაცემების მიხედვით განსაზღვრეთ მანძილი ხანძრის ადგილიდან თითოეულ სადგურამდე.

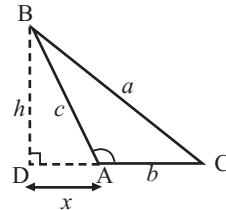


8. ნახაზზე მოცემული სამკუთხედების გამოყენებით დამტკიცეთ კოსინუსების თეორემა.

დამტკიცების გეგმა. 1) სამკუთხედის სიმაღლით შექმნილი ორი მართკუთხა სამკუთხედის ($\triangle ADB$ და $\triangle BDC$) მიხედვით დაწერეთ სხვადასხვა გამოსახულებები და მათი ტოლობები.



2) გამოიყენეთ პითაგორას თეორემა და $\cos(180^\circ - \angle A) = -\cos \angle A$ იგივეობა.

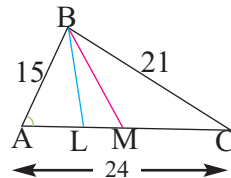


9. პარალელოგრამის გვერდები 10 სმ და 12 სმ-ია. ცნობილია, რომ მცირე დიაგონალი 15 სმ-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა.

10. მოცემულია: $\triangle ABC$, $AB=15$, $BC=21$, $AC=24$
BM-მედიანა, BL-ბისექტრისა.

იპოვეთ:

- 1) $\angle A$ 2) AM და BM 3) AL და BL



11. პოლიციის ვერტმფრენი 400 მ სიმაღლეზე მიფრინავს. პოლიციის მოხელე ჩრდილოეთით გახედვისას 60° დახრის კუთხით შემთხვევის მომხდენ ავტომობილს, ხოლო სამხრეთით გახედვისას 45° -იანი დახრის კუთხით შემთხვევის ადგილისაკენ მიმავალ სასწრაფო დახმარების მანქანას ხედავს.

ა) შემთხვევის ადგილიდან რამდენ კილომეტრ მანძილზე იმყოფება სასწრაფო დახმარების მანქანა?

ბ) რამდენი წუთის შემდეგ იქნება სასწრაფო დახმარების მანქანა შემთხვევის ადგილას, თუ მისი სიჩქარე 100 კმ/სთ-ია?

12. მახვილკუთხა სამკუთხედის ამოხსნის შესახებ რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციის ამსახველი ერთი ამოცანაც თქვენ შეადგინეთ. ამოცანა წარმოადგინეთ საერთო საკლასო განხილვისათვის.



ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

პერიოდული ფუნქციები

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკები

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების
გარდაქმნები

სინუსოიდის აგება ხუთი ძირითადი წერტილის
მიხედვით

**ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და პერიოდული
მოვლენები**

$y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციათა გრაფიკები

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები



პერიოდული ფუნქციები

პერიოდული ფუნქციები

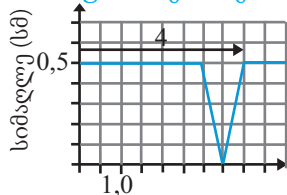
ბუნებაში ბევრი მოვლენაა - მზის ამოსვლა და ჩასვლა, კომეტის დანახვა, სეზონის შესაბამისად ტემპერატურის ცვლილება, ოკეანის ტალღების მიმოქცევა და სხვ.

ბუნებრივი მოვლენები პერიოდულად მეორდება. ამასთან, საწარმოო სფეროებში მოწყობილობების მუშაობის, ავტომობილების ნაწილების მოძრაობის პერიოდული ფუნქციებით მოდელირება შეიძლება.

ქვემოთ მოცემულ მაგალითებზე გამოიკვლიეთ პერიოდული ცვლილებები.

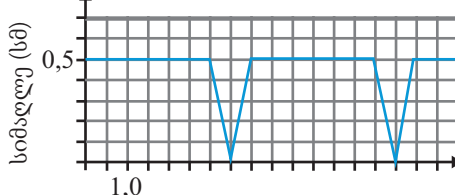
ლენტის მჭრელი მოწყობილობის მუშაობა. გაზომვისათვის მეტრის მოწყობილობის მწარმოებელ კომპანიაში მჭრელი ინსტრუმენტი 3 მ სიგრძის წვრილ ლენტს ჭრის და ლენტების დამრგვალებით მეტრის საზომი ინსტრუმენტი გასაყიდად მზადდება. მოწყობილობის მუშაობის მაჩვენებელი გრაფიკი და განმარტებითი ჩანაწერი კედელზე უნდა ჩამოიკიდოს.

მუშაობა ერთ პერიოდში

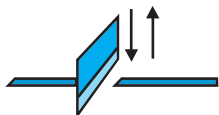


დრო (წმ)

დანის მუშაობის გრაფიკი



დრო (წმ)



1. დანა არაუმეტეს 0,5 სმ-ის სიმაღლეზე იწევს.
2. დანა 3 წამით ჩერდება 0-3, 4-7 წამებში და ა.შ.
3. მე-3 წამიდან 3,5 წამამდე დანა დაბლა იხრება, ლენტი იჭრება; 3,5 - 4 წამით დანა ზევით იწევს.
4. ერთ სრულ პერიოდს 4 წამი ეთმობა.

თქვენი აზრით, მორიგ ჯერზე მერამდენე წამზე გაიჭრება ლენტი?

საზომი ლენტის მომჭრელი მოწყობილობის მუშაობა პერიოდულად მეორდება. ერთი პერიოდი 4 წამი გრძელდება. მოწყობილობის დანის ზედაპირიდან სიმაღლეზე ყოფნის დროის დამოკიდებულების მაჩვენებელი გრაფიკიც, როგორც პერიოდის შესაბამისი გრაფიკის გამეორება არის ნაჩვენები. მორიგ ჯერზე დანა ლენტს გაჭრის 11,5 წამზე.

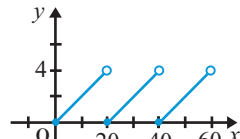
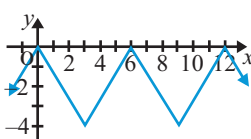
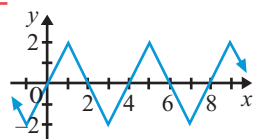
ამ სახის თვისების მატარებელ ფუნქციებს პერიოდული ფუნქციები ეწოდება. პერიოდული ფუნქციების მნიშვნელობები განსაზღვრულ ინტერვალებში მეორდება.

დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი $T \neq 0$ რიცხვი, რომ ფუნქციის არიდან აღებული ნებისმიერი x -ისათვის $x \pm T$ -ც შედის განსაზღვრის არეში და $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას T პერიოდიანი პერიოდული ფუნქცია ეწოდება. თუ T პერიოდია, მაშინ $n \cdot T$ -ც ($n \in \mathbb{Z}$) პერიოდია.

მართლაც, მაგალითად, $f(x \pm 2T) = f(x \pm T) \pm T = f(x \pm T) = f(x)$.

ფუნქციის უმცირეს დადებით პერიოდს, მისი ძირითადი პერიოდი ეწოდება.

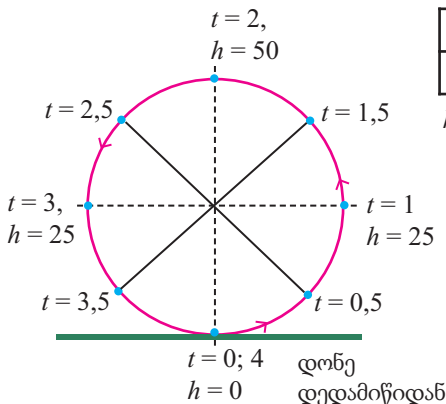
1. გრაფიკების მიხედვით უჩვენეთ ფუნქცია არის თუ არა პერიოდული.



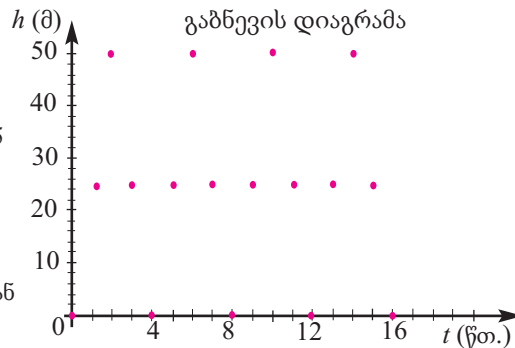
პერიოდული ფუნქციები

2. **კარუსელის მოძრაობა.** 50 მ დიამეტრიანი მოძრავი კარუსელი ერთ სრულ პერიოდს 4 წუთში ასრულებს. ცხრილის მიხედვით $h = 0$ სიმაღლეზე კაბინაში მყოფი პიროვნება დედამიწიდან რა სიმაღლეზე იქნება პირველ, მე-5, მე-9 წუთზე?

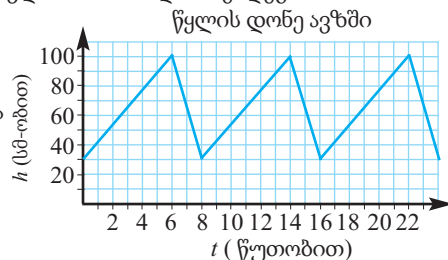
კარუსელზე მყოფი პიროვნების დედამიწიდან სიმაღლის დროზე დამოკიდებულების ცხრილი და საკოორდინატო სიბრტყეზე გაზნევა დიაგრამითაა ნაჩვენები. ცხრილი და დიაგრამა ჩაიხაზეთ რვეულში. შესაბამისი წერტილები ფერადი ფანქრებით კარუსელის თითოეული მთელი ბრუნის ცალკე ჩვენების პირობით შეაერთეთ.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h	0	25	50	25	0	25	50	25	0



3. ავზიდან წყალი განსაზღვრული დროის განმავლობაში ჩამოდის, შემდეგ თავდაპირველ დონემდე ივსება და ისევ განსაზღვრული დროის განმავლობაში ჩამოდის და ა.შ.
- 1) რა დრო სჭირდება ავზის ერთხელ ავსებასა და დაცლას?
 - 2) იპოვეთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა არე.
 - 3) რას უდრის წყლის სიღრმე ავზში მე-60 წუთზე?
 - 4) მომდევნო ჯერზე, როდის იქნება წყლის სიღრმე ავზში 1 მეტრი?



ტრიგონომეტრიული ფუნქციების პერიოდულობა

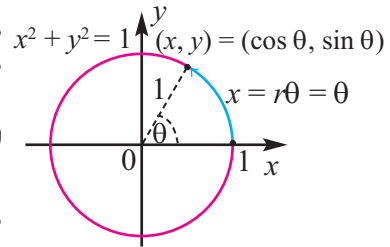
თუ დავაკვირდებით მოზრუნების კუთხეებს, რომელთა დამამთავრებელი გვერდები ემთხვევა ერთმანეთს, დავინახავთ, რომ მათი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ემთხვევა ერთმანეთს. მაგალითად, x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ მაშასადამე, ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობები მეორდება. სინუსისა და კოსინუსის ფუნქციების მნიშვნელობა 2π , ტანგენსის ფუნქციის მნიშვნელობები კი π პერიოდით მეორდება, x რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქცია x რადიანი კუთხის ერთსახელა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას ეწოდება. კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ყველა თვისება (ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა და სხვ.) რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციისათვისაც იგივეა. ამ ფუნქციების გრაფიკების აგებისათვის სიგრძით პერიოდის ტოლი მონაკვეთის აგება და ამ ნაწილის გაყოფა საკმარისია.

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკები

$y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი

პერიოდული ფუნქცია წრეწირზე მოძრაობისას θ კუთხემდე მობრუნებისას წერტილის x ღერძიდან სიმაღლეს (ჰორიზონტალურ მანძილს) უჩვენებს. ერთეულოვან წრეწირზე თითოეული წერტილის კოორდინატები $x^2 + y^2 = 1$ განტოლების დამაკმაყოფილებელი $(x; y) = (\cos \theta; \sin \theta)$ -ია, სადაც θ კუთხე ერთეულოვანი რადიუსის x ღერძის დადებით მიმართულებასთან შექმნილი კუთხეა. მაშასადამე, $(x; y)$ წერტილი წრეწირის გარშემო იცვლება და მის y კოორდინატს $\sin \theta$ განსაზღვრავს.

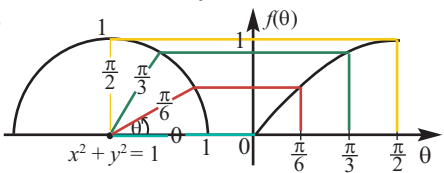
წერტილის წრეწირის რკალის გასწვრივ ცვლილებასა და $f(\theta) = \sin \theta$ ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის ერთმნიშვნელოვანი დამოკიდებულება არსებობს. ერთეულოვანი წრეწირის I მეოთხედში მდებარე რკალი დაფოთ სამ ტოლ რკალად და თუ დაფოფის



წერტილებიდან $(0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$ აბცისთა ღერძის

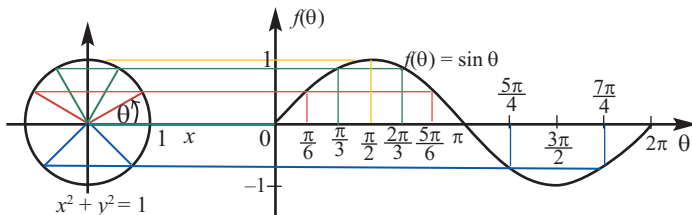
პარალელურ წრფეებს გავავლებთ ამ წრფეების

შესაბამისად $x = 0, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2}$ წრფეებთან გადაკვეთის წერტილებს ავღნიშნავთ, შესაბამის წერტილებს შევაერთებთ, მივიღებთ სურათზე მოცემულ გრაფიკს.

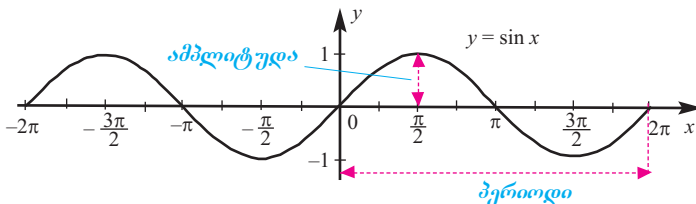


ცნობილია, რომ ერთეულოვან წრეწირზე სრული მობრუნება 360° ან 2π რადიანია.

$f(\theta) = \sin \theta$ ფუნქციის გრაფიკი $[0; 2\pi]$ შუალედში ავაგოთ ანალოგიური წესით:



ვინაიდან სინუსი პერიოდული ფუნქციაა 2π სიგრძის შუალედში $f(\theta) = \sin \theta$ ფუნქციის გრაფიკი მეორდება. არგუმენტისათვის x -ის, ფუნქციისათვის y აღნიშვნის გამოყენებით ფუნქცია ჩავწეროთ $y = \sin x$ სახით. $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი $[-2\pi; 2\pi]$ ინტერვალში ქვემოთ მოცემული სახისა იქნება:

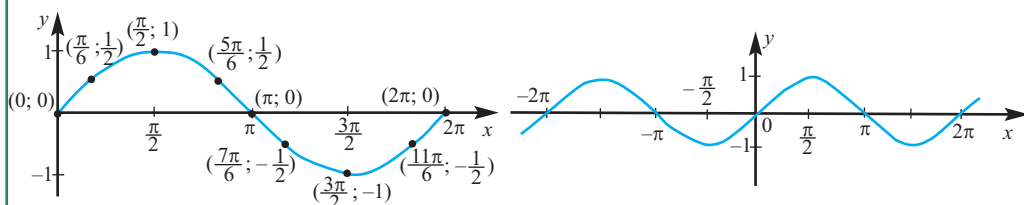


$y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკს (რომლის ამპლიტუდა არის 1, პერიოდი კი 2π) სინუსოიდა ეწოდება.

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკები

$y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება მნიშვნელობათა ცხრილის დახმარებითაა შეიძლება. ვინაიდან სინუსი პერიოდული ფუნქციაა, გრაფიკის 2π სიგრძის $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე აგება საკმარისია. ცხრილში მოცემული წერტილები განვითავსოთ საკოორდინატო სისტემაზე და გლუვი მრუდით შევაერთოთ. მიღებული გრაფიკი $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკია და სინუსოიდა ეწოდება.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$(x; y)$	$(0; 0)$	$(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; 1)$	$(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2})$	$(\pi; 0)$	$(\frac{7\pi}{6}; -\frac{1}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}; -1)$	$(\frac{11\pi}{6}; -\frac{1}{2})$	$(2\pi; 0)$



მნიშვნელობათა ცხრილი, ამასთან გრაფიკი უჩვენებს, რომ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი კოორდინატთა სათავეზე $(0; 0)$ წერტილზე გადის. x -ის მნიშვნელობის 0-დან $\frac{\pi}{2}$ -მდე გაზრდისას y -ის მნიშვნელობა 0-დან 1-მდე იზრდება; x -ის მნიშვნელობის $\frac{\pi}{2}$ -დან π -მდე ზრდისას y -ის მნიშვნელობა 1-დან 0-მდე მცირდება; x -ის მნიშვნელობის π -დან $\frac{3\pi}{2}$ -მდე ზრდისას y -ის მნიშვნელობა 0-დან -1-მდე მცირდება; x -ის მნიშვნელობა $\frac{3\pi}{2}$ -დან 2π -მდე ზრდისას y -ის მნიშვნელობა -1-დან 0-მდე იზრდება.

$y = \sin x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილისა და გრაფიკის საფუძველზე ჩამოვყალიბოთ მისი თვისებები:

1. განსაზღვრის არე არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე
2. მნიშვნელობათა არეა $[-1; 1]$ მონაკვეთი
3. $\sin x$ ფუნქცია კენტი ფუნქციაა. $\sin(-x) = -\sin x$ ანუ სინუსოიდა სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.
4. 2π პერიოდიანი პერიოდული ფუნქციაა: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
5. სინუსოიდა აბცისთა ღერძს $\dots, -2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi, \dots$ და ა.შ. წერტილებში გადაკვეთს, ანუ როცა $x = \pi n$, მაშინ $y = \sin x$ ფუნქცია 0-ად იქცევა.

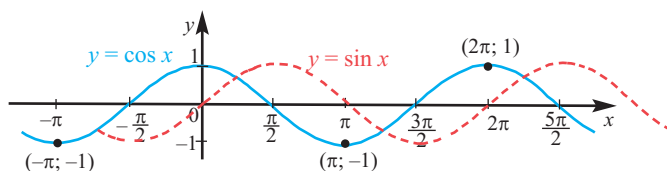
სინუსოიდა კოორდინატთა სათავეზე გადის.

6. ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა 1-ია და ამ მნიშვნელობას x -ის $\dots, -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \dots$ ანუ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) მნიშვნელობებში იღებს.
7. ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა -1-ია და ამ მნიშვნელობას x -ის $\dots, -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{2} \dots$ ანუ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) მნიშვნელობებში იღებს.

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკები

$y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკი

$y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე $y = \sin x$ ფუნქციის ანალოგიური წესით ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით გეომეტრიული ხერხით, ასევე მნიშვნელობათა ცხრილის მიხედვით შეიძლება, რადგან $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ამიტომ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის $\frac{\pi}{2}$ -ით მარცხნივ მოცურებით $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება.



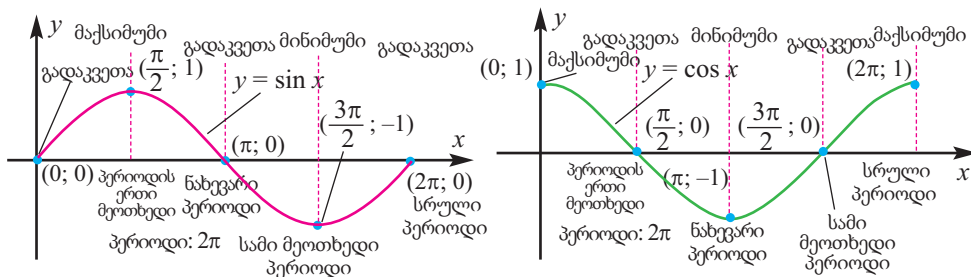
$y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის საფუძველზე ჩამოვაცალიბოთ მისი თვისებები:

1. განსაზღვრის არე არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. $x \in \mathbb{R}$
2. მნიშვნელობათა არეა $[-1; 1]$ მონაკვეთი.
3. $y = \cos x$ ლუწი ფუნქციაა (გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ).
4. პერიოდული ფუნქციაა, რომლის ძირითადი პერიოდია 2π . $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
5. გრაფიკი აბსცისთა ღერძის $\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ და ა. შ. წერტილებზე გადის, ანუ როცა $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) მაშინ $y = \cos x$ ფუნქცია ნულად იქცევა..
გრაფიკი ორდინატთა ღერძს $(0; 1)$ წერტილში კვეთს.
6. ფუნქციის მაქსიმუმის მნიშვნელობა 1-ია და ამ მნიშვნელობას x -ის $\dots, -2\pi; 0; 2\pi; 4\pi, 6\pi, \dots$ ანუ $x = 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) მნიშვნელობებში იღებს.
7. ფუნქციის მინიმუმის მნიშვნელობა -1 -ია და ამ მნიშვნელობას x -ის $\dots, -\pi; \pi; 3\pi; 5\pi, \dots$ ანუ $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) მნიშვნელობებში იღებს.

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ გრაფიკების აგება ხელსაყრელია ხუთი ძირითადი წერტილის (აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილები და ექსტრემუმის წერტილები) მიხედვით.

ხუთი ძირითადი წერტილი $y = \sin x$ ფუნქციისათვის $[0; 2\pi]$ შუალედში შემდეგი მიმდევრობით იცვლება. **წელი მაქსიმუმის წერტილი წელი მინიმუმის წერტილი წელი**

ხუთი ძირითადი წერტილი $y = \cos x$ ფუნქციისათვის $[0; 2\pi]$ შუალედში შემდეგი მიმდევრობით იცვლება. **მაქსიმუმის წერტილი წელი მინიმუმის წერტილი წელი მაქსიმუმის წერტილი**



$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკები

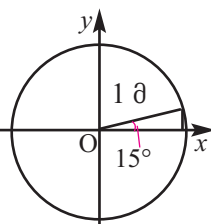
სასწავლო დაფალებები

1. ა) ააგეთ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით.
 ბ) $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე $\sin x = \frac{1}{3}$ ტოლობის დამაკმაყოფილებელი რამდენი x რიცხვი არსებობს?
2. ა) ააგეთ $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკი $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით.
 ბ) $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე $\cos x = 0,6$ ტოლობის დამაკმაყოფილებელი რამდენი x რიცხვი არსებობს?
3. მოცემულ ინტერვალებში ააგეთ ფუნქციის გრაფიკები.
 $y = \sin x, 2\pi \leq x \leq 4\pi$ $y = \cos x, 2\pi \leq x \leq 4\pi$
 $y = \sin x, -2\pi \leq x \leq 0$ $y = \cos x, -2\pi \leq x \leq 0$

4. დაწერეთ არგუმენტის სამი მნიშვნელობა $y = \sin x$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილების შესაბამისად.

5. ერთი და იმავე კოორდინატთა სისტემაზე ააგეთ $y = \cos x$ და $y = \sin x$ ფუნქციების გრაფიკები, დაწერეთ მსგავსი და განსხვავებული ნიშნები.

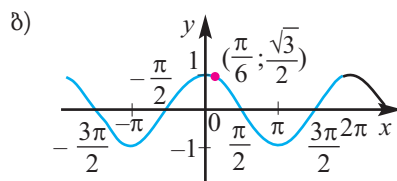
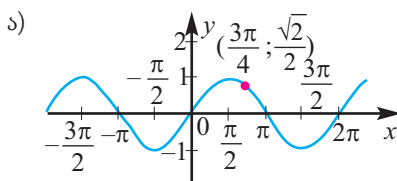
6. 2 მ დიამეტრის დისკის მოძრაობის რეგულირებისათვის დისკზე გაკეთდა აღნიშვნა და დროის განსაზღვრულ მომენტებში მოწმდება ამ ნიშნის სიმაღლე წყლის ზედაპირიდან. დახაზეთ ამ შემოწმების სურათები და თქვენც აწარმოეთ მათემატიკური გამოთვლები. ამისათვის ერთეულოვანი წრეწირი 15° -იანი ინტერვალებით დაყავით მოზრუნების კუთხეებად და განსაზღვრეთ თითოეული ინტერვალის შესაბამისი წრეწირზე მყოფი წერტილის მანძილი x ღერძიდან. ეს სამუშაო შეასრულეთ ორი პერიოდისათვის (720°) არსებობს თუ არა აუცილებლობა იმისა, რომ კიდევ ერთი პერიოდისათვის ამ გზით განისაზღვროს შესაბამისი მნიშვნელობები? თუ აუცილებლობა არ არსებობს, მაშინ ეს მნიშვნელობები ერთბაშად ჩაწერეთ, თუ არსებობს, მაშინ გამოთვალეთ.



ა) წყლის ზედაპირიდან რამდენ მეტრ სიმაღლეზე იქნება ეს ნიშანი, დისკის $15^\circ, 375^\circ, 735^\circ$ -ით მოზრუნების დროს?

ბ) ერთეულოვან წრეწირზე არსებული მნიშვნელობების საკოორდინატო სისტემაზე აღნიშვნით ააგეთ გრაფიკი. რომელი ფუნქციის გრაფიკს ჰგავს ეს გრაფიკი?

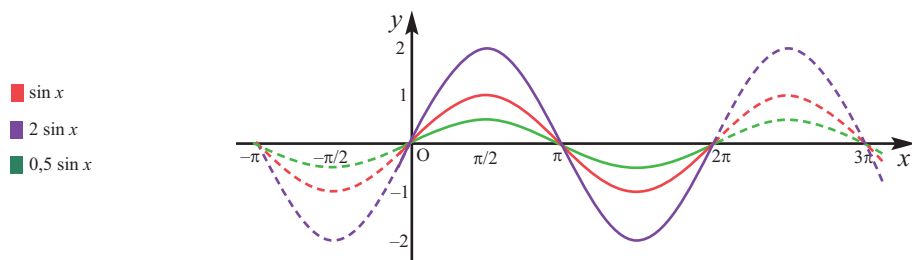
7. $y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციების გრაფიკებზე ერთი წერტილის კოორდინატები იქნა აღნიშნული. დაწერეთ კიდევ 4 წერტილის კოორდინატები, რომელთა ორდინატი მოცემული წერტილის ორდინატის ტოლია.



$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები

შეკუმშვა და მოჭერა

ნამუშაო 1. თუ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილის აბსცისას არსებულივით შევინარჩუნებთ, ორდინატს 2-ზე გავამრავლებთ, $y = 2 \sin x$ ფუნქციის გრაფიკზე არსებული წერტილი მიიღება. ეს იმას ნიშნავს, რომ $y = 2 \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისათა ღერძიდან 2-ჯერ მოჭერით (შემჭიდროვებით) შეიძლება აიგოს, $y = 0,5 \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი კი $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისათა ღერძისკენ 2-ჯერ შეკუმშვით მიიღება.



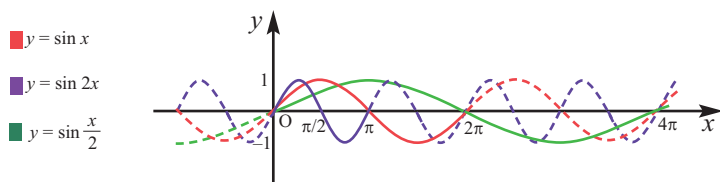
$y = a \sin x$ და $y = a \cos x$ ფუნქციების გრაფიკები შესაბამისად $y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციების გრაფიკების, როცა $|a| > 1$ აბსცისათა ღერძიდან მოჭერით, ხოლო, როცა $|a| < 1$ მაშინ კი აბსცისათა ღერძისკენ შეკუმშვით მიიღება.

როცა $a < 0$ ფუნქციის გრაფიკი x ღერძის მიმართ სიმეტრიულად გარდაიქმნება.

ნამუშაო 2. $y = \sin 2x$ ფუნქცია $y = \sin x$ ფუნქციას 2-ჯერ “წინ უსწრებს”. $y = \sin x$ ფუნქცია 0-დან 1-მდე მნიშვნელობებს $[0; \frac{\pi}{2}]$ ინტერვალში, $y = \sin 2x$ ფუნქცია კი ამ მნიშვნელობებს $[0; \frac{\pi}{4}]$ ინტერვალში იღებს. თუ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილის ორდინატის შეუცვლელად, აბსცისას $\frac{1}{2}$ -ზე გავამრავლებთ, $y = \sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკზე არსებული წერტილი მიიღება.

$y = \sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკი $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკთან შედარებით 2-ჯერ იკუმშება, სრულ ბრუნს $[0; \pi]$ მონაკვეთზე ასრულებს.

$y = \sin \frac{1}{2}x$ ფუნქციის გრაფიკი კი $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის ორდინატთა ღერძიდან 2-ჯერ მოჭერით მიიღება, სრულ პერიოდს $[0; 4\pi]$ მონაკვეთზე ასრულებს.



$y = \sin bx$ და $y = \cos bx$ ფუნქციების გრაფიკები შესაბამისად $y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციების გრაფიკების, როცა $b > 1$ ორდინატთა ღერძისკენ შეკუმშვით, როცა $0 < b < 1$ კი ორდინატთა ღერძიდან მოჭერით მიიღება.

$b < 0$ შემთხვევა კი სინუსის ფუნქციის კენტობისა და კოსინუსის ფუნქციის ლუწობის გათვალისწინებით ზემოთ მოცემულ შემთხვევაზე დაიყვანება.

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები

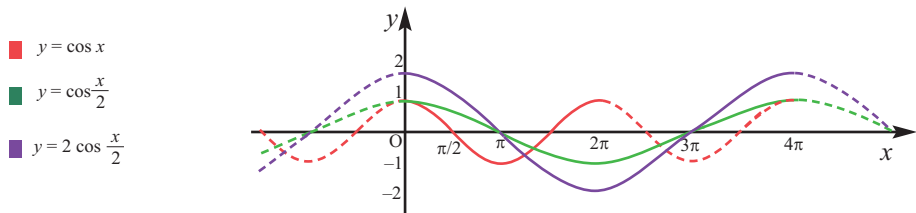
✓ $y = a \sin bx$ ($y = a \cos bx$) ფუნქციის გრაფიკი $y = \sin x$ ($y = \cos x$) ფუნქციის გრაფიკის საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ მიმდევრობითი მოჭერითა და შეკუმშვით მიღებული სინუსოიდა იქნება. $|a|$ -ს მნიშვნელობის ზრდის კვალობაზე ამპლიტუდა იზრდება, შემცირების კვალობაზე ამპლიტუდა მცირდება. $|b|$ -ს მნიშვნელობის ზრდის კვალობაზე ფუნქციის პერიოდი მცირდება, შემცირებისას კი პერიოდი იზრდება. ■

ნიმუში 3: ავაგოთ $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$ ფუნქციის გრაფიკი.

1. $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის ორდინატთა ღერძიდან 2-ჯერ მოჭერით

$y = \cos \frac{1}{2}x$ ფუნქციის გრაფიკი აიგება.

2. მოხდება მიღებული გრაფიკის აბსცისათა ღერძიდან ორჯერ მოჭერა.

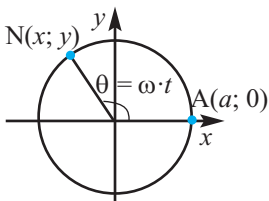


სასწავლო დაფალებები

1. რომელი ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის
 - ა) აბსცისთა ღერძიდან 4-ჯერ მოჭერისას; ბ) აბსცისთა ღერძისაკენ 3-ჯერ შეკუმშვისას;
 - გ) ორდინატთა ღერძიდან 2-ჯერ მოჭერისას?
2. სიტყვიერად დაწერეთ თითოეული ფუნქციის $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის მიმართ გარდაქმნა.
 - ა) $y = 5 \sin x$ ბ) $y = \frac{2}{5} \sin x$ გ) $y = \sin 3x$ დ) $y = -3 \sin 4x$
3. სიტყვიერად დაწერეთ თითოეული ფუნქციის $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის მიმართ გარდაქმნა.
 - ა) $y = 4 \cos x$ ბ) $y = \frac{1}{3} \cos x$ გ) $y = \cos 4x$ დ) $y = -4 \cos 3x$
4. ააგეთ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით. კოორდინატთა ღერძებიდან მოჭერით (შეკუმშვით) ამ ხუთი წერტილის გარდაქმნილი წერტილების მიხედვით გამოსახეთ შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკები.
 - ა) $y = 3 \sin x$ ბ) $y = \frac{1}{2} \sin x$ გ) $y = \sin 2x$ დ) $y = 4 \sin 2x$
5. ააგეთ $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკი $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით. კოორდინატთა ღერძებიდან მოჭერით (შეკუმშვით) ამ ხუთი წერტილის გარდაქმნილი წერტილების მიხედვით გამოსახეთ შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკები.
 - ა) $y = 2 \cos x$ ბ) $y = \frac{1}{2} \cos x$ გ) $y = \cos 2x$ დ) $y = 4 \cos 2x$

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები

გამოკვლევა. საწყის მომენტში $A(a; 0)$ წერტილში მყოფი მატერიალური წერტილი a რადიუსიან წრეწირზე ω კუთხურ სიჩქარით მოძრაობს.



1) გამოსახეთ ამ წერტილის კოორდინატები t დროზე დამოკიდებულებით.

2) იპოვეთ წერტილის ორდინატისა და აბსცისის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

3) დაასაბუთეთ, რომ დროის ერთმანეთისაგან $\frac{2\pi}{\omega}$ განსხვავებულ მომენტებში წერტილი ერთი და იგივე მდგომარეობაში იმყოფება.

$y = a \sin bx$ და $y = a \cos bx$ ფუნქციების პერიოდი და ამპლიტუდა

თეორემა: თუ $y = f(x)$ ფუნქცია არის პერიოდული ფუნქცია, რომლის ძირითადი

პერიოდია T , მაშინ $y = a \cdot f(bx)$ ფუნქცია არის პერიოდული ფუნქცია, რომლის ძირითადი

პერიოდია $\frac{T}{|b|}$ (სადაც a და b ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია).

აქედან მიიღება, რომ $y = a \sin bx$ (და $y = a \cos bx$) ფუნქციების

ძირითადი პერიოდი $\frac{2\pi}{|b|}$ იქნება. მართლაც,

$$f(x) = a \sin bx = a \sin(bx + 2\pi) = a \sin b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = f\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)$$

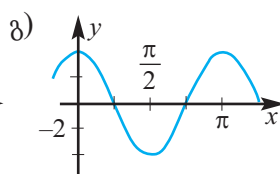
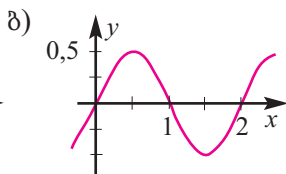
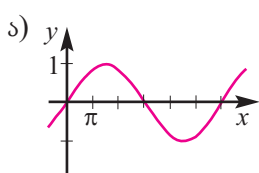
$$g(x) = a \cos bx = a \cos(bx + 2\pi) = a \cos b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = g\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)$$

$|a|$ **ამპლიტუდას** უზენვეს. ამპლიტუდა მაქსიმუმისა და მინიმუმის მნიშვნელობების სხვაობის ნახევრის ტოლია.

ნამუშა: $y = -3 \sin 4x$ ფუნქციის ამპლიტუდა $|-3|$ ანუ 3,

ძირითადი პერიოდი $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ -ია.

6. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ამპლიტუდა და პერიოდი.



დ) $y = \frac{1}{2} \cos \pi x$

გ) $y = 5 \cos \frac{1}{2} x$

ე) $y = \sin 2x$

ი) $y = 2 \sin \frac{1}{2} \pi x$

ფ) $y = 3 \cos \frac{1}{4} x$

კ) $y = \frac{1}{3} \sin 4\pi x$

7. 1) დაწერეთ $y = a \sin bx$ (სადაც $a > 0$, $b > 0$) ფუნქციის ფორმულა მოცემული ამპლიტუდისა და პერიოდის მიხედვით.

ა) ამპლიტუდა: $\frac{1}{2}$
პერიოდი: 3π

ბ) ამპლიტუდა: 4
პერიოდი: π

გ) ამპლიტუდა: 2
პერიოდი: 2π

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები

2) დაწერეთ $y = a \cos bx$ (სადაც $a > 0$, $b > 0$) ფუნქციის გამომსახველი ფორმულა მოცემული ამპლიტუდისა და პერიოდის მიხედვით.

ა) ამპლიტუდა: $\frac{1}{3}$

პერიოდი: 5π

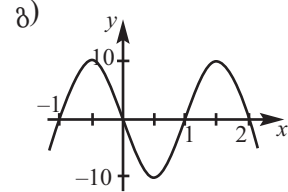
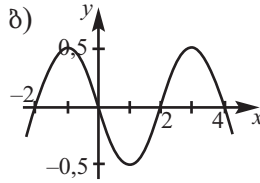
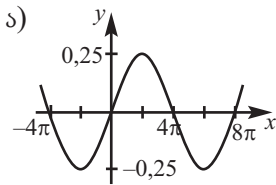
ბ) ამპლიტუდა: 2

პერიოდი: π

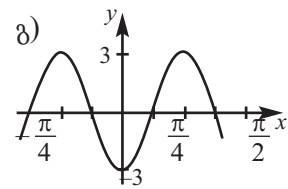
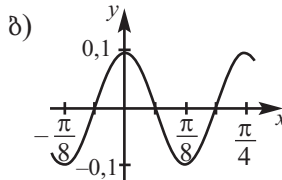
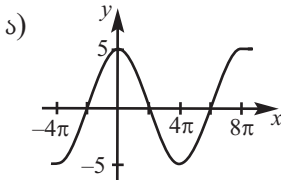
გ) ამპლიტუდა: 5

პერიოდი: $\frac{\pi}{2}$

8. დაწერეთ მოცემული გრაფიკის შესაბამისი ფუნქციის ფორმულა $y = a \sin bx$ სახით.



9. დაწერეთ მოცემული გრაფიკის შესაბამისი ფუნქციის ფორმულა $y = a \cos bx$ სახით.



10. განსაზღვრეთ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ძირითადი პერიოდები. იპოვეთ მათი საშუალო პერიოდი.

ა) $f(x) = 2 \sin \frac{2x}{3}$,

ბ) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$,

გ) $f(x) = 3 \sin \frac{1}{3}x$,

$g(x) = 3 \cos \frac{1}{2}x$

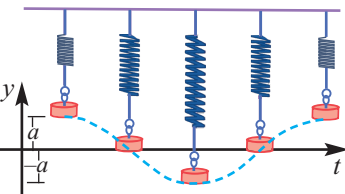
$g(x) = 4 \cos 3x$

$g(x) = \frac{2}{3} \cos \frac{2}{5}x$

მითითება: თუ მოცემული ფუნქციების პერიოდები იქნება, T_1 და T_2 საშუალო პერიოდი კი T , იპოვეთ $T = nT_1 = nT_2$ ტოლობის დამაკმაყოფილებელი უმცირესი ნატურალური m და n რიცხვები.

გამოყენებითი დაგვლებები. $y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციებით მოდელირება.

11. ფიზიკა. სურათზე ასახულია დაკიდებული სხეულის მოძრაობა. ჩამოკიდებული სხეული უძრავ მდგომარეობაში ყოფნისას სისტემურ წონასწორობაშია. სხეულის უძრაობის მდგომარეობა მოძრაობის საწყისად მიიღება. a მოძრაობის სათავიდან **გადაადგილებას** უჩვენებს. დროის ერთეულში ბრუნთა რაოდენობას **სიხშირე (ω)**, ხოლო y სხეულის ერთ სრულ ბრუნზე დახარჯულ დროს, **პერიოდი (T)** ეწოდება. სიხშირე და პერიოდი ურთიერთშებრუნებული სიდიდეებია: $\omega = \frac{1}{T}$. ზამბარაზე



ჩამოკიდებულის ხეულის რხევითი მოძრაობის $y = a \cos kt$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. სადაც y წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურ გადაადგილებას (სმოობით), a სათავის გადაადგილებას, k მუდმივი გაშლის ელასტიურობის კოეფიციენტს, t კი დროს (წამოობით) გვიჩვენებს. იპოვეთ რხევითი მოძრაობის ამპლიტუდა, პერიოდი და სიხშირე, თუ $a = 0,5$ სმ და $k = 5\pi$.

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები

- 12. კარუსელის მოძრაობა.** კარუსელის რომელ კაბინაშიც არ უნდა იჯდეთ, თქვენი მიწიდან დაშორების მანძილი დროზე დამოკიდებულებით პერიოდულად შეიცვლება. დავუშვათ მოძრაობას იწყებთ კარუსელის ღერძის დონეზე. კარუსელის დიამეტრი 20 მ-ია და 3 წუთში 4 ბრუნს ასრულებს.

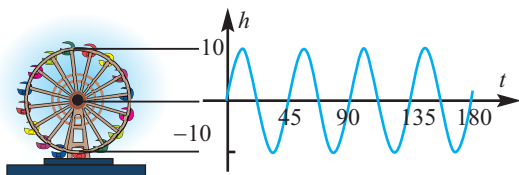
ა) აბსცისთა ღერძზე დროის, ორდინატთა ღერძზე საწყისი წერტილიდან მანძილის აღნიშვნით დახაზეთ კარუსელის მოძრაობის გრაფიკი.

ბ) იპოვეთ კარუსელის მოძრაობის შესაბამისი ფუნქციის ძირითადი პერიოდი და დაწერეთ ფორმულა.

ამოხსნა: სიხშირე ანუ ერთ წუთში პერიოდების რაოდენობა $\frac{4}{3}$ -ია. რადგან პერიოდი არის სიხშირის შებრუნებული ამიტომ პერიოდი წუთის $\frac{3}{4}$ -ის ანუ 45 წამის ან 0,75 წუთის ტოლია.

კარუსელის კაბინა საწყისი მდგომარეობიდან $20 : 2 = 10$ ზევით (10) და ქვევით (-10) იქნება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ერთი პერიოდი 45 წამია, დავინახავთ, რომ ამ მოძრაობის გრაფიკი სინუსოიდია.

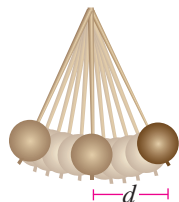
დავწეროთ ფუნქციის ფორმულა $y = a \sin bx$ სახით.



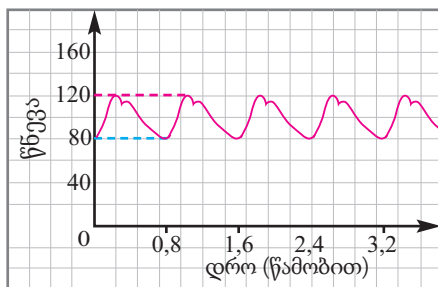
$$T = \frac{2\pi}{b} \quad \frac{2\pi}{b} = 45 \quad b = \frac{2\pi}{45} \quad \text{ამპლიტუდა: } 10$$

ფუნქციის ფორმულა $h = 10 \sin \frac{2\pi}{45} t$ სახის იქნება.

- 13.** ქანქარას მოძრაობის $d = 4 \cos 8\pi t$ ფორმულით მოდელირება შეიძლება, სადაც d არის ქანქარის საწყისი მდგომარეობიდან გადახრის მანძილი (სმ-ობით), t - დრო (წამობით). მაქსიმუმ რა მანძილით დაშორდება ქანქარა საწყის მდგომარეობას? იპოვეთ ქანქარას რხევის პერიოდი და სიხშირე.



- 14.** ადამიანის ყოველი გულისცემის დროს სისხლის წნევა ყველაზე მაღალ და ყველაზე დაბალ მნიშვნელობებს შორის იცვლება. ნორმალური სისხლის წნევის ზედა დონედ მედიცინაში სისტოლად წოდებული და 120 მმ ვერცხლისწყლის სვეტის, ქვედა დონედ დიასტოლად წოდებული და 80 მმ ვერცხლისწყლის სვეტის დონეა მიღებული. სურათზე მოცემულია ერთი პიროვნების სისხლის წნევის გრაფიკი.



1) გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ პერიოდი (ერთი გულისცემისათვის საჭირო დრო) და ამპლიტუდა.

2) გამოთვალეთ ამ პიროვნების გულისცემის რაოდენობა ერთ წუთში.

$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები

ჰორიზონტალური მოცურება - ფაზა.

$y = a \sin b(x - c)$, $y = a \cos b(x - c)$ ფუნქციაში c წვერი გრაფიკის ჰორიზონტალურ მოცურებას უჩვენებს და ფაზური მოცურება ეწოდება.

ნიმუში: ააგეთ $y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ ფუნქციის გრაფიკი.

$y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის ორდინატთა ღერძთან 2-ჯერ მოჭერისას

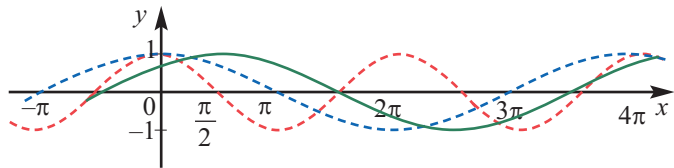
$y = \cos \frac{1}{2}x$ ფუნქციის გრაფიკი აიგება. $y = \cos \frac{1}{2}x$ ფუნქციის გრაფიკის

$\frac{\pi}{2}$ ერთეულით მარჯვნივ მოცურებისას $y = \cos \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})$, ანუ $y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება.

■ $y = \cos x$

■ $y = \cos \frac{1}{2}x$

■ $y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$



ვერტიკალური მოცურება.

$y = a \sin bx + d$ და $y = a \cos bx + d$ ფუნქციებში d წვერი ვერტიკალური მიმართულებით მოცურებას გვიჩვენებს, როცა $d > 0$, მაშინ ფუნქციის გრაფიკი ზევით აცურდება, როცა $d < 0$, მაშინ ქვევით ჩამოცურდება.

ნიმუში: ააგეთ $y = 2 \sin x - 1$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა: $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის

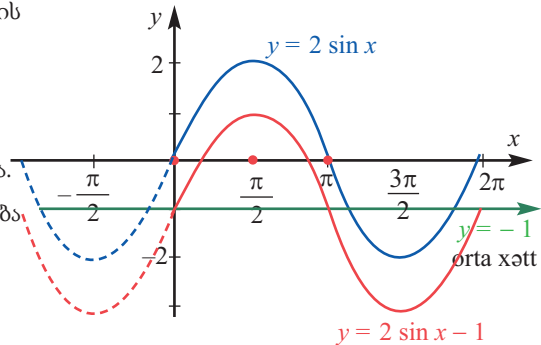
$y = 2 \sin x - 1$ ფუნქციის გრაფიკად გარდაქმნის ნაბიჯები შემდეგია:

1. ამპლიტუდა 2-ჯერ იზრდება,
 $y = 2 \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება.

2. ერთი ერთეულით ქვევით მოცურდება,
და $y = 2 \sin x - 1$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება.

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე იქნება $-3 \leq y \leq 1$.

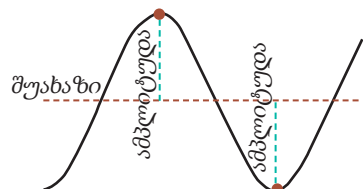
$y = 2 \sin x - 1$ ფუნქციის გრაფიკის $y = -1$ წრფის მიმართ 2 ერთეულით ზევით და ქვევით ცვლილება შესაძლებელია. ამ წრფეს **შუახაზი** ეწოდება.



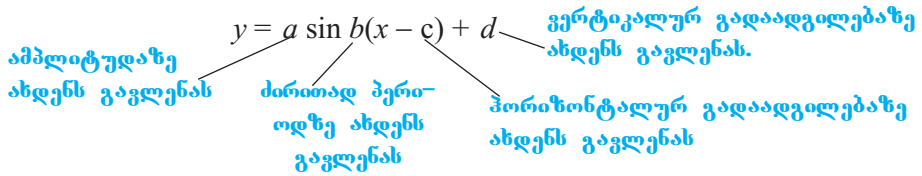
$$\text{შუახაზი} = \frac{\text{მაქსიმუმი} + \text{მინიმუმი}}{2}$$

მაქსიმუმი = შუახაზი + ამპლიტუდა

მინიმუმი = შუახაზი - ამპლიტუდა

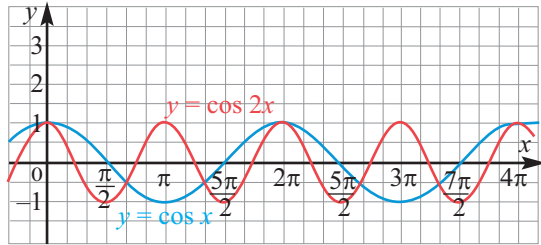


$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები

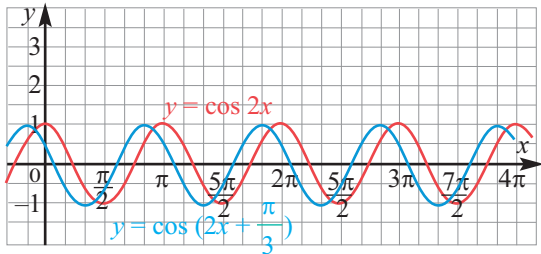


ნიმუში: ააგეთ $y = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$ ფუნქციის გრაფიკი.

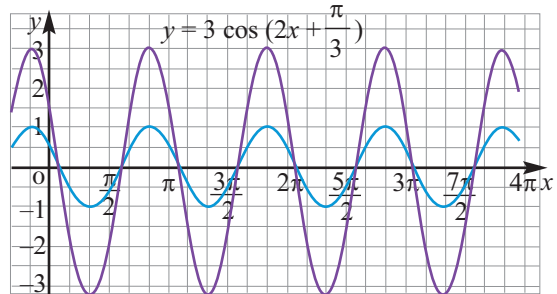
1) $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის ორდინატთა ღერძისაკენ 2-ჯერ მოჭერით $y = \cos 2x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება.



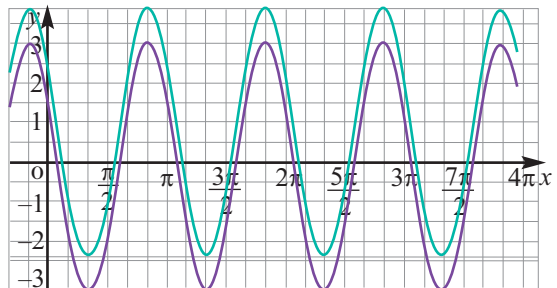
2) $y = \cos 2x$ ფუნქციის გრაფიკის $\frac{\pi}{6}$ ერთეულით მარცხნივ მოცურებთ $y = \cos 2(x + \frac{\pi}{6})$, ანუ $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ფუნქციის გრაფიკი აიგება.



3) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ფუნქციის გრაფიკის ორდინატთა ღერძის გასწვრივ 3-ჯერ მოჭერით $y = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ფუნქციის გრაფიკი აიგება.



4) $y = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური მიმართულებით 1 ერთეულით ზევით აცურებით $y = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$ ფუნქციის გრაფიკი აიგება.



$y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნები

- 15.** სიტყვიერად დაწერეთ თითოეული ფუნქციის გრაფიკის $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის მიმართ გარდაქმნა.

ა) $y = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ ბ) $y = 3 \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4}))$ გ) $y = 2 \sin(x + 60^\circ) - 4$

- 16.** სიტყვიერად დაწერეთ თითოეული ფუნქციის გრაფიკის $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის მიმართ გარდაქმნა.

ა) $y = \cos(x - \frac{5\pi}{6})$ ბ) $y = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ გ) $y = 4 \cos(x - 15^\circ) + 3$

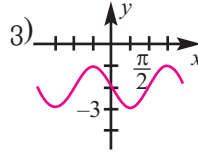
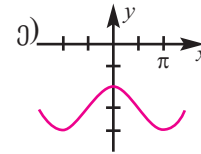
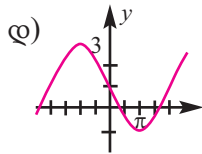
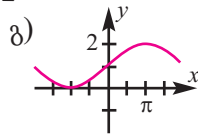
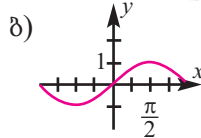
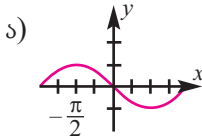
- 17.** იპოვეთ ფუნქციების მაქსიმუმები და მინიმუმები, დაწერეთ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა) $y = 3 \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 5$ ბ) $y = \frac{1}{2} \sin 3x - 3$ გ) $y = \frac{1}{3} \cos(x + 50^\circ) + \frac{1}{6}$

- 18.** განსაზღვრეთ რომელი გრაფიკი რომელ ფუნქციას ეკუთვნის.

1) $y = -2 + \sin(2x + \pi)$ 3) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ 5) $y = -\sin(x + \pi)$

2) $y = -3 + \cos x$ 4) $y = 1 + 2 \cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$ 6) $y = 1 + \sin \frac{1}{2}x$



- 19.** მონაცემების მიხედვით ჩაწერეთ ფუნქცია $y = a \sin b(x - c) + d$ სახით.

ა) ამპლიტუდა 4, პერიოდი π , ფაზური მოცურება $\frac{\pi}{4}$ ერთეულით მარჯვნივ, ვერტიკალური გადაადგილება 6 ერთეულით ქვევით.

ბ) ამპლიტუდა 0,5, პერიოდი 3π , ფაზური მოცურება $\frac{\pi}{3}$ ერთეულით მარცხნივ, ვერტიკალური გადაადგილება 2 ერთეულით ზევით.

- 20.** სქემატურად გამოსახეთ ფუნქციის გრაფიკი.

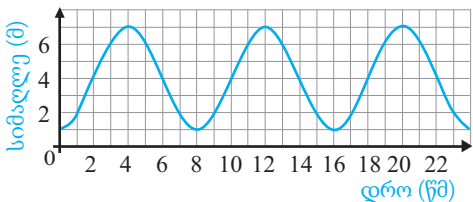
ა) $y = 3 \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ბ) $y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + 2$ გ) $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) + 3$

- 21. ნარგიზი კარუსელზე.** გრაფიკი ნარგიზის კარუსელზე ყოფნის ადგილი-დან სიმაღლის (მეტრობით) დროზე (წამობით) დამოკიდებულებას ასახავს.

1) იპოვეთ გამოსახული ფუნქციის პერიოდი, რას გამოსახავს ის?

2) დაწერეთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

3) ნარგიზი 24-30 წამის ინტერვალის რომელ წამზე იქნება 4 მ-ის სიმაღლეზე?



სინუსოიდის აგება ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით

მომრავობისა და მსგავსების გარდაქმნისას მრუდი „ფორმას“ ინარჩუნებს, ამიტომაც არა მხოლოდ სინუსის გრაფიკს, არამედ ღერძების გასწვრივ მოჭერის (შეკუმშვის) და მიმდევრობითი მომრავობის დახმარებით მიღებულ მრუდსაც ასევე სინუსოიდა ეწოდება. $y = a \sin bx$ და $y = a \cos bx$ სახის ფუნქციების თვისებების სინუსის (ან კოსინუსის) თვისებების ანალოგიურობა ამარტივებს ასეთი ფუნქციების გამოკვლევას. პირველ რიგში მათი პერიოდისა და მნიშვნელობის 0-ის ან $\pm a$ -ს ტოლი წერტილების პოვნაა საჭირო.

$y = a \sin bx$ და $y = a \cos bx$ ფუნქციების $[0; \frac{2\pi}{|b|}]$ ინტერვალში გრაფიკის x -ის 5 მნიშვნელოვან წერტილში მნიშვნელობის მიხედვით ქვემოთ მოცემულ ნაბიჯებად აგება შეიძლება:

1. განისაზღვრება გრაფიკის ამპლიტუდა:
2. განისაზღვრება ფუნქციის ძირითადი პერიოდი: $\frac{2\pi}{|b|} = T$
3. $[0; T]$ მონაკვეთი იყოფა 4 ტოლ ნაწილად: $0, \frac{T}{4}; \frac{T}{2}; \frac{3T}{4}; T$.
4. ხუთი მნიშვნელოვანი წერტილი - **x ღერძთან გადაკვეთის წერტილები, მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებია**. x -ის აღნიშნული მნიშვნელობებისათვის y -ის მნიშვნელობები გამოითვლება.
5. $(x; y)$ წერტილები (5 წერტილი) აღინიშნება საკოორდინატო სისტემაზე.
6. ეს წერტილები შეერთდება. მიღებული სინუსოიდის მრუდი შესაბამისი ფუნქციის ერთი სრული პერიოდის გრაფიკია. ამ გრაფიკის გამეორებით ნებისმიერ მონაკვეთზე მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგება შეიძლება.

ნამუშაუ 1. $y = \cos \frac{3x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი ააგეთ 5 ძირითადი წერტილის მიხედვით.

ამოხსნა: ამპლიტუდა: $a = 1$

ძირითადი პერიოდი: $\frac{2\pi}{|b|}$; $b = \frac{3}{2}$ $T = 2\pi : \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{3}$

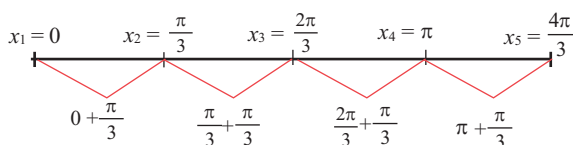
x ღერძზე ერთი სრული პერიოდის სიგრძის მონაკვეთი გავყოთ ოთხ ტოლ ნაწილად.

რადგან მთელი პერიოდის $\frac{1}{4}$ არის $\frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ამიტომ $x_1 = 0$ წერტილიდან

დაწყებული $\frac{\pi}{3}$ -მდე მარჯვნივ პერიოდის $\frac{1}{4}$ -ის შესაბამისი $x_2 = \frac{\pi}{3}$ წერტილი, შემდეგ

პერიოდის $\frac{1}{2}$ -ის შესაბამისი $x_3 = \frac{2\pi}{3}$ წერტილი, შემდეგ კიდევ პერიოდის $\frac{3}{4}$ -ის შესა-

ბამისი $x_4 = \pi$ და ბოლოს მთელი პერიოდის შესაბამისი $x_5 = \frac{4\pi}{3}$ წერტილი ავღნიშნოთ.

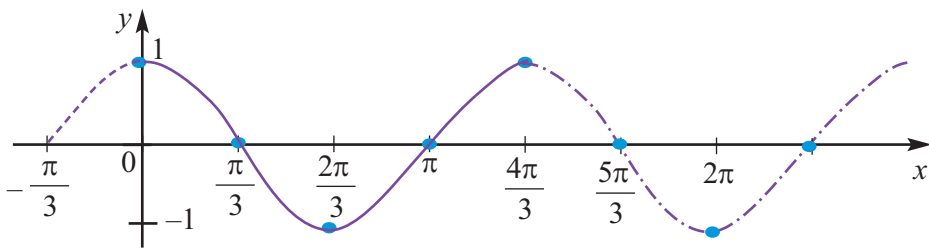


სინუსოიდის აგება ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით

x -ის აღნიშნული მნიშვნელობების შესაბამისად გამოვთვალოთ $y = \cos \frac{3x}{2}$ ფუნქციის მნიშვნელობები:

1. $x = 0$ $y = 1$ $(0; 1)$ **მაქსიმუმის წერტილი**
2. $x = \frac{\pi}{3}$ $y = \cos \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ $(\frac{\pi}{3}; 0)$ **აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი**
3. $x = \frac{2\pi}{3}$ $y = \cos \frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} = \cos \pi = -1$ $(\frac{2\pi}{3}; -1)$ **მინიმუმის წერტილი**
4. $x = \pi$ $y = \cos \frac{3}{2} \cdot \pi = 0$ $(\pi; 0)$ **აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი**
5. $x = \frac{4\pi}{3}$ $y = \cos \frac{3}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \cos 2\pi = 1$ $(\frac{4\pi}{3}; 1)$ **მაქსიმუმის წერტილი**

თუ ამ წერტილებს ავღნიშნავთ საკოორდინატო სიბრტყეზე, შევაერთებთ მათ გლუვი წირით აიგება $y = \cos \frac{3x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი $(0; \frac{4\pi}{3})$ მონაკვეთზე. ამ გრაფიკის აბსცისთა ღერძის გასწვრივ $\frac{4}{3}\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) მოცულობით მიიღება $y = \cos \frac{3x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი მთელ რიცხვით ღერძზე. (სურათზე პუნქტირითაა ნაჩვენები).



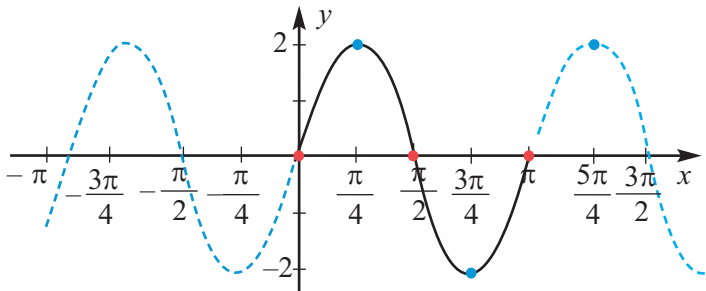
ნიმუში 2. ააგეთ $y = 2 \sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა: **ამპლიტუდა:** $a = 2$, y -ის მნიშვნელობა -2 და 2 შორის შეიცვლება.

ძირითადი პერიოდი: $T = \frac{2\pi}{|b|}$, $b = 2$; $T = \pi$

x -ის $[0; \pi]$ მონაკვეთის (ერთი პერიოდი) ოთხ ტოლ ნაწილად გამოყოფი მნიშვნელობებისათვის ვიპოვოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები და ამის საფუძველზე ავაგოთ გრაფიკი.

	x	$y = 2 \sin 2x$
გადაკვეთა	0	0
მაქსიმუმი	$\frac{\pi}{4}$	2
გადაკვეთა	$\frac{\pi}{2}$	0
მინიმუმი	$\frac{3\pi}{4}$	-2
გადაკვეთა	π	0



სინუსოიდის აგება ნუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით

ნიმუში 3: $y = 3 \sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ ფუნქციის სრული ბრუნის შესაბამისი საწყისი და ბოლო წერტილების მოძებნისათვის $0 \leq 2(x - \frac{\pi}{3}) \leq 2\pi$ უტოლობა ამოიხსნება:

$$0 \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \pi \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$$

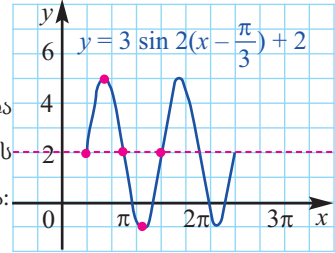
სადაც $\frac{\pi}{3}$ საწყისი წერტილსა და ფაზას უჩვენებს.

$[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$ ინტერვალის 4 ტოლ ნაწილად დაყოფით საჭიროა

5 ძირითადი წერტილის განსაზღვრა. მოცემული ფუნქციის

5 ძირითადი წერტილისათვის x -ის მნიშვნელობები იქნება:

$$\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{12}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{12}; \frac{4\pi}{3}.$$



x -ის ამ მნიშვნელობების $y = 3 \sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ ფორმულაში ჩასმით $(\frac{\pi}{3}; 2)$

$(\frac{7\pi}{12}; 5)$ $(\frac{5\pi}{6}; 0)$ $(\frac{13\pi}{12}; -1)$ $(\frac{4\pi}{3}; 2)$ წერტილები განისაზღვრება და

ფუნქციის გრაფიკი აიგება.

$y = 3 \sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ ფუნქციისათვის:

ამპლიტუდა: $a = 2$, პერიოდი: π , მოცურების ფაზა: $\frac{\pi}{3}$, შუახაზი: $d = 2$,

მაქსიმუმის მნიშვნელობა: $d + a = 2 + 3 = 5$, მინიმუმის მნიშვნელობა: $d - a = 2 - 3 = -1$, გან-

საზღვრის არე: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ($x \in R$), მნიშვნელობათა სიმრავლე: $-1 \leq y \leq 5$

სასწავლო დავალებები

1. ერთი და იგივე კოორდინატა სისტემაში ააგეთ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების გრაფიკები ნიმუშის შესაბამისი მნიშვნელობათა ცხრილის შედეგით.

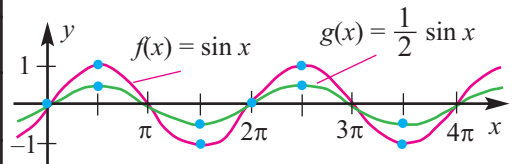
a) $f(x) = \sin x$ და $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$

b) $f(x) = \sin x$; $g(x) = -3 \sin x$

c) $f(x) = \cos x$; $g(x) = 4 \cos x$

d) $f(x) = \cos x$; $g(x) = -\frac{1}{2} \cos x$

ფუნქციები	$f(x) = \sin x$	$g(x) = \frac{1}{2} \sin x$
x ღერძთან გადაკვეთა	$(0; 0)$	$(0; 0)$
მაქსიმუმი	$(\frac{\pi}{2}; 1)$	$(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2})$
x ღერძთან გადაკვეთა	$(\pi; 0)$	$(\pi; 0)$
მინიმუმი	$(\frac{3\pi}{2}; -1)$	$(\frac{3\pi}{2}; -\frac{1}{2})$
x ღერძთან გადაკვეთა	$(2\pi; 0)$	$(2\pi; 0)$



სინუსოიდის აგება ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით

- 2.** იპოვეთ $y = \sin bx$ ფუნქციისათვის b -ს მნიშვნელობა თუ ძირითადი პერიოდი T :
 ა) $\frac{2\pi}{3}$; ბ) $\frac{4\pi}{3}$; გ) $\frac{\pi}{2}$; დ) 4 პერიოდის ტოლი სიგრძის $[0; T]$ მონაკვეთი დაყავით 4 ტოლ ინტერვალად და გამოთვალეთ x -ის ამ მნიშვნელობების შესაბამისი y -ის მნიშვნელობები.
- 3.** ა) დაწერეთ $y = \sin x$ ფუნქციის $[0; 2\pi]$ ინტერვალში მდებარე 5 ძირითადი წერტილის კოორდინატები.
 ბ) ააგეთ $y = \sin 2x$ ფუნქციის $[0; \pi]$ მონაკვეთში გრაფიკი 5 ძირითადი წერტილის მიხედვით. უზენეთ ზრდისა და კლების შუალედები.
- 4.** ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი სიგრძით ერთი პერიოდის ტოლ მონაკვეთზე 5 ძირითადი წერტილის განსაზღვრით.
- ა) $y = \sin \frac{1}{4}x$ ბ) $y = 5 \sin 2\pi x$ გ) $y = 3 \cos 4x$ დ) $y = \frac{1}{4} \sin 2x$
- 5.** დაწერეთ მოცემული ფუნქციის პერიოდი რადიანებში და გრადუსებში. ააგეთ გრაფიკები ერთ პერიოდში 5 ძირითადი წერტილის მიხედვით.
- ა) $y = \sin 4x$ ბ) $y = \sin \frac{2}{3}x$ გ) $y = \cos \frac{1}{2}x$ დ) $y = \cos 2x$
- 6.** 5 ძირითადი წერტილის მიხედვით ერთი და იმავე კოორდინატა სისტემაში ააგეთ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკები.
- 1) $f(x) = -2 \sin x$ 2) $f(x) = \sin x$ 3) $f(x) = 2 \cos x$
 $g(x) = 4 \sin x$ $g(x) = \sin \frac{x}{3}$ $g(x) = -\cos 4x$
- 7.** 1) მოცემული ამპლიტუდისა და პერიოდის მიხედვით დაწერეთ ფუნქციის გამომსახველი ფორმულა $y = a \sin bx$ სახით და ააგეთ გრაფიკი 5 ძირითადი წერტილის მიხედვით.
- ა) ამპლიტუდა = 2,5; პერიოდი = 6π ბ) ამპლიტუდა = 4; პერიოდი = $\frac{\pi}{3}$
- 2) მოცემული ამპლიტუდისა და პერიოდის მიხედვით დაწერეთ ფუნქციის ფორმულა $y = a \cos bx$ სახით და ააგეთ გრაფიკი 5 ძირითადი წერტილის მიხედვით.
- ა) ამპლიტუდა = 5; პერიოდი = 2π ბ) ამპლიტუდა = $\frac{3}{2}$; პერიოდი = $\frac{\pi}{6}$
- 8. ღია ტიპის შეკითხვა.** დაწერეთ ერთი სინუსისა და ერთი კოსინუსის ფორმულა რომელთა პერიოდია $\frac{\pi}{2}$ და ამპლიტუდა 1,5.
- 9.** განსაზღვრეთ ფუნქციის პერიოდი და ამპლიტუდა. ააგეთ გრაფიკი პერიოდის სიგრძის ტოლ მონაკვეთზე 5 ძირითადი წერტილის მიხედვით.
- ა) $y = 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}) - 2$ ბ) $y = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 3$

სინუსოიდის აგება ხუთი ძირითადი წერტილის მიხედვით

- 10.** ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით ძირითადი პერიოდისა და ამპლიტუდის განსაზღვრით დაწერეთ ფორმულა $y = a \sin bx$ და $y = a \cos bx$ სახით.

ნიმუში.

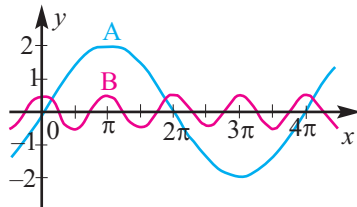
А გრაფიკი: ჯერ განვსაზღვროთ ამპლიტუდა.

რადგან უდიდესი მნიშვნელობა არის 2. უმცირესი

მნიშვნელობა -2 . ამიტომ, $a = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$

პერიოდია 4π . რადგან

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ ამიტომ, } 4\pi = \frac{2\pi}{|b|}; \quad b = \frac{1}{2}$$



А გრაფიკი შეესაბამება სინუსის ფუნქციის გრაფიკს, სადაც თუ გავითვალისწინებთ, რომ ამპლიტუდა $a = 2$ და $b = \frac{1}{2}$ მივიღებთ $y = 2 \sin \frac{1}{2}x$.

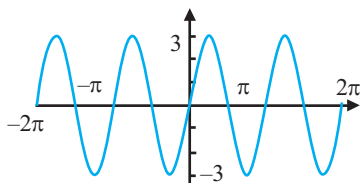
В გრაფიკი: ანალოგიური წესით ვპოულობთ $a = 0,5$,

ძირითადი პერიოდია π და $\pi = \frac{2\pi}{|b|}$ ტოლობიდან $b = 2$.

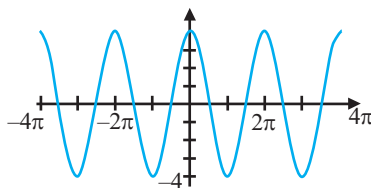
გრაფიკი კოსინუსის ფუნქციის გრაფიკის შესაბამისია. ფუნქციის

ფორმულა იქნება $y = 0,5 \cos 2x$.

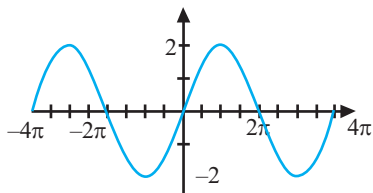
ა)



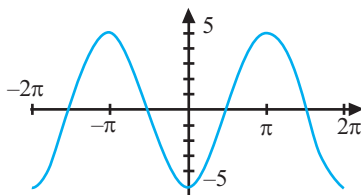
ბ)



გ)



დ)



- 11.** ააგეთ ფუნქციების გრაფიკები.

1) $y = 2 + \sin x$

2) $y = 5 - \cos x$

3) $y = -2 + \cos x$

4) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

5) $y = -\sin(x + \pi)$

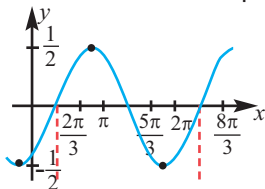
6) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

7) $y = 5 - \cos(x - \frac{\pi}{4})$

8) $y = -2 - \sin(x - \pi)$

9) $y = 3 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$

- 12.** დაწერეთ მოცემული გრაფიკის შესაბამისი ფუნქციის გამომსახველი ფორმულა $y = a \cos(bx + c)$ სახით. დაწერეთ ფუნქციის გრაფიკის x ღერძის დადებითი მიმართულებით კიდეც ერთი პერიოდით გაგრძელების შესაძლებლობის მომცემი 5 წერტილის კოორდინატები.



ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და პერიოდული მოვლენები

ბუნებაში, რეალურ ცხოვრებისეულ სიტუაციებში მრავალი პერიოდულად ცვალებადი მოვლენა გვხვდება. დედამიწის ბრუნვა, სეზონების ცვლილება, ადამიანის სუნთქვა, გულისცემა და სხვ. ამასთან ბევრი ფიზიკური მოვლენის, მაგალითად ელექტრული, ოპტიკური, რხევითი მოძრაობების გამოკვლევაში გამოიყენება პერიოდული ფუნქციები. უმარტივესი რხევითი მოძრაობები ჰარმონიული რხევები $y = a \sin(bx + c)$ და $y = a \cos(bx + c)$ სახის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით გამოისახება.



ნამუში 1. ბიოლოგია. ბიოლოგები ცხოველების, ფრინველების გამრავლების, გამოკვლევასა და პროგნოზირებას ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დახმარებით ახდენენ მოდელირებას, განსაზღვრულ პროგნოზებს იძლევიან. მეცნიერებმა ერთი და იგივე რეგიონში ბუებისა და თავგების გამრავლება გამოიკვლიეს. მათი გამოკვლევის თანახმად, ბუების დროზე (თვეობით) დამოკიდებულებით რაოდენობის

$B(t) = 1000 + 100 \sin\left(-\frac{\pi t}{12}\right)$, თავგების რაოდენობის $S(t) = 20000 + 4000 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება.

ამ გრაფიკებში მოცემული ინფორმაციების თანახმად ბუებისა და მათი საკვების, თავგების რაოდენობის ცვლილების შესახებ შესაძლებელია მოსაზრების გამოთქმა.

ა) ააგეთ ორივე ფუნქციის გრაფიკი.

ბ) გამოთქვით მოსაზრება ბუებისა და თავგების რაოდენობის ცვლილების შესახებ.

გ) გამოიკვლიეთ ბუების რაოდენობის თავგების რაოდენობასთან თანაფარდობის ცვლილება დროის მიხედვით.

დ) თავგების სიცოცხლისათვის რომელი დროა ყველაზე ნაკლებად საშიში?

ამოხსნა: $B(t) = 1000 + 100 \sin\left(-\frac{\pi t}{12}\right)$

ბუების რაოდენობის შესაბამისი ფუნქციის მაქსიმუმი 1100, მინიმუმი 900-ია.

ამპლიტუდა: 100 ვერტიკალური მოცურება: $c = 1000$ (პირველადი რაოდენობა)
შუახაზი = 1000 პერიოდი: $\frac{2\pi}{|b|}$, რადგან $b = \frac{\pi}{12}$, ამიტომ $2\pi : \frac{\pi}{12} = 24$

მაშასადამე, ძირითადი პერიოდი 24 თვეა.

$$S(t) = 20000 + 4000 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

თავგების რაოდენობის შესაბამისი ფუნქციის მაქსიმუმი 24 000, მინიმუმი - 16 000.

ამპლიტუდა: 4000 ვერტიკალური მოცურება: $c = 20000$ (პირველადი რაოდენობა)
შუახაზი = 20000 ძირითადი პერიოდი: $\frac{2\pi}{|b|}$ რადგან $b = \frac{\pi}{12}$ ამიტომ $2\pi : \frac{\pi}{12} = 24$

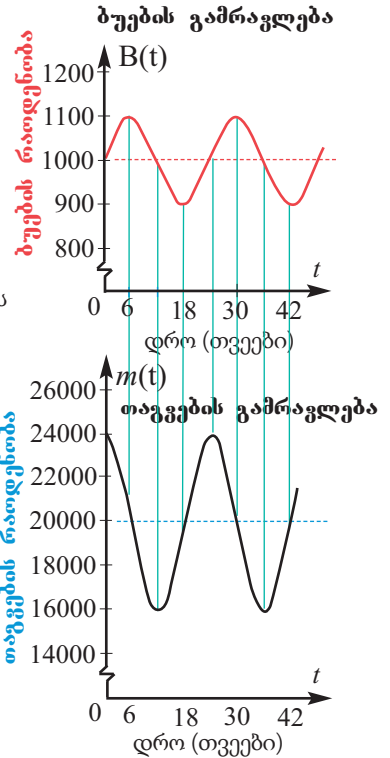
მაშასადამე, ამ ფუნქციის ძირითადი პერიოდიც 24 თვეა.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და პერიოდული მოვლენები

გრაფიკების ერთი და იგივე მასშტაბით აგების შემდეგ მათი შედარება შეიძლება. ეს შედარება უჩვენებს, რომ ბუების რაოდენობის გაზრდისას თავების რაოდენობა მცირდება და ბუების საკვები-თავების რაოდენობა მინიმალურ მნიშვნელობას უახლოვდება. ბუების რაოდენობის შემცირებისას თავების რაოდენობა იწყებს გაზრდას და მაქსიმალურ დონეს მათი ყველაზე მცირე რაოდენობით ყოფნისას აღწევს.

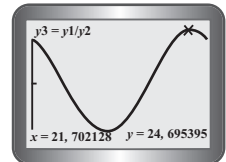
გ) ცხრილში მოცემულია ყოველ 6 თვეში ბუების რაოდენობის თავების რაოდენობასთან არსებული თანაფარდობა.

დრო	ბუ	თავი	შეფარდება
0	1000	24000	0,041
6	1100	20000	0,055
12	1000	16000	0,062
18	900	20000	0,045
24	1000	24000	0,041



ეს შეფარდება გარკვეული კანონზომიერებით უნდა იცვლებოდეს. კანონზომიერების დანახვისათვის გრაფკალკულატორში შეფარდების შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკი ავაგოთ ქვემოთ მოცემული წესით.

გრაფკალკულატორში $B(t) = 1000 + 100 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ ფუნქცია y_1 -ით,
 $S(t) = 20000 + 4000 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ ფუნქცია y_2 -ით შევიტანოთ და
 ავაგოთ $y = \frac{y_1}{y_2}$ ფუნქციის გრაფიკი.



როგორც ხედავთ, ამ შემთხვევაში ორი პერიოდული ფუნქციის შეფარდებაც პერიოდული ფუნქცია ხდება.

გამოყენებითი დაგალებები

- 1. ამინდის პროგნოზი.** ცხრილში მოცემული ინფორმაცია უჩვენებს თვეების მიხედვით საშუალო ტემპერატურას. იანვარი $t=1$ თებერვალი $t=2$ და ა. შ. აღნიშვნით. ცხრილის შესაბამისად აავით გრაფიკი. ტემპერატურის ცვლილება დაამოძღვრეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციით.

თვეები	იან-ვარი	თებერ-ვალი	მარ-ტი	აპრი-ლი	მაისი	ივნისი	ივლისი	აგვის-ტო	სექტემ-ბერი	ოქტომ-ბერი	ნოემ-ბერი	დეკემ-ბერი
საშუალო ტემპერატურა (°C)	-14,8	-12,7	-6,8	1,2	9,2	15,1	17,2	15,1	9,1	1,3	-6,7	-12,6

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და პერიოდული მოვლენები

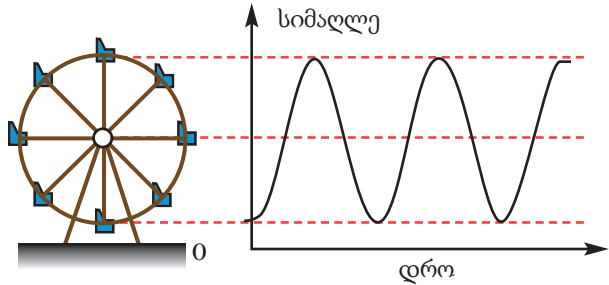
2. **ჯანმოვლობა.** $P = 100 - 20 \cos \frac{5\pi t}{2}$ ფუნქციით წყნარ მდგომარეობაში მყოფი პიროვნების t (წამი) დროის შუალედში პერიოდული წნევის განსაზღვრა შეიძლება.

ა) განსაზღვრეთ ფუნქციის პერიოდი.

ბ) განსაზღვრეთ პიროვნების გულისცემის რაოდენობა 1 წუთში.

3. კარუსელი მიწის ზედაპირიდან 10 მ სიმაღლეზე მყოფი ღერძის გარშემო ყოველ

60 წამში ერთ პერიოდს ასრულებს. მგზავრები კარუსელის კაბინებში 2 მ სიმაღლეზე ყოფნისას სხდებიან. სურათზე მოცემული გრაფიკი კარუსელის პირველ 150 წამში მოძრაობას ასახავს.



ა) დაწერეთ კარუსელის

მოძრაობის დაწყებისას ყველაზე დაბლა მყოფი კაბინის ნებისმიერ წამში მიწის ზედაპირიდან სიმაღლის განმსაზღვრელი ფუნქციის ფორმულა.

ბ) გუნელი კარუსელის მოძრაობის დაწყებისას ყველაზე ქვედა კაბინაში იყო. განსაზღვრეთ მოძრაობის დაწყებიდან 2,5 წუთის შემდეგ გუნელი დედამიწის ზედაპირიდან დაახლოებით რა სიმაღლეზე იქნება.

4. **ბიოლოგია.** კურდღლების $K(t)$ და ტურების $T(t)$ რაოდენობის მაჩვენებელი მათემატიკური მოდელებია:

$$K(t) = 30000 + 15000 \cos \frac{\pi t}{12} \text{ და}$$

$$T(t) = 4000 + 2000 \sin \frac{\pi t}{12}.$$

ააგეთ ორივე ფუნქცია ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში და სურათზე ნაჩვენები პირობითი დიაგრამა გრაფიკებზე წარმოადგინეთ



5. ველოსიპედის ღამით სწორ გზაზე მოძრაობის ვიდეოა გადაღებული. ველოსიპედის საბურავზე მყოფი სინათლის სხვადასხვა დროში დედამიწის ზედაპირიდან მანძილი (სიმაღლე) ვიდეოზე გაიზომა და ცხრილი იქნა შედგენილი.

დრო (t წმ)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
სიმაღლე (H სმ)	27	45	54	45	27	18	27	45	54



ა) ააგეთ ფუნქციის ერთი პერიოდის შესაბამისი გრაფიკი.

ბ) ცხრილის მიხედვით დაამოწმებთ H -ის t -ზე დამოკიდებულება ტრიგონომეტრიული ფუნქციით

გ) იპოვეთ ველოსიპედის საბურავის დიამეტრი.

დ) რა სიჩქარით მოძრაობს ველოსიპედი?

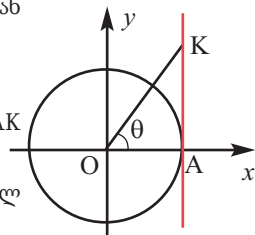
$y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციათა გრაფიკები

გამოკვლევა. კუთხის ტანგენსის ცვლილება. 1) უკრიან ფურცელზე გაავლეთ საკოორდინატო სიბრტყე და კოორდინატთა სათავეში ცენტრის მქონე ერთეულ რადიუსიანი წრეწირი. წრეწირზე $(1;0)$ წერტილში გაავლეთ მხები.

2) θ მობრუნების კუთხის დამამთავრებელი გვერდის ამ მხებთან გადაკვეთის წერტილი აღნიშნეთ K -თი.

$$\Delta OAK\text{-დან } \operatorname{tg} \theta = \frac{AK}{OA} = \frac{AK}{1} = AK$$

მახვილი θ მობრუნების კუთხისათვის $\operatorname{tg} \theta$ მნიშვნელობით AK მონაკვეთის სიგრძის ტოლია.



3) 45° -იანი კუთხის დამამთავრებელი გვერდი მხებთან რომელ წერტილში იკვეთება?

4) ტრანსპორტირის დახმარებით გაავლეთ სხვადასხვა ზომის კიდევ რამდენიმე კუთხე და იპოვეთ მათი მხებთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატი.

5) თუ θ კუთხე 90° -ს უახლოვდება, როგორ იცვლება K წერტილის ორდინატი? როცა $\theta = 90^\circ$ კუთხის დამამთავრებელი გვერდი მხებთან იკვეთება?

6) T პერიოდიანი ფუნქციის გამოკვლევისათვის T სიგრძის ინტერვალში მისი ცვლილების შესწავლა საკმარისია.

$\operatorname{tg} \theta$ -ის ცვლილების რომელ შუალედში შესწავლა იქნებოდა მიზანშეწონილი?

7) $\operatorname{tg} \theta$ -ს მნიშვნელობა, როცა $\theta = 90^\circ$ და $\theta = -90^\circ$ არ არის განსაზღვრული. $(-90^\circ; 90^\circ)$ შუალედში განსაზღვრულია.

შეავსეთ ცხრილი და ააგეთ ტანგენსის ფუნქციის გრაფიკი.

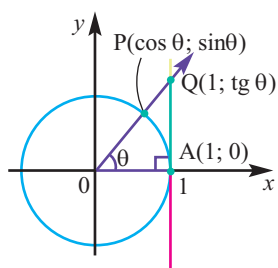
კუთხის ზომა	-70°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	70°
მხებზე მყოფი წერტილის ორდინატი									

8) $y = \operatorname{tg} \theta$ ფუნქციის გრაფიკი ააგეთ გრაფიკალურატორითაც.

$y = \operatorname{tg} x$ ფუნქცია

θ კუთხის ტანგენსის მნიშვნელობა კოორდინატთა სათავესა და ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე $(\cos \theta; \sin \theta)$ წერტილებზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტის მნიშვნელობაა.

როგორც სურათიდან ჩანს, მხების AQ მონაკვეთის სიგრძე Q წერტილის ორდინატის მნიშვნელობის ტოლია. Q წერტილის კოორდინატებია $(1; \operatorname{tg} \theta)$. AQ წრფეს ტანგენსების ღერძი ეწოდება.

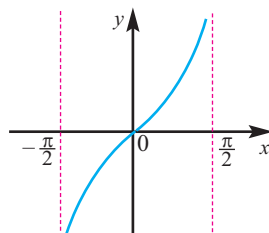
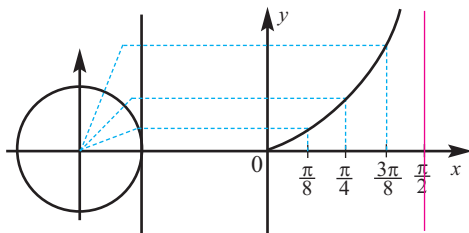


რადგან $\operatorname{tg} 0 = 0$, ამიტომ $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე.

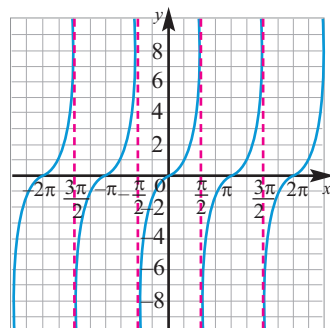
როცა x ცვლადი $\frac{\pi}{2}$ -ზე ნაკლებია, რაც უფრო უახლოვდება მას $\operatorname{tg} x$ იზრდება და $+\infty$ -ს უახლოვდება. $x = \frac{\pi}{2}$ ვერტიკალურ წრფეს, ასევე წრფეებს $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$ ($k \in \mathbb{Z}$) წრფეებს $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტები ეწოდება.

$y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციათა გრაფიკები

ერთეულოვანი წრეწირის I მეოთხედი და $[0; \frac{\pi}{2})$ შუალედი დავყოთ 4 ტოლ ნაწილად და ტანგენსების ღერძზე არსებული მნიშვნელობების შესაბამისი კუთხეების ტანგენსის ტოლი მონაკვეთები ავაგოთ. ტანგენსების წრფეზე მიღებული თითოეული წერტილიდან Ox ღერძზე იმ წერტილიდან, რომლის აბსცისა შესაბამისი კუთხის მნიშვნელობის ტოლია, აღმართული მართობი მკვეთამდე Ox ღერძის პარალელურად გავავლოთ. მიღებული წერტილები მიმდევრობით, გლუვი წირით შევაერთოთ, $[0; \frac{\pi}{2})$ შუალედში $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ რადგან მიღებული გრაფიკი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნით $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ინტერვალში $\operatorname{tg} x$ -ის გრაფიკი აიგება.



$y = \operatorname{tg} x$ არის π პერიოდიანი პერიოდული ფუნქცია. ამიტომაც აგებული გრაფიკის π -მდე მარჯვნივ და მარცხნივ გაგრძელებით მიიღება მრუდი, რომელსაც ტანგენსოიდა ეწოდება.



- ფუნქციის გრაფიკი უწყვეტი მრუდი არაა. x -ის $\frac{\pi}{2}$ -ისა და მისი კენტი ჯერადების შესაბამისი მნიშვნელობებში წყდება.
- ფუნქციას მაქსიმუმი და მინიმუმი არ გააჩნია.
- ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.
- ფუნქციის უმცირესი პერიოდია π .
- ფუნქციის გრაფიკი x ღერძს $x = \pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$) წერტილები კვეთს.
- ფუნქცია $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) წერტილებში არ არის განსაზღვრული. ამ წერტილებში გამავალი და პუნქტირით გავლებული ხაზები გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტებია.
- $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$)
- ფუნქცია ორ მეზობელ ასიმპტოტს შორის ზრდადია.
- კენტი ფუნქციაა: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

სასწავლო დავალებები

1. გამოთვალეთ ტანგენსის ფუნქციის თვისებების გამოყენებით.

ა) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})$ ბ) $\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4})$ გ) $\operatorname{tg}(-\frac{11\pi}{3})$

2. ააგეთ $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკი $[-2\pi; 2\pi]$ მონაკვეთზე.

y = tg x და y = ctg x ფუნქციათა გრაფიკები

y = ctg x ფუნქცია

y = ctg x ფუნქციის გრაფიკის აგებისათვის გამოვიყენოთ

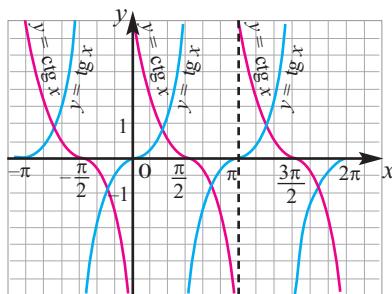
$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ იგივეობა.}$$

- 1) y = tg x ტანგენსიოდა აბსცისთა ღერძის გასწვრივ $\frac{\pi}{2}$ -ით მარცხნივ მოცურდება.
- 2) მიღებული მრუდი აბსცისთა ღერძის მიმართ სიმეტრიულად აისახება.

ტანგენსის მნიშვნელობა, როცა $x = \pi n$ ნულის ტოლია, კოტანგენსის ფუნქცია კი x-ის ამ მნიშვნელობისათვის არ არის განსაზღვრული:

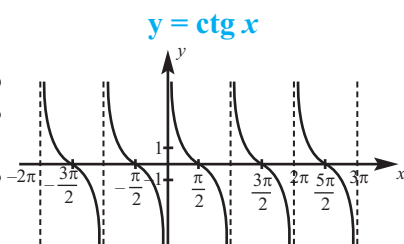
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

როგორც გრაფიკიდან ჩანს ტანგენსისა და კოტანგენსის ფუნქციების გრაფიკების x ღერძთან გადაკვეთის წერტილებსა (ნულები) და ასიმპტოტებს ადგილები შეუვცლიათ.



ძირითადი თვისებები:

- უმცირესი პერიოდია π .
- განსაზღვრის არე πn -დან (n ნებისმიერი მთელი რიცხვია) განსხვავებული ყველა ნამდვილ რიცხვთან სიმრავლეა.
- მნიშვნელობათა არე ყველა ნამდვილ რიცხვთან სიმრავლეა.
- ორ ასიმპტოტს შორის კლებადი ფუნქციაა.
- კენტი ფუნქციაა. $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

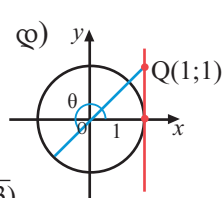
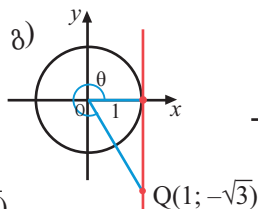
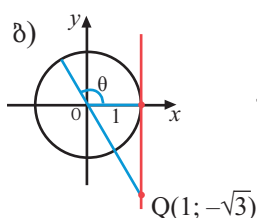
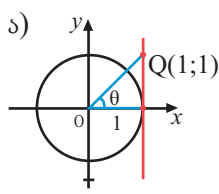


სასწავლო დავალებები

- 3.** ჩატარებული გამოკვლევების მიხედვით ქვემოთ მოცემულ კითხვებზე გაეცით პასუხი.

- ა) როცა $\alpha = 90^\circ$ და $\alpha = -90^\circ$ ტანგენსის ფუნქცია არ არის განსაზღვრული. როგორ აისახება ეს გრაფიკზე?
- ბ) ტანგენსის ფუნქციის პერიოდი რამდენი რადიანი ან რამდენი გრადუსია?

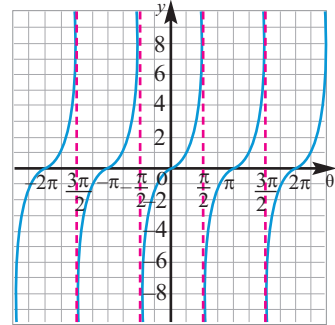
- 4.** იპოვეთ tg θ და θ კუთხის გრადუსული ზომა.



$y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციათა გრაფიკები

- 5.** $\operatorname{tg} \theta$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ მისი მნიშვნელობები.

ა) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ ბ) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$ გ) $\operatorname{tg}(-\frac{7\pi}{4})$
 დ) $\operatorname{tg} 0$ ე) $\operatorname{tg} \pi$ ვ) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$



- 6.** ააგეთ ფუნქციების გრაფიკები მოცემულ ინტერვალში.

ა) $y = \operatorname{tg} x \quad -90^\circ < x < 90^\circ$ გ) $y = \operatorname{tg} x \quad -90^\circ < x < 270^\circ$
 ბ) $y = \operatorname{tg} x \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ დ) $y = \operatorname{tg} x \quad -\pi \leq x \leq \pi$

- 7.** ა) ცნობილია, რომ როცა $\alpha = \frac{11\pi}{24}$, მაშინ $\operatorname{tg} \alpha \approx 7,6$ ტანგენსის ფუნქციის ძირითადი პერიოდის გამოყენებით დაწერეთ ამ მნიშვნელობის შესაბამისი კუთხის კიდევ 3 მნიშვნელობა.

ბ) ცნობილია, რომ როცა $\alpha = 1,25$, მაშინ $\operatorname{tg} \alpha \approx 3$ ტანგენსის ფუნქციის ძირითადი პერიოდის გამოყენებით დაწერეთ ამ მნიშვნელობის შესაბამისი კუთხის კიდევ 3 მნიშვნელობა.

გ) $-\pi \leq x \leq \pi$ შუალედში დაწერეთ x -ის ორი ისეთი მნიშვნელობა, რომ ამ მნიშვნელობებისათვის $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქცია არ იყოს განსაზღვრული.

- 8.** $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკი x -ის 90° -თან მიახლოების ნაწილში თითქმის ვერტიკალური წრფის ფორმას იღებს. კალკულატორით გამოთვალეთ ქვემოთ მოცემულ ცხრილებში ტანგენსის მოცემული კუთხეების შესაბამისი მნიშვნელობები. θ კუთხე რაც უფრო უახლოვდება 90° -ს, როგორ იცვლება ტანგენსის მნიშვნელობა? 90° -დან დამორების კვალობაზე როგორ იცვლება?

θ	$\operatorname{tg} \theta$
$89,5^\circ$	
$89,9^\circ$	
$89,999^\circ$	
$89,999999^\circ$	

θ	$\operatorname{tg} \theta$
$90,5^\circ$	
$90,01^\circ$	
$90,0001^\circ$	
$90,000001^\circ$	

- 9.** თითოეული ფუნქციისათვის $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ინტერვალში იპოვეთ: ა) ნულები
 ბ) ვერტიკალური ასიმპტოტები.

1) $y = \operatorname{tg} x$ 2) $y = \operatorname{ctg} x$

- 10.** $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ შუალედში დაწერეთ x -ის ისეთი სამი მნიშვნელობა, რომ ამ მნიშვნელობებისათვის არ იყოს განსაზღვრული:

ა) კოტანგენსის ფუნქცია; ბ) ტანგენსის ფუნქცია.

- 11.** ააგეთ $y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციების გრაფიკები და ამ გრაფიკების მიხედვით განმარტეთ მათი ლუწ-კენტობა და მოსაზრება უჩვენეთ ალგებრული ჩანაწერებითაც.

$y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციათა გრაფიკები

$y = a \operatorname{tg} bx$ ფუნქციის გრაფიკი

როცა a და b ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია $y = a \operatorname{tg} bx$, ფუნქციის გრაფიკის აგებისათვის საჭიროა ქვემოთ მოცემული ძირითადი მაჩვენებლების განსაზღვრა:

1. პერიოდი: $\frac{\pi}{|b|}$
 2. ვერტიკალური ასიმპტოტები: $x = \frac{\pi}{2|b|} \cdot (2n + 1), n \in \mathbb{Z}$ წრფეებია.
 3. განსაზღვრება x ღერძთან გადაკვეთის წერტილიდან ასიმპტოტს შორის მონაკვეთის შუა წერტილი. ამ წერტილში y -ის მნიშვნელობა ან a -ს, ან კიდევ $-a$ -ს ტოლი ხდება.
- მაგალითად, $y = 4 \operatorname{tg} 3x$ ფუნქციის პერიოდია: $\frac{\pi}{3}$
 ასიმპტოტები: $x = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2 \cdot 3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$ წრფეებია.

ნიმუში 1: ააგეთ $y = 3 \operatorname{tg} 2x$ ფუნქციის გრაფიკი.

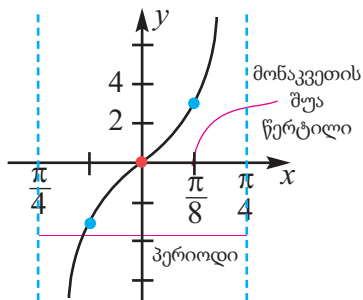
პერიოდი: $T = \frac{\pi}{|b|}, b = 2$ ამიტომ $T = \frac{\pi}{2}$

აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი: $(0; 0)$

კოორდინატთა სათავესთან უახლოესი ასიმპტოტები:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ ანუ } x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{და } x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ ანუ } x = -\frac{\pi}{4}$$



შუა წერტილები: $x = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}, x = \frac{1}{4} \cdot (-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{8}$ და გრაფიკზე მათი შესაბამისი წერტილები $(\frac{\pi}{8}; 3), (-\frac{\pi}{8}; 3)$.

ნიმუში 2:

ააგეთ $y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ ფუნქციის ერთი პერიოდის გრაფიკი.

$\operatorname{tg} x$ ფუნქციის ერთი პერიოდის x -ის მნიშვნელობებია:

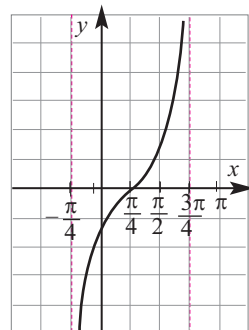
$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ ფუნქციის ერთი პერიოდის შესაბამისი შუალედი ვიპოვოთ $-\frac{\pi}{2} < (x - \frac{\pi}{4}) < \frac{\pi}{2}$ უტოლობის ამოხსნით:

$$-\frac{\pi}{2} < (x - \frac{\pi}{4}) < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

ასიმპტოტები $-\frac{\pi}{4}$ და $\frac{3\pi}{4}$ წერტილებზე გამავალი ვერტიკალური წრფეებია. $(0; -1)$ და $(\frac{\pi}{2}; 1)$ მნიშვნელობების გათვალისწინებით, სქემატურად ავაგოთ გრაფიკი.



$y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციათა გრაფიკები

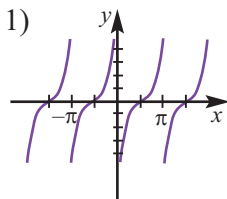
12. იპოვეთ ფუნქციების ასიმპტოტები, ნულები და შუაწერტილები.

ა) $y = 3 \operatorname{tg} x$ ბ) $y = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{3} x$ გ) $y = \operatorname{tg} 2\pi x$

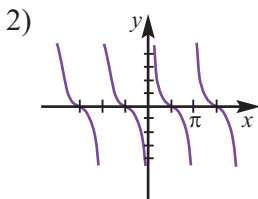
13. ააგეთ ფუნქციების გრაფიკი.

$y = \operatorname{tg} (x - \frac{\pi}{4})$ $y = \operatorname{tg} (x + \frac{\pi}{2})$ $y = \operatorname{tg} (x - \frac{\pi}{3})$ $y = \operatorname{tg} (x + \frac{\pi}{6})$

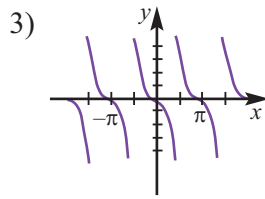
14. რომელი გრაფიკი რომელ ფუნქციას შეესაბამება?



ა) $y = \operatorname{ctg} x$



ბ) $y = \operatorname{ctg} (x + \frac{\pi}{2})$



გ) $y = -\operatorname{ctg} x$

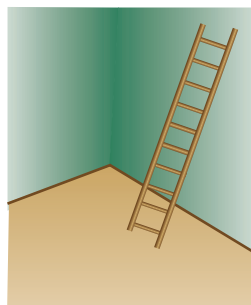
15. კიბე კედლიდან 3 მ-ის მოშორებით იატაკთან α კუთხის შექმნით კედელზეა მიყუდებული. კიბე კედლის h მეტრ სიმაღლემდე აღწევს.

ა) ტანგენსის ფუნქციის დახმარებით დაწერეთ დამოკიდებულება h -სა და α კუთხეს შორის.

ბ) ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი $0^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$ ინტერვალში.

გ) როგორ იცვლება h სიმაღლე α კუთხის ზრდისას?

დ) რა ხდება მაშინ, როცა $\alpha = 90^\circ$?



16. შემოღობვის დამცავი უსაფრთხოების კამერა შემოღობვის ნახევარზე აღებული წერტილიდან 5 მეტრ მანძილზეა დაყენებული. კამერა დაკვირვების ერთ სრულ ბრუნს 60 წამში ასრულებს.

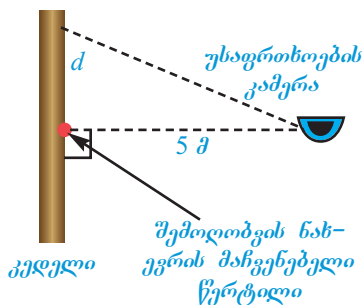
ა) ტანგენსის ფუნქციით გამოსახეთ კამერის შემოღობვის შუაწერტილიდან დაწყებული, შემოღობვის გასწვრივ დაკვირვების d სიგრძის დროზე დამოკიდებულების ფუნქცია. კამერის შემოღობვის შუა წერტილის დაკვირვების დროის დასაწყისად $t = 0$ ჩათვალოთ.

მიითითება: კამერა ერთი სრული ბრუნისას 360° -ით ბრუნავს. იპოვეთ რამდენი გრადუსით მობრუნდება ერთ წამში.

ბ) ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი $-15 \leq t \leq 15$ ინტერვალში

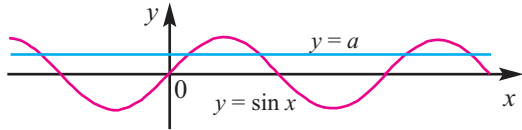
გ) შემოღობილის რა ნაწილზე იქნება განხორციელებული დაკვირვება, როცა $t = 10$ წამს?

დ) რა მოხდება, როცა $t = 15$ წამს?



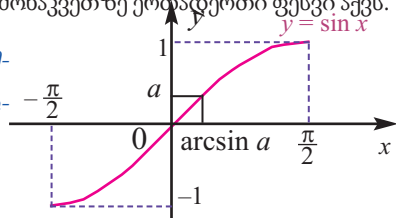
შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფე სინუსოიდის უსასრულო რაოდენობის წერტილში გადაკვეთს. ეს იმას ნიშნავს, რომ რიცხვით ღერძზე $y = \sin x$ ფუნქციას შექცეული ფუნქცია არა აქვს.



თუმცა $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ მონაკვეთზე $y = \sin x$ ზრდადია და იღებს -1 -დან 1 -მდე ყველა მნიშვნელობას, თანაც თითოეულ მნიშვნელობას არგუმენტის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისათვის იღებს. მაშასადამე, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ მონაკვეთზე $\sin x$ ფუნქცია შექცევადია და როცა $|a| \leq 1$, მაშინ $\sin x = a$ განტოლებას $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ მონაკვეთზე ერთადერთი ფესვი აქვს.

$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ შუალედიდან აღებულ ისეთ კუთხეს, რომლის სინუსი a -ს ტოლია, a რიცხვის არკსინუსი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $\arcsin a$.



$x = \arcsin a$ ტოლობა ორი პირობის ეკვივალენტურია:

$$1) -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad 2) \sin x = a$$

ნიმუშები. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, რადგან $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ და $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
 $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, რადგან $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ და $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

განსაზღვრების თანახმად

$$\sin(\arcsin a) = a$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

არკსინუსის დახმარებით $[-1; 1]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული მნიშვნელობათა სიმრავლის $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ მქონე ფუნქციის განსაზღვრა შეიძლება. ეს ფუნქცია აღინიშნება როგორც $y = \arcsin x$.

$y = \arcsin x$ ფუნქცია $y = \sin^{-1} x$ სახითაც აღინიშნება.

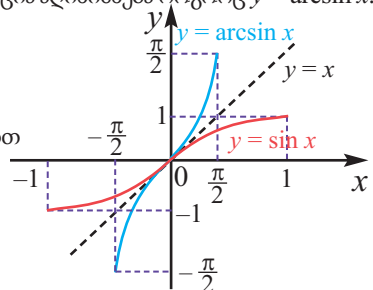
$y = \sin x$ ფუნქციის $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ შუალედში მოცემული

გრაფიკის $y = x$ წრფის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნით

$y = \arcsin x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება. $y = \arcsin x$

ფუნქციის განსაზღვრის არე $[-1; 1]$, მნიშვნელობათა

სიმრავლე $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ იქნება.

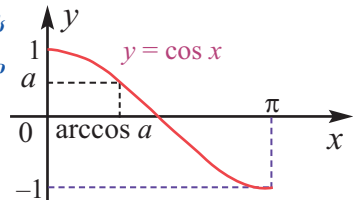


ანალოგიური წესით შეიძლება იმის ჩვენება, რომ მთელ რიცხვით ღერძზე $y = \cos x$ ფუნქციას შექცეული ფუნქცია არა აქვს. თუმცა $[0; \pi]$ მონაკვეთზე $y = \cos x$ მცირდება და $[-1; 1]$ მონაკვეთში შემავალ ყველა მნიშვნელობას იღებს ანუ, $[0; \pi]$ მონაკვეთზე $y = \cos x$ ფუნქცია შექცევადია და როცა $|a| \leq 1$, მაშინ $\cos x = a$ განტოლებას $[0; \pi]$ მონაკვეთზე ერთადერთი ფესვი აქვს.

$[0; \pi]$ შუალედიდან აღებულ ისეთ კუთხეს, რომლის კოსინუსი a -ს ტოლია, a რიცხვის არკკოსინუსი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $\arccos a$

$x = \arccos a$ ტოლობა ორი პირობის ეკვივალენტურია:

$$1) 0 \leq x \leq \pi \quad 2) \cos x = a$$



შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ნამუშები: $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, რადგან $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ და $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$
 $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, რადგან $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ და $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$.

განსაზღვრების თანახმად:

$$\cos(\arccos a) = a$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

$[-1; 1]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული $y = \arccos x$

ფუნქცია $[0; \pi]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული

$y = \cos x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა.

$y = \arccos x$ ფუნქცია $y = \cos^{-1} x$ სახითაც იწერება.

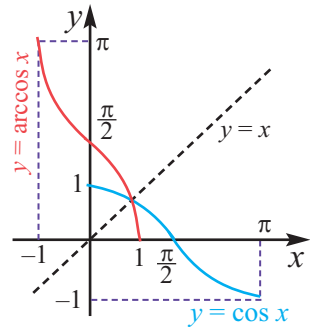
$y = \cos x$ ფუნქციის $[0; \pi]$ მონაკვეთზე მოცემული გრაფიკის

$y = x$ წრფის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნით

$y = \arccos x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება.

$y = \arccos x$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $[-1; 1]$,

მნიშვნელობათა სიმრავლე $[0; \pi]$ იქნება.



$y = \operatorname{tg} x$ ფუნქცია $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედში ზრდადაა და $(-\infty; +\infty)$ შუალედიდან ყველა

მნიშვნელობას იღებს. ამიტომაც ნებისმიერი a რიცხვისათვის $\operatorname{tg} x = a$ განტოლებას

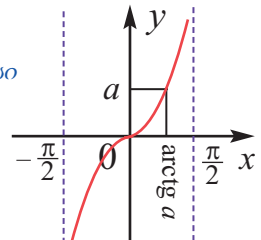
$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედში ერთადერთი ფესვი აქვს.

$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედიდან აღებულ ისეთ კუთხეს, რომლის ტანგენსი

a -ს ტოლია, a -ს არკტანგენსი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $\operatorname{arctg} a$.

$\operatorname{arctg} a = x$ ტოლობა ორი პირობის ეკვივალენტურია:

$$1) -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad 2) \operatorname{tg} x = a$$



ნამუშები: $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ რადგან $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ და $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, რადგან $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$ და $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

განსაზღვრების თანახმად:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

$y = \operatorname{arctg} x$ ფუნქცია $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედში

$y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის შექცეულია.

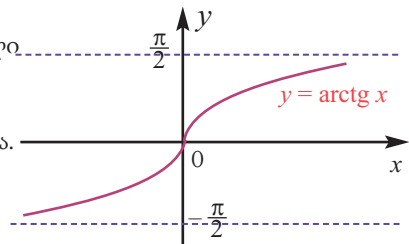
$y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედში მოცემული

გრაფიკის $y = x$ წრფის მიმართ სიმეტრიული

გარდაქმნისას $y = \operatorname{arctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება.

$y = \frac{\pi}{2}$ და $y = -\frac{\pi}{2}$ წრფეები $y = \operatorname{arctg} x$

ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია.



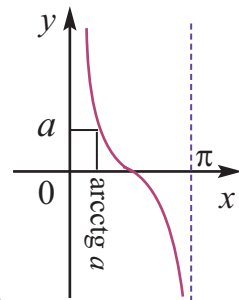
შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მსგავსი წესით ხდება არკკოტანგენსის ცნების შემოტანა.

$(0; \pi)$ შუალედიდან აღებულ ისეთ რიცხვს, რომლის კოტანგენსი a -ს ტოლია, a -ს არკკოტანგენსი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $\operatorname{arctg} a$.

$\operatorname{arctg} a = x$ ტოლობა ორი პირობის ეკვივალენტურია:

$$1) 0 < x < \pi \quad 2) \operatorname{ctg} x = a$$



ნიმუშები: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, რადგან $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ და $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$

$\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, რადგან $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1$ და $\frac{3\pi}{4} \in (0; \pi)$.

განსაზღვრების თანახმად:

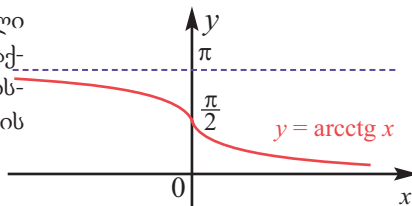
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = a$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ

$$\operatorname{arctg}(-a) = \pi - \operatorname{arctg} a.$$

$y = \operatorname{arctg} x$ ფუნქცია $(0; \pi)$ შუალედში $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციის შექცეულია.

$y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციის $(0; \pi)$ შუალედში მოცემული გრაფიკის $y = x$ წრფის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნით $y = \operatorname{arctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება. აბსცისთა ღერძი და $y = \pi$ წრფე $y = \operatorname{arctg} x$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია.



$y = \operatorname{arctg} x$ ფუნქცია $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ სახით, $y = \operatorname{arctg} x$ ფუნქცია კი $y = \operatorname{ctg}^{-1} x$ სახითაც აღინიშნება.

კალკულატორებზე არ არის გათვალისწინებული $\operatorname{ctg}^{-1} x$, $\sec^{-1} x$ და $\operatorname{cosec}^{-1} x$ დილაკები, რადგან ამ ფუნქციების $\operatorname{tg}^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ და $\sin^{-1} x$ დახმარებით გამოსახვა შესაძლებელია. მაგალითად, $y = \sec^{-1} x$ კი მაშასადამე, $\sec y = x$ და ეს ფუნქცია კოსინუსით შეიძლება რომ გამოვსახოთ: $\frac{1}{\cos y} = x$, $\cos y = \frac{1}{x}$. სადაც: $y = \cos^{-1} \frac{1}{x}$

მაშასადამე, ჩვენ $y = \sec^{-1} x$ ის გამოთვლისათვის $y = \cos^{-1} \frac{1}{x}$ - უნდა გამოვთვალოთ.

მიაქციეთ ყურადღება! $\sin^{-1} x \xrightarrow{\text{არ ნიშნავს}} \frac{1}{\sin x}$

სასწავლო დავალებები

1. იპოვეთ t კუთხე, რომელიც მოცემულ ტოლობას აკმაყოფილებს და მოცემულ შუალედში მდებარეობს.

ა) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

ბ) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

გ) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0; \pi]$

დ) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0; \pi]$

ე) $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

ვ) $\operatorname{ctg} t = -1$, $(0; \pi)$

უქცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

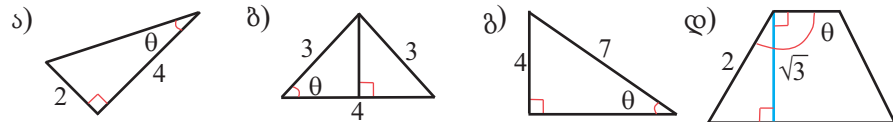
2. გამოთვალეთ და წარმოადგინეთ პასუხი რადიანებში და გრადუსებში.

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{arctg} \sqrt{3}$	$\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$
$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\arccos 0$	$\operatorname{arctg} 1$	$\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\arcsin(-\frac{1}{2})$	$\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$	$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$
		$\operatorname{arctg}(-1)$	$\operatorname{arcctg} 0$

3. კალკულატორის დახმარებით გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა. შედეგები დაამრგვალეთ მეასედებამდე.

ა) $\operatorname{tg}^{-1} 3,9$	ბ) $\cos^{-1} 0,24$	გ) $\sin^{-1} 0,24$	დ) $\sin^{-1} 0,75$
ე) $\sin^{-1} (-0,4)$	ვ) $\cos^{-1} (-0,6)$	ზ) $\operatorname{tg}^{-1} (-0,2)$	თ) $\operatorname{tg}^{-1} 2,25$

4. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ θ კუთხე.



5. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\arcsin 0 + \arcsin 1$	ბ) $\arccos(-1) - \arccos 0$
გ) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$	დ) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg}(-1)$

6. შეამოწმეთ ამოხსნის სისწორე.

ა) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$	ბ) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$
--	---

7. გამოთვალეთ.

ა) $\cos(\arcsin \frac{1}{2})$	ბ) $\sin(\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}))$	გ) $\operatorname{tg}(2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3})$
დ) $\operatorname{ctg}(2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$	ე) $\sin(2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$	ვ) $\cos(3 \cdot \arccos \frac{1}{2})$

8. მოცემული დამოკიდებულების მიხედვით იპოვეთ α კუთხე.

ა) $\sin \alpha = \frac{1}{2}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$	დ) $\operatorname{tg} \alpha = 1, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$
ბ) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$	ე) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}, 270^\circ < \alpha < 360^\circ$
გ) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$	ვ) $\operatorname{ctg} \alpha = 1, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$

9. α კუთხის რა მნიშვნელობისათვის არის მოცემული ტოლობა მართებული? გამოთვალეთ კალკულატორის დახმარებით.

ა) $\sin \alpha = -0,35; 180^\circ < \alpha < 270^\circ$	გ) $\operatorname{tg} \alpha = 2,4; 180^\circ < \alpha < 270^\circ$
ბ) $\cos \alpha = 0,43; 270^\circ < \alpha < 360^\circ$	დ) $\sin \alpha = 0,8; 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

10. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\sin(\arccos \frac{3}{5})$

ბ) $\cos(\arcsin(\frac{5}{13}))$

გ) $\sin(2 \cdot \arccos \frac{4}{5})$

დ) $\cos(2 \cdot \arccos \frac{3}{5})$

ე) $\cos(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{12}{13})$

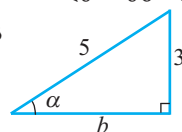
ვ) $\sin(\arccos \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13})$

ნამუშაო. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\sin(2 \cdot \arcsin \frac{3}{5})$.

დავუშვათ $\arcsin \frac{3}{5} = \alpha$. მაშასადამე, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ და $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის მახვილი კუთხის სინუსი არის $\frac{3}{5}$, ვიპოვოთ α კუთხის მიმდებარე კათეტი: $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. აქედან მიიღება $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. აღნიშვნების

გათვალისწინებით შეგვიძლია ჩავწეროთ:

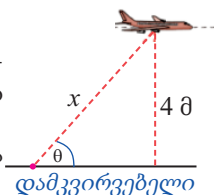
$$\sin(2 \cdot \arcsin \frac{3}{5}) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$



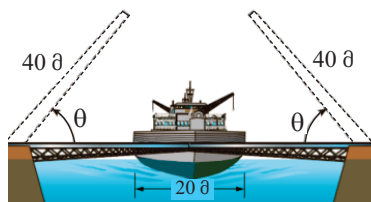
11. ძრავიანი სათამაშო თვითმფრინავი 4 მ სიმაღლეზე დაფრინავს.

ა) დაწერეთ დამკვირვებლიდან თვითმფრინავამდე არსებული მანძილი θ ამაღლების კუთხეზე დამოკიდებულების მაჩვენებელი ფუნქცია.

ბ) რამდენი გრადუსი იქნება θ კუთხე, როცა დამკვირვებელსა და თვითმფრინავს შორის მანძილი 25 მ-ია?



12. დიდ მდინარეებზე ხიდების მშენებლობის დროს გემების გავლის უზრუნველსაყოფად გამოიყენება მათი ისეთი კონსტრუქცია, რომ მოხდეს მათი გახსნა და დახურვა. მდინარეზე გადებული ასეთი ხიდის თითოეული ფრთის სიგრძე 40 მ-ია. 20 მ სიგრძის მქონე გემის შეუფერხებლად გავლისათვის ხიდის ფრთები, სულ მცირე რამდენ გრადუსიანი კუთხით უნდა აიწიოს?



13. გამოთვალეთ.

ა) $\arcsin(\sin \frac{\pi}{6})$

ბ) $\arccos(\cos \frac{\pi}{6})$

გ) $\arctg(\tg \frac{\pi}{3})$

14. $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3})$ გამოსახულების მნიშვნელობა ეწვერმა და ლალემ ქვემოთ მოცემული სახით გამოთვალეს.

ენვერი: $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$

ლალე: $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{\pi}{3})) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$

ვინ იპოვა სწორად მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობა? პასუხი დაასაბუთეთ.

15. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\arcsin(\sin \frac{7\pi}{6})$

ბ) $\arccos(\cos \frac{4\pi}{3})$

გ) $\arctg(\tg \frac{2\pi}{3})$

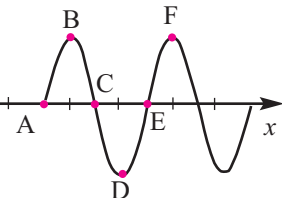
განმაზოგადებელი დაგვლებები

1. გრაფიკზე აღნიშნული წერტილები უჩვენებს x ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს, მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს.

ა) გრაფიკი შეუსაბამეთ $y = 2\sin 3x$ ფუნქციის გრაფიკს. თუ A წერტილის კოორდინატები იქნება $(0; 0)$, იპოვეთ B, C, D, E და F წერტილების კოორდინატები.

ბ) გრაფიკი შეუსაბამეთ $y = 3\cos 2x$ ფუნქციის გრაფიკს. თუ A წერტილის კოორდინატები იქნება $(0; 3)$, იპოვეთ B, C, D, E და F წერტილების კოორდინატები.

გ) გრაფიკი შეუსაბამეთ $y = \sin \frac{1}{2}x$ ფუნქციის გრაფიკს, თუ A წერტილის კოორდინატები იქნება $(-2\pi; 0)$, იპოვეთ B, C, D, E და F წერტილების კოორდინატები.



2. დაწერეთ ორი სხვადასხვა სინუსისა და კოსინუსის ფუნქცია, ისე, რომ განსაზღვრის არე იყოს ყველა ნამდვილ რიცხვთან სიმრავლე $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $[-3; 3]$ მონაკვეთი.

3. იპოვეთ ფუნქციის პერიოდი და ააგეთ გრაფიკი.

$$1) y = 6 \sin \frac{2}{3}x$$

$$2) y = 3 \cos \frac{1}{2}x$$

$$3) y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x$$

$$4) 2y = \operatorname{tg} x$$

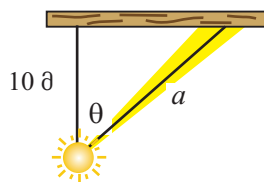
4. 10 მ მანძილზე დაყენებული სინათლის წყაროდან შენობაზე მიკრული სარეკლამო ბანერის განათება ხდება.

ა) ტრიგონომეტრიული ფუნქციით გამოსახეთ a მანძილის θ კუთხეზე დამოკიდებულება.

ბ) შეიტანეთ ცხრილში a -ს მნიშვნელობები მეათედებამდე დამრგვალებით.

გ) როგორც ცხრილიდან ჩანს, θ -ს მნიშვნელობები ტოლი ნაბიჯებით იზრდება.

შეიძლება თუ არა ითქვას იგივე a -ს მნიშვნელობების შესახებ?



θ	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$
a				

დ) თუ $0 \leq \theta \leq \frac{4\pi}{9}$, მაშინ სინათლის წყარო დაფის რა უდიდეს ნაწილს ანათებს?

5. ა) სინუსოიდის მინიმუმი $(18; 44)$, მაქსიმუმი $(30; 68)$ წერტილში მდებარეობს. იპოვეთ ამ ფუნქციის ამპლიტუდა.

ბ) ერთი პერიოდის განმავლობაში სინუსოიდა მაქსიმუმს $(4; 12)$ წერტილში, მინიმუმს კი $(12; -2)$ წერტილში იღებს. იპოვეთ ამ ფუნქციის პერიოდი.

გ) პერიოდის სიგრძის ტოლ მონაკვეთზე სინუსოიდის მაქსიმუმი $(\pi; 7)$, მინიმუმი კი $(-\frac{\pi}{2}; 3)$ წერტილში მდებარეობს. დაწერეთ ამ ფუნქციის ფორმულა $y = a \sin bx$ სახით.

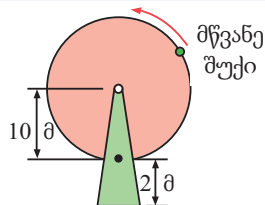
6. გამოთვალეთ:

$$ა) \sin(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2})$$

$$ბ) \operatorname{ctg}(\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{4}{5})$$

განმაზოგადებელი დაგვლებები

7. კარუსელზე მყოფი მწვანე შუქის ბრუნის ცენტრის მიმართ ნებისმიერ მომენტში მიწის ზედაპირიდან მანძილი დამო-
დელირეთ სინუსის ფუნქციით. ჩათვალით, რომ როცა $t = 0$,
მწვანე შუქი ყველაზე დაბალ წერტილში იმყოფება. კარუ-
სელი ერთ სრულ ბრუნს 100 წამში ასრულებს.



8. წყლის სიღრმე. ცხრილში მოცემული ინფორმაცია
შუალამიდან შუადღემდე ზღვის საბანაო ნაწილში
წყლის სიღრმის ცვლილების შესახებ.

ა) დამოდელირეთ წყლის სიღრმის ცვლილება
 $y = d + a \cos(bt + c)$ ფორმულის გამოყენებით.

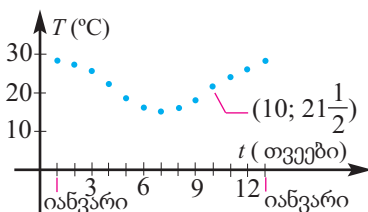
ბ) როგორ შეიცვალა სიღრმე დილის 7 საათიდან 9
საათამდე?

დრო, t	სიღრმე, y
შუალამე	3,2
02:00	9
04:00	11,9
06:00	9
08:00	3,2
10:00	0,3
შუადღე	3,2

9. ტემპერატურის ცვლილება. სამხრეთ აფრიკის ქვეყნების კლიმატი ტროპიკული
და სუბტროპიკული კლიმატია. დედამიწის ამ ნაწილში იანვარ-მარტი ზაფხულის,
ხოლო ივლის-აგვისტო ზამთრის თვეებია. ცხრილში სამხრეთ აფრიკაში მდებარე ქალაქ
კეიპ ტაუნის (Cape Town) ერთი წლის განმავლობაში თვეების მიხედვით მაქსიმალური
ტემპერატურაა მოცემული.

თვეები	იანვ.	თებ.	მარტ.	აპრ.	მაისი	ივნ.	ივლ.	აგვის.	სექტ.	ოქტ.	ნოემბ.	დეკემბ.
ტემპერა- ტურა ($^{\circ}\text{C}$)	28	27	25	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

ჰორიზონტალურ ღერძზე იანვარი $t = 1$, თებერვალი $t = 2$ და ა. შ. თვეების აღნიშვნით,
ვერტიკალურ ღერძზე კი ტემპერატურის აღნიშვნით
გრაფიკია აგებული. ცხრილი და გრაფიკი გადაი-
ტანეთ რვეულში. კიდევ 12 თვისათვის განაგრძეთ
ეს ცხრილი, თუ ცნობილია, რომ იანვრის თვიდან
დაწყებული თვიური საშუალო ტემპერატურა სა-
ვარაუდოდ კვლავ 12 თვეში ერთხელ მეორდება.



10. ტალღის აწევა-დაწევის შედეგად გემის ადგილმონაც-
ვლების (მეტრობით) $d = 0,6 \sin \pi t$ ფუნქციით მოდე-
ლირება შეიძლება, სადაც t არის დრო (წამოებით): უჩვენეთ
ამ ფუნქციის პერიოდი და ამპლიტუდა, დახაზეთ ამ
ფუნქციის გრაფიკი.



11. ღია ტიპის შეკითხვა. დაწერეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, რომლის
ამპლიტუდაა $\frac{1}{2}$, პერიოდია π და ააგეთ მისი გრაფიკი.

მრავალწახნაგები

პრიზმები

მრავალწახნაგები და მათი ხედები სწავლასწავა
მხრიდან

პრიზმის ზედაპირის ფართობი

პრიზმის სიბრტყითი კვეთები

პირამიდა. პირამიდის გვერდითი ზედაპირისა

და სრული ზედაპირის ფართობი

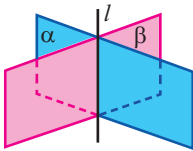
პირამიდის კვეთები. წაკვეთილი პირამიდა



მრავალწახნაგები

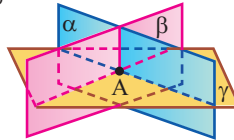
ცნობილია, რომ სიბრტყეებს სივრცეში სხვადასხვა ურთიერთმდებარეობა უკავიათ.

მკვეთი სიბრტყეები.



$$\alpha \cap \beta = l$$

სამ და უფრო მეტ სიბრტყეს შეიძლება მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი ჰქონდეს.



$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A$$

არამკვეთი სიბრტყეები.



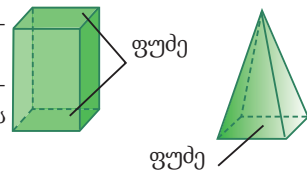
$$\alpha \parallel \beta$$

სიბრტყეთა სხვადასხვა ურთიერთმდებარეობა მრავალწახნაგებად წოდებულ სივრცით ფიგურებს (სხეულებს) ქმნის.

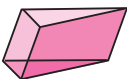
მრავალწახნაგა არის სხეული, რომლის ზედაპირი სასრული რაოდენობის სიბრტყითი ფიგურებისაგან- მრავალკუთხედებისაგან არის შემდგარი. მრავალწახნაგას შემომსაზღვრელ მრავალკუთხედებს მისი **წახნაგები** ეწოდება. მრავალწახნაგას აქვს არანაკლებ 4 წახნაგისა. წახნაგების გადაკვეთის წრფეთა მონაკვეთებს **წიბოები**, ხოლო წიბოების გადაკვეთის წერტილებს **წვეროები** ეწოდება. მრავალწახნაგას ზედაპირის შემდგენი მეზობელი მრავალკუთხედები ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობენ. სამი და უფრო მეტი წახნაგის საერთო წერტილი წვეროს წერტილი იქნება.

პრიზმა არის მრავალწახნაგა, რომელსაც ფუძეებად წოდებულ ორი წახნაგი აქვს პარალელური და კონგრუენტული მრავალკუთხედი, დანარჩენი წახნაგები კი პარალელოგრამებია.

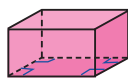
პირამიდა არის მრავალწახნაგა, რომლის ფუძე არის მრავალკუთხედი, ხოლო გვერდითი წახნაგები კი საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებია.



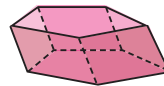
პრიზმისა და პირამიდის სახელს ფუძეში მყოფი მრავალკუთხედის სახელი განსაზღვრავს.



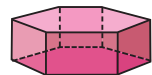
სამკუთხა პრიზმა



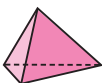
მარტკუთხა პარალელებიპედი



ხუთკუთხა პრიზმა



ექვსკუთხა პრიზმა



სამკუთხა პირამიდა



ოთხკუთხა პირამიდა

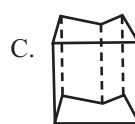
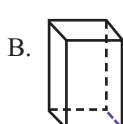


ხუთკუთხა პირამიდა



ექვსკუთხა პირამიდა

მრავალწახნაგები ორ სახედ იყოფა: ამოზნექილი და ჩაზნექილი. მრავალწახნაგას ამოზნექილი ეწოდება, თუ იგი მისი შემომსაზღვრელი თითოეული სიბრტყის ერთ მხარეზე ძევს. ამოზნექილი მრავალწახნაგას ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი მის შიგა არეს ეკუთვნის. A და B ამოზნექილი, C და D ფიგურები ჩაზნექილი მრავალწახნაგებია.



მრავალწახნაგები

წესიერი მრავალწახნაგა, ეწოდება მრავალწახნაგას, რომლის ყველა წახნაგი კონგრუენტული წესიერი მრავალკუთხედი და თითოეული წვეროდან ერთი და იგივე რაოდენობის წიბო გამოდის. ამ ფიგურებს პლატონურ ფიგურებსაც უწოდებენ, მაგალითად, კუბი წესიერი მრავალწახნაგაა. პლატონური ფიგურები ხუთი სახისაა: ტეტრაედრი, ოქტაედრი, დოდეკაედრი, კუბი, იკოსაედრი.

წესიერი ტეტრაედრი კუბი წესიერი ოქტაედრი წესიერი დოდეკაედრი წესიერი იკოსაედრი



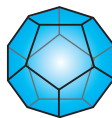
აქვს 4 წახნა-
გი, თითო-
ეული ტოლ-
გვერდა სამ-
კუთხედი



აქვს 6 წახნაგი,
თითოეული
კვადრატია



აქვს 8 წახნაგი,
თითოეული
ტოლგვერდა
სამკუთხედი



აქვს 12 წახნაგი,
თითოეული წე-
სიერი ხუთ-
კუთხედი



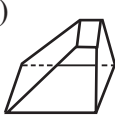
აქვს 20 წახნაგი,
თითოეული
ტოლგვერდა
სამკუთხედი

1. რომელ ფიგურებს შეიძლება ეწოდოს მრავალწახნაგა?

ა)



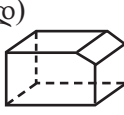
ბ)



გ)



დ)



ე)



ვ)

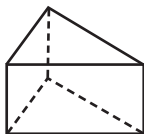


ზ)



2. განსაზღვრეთ თითოეული მრავალწახნაგას წახნაგები, წვეროები და წიბოები.

ა)



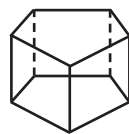
ბ)



გ)

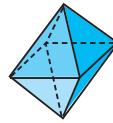
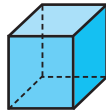
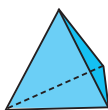
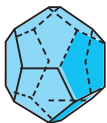


დ)

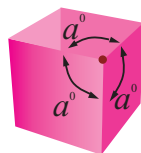


3. შეავსეთ ცხრილი რვეულში. ნებისმიერი მრავალწახნაგას წახნაგებს, წიბოებსა და წვეროებს შორის კავშირი გამოისახება ეილერის ფორმულით: $F + V - E = 2$, სადაც, F (fase) წახნაგების, V (vertex) წვეროების, E (edges) წიბოების რაოდენობას გვიჩვენებს. შეამოწმეთ ეილერის ფორმულა.

მრავალწახნაგა	წახნაგის ფორმა	წახნაგი (F)	წვერო (V)	წიბო (E)
ტეტრაედრი				
კუბი				
ოქტაედრი				
დოდეკაედრი				
იკოსაედრი				



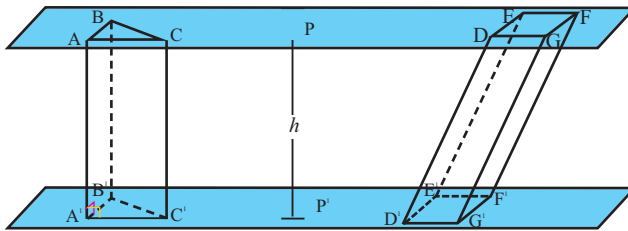
4. რატომ არსებობს პლატონური ფიგურების მხოლოდ 5 სახე? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად მიაქციეთ ყურადღება იმას, თუ ერთ წვეროში მკვეთი სამი მრავალკუთხედის ამ წვეროში მდებარე კუთხეების ჯამი მრავალწახნაგას შემდგენი ფიგურების სახეზე დამოკიდებულებით როგორ იცვლება. ეს ჯამი მაქსიმუმ რამდენი გრადუსი შეიძლება იყოს? თუ მრავალწახნაგის შემდგენი მრავალკუთხედები იქნება ექვსკუთხა, რამდენი გრადუსი იქნება საერთო წვეროს მქონე კუთხეების ჯამი?



პრიზები

პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე და პარალელური გადატანისას ერთმანეთთან თავსებადი ორი კონგრუენტული მრავალკუთხედისა და ამ მრავალკუთხედების შესაბამისი წერტილების შემაერთებელი ყველა პარალელური მონაკვეთისაგან შემდგარ ფიგურას პრიზმა ეწოდება. მრავალკუთხედებს **პრიზმის ფუძეები**, ფუძეების შესაბამისი წვერობების შემაერთებელ მონაკვეთებს წიბოები ეწოდება.

გვერდით წიბოებზე გამავალი სიბრტყის ნაწილებს **პრიზმის გვერდითი წახნაგები** ეწოდება. პრიზმის გვერდითი წახნაგები პარალელოგრამებია. ამ პარალელოგრამებიდან თითოეულის ორი გვერდი ფუძეების შესაბამისი გვერდებია, ხოლო დანარჩენი ორი გვერდი კი შესაბამისი გვერდითი წიბოებია.

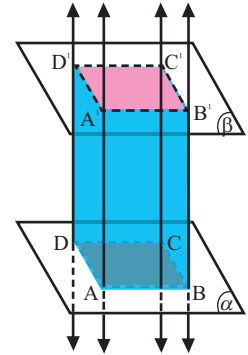


ა) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

მართი სამკუთხა
ფუძეებიანი პრიზმა

ბ) $DEFG \cong D'E'F'G'$

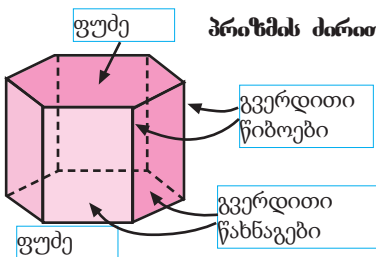
ოთხკუთხა ფუძეებიანი
დახრილი პრიზმა



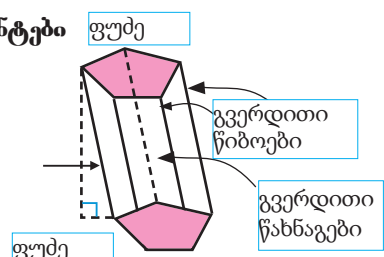
ისეთ პრიზმას, რომლის გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყის მართობულია **მართი პრიზმა** ეწოდება, ხოლო არამართობულს კი **დახრილი პრიზმა** ეწოდება.

მართი პრიზმის ყველა გვერდითი წახნაგი მართკუთხედი.

მართ პრიზმას, რომლის ფუძეც წესიერი მრავალკუთხედი და წესიერი პრიზმა ეწოდება.



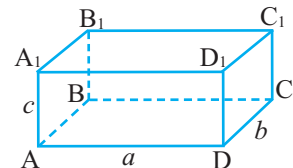
მართი პრიზმა



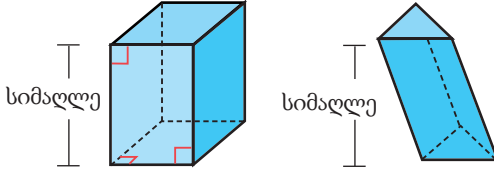
დახრილი პრიზმა

თუ პრიზმის ფუძეები n -კუთხედი, მაშინ მას n -კუთხა პრიზმა ეწოდება.

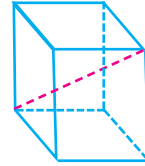
პრიზმას, რომლის ფუძეც პარალელოგრამია პარალელებიპედი ეწოდება. პარალელებიპედის მოპირდაპირე წახნაგები პარალელურია და კონგრუენტულია. მართ პარალელებიპედს, რომლის ფუძეც მართკუთხედი და მართკუთხა პარალელებიპედი ეწოდება. სურათზე ABCD A'B'C'D' მართკუთხა პარალელებიპედი. მართკუთხა პარალელებიპედის ერთი წვეროდან გამოსული წიბოს სიგრძეებს მისი განზომილებები ეწოდება.



პრიზმის ფუძის სიბრტყეებს შორის მანძილს მისი **სიმაღლე** ეწოდება. მართი პრიზმის გვერდითი წიბო მისი სიმაღლის ტოლია.



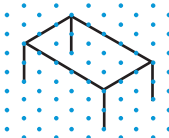
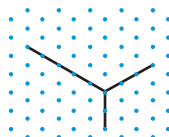
პრიზმის ერთი და იგივე წახნაგზე არამდებარე წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთს მისი **დიაგონალი** ეწოდება.



იზომეტრიულ წერტილოვან ფურცელზე მოცემულ ნაბიჯებად ააგეთ $5 \times 3 \times 2$ ზომის მართკუთხა პარალელეპიპედი.

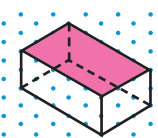
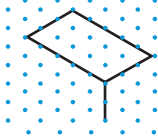
პრიზმის წვერო - შეარჩიეთ ერთი წერტილი. ამ წერტილიდან გაავლეთ მონაკვეთები: 2 ერთეულით ქვევით, 5 ერთეულით მარცხნივ, 3 ერთეულით მარჯვნივ.

პარალელოგრამის თითოეული წვეროდან გაავლეთ 2 ერთეულის სიგრძის მონაკვეთი.



დახაზეთ პარალელოგრამი, რომელიც პრიზმის ზედა ფუძეს უჩვენებს.

მონაკვეთის ბოლოები მიმდევრობით შეაერთეთ. არ დაგავიწყდეთ, წიბოები რომლებიც არ ჩანს, დახაზეთ წყვეტილი ხაზებით.

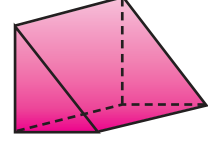
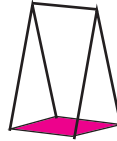
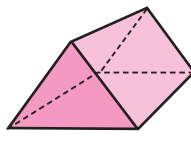
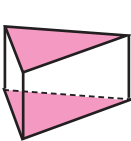


1. დახაზეთ მოცემული ზომების პარალელეპიპედი.

ა) $3 \times 4 \times 3$ ზომის მართკუთხა პარალელეპიპედი.

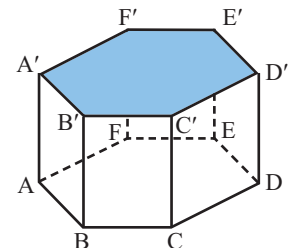
ბ) კუბი, რომლის წიბო 5 ერთეულია.

2. სურათზე მოცემული პრიზმის ორი პარალელური და კონგრუენტული წახნაგები სამკუთხედებია და მას 5 წახნაგი, 9 წიბო, 6 წვერო აქვს. სამკუთხა პრიზმა სხვადასხვა მდებარეობაში შეიძლება მოთავსდეს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ამ პრიზმებს 2 სამკუთხა და 3 ოთხკუთხა წახნაგი აქვთ. იზომეტრიულ ფურცელზე გაავლეთ ნაჩვენებ მდგომარეობაში მყოფი სამკუთხა პრიზმები.



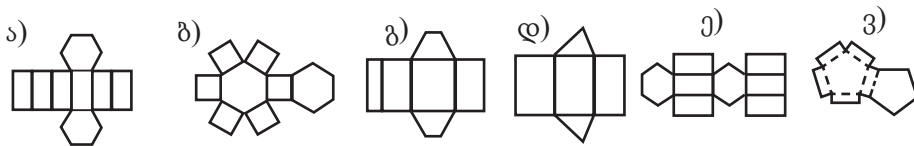
3. გაეცით პასუხი კითხვებზე მართი ექვსკუთხა პრიზმის შესახებ.

- რომელია CDE სიბრტყის პარალელური სიბრტყე?
- რომელი სიბრტყეები არ არის $A'AB$ სიბრტყის პარალელური?
- რომელი მონაკვეთებია ABC სიბრტყის მართობული?
- რატომ არის AA' და DD' მონაკვეთების სიგრძეები ერთმანეთის ტოლი?
- დაწერეთ მრავალწახნაგას წახნაგების სახელები.

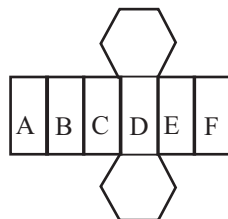


პრიზმები

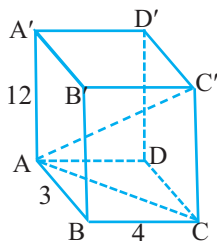
4. თუ მრავალწახნაგებს წიბოების გასწვრივ გადავკვეთთ და სიბრტყეზე გავშლით, მივიღებთ მრავალწახნაგას შლილს. განსაზღვრეთ რომელ პრიზმას მიეკუთვნება თითოეული შლილი. იპოვეთ წახნაგების, წიბოებისა და წვეროების რაოდენობა.



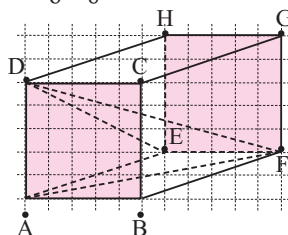
5. სურათზე წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის შლილია მოცემული და გვერდითი წახნაგები ასოებითაა აღნიშნული. ამ პრიზმის რომელი წახნაგია F წახნაგის პარალელური?



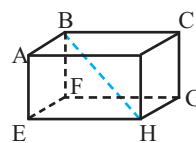
6. მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია $3 \times 4 \times 12$. იპოვეთ ფუძის AC დიაგონალი და პარალელეპიპედის AC' დიაგონალი.



7. სურათზე მოცემული მართკუთხა პარალელეპიპედის ორი მოპირდაპირე გვერდითი წახნაგის გვერდები 5 სმ-იანი კვადრატებია AE წიბო 12 სმ-ია. იპოვეთ DF-ის სიგრძე.



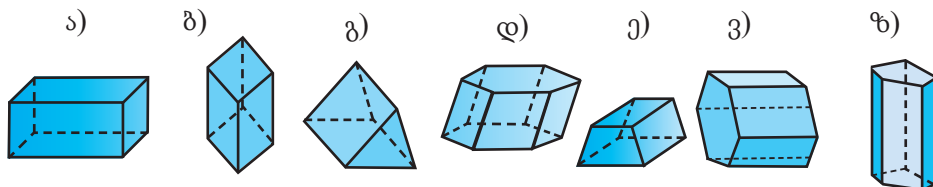
8. შესარულეთ დავალებები სურათზე ნაჩვენები მართკუთხა პარალელეპიპედის მიხედვით.



ა) ABC და EHG წახნაგებზე B და H წვეროების შემაერთებელი დიაგონალია გავლებული. გაავლეთ სხვა შესაძლო დიაგონალები და დაწერეთ რომელ წახნაგებზე მდებარე წერტილები შეაერთეთ.

ბ) უჩვენეთ პრიზმის რომელიმე ორი მართობული წახნაგი და თქვენი პასუხი სხვადასხვა თეორემებით ან განსაზღვრებებით დაასაბუთეთ.

9. დაწერეთ თითოეული პრიზმის სახელი, წიბოების, წვეროებისა და წახნაგების რაოდენობა.



პრიზმებისათვის შეამოწმეთ ეილერის ფორმულა.

პრაგალწახნაგები და მათი ხედები სხვადასხვა მხრიდან

კუბებით სხვადასხვა კონსტრუქციების აგება შეიძლება. ასეთ კონსტრუქციებს კუბოიდებიც ეწოდება. კუბოიდების სხვადასხვა მხრიდან ხედების (გეგმების) დახაზვა ან პირიქით, სხვადასხვა ხედების გეგმის მიხედვით კუბოიდების აგება დიდ პრაქტიკულ მნიშვნელობას ატარებს.

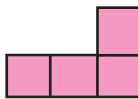
პრაქტიკული მეცადინეობა. ქვემოთ კონსტრუქციის ზედხედიდან, გვერდხედიდან და წინხედიდან ფიგურის აგებულება იზომეტრიულ ქაღალდზე არის ნაჩვენები. ნიმუშად კუბის კონსტრუქციის ზედხედი, გვერდხედი და წინხედი მოცემული. თქვენ კუბებისაგან შეადგინეთ სხვადასხვა კონსტრუქციები. დახაზეთ კონსტრუქციით შექმნილი ფიგურის სხვადასხვა ხედები და მათი გამოსახულებები იზომეტრიულ ფურცელზე.

ზედხედი



ზედხედის გამოყენებით ავაგოთ ფიგურის ფუძე

გვერდხედი

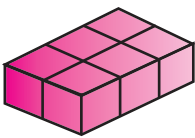


გვერდხედის გამოყენებით დავასრულოთ აგება

წინხედი

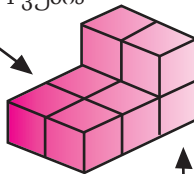


წინხედით შევამოწმოთ კონსტრუქციის სისწორე



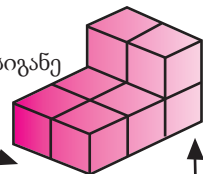
ფუძეს ზომებით 2×3 ერთეულის (კუბოებით) მქონე მართკუთხედის ფორმისაა

1-ლი და მე-2 მწკრივის სიმაღლე 1 კუბია



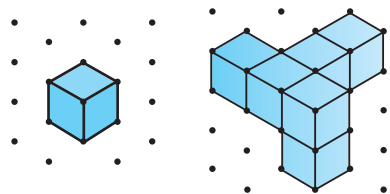
მე-3 მწკრივი 2 კუბის სიმაღლისაა

კონსტრუქციის სიგანე 2 ერთეულია



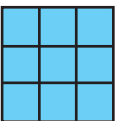
კონსტრუქციის სიმაღლე 2 ერთეულია

სამგანზომილებიანი ფიგურების ასახვისათვის ხელსაყრელია იზომეტრიული წერტილოვანი ფურცლები. მაგალითად, კუბის ერთეულის ტოლი წიბოები, წერტილებს შორის ერთეული მანძილის ტოლია. კუბის წვეროების აღნიშვნითა და მიმდევრობითი შეერთებით მისი სამგანზომილებიანი ხედის მიღება შეიძლება. ანალოგიური წესით იხაზება კუბოიდის შემდგენი ყველა კუბი.

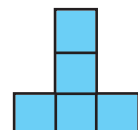


1. სხვადასხვა მხრიდან ხედების მიხედვით ავაგოთ კუბებისაგან კონსტრუქციები და გამოსახეთ ისინი იზომეტრიულ წერტილოვან ფურცელზე.

ა)

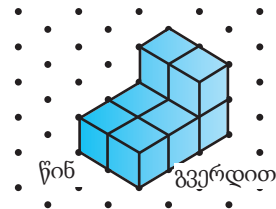


ბ)

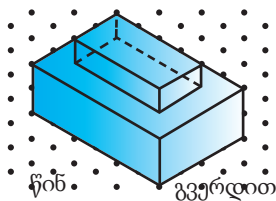


მრავალწახნაგები და მათი ხედები სხვადასხვა მხრიდან

2. სურათზე მოცემული კონსტრუქციებიდან რომელი ხედი: ზედხედი, გვერდხედი თუ წინხედი გაძლევთ იმის განსაზღვრის შესაძლებლობას, რომ კონსტრუქცია ერთი და იგივე სიმაღლისაა? დახაზეთ. უჩვენეთ.

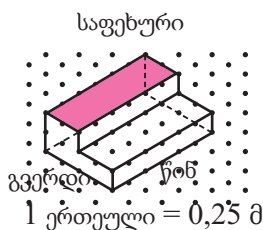
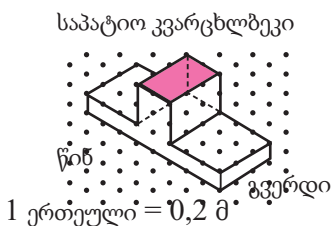


3. სურათზე ახალი ასაშენებელი ბინის გამოსახულებაა მოცემული. დახაზეთ ბინის ზედხედი, გვერდხედი და წინხედი. სურათზე მოცემული თითოეული ერთეული რეალურად 15 მ-ის ტოლია. ზედხედით განსაზღვრეთ რამდენი კვადრატული მეტრი ფართობი უკავია შენობას.

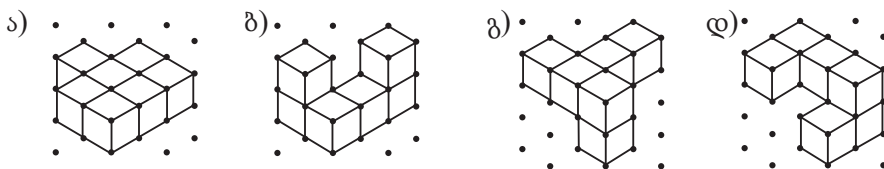


4. თითოეული კონსტრუქციის მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.

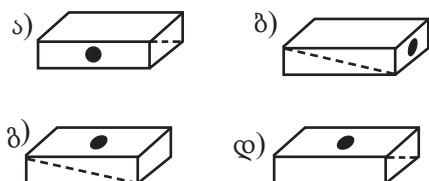
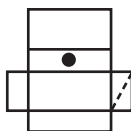
- დახაზეთ ხედები სხვადასხვა მხრიდან;
- იპოვეთ გაფერადებული ნაწილის ფართობი;
- რამდენი სანტიმეტრია კონსტრუქციის უმაღლესი ნაწილის სიგრძე?



5. დახაზეთ თითოეული კონსტრუქცია იზომეტრიულ წერტილოვან ფურცელზე. დახაზეთ კონსტრუქციების ზედხედები, წინხედები და გვერდხედები.



6. რომელ ფიგურას მიეკუთვნება მოცემული შლილი?



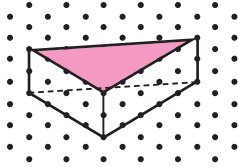
7. კუბის სამი სხვადასხვა ხედის მიხედვით განსაზღვრეთ რომელი ასოებია მოპირდაპირე წახნაგზე.



მრავალწახნაგები და მათი ხედები სხვადასხვა მხრიდან

8. იზომეტრიულ წერტილოვან ფურცელზე დახაზეთ შემდეგი სახის პრიზმები:

ნიმუში. ა) მართი სამკუთხა პრიზმა, რომლის სიმაღლე 2 ერთეულია, ფუძეში მყოფი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები კი 4 ერთეული და 5 ერთეული.



ბ) მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის სიმაღლეა 2 ერთეული, სიგანე 3 ერთეული, სიგრძე 5 ერთეული.

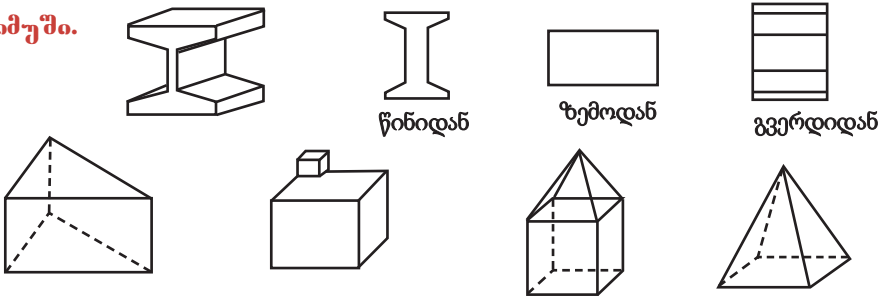
გ) მართი სამკუთხა პრიზმა, რომლის სიმაღლეა 2 ერთეული, ფუძეში მყოფი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 3 ერთეული და 5 ერთეული.

9. ბუნებაში მინერალები სხვადასხვა ფორმის კრისტალების სახით გვხვდება. არსებობს მინერალის არაძვირფას სახეებთან ამეტისი, კვარცი, ემირალი, ფლორიდი და სხვებთან ერთად ძვირფასი სახეებიც: ალმასი, ფირუზი, საფირი და სხვ. სურათზე კრისტალები და მათ ფორმებში გეომეტრიული ფიგურებია მოცემული. დახატეთ კრისტალების ზედხედები და გვერდხედები.

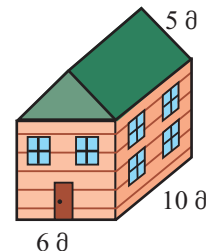


10. დახაზეთ მრავალწახნაგების გვერდხედები, წინხედები და ზედხედები.

ნიმუში.



11. ა) დახაზეთ სახლის ხედები ზემოდან, წინიდან და გვერდიდან.
ბ) იპოვეთ სახლის სახურავის ზომები.



12. მოცემული სამი ზომის მიხედვით იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი.

ა) 6; 8; 24

ბ) 12; 16; 21

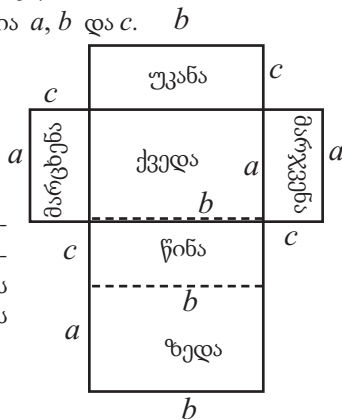
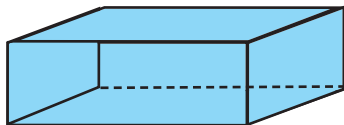
13. ერთი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბო 5 სმ-ია. ფუძე არის პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ, ხოლო დიაგონალებიდან ერთი 12 სმ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები.

14. იპოვეთ მართი პარალელეპიპედის დიაგონალები, თუ თითოეული მისი წიბოა a და ფუძის მახვილი კუთხე 60° -ია.

პრიზმის ზედაპირის ფართობი

გამოკვლევა 1. იპოვეთ იმ მართკუთხა პარალელეპიპედის

სრული ზედაპირის ფართობი, რომლის განზომილებებია a , b და c .



პარალელეპიპედის მოპირდაპირე წახნაგები წყვილ-წყვილად კონგრუენტული 6 მართკუთხედისაგან შედგება. პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობის გამოთვლისათვის გამოვთვალოთ მისი წახნაგების ფართობები.

წახნაგები

ფართობები

1. მარცხენა და მარჯვენა:

$$ac + ac = 2ac$$

2. ზედა და ქვედა:

$$ab + ab = 2ab$$

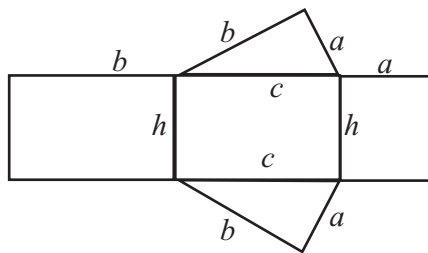
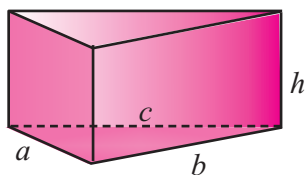
3. წინა და უკანა:

$$bc + bc = 2bc$$

ყველა წახნაგის ფართობების ჯამი: $S = 2ab + 2bc + 2ac$

a სიგრძის, b სიგანისა და c სიმაღლის მართკუთხა პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი $S = 2(ab + ac + bc)$ ფორმულით გამოითვლება.

გამოკვლევა 2. გამოთვალეთ მართი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა h , ხოლო ფუძეში მყოფი სამკუთხედის გვერდებია a , b და c .



დავხაზოთ პრიზმის შლილი.

პრიზმის გვერდითი ზედაპირი შედგება სამი მართკუთხედისაგან. ამ მართკუთხედების ფართობების ჯამი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობის ტოლია.

გვერდითი ზედაპირის ფართობის შემდგენი მართკუთხედების ფართობების ჯამი:

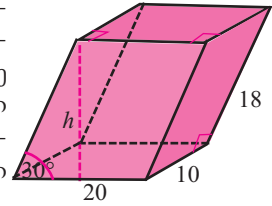
$$ah + bh + ch = (a + b + c)h = Ph$$

სადაც P ფუძეში მყოფი სამკუთხედის პერიმეტრია.

პრიზმის სრული ზედაპირის მოძებნისათვის უნდა ვიპოვოთ ფუძეების ფართობები, პრიზმის ფუძეები ამ შემთხვევაში სამკუთხედის სახისაა. მაშასადამე, მოცემული პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი, ფუძეების შემდგენი ორი სამკუთხედისა და გვერდითი ზედაპირის ფართობების ჯამის ტოლია. ამ შემთხვევაში ფუძის ფართობი ჰერონის ფორმულით შეიძლება გამოთვლილი იქნას.

პრიზმის ზედაპირის ფართობი

გამოკვლევა 3. დახრილი პრიზმის ფუძეები, 10×20 გვერდიანი ორი მართკუთხედაა. ორი გვერდითი წახნაგის (მარჯვენა და მარცხენა) ზომებიდან ერთი 10, მეორე კი 18 მქონე კონგრუენტული მართკუთხედებია. დანარჩენი ორი გვერდითი წახნაგის (წინა და უკანა) ზომებია 20 და 18, მახვილი კუთხე 30° -ია. მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი.



პრიზმის პარალელოგრამის სახის წინა და უკანა წახნაგების ფართობის გაანგარიშებისათვის ვიპოვოთ პრიზმის სიმაღლე.

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{18} \quad h = 9$$

წინა და უკანა წახნაგების ფართობების ჯამი: $2 \cdot 20 \cdot 9 = 360$ (კვ. ერთ.)

მარჯვენა და მარცხენა წახნაგების ფართობების ჯამი: $2 \cdot 10 \cdot 18 = 360$ (კვ. ერთ.)

ფუძეების ფართობების ჯამი: $2 \cdot 20 \cdot 10 = 400$ (კვ. ერთ.)

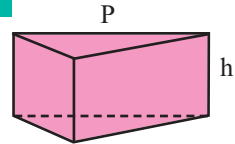
პრიზმის სრული ზედაპირი: $360 + 360 + 400 = 1120$ (კვ. ერთ.)

მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი

მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ფუძის მრავალკუთხედის პერიმეტრისა და სიმაღლის (გვერდითი წიბოს) ნამრავლის ტოლია.

$$S_{გვ} = Ph$$

სადაც P ფუძის პერიმეტრი, ხოლო h პრიზმის სიმაღლე უჩვენებს.



პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი

პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი ფუძეებისა და გვერდითი ზედაპირის ფართობების ჯამის ტოლია.

$$S_{სრ} = 2S_{ფძ} + S_{გვ}$$

მართი პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი $S = 2S_{ფძ} + Ph$ ფორმულით გამოითვლება.

ნიმუში. გამოთვალეთ მართი პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი.

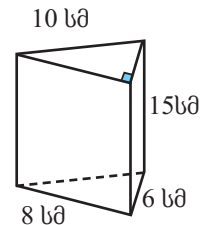
ა) გამოვთვალოთ მართი პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი, რომლის ფუძეებიც მართკუთხა სამკუთხედებია.

$$S_{სრ} = 2S_{ფძ} + S_{გვ} = 2S_{ფძ} + Ph$$

$$2S_{ფძ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

$$S_{გვ} = Ph = (10 + 8 + 6) \cdot 15 = 360 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

$$S_{სრ} = 48 \text{ სმ}^2 + 360 \text{ სმ}^2 = 408 \text{ (სმ}^2\text{)}$$



პრიზმის ზედაპირის ფართობი

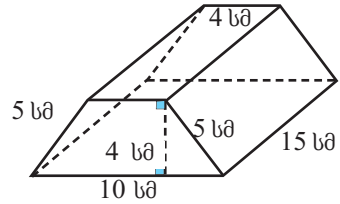
ბ) ვიპოვოთ მართი პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი, რომლის ფუძეებიც ტრაპეციებია.

$$S_{სრ} = 2S_{ფძ} + S_{გვ} = 2S_{ფძ} + Ph$$

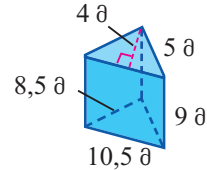
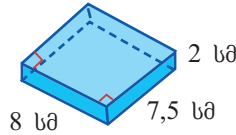
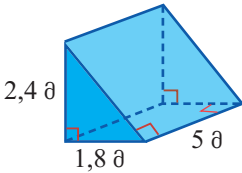
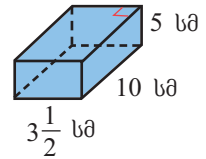
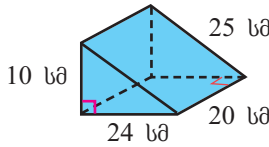
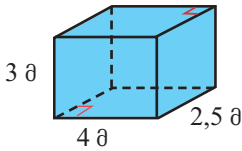
$$2S_{ფძ} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} (10 + 4) \cdot 4 \right) = 56 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

$$S_{გვ} = Ph = (10 + 5 + 5 + 4) \cdot 15 = 360 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

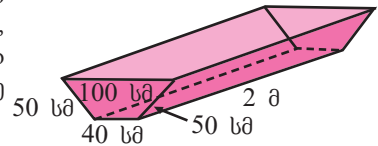
$$S_{სრ} = 56 + 360 = 416 \text{ (სმ}^2\text{)}$$



1. გამოთვალეთ მართი პრიზმის გვერდითი და სრული ზედაპირის ფართობები.

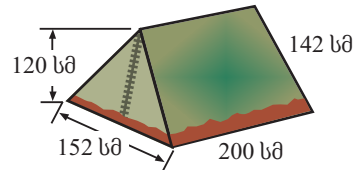


2. ა) ჰიქმეთი გეგმავს ცხენისათვის წყლის დასალევი მართი პრიზმის ფორმის ჭურჭლის დამზადებას, რომლის ფუძეც ტრაპეციის ფორმისაა. მოცემული ზომის ჭურჭლის დამზადებისათვის სულ მცირე რამდენი მასალა დასჭირდება?



ბ) 6 მ სიმაღლის პრიზმის ფუძეები ტოლგვერდა ტრაპეციებია. ტრაპეციის ფუძეები 2 მ და 8 მ -ია, გვერდები 5 მ-ია. იპოვეთ პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი. დახაზეთ შესაბამისი პრიზმა და მოცემული ზომები ზედ დააწერეთ.

3. სულ მცირე რამდენი კვადრატული მეტრი ქსოვილია გამოყენებული მოცემულ კარავზე?



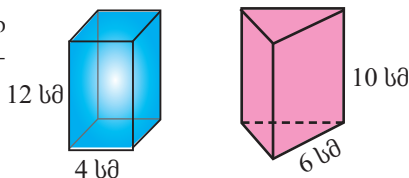
4. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3 : 7 : 8, მისი ზედაპირი 808 სმ²-ია. იპოვეთ წიბოები.

5. მართი პარალელეპიპედის ფუძის 6 სმ და 8 სმ გვერდები 30°-იან კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ ამ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ გვერდითი წიბო 5 სმ-ია.

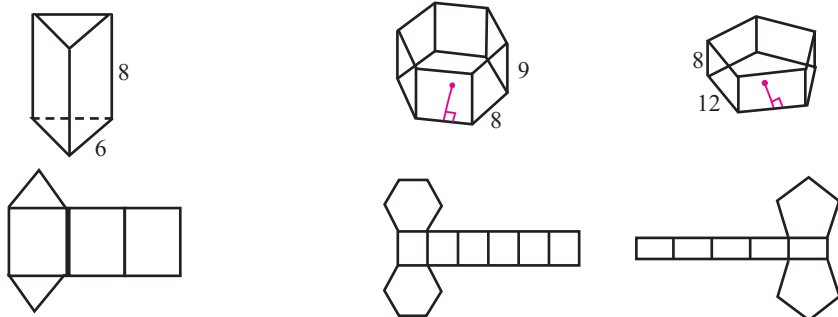
6. იპოვეთ მართი ოთხკუთხა პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი თუ დიაგონალი 14 სმ-ია, ხოლო გვერდითი წახნაგის დიაგონალი 10 სმ-ია

პრიზმის ზედაპირის ფართობი

7. სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ წესიერი პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი.



8. წესიერი პრიზმები და შლილის სურათები რვეულში ჩაიხაზეთ. შესაბამისი ზომები დააწერეთ შლილის სურათებზე. გამოთვალეთ პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი.

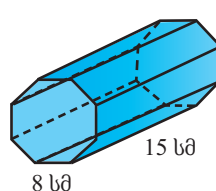
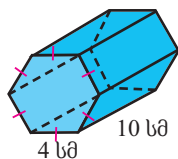
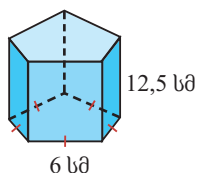


9. იპოვეთ სურათზე მოცემული პრიზმების სრული ზედაპირის ფართობი.

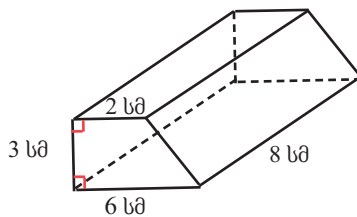
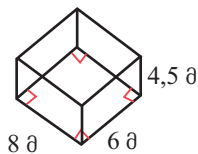
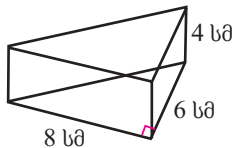
წესიერი ხუთკუთხედი

წესიერი ექვსკუთხედი

წესიერი
რვაკუთხედი

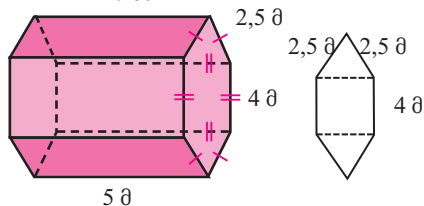


10. ჩაიხაზეთ ფიგურებისა და შლილის სურათები. გამოთვალეთ მართი პრიზმების სრული ზედაპირის ფართობები.



11. მართი პრიზმის მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ:

- ფუძეების ფართობი;
- გვერდითი ზედაპირის ფართობი;
- სრული ზედაპირის ფართობი.

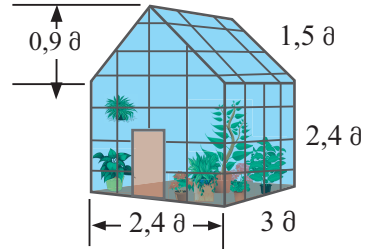


პრიზმის ზედაპირის ფართობი

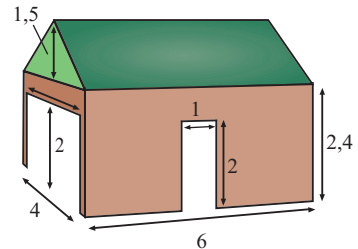
12. მონაცემების მიხედვით დახაზეთ მართი პრიზმების სურათი და გამოთვალეთ სრული ზედაპირის ფართობი.

პრიზმის ფუძე	პრიზმის სიმაღლე
ა) ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდი 8 ერთეულია	10 ერთეული
ბ) სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 13; 14; 15 ერთეული	12 ერთეული
გ) ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდები 12; 10; 10 ერთეულია	7 ერთეული
დ) ტოლფერდა ტრაპეცია რომლის გვერდები 10; 5; 4; 5 ერთეულია	20 ერთეული
ე) რომბი, რომლის დიაგონალებია 8 და 6 ერთეული	10 ერთეული
ვ) წესიერი ექვსკუთხედი, რომლის გვერდია 8 ერთეული	11 ერთეული

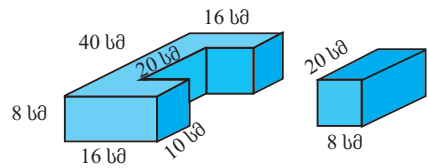
13. სურათზე მოცემული ზამთრის ბაღის კედლები და სახურავი გამჭვირვალე ფილებით უნდა დაიფაროს. ცნობილია, რომ კარების ფართობი $1,8 \text{ მ}^2$ -ია. მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ რამდენი კვადრატული მეტრი ფილა იქნება საჭირო მისი დაფარვისათვის?



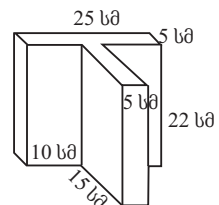
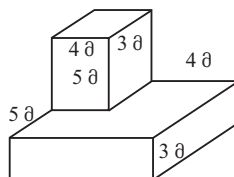
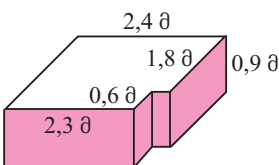
14. 30 მ^2 ფართობის შეღებვისათვის დაახლოებით 4 ლ საღებავია საჭირო. სურათზე ნაჩვენები ავტო-ფარების 2-ჯერ შეღებვისათვის რამდენი ლიტრი საღებავი იქნება საჭირო? ზომები მეტრებშია მოცემული.



15. მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის ფიგურისგან სურათზე ნაჩვენები ნაწილი ამოჭრილ-ამოღებული იქნა. როგორ შეიცვალა დარჩენილი ფიგურის ნაწილის სრული ზედაპირის ფართობი? პასუხი გამოთვლებით დაასაბუთეთ.



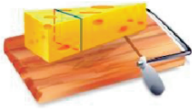
16. იპოვეთ მართკუთხა პარალელებიპედისაგან ამოჭრით მიღებული ფიგურების სრული ზედაპირის ფართობი.



პრიზმის სიბრტყითი კვეთები

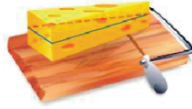
გამოკვლევა. ყველი მართი სამკუთხა პრიზმის ფორმისაა. როგორ უნდა დაჭრათ ყველი, რომ მოჭრილი კვეთები მოთხოვნილი ფორმისა იყოს?

ა) მართკუთხედი



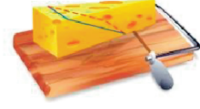
ა) გვერდხედი და წინხედი მართკუთხა ფორმისაა. თუ ყველს დავჭრით ვერტიკალურად, კვეთებში მართკუთხედები წარმოიქმნება.

ბ) სამკუთხედი



ბ) ყველის ზედახედი სამკუთხა ფორმისაა თუ ყველს ჰორიზონტალურად დავჭრით, კვეთა სამკუთხა სახისა იქნება.

გ) ტრაპეცია

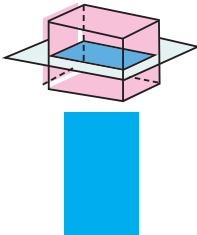


გ) ყველის გვერდხედი სამკუთხა ფორმისაა. თუ ყველს განსაზღვრული კუთხით დავჭრით, კვეთა ტრაპეციის სახისა იქნება.

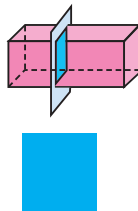
პრიზმის სიბრტყითი კვეთები

პრიზმის სიბრტყესთან გადაკვეთის შედეგად მასზე დარჩენილი კვალი განსაზღვრავს სიბრტყითი კვეთის ფორმას. სურათზე მართკუთხა პარალელეპიპედის სიბრტყითი კვეთებია ასახული.

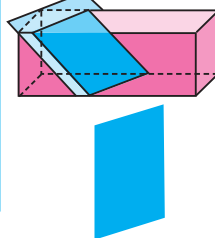
ფუძის სიბრტყის პარალელური სიბრტყით გადაკვეთა. მიიღება მართკუთხედი.



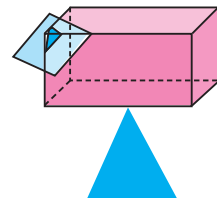
ფუძის მართობული სიბრტყით გადაკვეთა. მიიღება მართკუთხედი.



ფუძის სიბრტყესთან განსაზღვრული კუთხის შემქმნელი მოპირდაპირე წახნაგების მკვეთი სიბრტყე. მიიღება პარალელოგრამი.



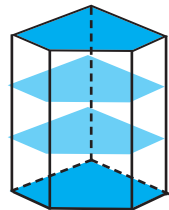
ფუძის სიბრტყესთან განსაზღვრული კუთხის შემქმნელი ერთი წვეროდან გამოსული წიბოების მკვეთი სიბრტყე. მიიღება სამკუთხედი.



მიაქციეთ ყურადღება! როცა ვამზობთ სიბრტყითი კვეთა, ვგულისხმობთ არა გამოყოფილ ნაწილს, არამედ ფიგურაზე დარჩენილ კვეთის სახეს.

პრიზმის გვერდითი წიბოების მართობული სიბრტყით გადაკვეთისას მიღებულ მრავალკუთხედს მისი მართობული კვეთა ეწოდება. პრიზმის ფუძის სიბრტყის პარალელური სიბრტყითი კვეთა კი ფუძის კონგრუენტული მრავალკუთხედია.

პრიზმის ერთ წახნაგზე არამდებარე ორ გვერდით წიბოზე გამავალ მკვეთს დიაგონალური კვეთა ეწოდება.

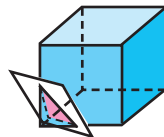
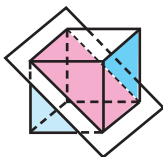
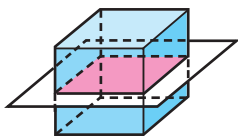


n -კუთხა პრიზმის დიაგონალური კვეთების რაოდენობა $\frac{n(n-3)}{2}$ -ის ტოლია.

ვინაიდან დიაგონალური კვეთებიდან თითოეული პარალელოგრამია, მიიღება რომ n -კუთხა პრიზმას $n(n-3)$ რაოდენობის დიაგონალი აქვს.

პრიზმის სიბრტყითი კვეთები

1. რომელი მრავალკუთხედი მიიღება კუბის სახით ნაჩვენებ სიბრტყესთან გადაკვეთისას?



2. დახაზვით წარმოადგინეთ თითოეული პრიზმის შესაბამის სიბრტყესთან კვეთა. განსაზღვრეთ გადაკვეთისას მიღებული მრავალკუთხედის სახე.

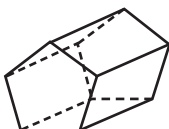
ფუძის სიბრტყის პარალელური სიბრტყით



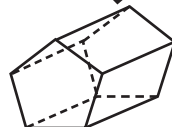
ფუძის სიბრტყის მართობული სიბრტყით



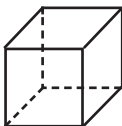
ფუძის სიბრტყის პარალელური სიბრტყით



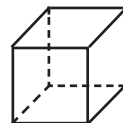
ფუძის სიბრტყის მართობული სიბრტყით



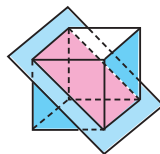
ფუძის სიბრტყესთან განსაზღვრულ კუთხის შექმნით ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს მკვეთი.



ფუძის სიბრტყესთან განსაზღვრული კუთხის შექმნით წინა და უკანა წახნაგების მკვეთი სიბრტყით.



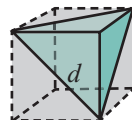
3. 1) იპოვეთ 6 სმ წიბოს მქონე კუბის სურათზე ნაჩვენები სიბრტყითი კვეთის პერიმეტრი.



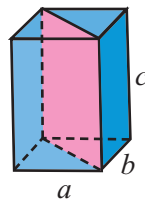
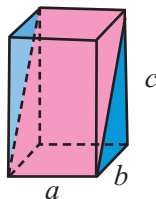
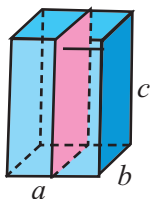
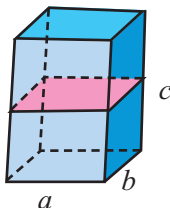
2) კუბი ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს წვეროებზე გამავალი სიბრტყითაა გადაკვეთილი. რა ფიგურა მიიღება კვეთაში?

ა) იპოვეთ d მონაკვეთის სიგრძე, თუ კუბის წიბო 1 სმ-ია.

ბ) იპოვეთ სიბრტყითი კვეთის პერიმეტრი, თუ კუბის წიბო $3\sqrt{2}$ სმ-ია.



4. მართკუთხა პარალელებიპედის განზომილებებია 9 სმ $\times$ 12 სმ $\times$ 20 სმ. გამოთვალეთ თითოეული სიბრტყითი კვეთიდან მიღებული ფიგურების პერიმეტრი და ფართობი.



5. მართკუთხა პარალელებიპედის ფუძის გვერდები 7 სმ და 24 სმ-ია. პარალელებიპედის სიმაღლე კი 8 სმ-ია. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

6. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი 2 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

პრიზმის სიბრტყითი კვეთები

7. მართი პრიზმის ფუძე რომბია, მისი დიაგონალური კვეთის ფართობებია 42 სმ^2 და 56 სმ^2 . იპოვეთ ამ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.
8. მართი პრიზმის ფუძე რომბია. პრიზმის დიაგონალები 8 სმ და 5 სმ -ია, ხოლო სიმაღლე 2 სმ . იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობის მისი მართობული კვეთის გამოყენებით ზოგადი სახით გამოსახვა შეიძლება.

პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი მისი მართობული კვეთის პერიმეტრისა და გვერდითი წიბოს სიგრძის ნამრავლის ტოლია.

$$S_{\text{გვ}} = P_{\perp \text{კვ}} l$$

მართი პრიზმის ფუძეებთან მართობული კვეთები კონგრუენტული მრავალკუთხედებია.

ამიტომაც მართ პრიზმაში მართობული კვეთის პერიმეტრის ნაცვლად ფუძის პერიმეტრის გამოსახულება გამოიყენება. მართობული კვეთის პერიმეტრის გამოყენებით შეიძლება დახრილი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობის პოვნა. დახრილი პრიზმის გვერდითი ზედაპირი მისი წახნაგების ფართობების ცალ-ცალკე პოვნითა და შეჯამებითაც შეიძლება გამოითვალოს (მე-3 გამოკვლევის მსგავსად).

ნამუშაუ. დახრილი პრიზმის ფუძეები ტოლგვერდა სამკუთხედებია $ACC'A'$ წახნაგი ოთხკუთხედი. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $AA' = 12 \text{ სმ}$, $AB = 8 \text{ სმ}$ და $\alpha = 30^\circ$.

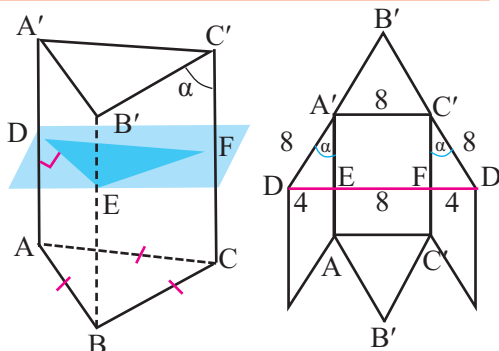
ამოხსნა: პრიზმის გვერდითი ზედაპირი:

$$S_{\text{გვ}} = P_{\perp \text{კვ}} l$$

პრიზმის მართობულ კვეთაში მიიღება სამკუთხედი DEF . ამოცანის ამოხსნისათვის პრიზმის ღია სურათზე უფრო თვალნათლივ დანახვა შეიძლება.

DE და FD ვინაიდან 30° -იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტებია 4 სმ იქნება. DEF მართობული კვეთის პერიმეტრი: $DE + EF + FD = 4 + 8 + 4 = 16 \text{ (სმ)}$

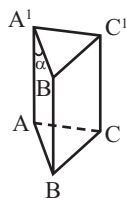
$$S_{\text{გვ}} = P_{\perp \text{კვ}} AA' = 16 \cdot 12 = 192 \text{ (სმ}^2\text{)}$$



9. დახრილი პრიზმის ფუძე არის მართკუთხედი, რომლის გვერდებია 6 სმ და 4 სმ . გვერდითი წახნაგებიდან ორის ზომა $6 \text{ სმ} \times 8 \text{ სმ}$ მართკუთხედებია, დანარჩენი ორი გვერდითი წახნაგი კი ზომებით $4 \text{ სმ} \times 8 \text{ სმ}$, 30° -იანი მახვილი კუთხის მქონე პარალელოგრამია. იპოვეთ დახრილი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თითოეული წახნაგის ფართობის გამოთვლით.

10. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბოებს შორის მანძილები 4 სმ , 6 სმ და 8 სმ -ია. პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 90 სმ^2 -ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი წიბო.

11. სურათზე მოცემული დახრილი პრიზმის ფუძეები ტოლგვერდა სამკუთხედებია $ACC'A'$ წახნაგი ოთხკუთხედი. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი. თუ: $AA' = 10 \text{ სმ}$, $AB = 4 \text{ სმ}$, $\alpha = 45^\circ$.



პირამიდა. პირამიდის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი

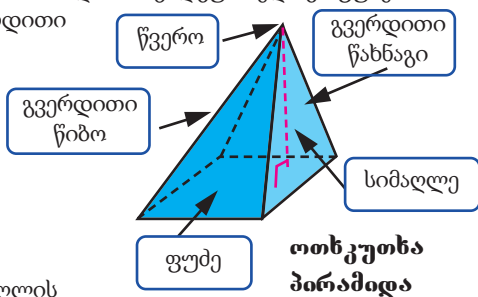
პირამიდა არის მრავალწახნაგა, რომლის ერთი წახნაგი არის მრავალკუთხედი, ხოლო დანარჩენი წახნაგები საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებია. საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედები პირამიდის გვერდითი წახნაგებია, ხოლო მრავალკუთხედი კი ფუძე.

გვერდითი წახნაგების საერთო გვერდებს გვერდითი წიბოები ეწოდება.

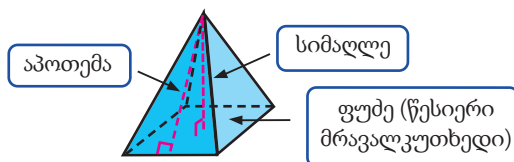
გვერდით წახნაგებზე არსებულ სამკუთხედების საერთო წვეროს პირამიდის წვერო ეწოდება.

პირამიდის წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე დაშვებულ მართობს პირამიდის სიმაღლე ეწოდება.

თუ ფუძე წესიერი მრავალკუთხედი და სიმაღლის ფუძე ამ მრავალკუთხედის ცენტრს ემთხვევა მაშინ პირამიდას წესიერი პირამიდა ეწოდება.

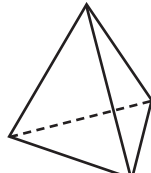
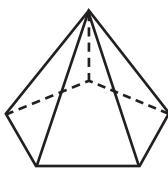
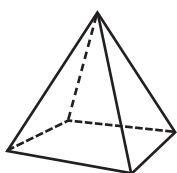


წესიერი პირამიდის გვერდითი წახნაგის სიმაღლეს, რომელიც გავლებულია პირამიდის წვეროდან პირამიდის აპოთემა ეწოდება.



წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა

პირამიდის დასახელება განისაზღვრება ფუძეში არსებული მრავალკუთხედის სახელით. მაგალითად სამკუთხა პირამიდა, ოთხკუთხა პირამიდა და ა.შ.



ოთხკუთხა პირამიდა

ხუთკუთხა პირამიდა

სამკუთხა პირამიდა

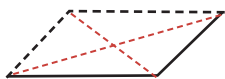
წესიერი პირამიდის გვერდითი წიბოები კონგრუენტულია.

წესიერი პირამიდის გვერდითი წახნაგები კონგრუენტული ტოლფერდა სამკუთხედებია.

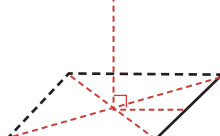
წესიერი სამკუთხა პირამიდას ტეტრაედრიც ეწოდება. ტეტრა ბერძნულად ოთხს ნიშნავს, ანუ 4 წახნაგის (თითოეული სამკუთხა ფორმისა) მქონე მრავალწახნაგა.

კერძო შემთხვევაში პირამიდის ქვემოთ მოცემული ნაბიჯებით აგება შეიძლება.

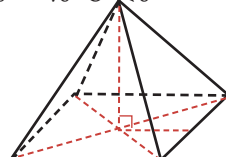
1. გავვლეთ პარალელო-გრამი და მისი დიაგონა-ლები.



2. დიაგონალების გადა-კვეთის წერტილისადმი დაუშვიტ მართობი.



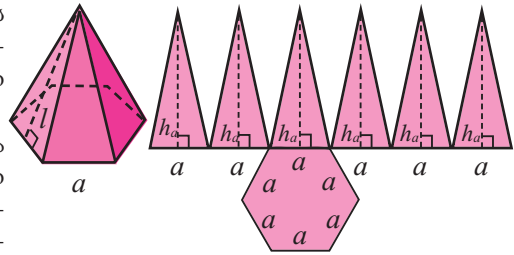
3. შეაერთეთ მართობის წვე-როსა და პარალელოგრამის წვეროების წერტილები.



პირამიდა. პირამიდის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი

წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი შეიძლება ვიპოვოთ, როგორც გვერდითი წახნაგების შემდგენი კონგრუენტული სამკუთხედების ფართობების ჯამი.

მაგალითად, სურათზე მოცემული ექვსკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი მისი გვერდითი ზედაპირის შემდგენი 6 კონგრუენტული სამკუთხედის ფართობების ჯამის ტოლია.



$$S = \frac{1}{2}ah_{\Delta} + \frac{1}{2}ah_{\Delta} + \frac{1}{2}ah_{\Delta} + \frac{1}{2}ah_{\Delta} + \frac{1}{2}ah_{\Delta} + \frac{1}{2}ah_{\Delta} =$$

$$= \frac{1}{2}h_{\Delta}(a + a + a + a + a + a) = \frac{1}{2}Ph_{\Delta}; \quad S = \frac{1}{2}Ph_{\Delta}$$

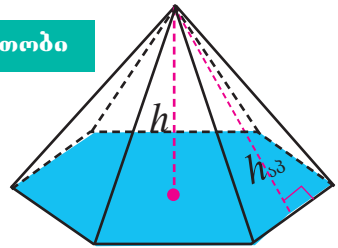
წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი

წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ფუძეში მდებარე მრავალკუთხედის პერიმეტრისა და პირამიდის აპოთემის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

$$S_{გვ} = \frac{1}{2}Ph_{\Delta}$$

სადაც P არის ფუძის პერიმეტრი, h_{Δ} - პირამიდის აპოთემა.

პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი მისი ფუძისა და გვერდითი ზედაპირის ფართობის ჯამის ტოლია. $S_{სრ} = S_{გვ} + S_{ფძ}$

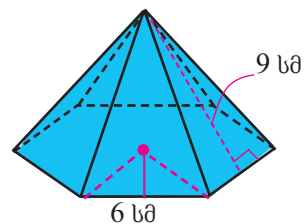


ნამუშაო 1. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 6 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ აპოთემა 9 სმ-ია.

ამოხსნა:

მოცემულია: $a = 6$ სმ, $h_{\Delta} = 9$ სმ

იპოვეთ: $S_{სრ} = ?$



$$S_{გვ} = \frac{1}{2}Ph_{\Delta} = \frac{1}{2}6a h_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 = 162 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

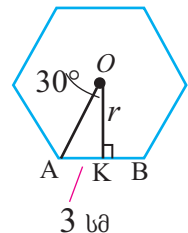
ფუძის ფართობის პოვნისათვის ჯერ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის აპოთემა (r) უნდა მოვძებნოთ. $S_{ფძ} = \frac{1}{2} Pr$

წესიერი ექვსკუთხედის ცენტრული კუთხე: $360^\circ : 6 = 60^\circ$.

მაშინ $\angle AOK = 30^\circ$.

$$r = 3 \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3}; \quad S_{ფძ} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{3} \approx 93,5 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

$$S_{სრ} = S_{გვ} + S_{ფძ} \approx 162 \text{ სმ}^2 + 93,5 \text{ სმ}^2 = 255,5 \text{ სმ}^2$$



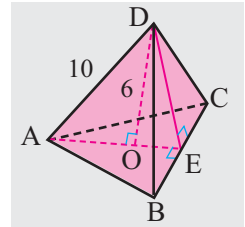
პირამიდა. პირამიდის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი

ნამუში 2. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები 10 სმ, სიმაღლე 6 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა:

მოცემულია: $AD = 10$ სმ, $DO = 6$ სმ.

იპოვეთ: $S_{\text{სრ}} = ?$



პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობის გამოთვლისათვის უნდა ვიპოვოთ ფუძის პერიმეტრი და აპოთემა. პერიმეტრის პოვნისათვის კი წესიერი სამკუთხედის ერთი გვერდის მოძებნა საკმარისია.

$$\triangle ADO\text{-დან } AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ (სმ)}$$

ცნობილია, რომ $AO = \frac{2}{3} AE$ (განმარტეთ); $\frac{2}{3} AE = 8$ (სმ); $AE = 12$ სმ რადგან

$\triangle AEB$ -ს კუთხეები $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ -ია (განმარტეთ).

$$BE = \frac{AE}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}; \quad BC = 2 \cdot BE = 8\sqrt{3}; \quad P = 3 \cdot BC = 24\sqrt{3}$$

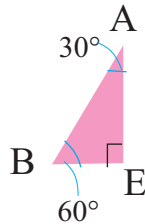
$\triangle DOE$ -დან ვიპოვოთ აპოთემა. $OE = 12 - 8 = 4$ (სმ)

$$DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} Ph_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 24\sqrt{39} \text{ (სმ}^2\text{)}$$

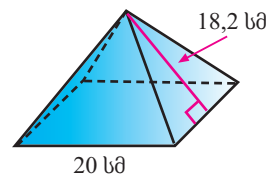
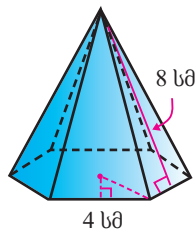
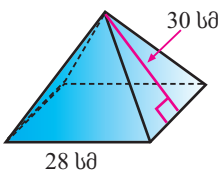
$$S_{\text{ფ}} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 12 = 48\sqrt{3} \text{ (სმ}^2\text{)}$$

$$S_{\text{სრ}} = S_{\text{გვ}} + S_{\text{ფ}} = 24\sqrt{39} + 24\sqrt{3} \approx 150 + 42 = 192 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

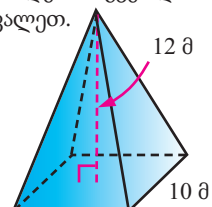
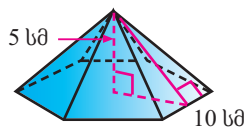
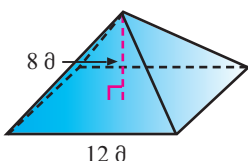


სასწავლო დაგვლებები

1. პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის ერთი გვერდი 6 სმ-ია, ხოლო მეორე გვერდი 8 სმ. პირამიდის გვერდითი წიბოების სიგრძე 13 სმ-ია. იპოვეთ სიმაღლე.
2. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე 7 სმ-ია. ფუძის გვერდი 8 სმ. იპოვეთ გვერდითი წიბო.
3. სურათის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ წესიერი პირამიდების გვერდითი ზედაპირების ფართობები.



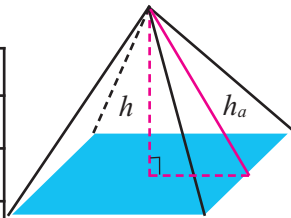
4. სურათის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ წესიერი პირამიდების გვერდითი ზედაპირების ფართობები. პასუხები მთელ რიცხვებამდე დაამრგვალეთ.



პირამიდა. პირამიდის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი

5. ცხრილის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის საძირკველი ზომები.

სიმაღლე	6	12	24	?	?	6
აპოთემა	10	15	?	13	5	?
ფუძის გვერდი	?	?	10	?	8	?
გვერდითი ზედაპირი	?	?	?	156	?	320



6. მოცემული ზომების მიხედვით დახაზეთ წესიერი პირამიდები და იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის ფუძის გვერდია 8 ერთეული, გვერდითი წიბო კი 5 ერთეული.

ბ) წესიერი სამკუთხა პირამიდა, რომლის ფუძის გვერდია 4 ერთეული, აპოთემა 6 ერთეული.

გ) წესიერი ექვსკუთხა პირამიდა, რომლის ფუძის გვერდია 10 ერთეული, გვერდითი წიბო კი 13 ერთეული.

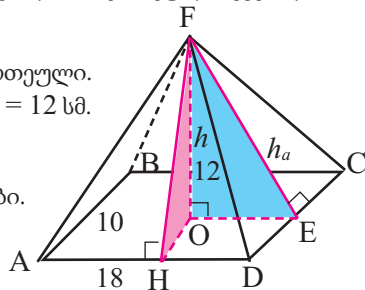
7. მართკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდებია 10 და 18 ერთეული.

O მართკუთხედის ცენტრია. პირამიდის სიმაღლე FO = 12 სმ.

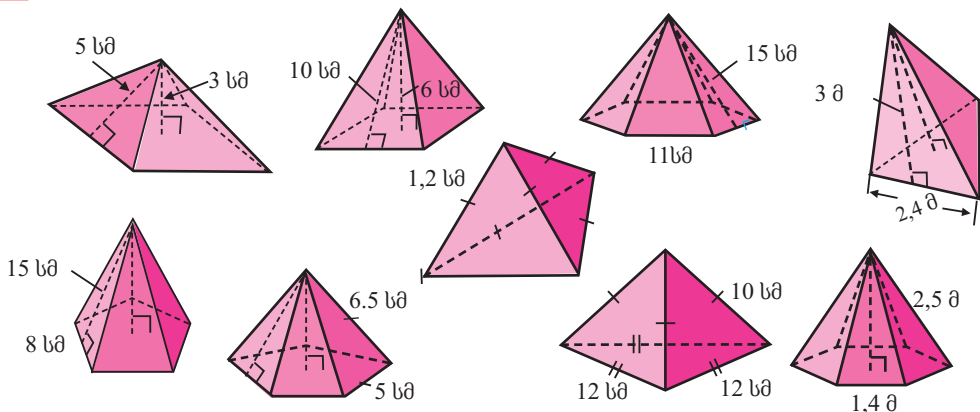
ა) იპოვეთ FH და FE;

ბ) იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

$$S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2}Ph_a \text{ ფორმულის გამოყენება შეიძლება?}$$



8. იპოვეთ წესიერი პირამიდების გვერდითი ზედაპირების ფართობები.



9. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები 4 სმ, 6 სმ და 8 სმ-ია და წყვილ-წყვილად მართობულია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი,

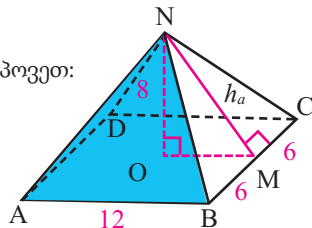
10. პირამიდის ფუძე არის მართკუთხედი, რომლის გვერდებია 9 სმ და 5 სმ. ერთ-ერთი გვერდითი წიბო, რომელიც 12 სმ-ია, ფუძის სიბრტყის მართობულია. იპოვეთ ამ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი.

პირამიდა. პირამიდის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი

11. სახლის სახურავი წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფორმისაა პირამიდის ფუძის გვერდი 12 მ-ია. სახურავის სიმაღლე 2,5 მ-ია. რამდენი კვადრატული მეტრი მასალა არის გამოყენებული სახლის სახურავზე?

12. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ:

- ა) OM ბ) h_a გ) NC
 დ) $S_{\Delta NBC}$ ე) $S_{\text{გვ}}$ ვ) $S_{\text{სრ}}$



13. მსოფლიოს დიდი ქვეყნების არქიტექტურაში პირამიდის სახის ნაგებობებს მნიშვნელოვანი ადგილი უკავიათ. ამ ნაგებობებს შორის არის უძველესი ძეგლებიც (ეგვიპტის პირამიდები, რომის სესტის პირამიდა) და არის ქალაქებისათვის თანამედროვეობის მიმნიჭებული ახლებიც (პარიზში ლუვრის მუზეუმი, ზაქოში იჩერიშაჰარის მეტროს შესასვლელი და სხვ.) ა) ხეოპსისა და ლუვრის პირამიდები ოთხკუთხა პირამიდებია. მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ თითოეულის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ხეოპსის პირამიდა. ეგვიპტე

ფუძის გვერდი 230 მ, აპოთემა 186 მ.

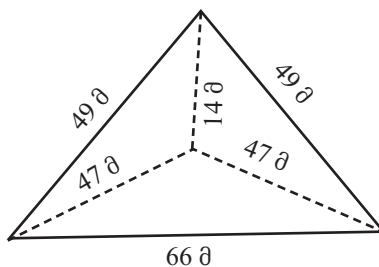
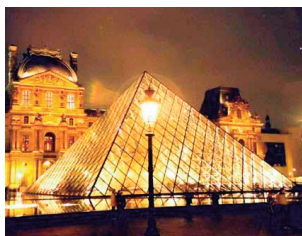


ლუვრის პირამიდა. პარიზი

ფუძის გვერდი 35 მ, აპოთემა 28 მ.



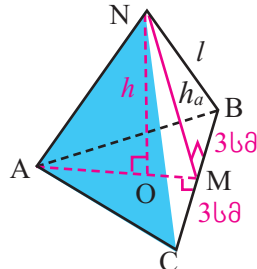
ბ) სურათზე იჩერიშაჰარის მეტროს სადგურის პირამიდისებრი შესასვლელის გეგმა მოცემული. გეგმაზე მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



იჩერიშაჰარის მეტროს პირამიდა

14. წესიერ ტეტრაედრში მონაცემების მიხედვით იპოვეთ :

- ა) OM ბ) h_a გ) NC
 დ) $S_{\Delta NBC}$ ე) $S_{\text{გვ}}$ ვ) $S_{\text{სრ}}$



პირამიდა. პირამიდის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი

15. ა) პირამიდის აპოთემა სიმაღლეზე ნაკლები არაა. დაასაბუთეთ ეს მოსაზრება.

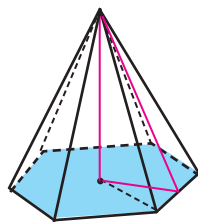
ბ) წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 10 სმ-ია, გვერდითი წიბო 13 სმ. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე და აპოთემა.

გ) პირამიდის ფუძე არის რომბი, რომლის დიაგონალებია 12 სმ და 16 სმ. იპოვეთ ამ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენენ.

16. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 6 სმ, 6 სმ, და 8 სმ. თითოეული გვერდითი წიბო 5 სმ-ია. იპოვეთ ამ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

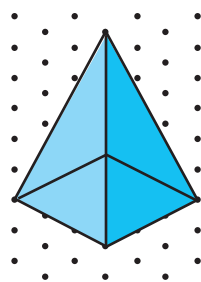
17. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ერთი გვერდითი წახნაგის ფართობი $8\sqrt{3}$, ფუძის ფართობი კი $24\sqrt{3}$ კვადრატული ერთეულია. გამოთვალეთ პირამიდის:

- ა) ფუძის გვერდის სიგრძე;
- ბ) აპოთემა;
- გ) გვერდითი წიბოს სიგრძე;
- დ) სიმაღლე.

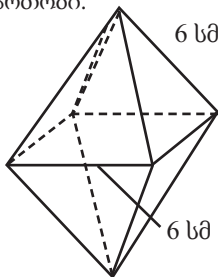


18. გამოკვლევა წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაზე.

- ა) იზომეტრიულ წერტილოვან ფურცელზე სურათზე მოცემულის მსგავსად დახაზეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის ფუძის გვერდი 3 ერთეულია.
- ბ) გამოთვალეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი იმ შემთხვევებისათვის, როცა აპოთემა ტოლია 3-ის, 9-ისა და შეადგინეთ ცხრილი.
- გ) დაწერეთ ფუძის ზომების შეუცვლელად აპოთემის ზომის 3-ჯერ გაზრდით როგორ შეიცვალა გვერდითი ზედაპირის ფართობი.
- დ) თუ ფუძის გვერდი და აპოთემა 3-ჯერ გაიზრდება, როგორ შეიცვლება გვერდითი ზედაპირი?



19. გამოთვალეთ სურათზე მოცემული ფიგურის (წესიერი ოქტაედრის) გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



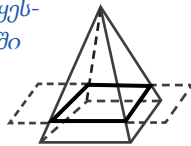
20. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 6 სმ-ია, გვერდითი ზედაპირი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45° -იან კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.

21. პირამიდის ფუძე არის ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდები 10 სმ-ია, ფუძე კი 12 სმ-ია. გვერდითი წახნაგებით ფუძის სიბრტყესთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხის გრადუსული ზომა კი 60° -ია. იპოვეთ პირამიდის აპოთემა და სიმაღლე.

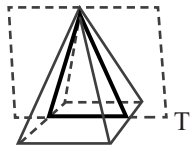
პირამიდის კვეთები. წაკვეთილი პირამიდა

1. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიბრტყესთან გადაკვეთისას სხვადასხვა ფორმის მრავალკუთხედები მიიღება. გამოიკვლიეთ ქვემოთ მოცემული შემთხვევები, სურათითა და წერილობით წარმოადგინეთ.

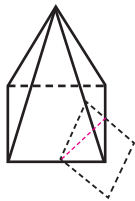
ფუძის პარალელურ სიბრტყესთან გადაკვეთა. გადაკვეთაში კვადრატი მიიღება.



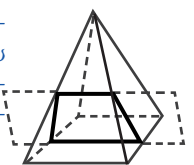
წვეროზე გავლით ფუძისადმი მართობული სიბრტყით გადაკვეთა. გადაკვეთაში ტოლფერდა სამკუთხედი მიიღება.



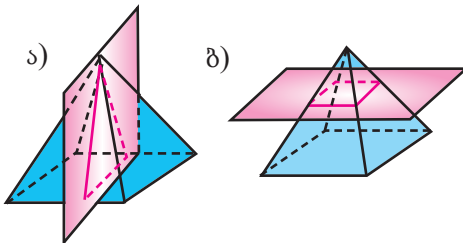
ფუძის სიბრტყესთან განსაზღვრული კუთხით ყოფნისას ერთ წვეროში შეერთებული მეზობელი წახნაგების მკვეთ სიბრტყესთან გადაკვეთა. გადაკვეთისას სამკუთხედი მიიღება.



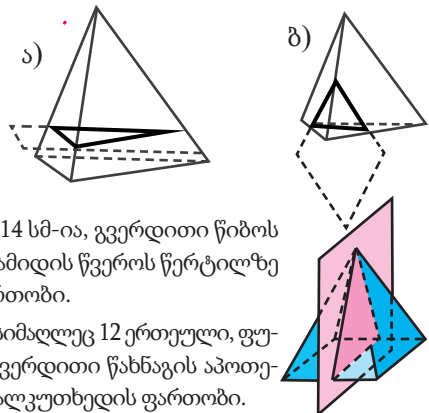
ფუძის სიბრტყესთან განსაზღვრული კუთხით ყოფნისას მოპირდაპირე წახნაგების მკვეთ სიბრტყესთან გადაკვეთა. გადაკვეთისას ტრაპეცია მიიღება.



2. სიტყვიერად აღწერეთ პრიზმისა და სიბრტყის გადაკვეთა.



3. სიტყვიერად აღწერეთ სამკუთხა პირამიდისა და სიბრტყის სურათზე ნაჩვენები კვეთები.



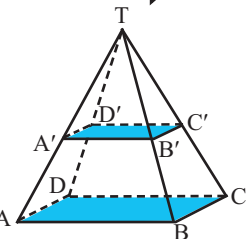
4. ა) წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 14 სმ-ია, გვერდითი წიბოს სიგრძე-10 სმ. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის (პირამიდის წვეროს წერტილზე და ფუძის დიაგონალზე გამავალი სიბრტყით) ფართობი.

ბ) იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის (რომლის სიმაღლეც 12 ერთეული, ფუძის გვერდი კი 8 ერთეულია) ორი მოპირდაპირე გვერდითი წახნაგის აპოთემებზე გამავალ სიბრტყით კვეთაში მიღებული მრავალკუთხედის ფართობი.

5. დამტკიცეთ, რომ ქვემოთ მოცემული მოსაზრებები მართებულია: პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყით გადაკვეთისას:

- 1) ეს სიბრტყე პირამიდის გვერდითი წიბოებსა და სიმაღლეს პროპორციულ ნაწილებად ყოფს.
- 2) გადაკვეთისას მიღებული მრავალკუთხედი ფუძის მსგავსია.
- 3) კვეთისა და ფუძის ფართობების თანაფარდობა, მათი წვეროდან დაშორების მანძილების კვადრატების თანაფარდობის ტოლია.

დამტკიცების გეგმა. ისარგებლეთ პირამიდის პარალელური სიბრტყითი კვეთით გვერდით წახნაგებზე წარმოქმნილი ABT და $A'B'T$ სამკუთხედების მსგავსებით.



6. პირამიდის სიმაღლე 4 ტოლ ნაწილად დაიყო და დაყოფის წერტილებზე ფუძის პარალელური სიბრტყეებით გადაიკვეთა. იპოვეთ მიღებული კვეთების ფართობები, თუ ცნობილია, რომ ფუძის ფართობი 400 მ^2 -ია.

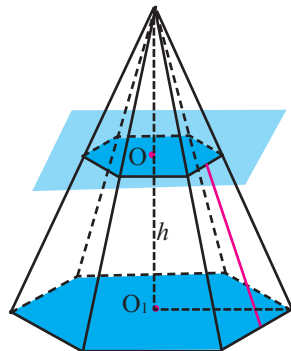
პირამიდის კვეთები. წაკვეთილი პირამიდა

7. პირამიდის სიმაღლე 16 სმ-ია, ფუძის ფართობი კი 512 სმ²-ია. იპოვეთ ფუძის პარალელური კვეთის ფუძის სიბრტყიდან მანძილი, თუ მისი ფართობი 50 სმ²-ია.

პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყით გადაკვეთისას, ამ სიბრტყესა და პირამიდის ფუძეს შორის დარჩენილ მრავალწახნაგს წაკვეთილი პირამიდა ეწოდება.

წაკვეთილი პირამიდის პარალელური წახნაგები მისი ფუძეები, დანარჩენი წახნაგები კი გვერდითი წახნაგებია. ფუძეების სიბრტყეების მართობული წრფის ამ სიბრტყეებს შორის დარჩენილ მონაკვეთს წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე ეწოდება.

წესიერი პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყით გადაკვეთისას მიღებული წაკვეთილი პირამიდაც წესიერი წაკვეთილი პირამიდაა. წესიერი წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი წახნაგები კონგრუენტული ტრაპეციებია. ამ ტრაპეციების სიმაღლე წესიერი წაკვეთილი პირამიდის აპოთემაა.



წესიერი წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი

$$\text{ზედაპირის ფართობი } S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \cdot h_a$$

ფორმულით გამოითვლება.

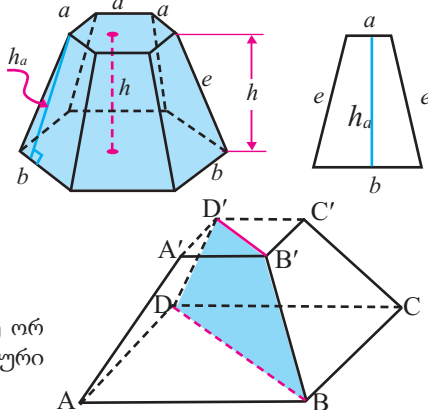
სადაც P_1 და P_2 წესიერი წაკვეთილი პირამიდის

ფუძეების პერიმეტრებია, h_a - აპოთემა.

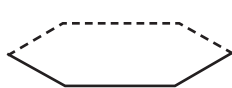
წაკვეთილი პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი კი გვერდითი ზედაპირისა და ქვედა ზედა ფუძეების ფართობების ჯამის ტოლია:

$$S_{\text{სრ}} = S_{\text{გვ}} + S_{\text{ქვ}} + S_{\text{ზედა}}$$

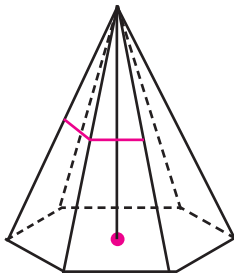
წაკვეთილი პირამიდის ერთ წახნაგზე არამდებარე ორ გვერდით წიბოზე გამავალ სიბრტყეს მისი დიაგონალური მკვეთი ეწოდება.



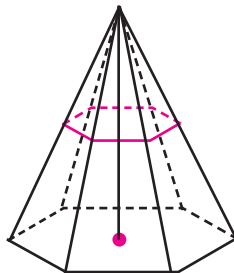
წაკვეთილი პირამიდის აგების ნაბიჯები.



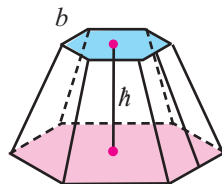
1) დახაზეთ პირამიდის ფუძეში არსებული მრავალკუთხედი.



2) მრავალკუთხედის ცენტრში გაავლეთ განსაზღვრული სიგრძის მართობი და მისი წვერო ფუძის წვეროებთან შეაერთეთ.



3) პირამიდის ნებისმიერ გვერდით წიბოზე ერთი წერტილიდან დაწყებით ფუძის გვერდების პარალელური მონაკვეთებით დახაზეთ პირამიდის მეორე ფუძე. გვერდითი წიბოების წვეროდან მცირე ფუძემდე არსებული ნაწილები წაშალეთ.



პირამიდის კვებები. წაკვეთილი პირამიდა

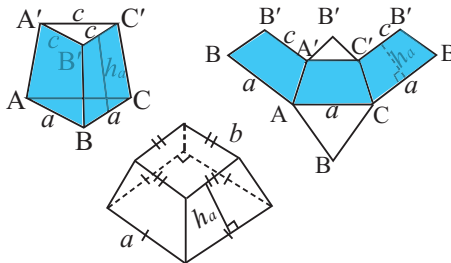
8. ა) დახაზეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდა, რომლის სიმაღლე 6 სმ, ხოლო ფუძეების გვერდების სიგრძე შესაბამისად 4 სმ და 6 სმ-ია.

ბ) დახაზეთ წესიერი ექვსკუთხა წაკვეთილი პირამიდა, რომლის სიმაღლეა 8 სმ, ხოლო ფუძეების გვერდების სიგრძე შესაბამისად 2 სმ და 3 სმ-ია.

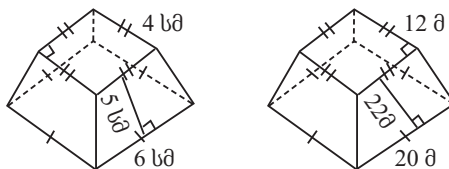
გ) წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობები 36 სმ^2 და 64 სმ^2 -ია. პირამიდის გვერდითი წიბო ქვედა ფუძესთან ადგენს 45° -იან კუთხეს. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

9. წესიერი წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობისათვის

$$S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \cdot h_a$$
 ფორმულის მართებულობა უჩვენეთ სურათზე მოცემულ წესიერ პირამიდაზე.



10. გამოთვალეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდების გვერდითი და სრული ზედაპირის ფართობები.



11. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის სიმაღლეა 8 სმ, ფუძის გვერდი კი 12 სმ-ია, სიმაღლის შუაწერტილზე ფუძის პარალელური სიბრტყითაა გადაკვეთილი. განსაზღვრეთ მოცემული წაკვეთილი პირამიდის ზომები, ააგეთ ნახაზი და გამოთვალეთ სრული ზედაპირის ფართობი.

12. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის AB გვერდი 12 სმ-ია. SO სიმაღლე 8 სმ-ია. პირამიდა ფუძიდან 2 სმ-ის მანძილზე ფუძის პარალელური სიბრტყითაა გადაკვეთილი. იპოვეთ მიღებული წაკვეთილი პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

13. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე 28 სმ-ია, აპოთემა 35 სმ-ია. ფუძის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:2. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

14. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის ფუძის გვერდია 30 სმ, სიმაღლე კი 36 სმ-ია, ფუძის პარალელური სიბრტყეებით (წვეროდან დაწყებული ყოველ 12 სმ-ში სიმაღლის გასწვრივ) ნაწილებად დაიყო. მინის ფირფიტები მეტალის ჩხირებით დამაგრდა და სამკაულების ყუთი დამზადდა. თუ ეს კონსტრუქცია მთლიანად მინით დაიფარება:

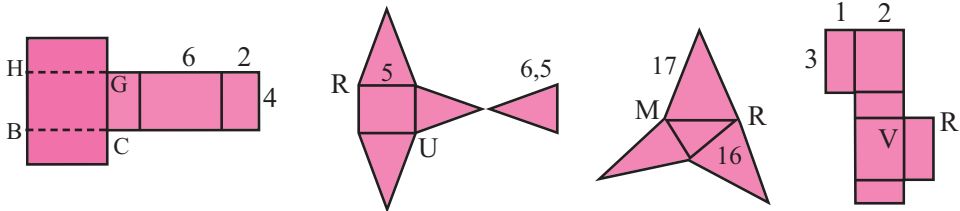
ა) სულ მცირე რამდენი კვადრატული მეტრი მინის ფირფიტა იქნება საჭირო?

ბ) სულ მცირე რამდენი მეტრი მეტალის ჩხირები იქნება საჭირო?



განმარტავადებული დავალებები

1. მოცემული შილის სურათებისა და ზომების მიხედვით დახაზეთ წესიერი პრიზმები და პირამიდები. ფიგურების ზოგიერთი გვერდები დასახელებულია. დანარჩენები თქვენ დაასახელეთ და გამოთვალეთ სრული ზედაპირის ფართობი.



2. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ძირითადი ზომებია ფუძის გვერდი, აპოთემის სიგრძე, სიმაღლე, გვერდითი ზედაპირის ფართობი და სრული ზედაპირის ფართობი. მოცემული ორი ზომის მიხედვით იპოვეთ დანარჩენები.

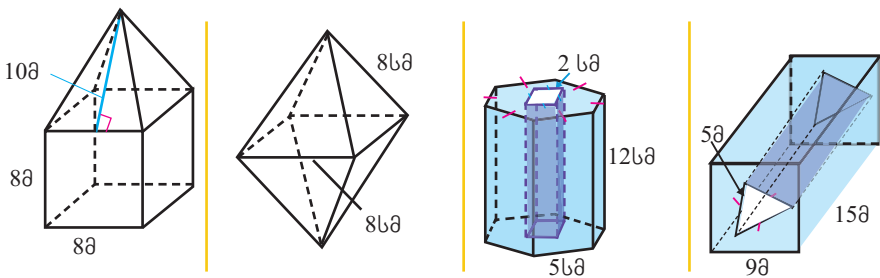
ა) $a = 3$ სმ, $S_{გვ} = 15$ სმ²

ბ) $h = 12$ მ, $a = 10$ მ

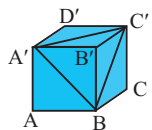
გ) $h_a = 5$ მ, $S_{გვ} = 60$ მ²

დ) $S_{გვ} = 80$ სმ², $S_{სრ} = 144$ სმ²

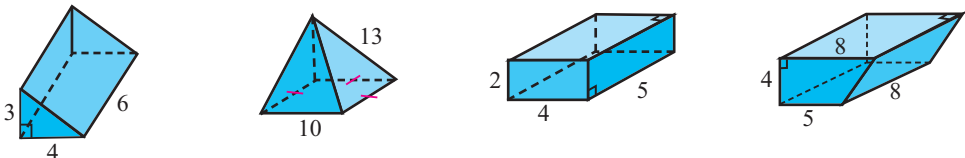
3. გამოთვალეთ სურათის მონაცემების მიხედვით წესიერი პრიზმისა და პირამიდისაგან შემდგარი რთული ფიგურების ზედაპირის ფართობი.



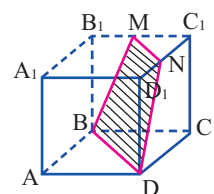
4. კუბის გვერდი 6 სმ-ია. იპოვეთ A' , B , C' წვეროებზე გამავალი სიბრტყით ჩამოკვეთილი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



5. დახაზეთ მართი პრიზმებისა და წესიერი პირამიდების შილის სურათები. გამოთვალეთ სრული ზედაპირის ფართობი.



6. მოცემულია $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ კუბი, რომლის წიბოა a . იპოვეთ BD დიაგონალიდან $B_1 C_1$ და $C_1 D_1$ წიბოების შუაწერტილებზე (M და N) გამავალი სიბრტყით კვეთის ფართობი.



7

ტრიგონომეტრიული განტოლებები და უტოლობები

მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები
ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის
ნერსები

ამოცანების ამოხსნა ტრიგონომეტრიული
განტოლებების გამოყენებით
ტრიგონომეტრიული უტოლობები



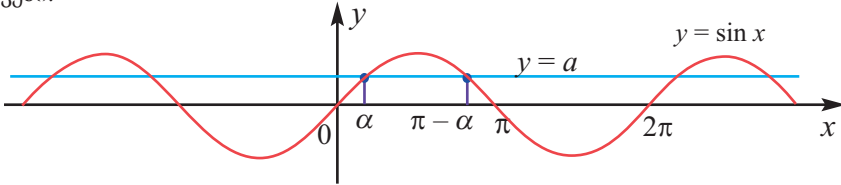
მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ განტოლებები მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებებია.

$\sin x = a$ განტოლება

სინუსის ცვლილების არე $[-1; 1]$ მონაკვეთია. ამიტომაც, როცა $|a| > 1$, მაშინ $\sin x = a$ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს. განვიხილოთ $|a| \leq 1$ შემთხვევები.

ერთი და იგივე საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ $y = \sin x$ და $y = a$ ფუნქციების გრაფიკები.

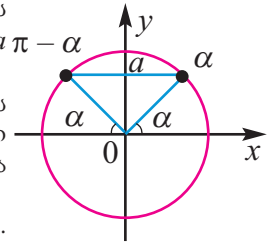


როგორც ხედავთ $y = a$ წრფე სინუსოიდას უსასრულო რაოდენობის წერტილში კვეთს, ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა $|a| \leq 1$, მაშინ $\sin x = a$ განტოლებას უსასრულო რაოდენობის ფესვი აქვს. ვინაიდან სინუსი არის პერიოდული ფუნქცია

პერიოდის ტოლი სიგრძის, ანუ 2π -ს რომელიმე შუალედში ფესვების

პოვნა საკმარისია. გრაფიკიდან ჩანს, რომ როცა $|a| < 1$, მაშინ $\sin x = a$ $\pi - \alpha$ განტოლებას $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე ორი ფესვი აქვს.

წერტილის წრეწირის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის განხილვისას იგივე დასკვნის გაკეთება შეიძლება. სრული პერიოდის განმავლობაში სინუსის ერთი და იგივე მნიშვნელობის მიმღები ორი კუთხის მოძებნა შესაძლებელია.



ბრუნვითი კუთხეებიდან თუ ერთი იქნება α , მეორე $\pi - \alpha$ იქნება.

$\sin x = a$ ($|a| < 1$) განტოლების დანარჩენი ამონახსნები კი ამ ორი ამონახსნისათვის პერიოდის ჯერადი სიდიდეების მიმატებით მიიღება. მაშასადამე, თუ α არის $\sin x = a$ განტოლების რაიმე ამონახსენი, ამ განტოლების ყველა ამონახსენი $x = \alpha + 2\pi n$, $x = \pi - \alpha + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) სახით იწერება. ამ ორ ამონახსენთა ოჯახს ზოგჯერ ერთი ფორმულით გამოსახავენ: $x = (-1)^k \alpha + \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$), როცა $k = 2n$ (ლუწია) მიიღება ამონახსენთა I ოჯახი, როცა $k = 2n + 1$ (კენტია), ამონახსენთა II ოჯახი მიიღება.

როცა $|a| \leq 1$, მაშინ რადგან $\sin x = a$ განტოლების ფესვი $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ მონაკვეთზე არის

$x = \arcsin a$, ამიტომ ამ განტოლებას ყველა ამონახსენი $x = \arcsin a + 2\pi n$,

$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) ფორმულებით გამოითვლება. შესაძლებელია ამ

ფორმულების შეერთება და $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) სახით დაწერა.

ნიმუში 1: $\sin x = \frac{1}{2}$ განტოლებას რამდენი ფესვი აქვს $[0; 3\pi]$ მონაკვეთზე?

ამოხსნა: განტოლების ამონახსნს $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$) სახით ვწერთ, $k = 0; 1; 2; 3$

მნიშვნელობების შესაბამის ოთხ ფესვს ვპოულობთ: $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{5\pi}{6}$, $x_2 = \frac{13\pi}{6}$, $x_3 = \frac{17\pi}{6}$.

k პარამეტრების სხვა მნიშვნელობების შესაბამისი ფესვები მოცემულ მონაკვეთს არ შეესაბამება.

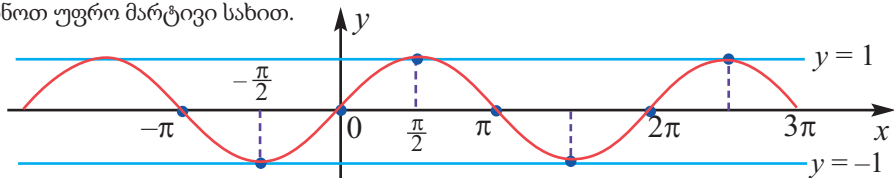
ნიმუში 2: ამონახსენით განტოლება: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ამოხსნა: რადგან $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$, ამიტომ $x = (-1)^k \cdot (-\frac{\pi}{4}) + \pi k =$

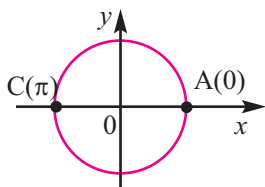
$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

როცა $a = 0$, $a = 1$ და $a = -1$, მაშინ $\sin x = a$ განტოლების ამონახსნები შეიძლება წარმოვადგინოთ უფრო მარტივი სახით.



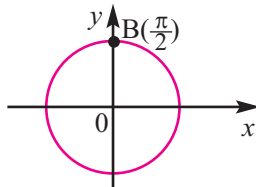
ეს შეიძლება დავინახოთ ერთეულოვან წრეწირზე გამოსახვითაც.



წერტილი, რომლის ორდინატია 0 $A(0)$ და $C(\pi)$

$$\sin t = 0$$

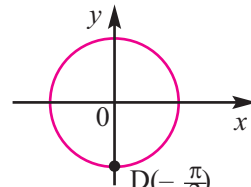
$$t = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$



წერტილი რომლის ორდინატია 1, $B(\frac{\pi}{2})$

$$\sin t = 1$$

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$



წერტილის რომლის ორდინატია -1, $D(-\frac{\pi}{2})$

$$\sin t = -1$$

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ნიმუში 3: ამოხსენით განტოლება: $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$.

ამოხსნა: თუ ავნიშნავთ $x + \frac{\pi}{3} = t$ -თი, მივიღებთ განტოლებას

$\sin t = 1$ ამ განტოლების ამონახსენი $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$ იქნება. თუ გავითვალისწინებთ პირობით აღნიშვნას: $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{აქედან} \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ნიმუში 4: ამოხსენით განტოლება: $\sin(x - 30^\circ) = 0$.

ამოხსნა: აქ ცხადია x არის გრადუსებში გამოსახული კუთხე. ამიტომაც განტოლების ამონახსენი ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$x - 30^\circ = 180^\circ \cdot k \quad x = 30^\circ + 180^\circ \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

სასწავლო დავალებები

1. x -ის მოცემული მნიშვნელობებიდან რომელია მოცემული განტოლების ფესვი? პერიოდულობის საფუძველზე დაწერეთ და შეამოწმეთ განტოლების კიდევ ორი ფესვი: ერთი დადებითი და ერთი უარყოფითი.

ა) $2 \sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{6}$

ბ) $\sqrt{8} \sin x = \sqrt{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{6}$

2. განტოლებებისათვის: 1) იპოვეთ ფესვები $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ მონაკვეთზე;

2) დაწერეთ საერთო ამონახსენი; 3) ამონახსენი გამოსახეთ გრაფიკულად.

ა) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ბ) $\sin x = -\frac{1}{2}$

გ) $2 \sin x = -\sqrt{3}$

დ) $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$

ე) $\sin x = 1$

ვ) $1 + \sin x = 0$

ზ) $2 \sin x - 1 = 0$

თ) $\sin x = 0$

3. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

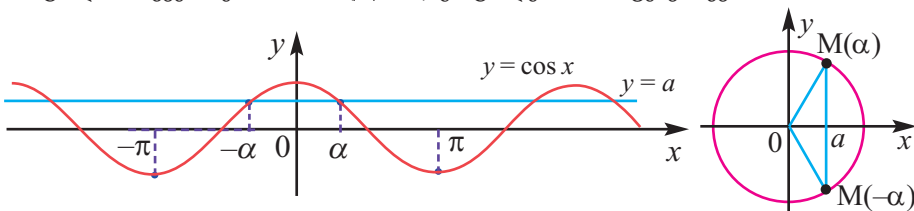
ბ) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$

გ) $2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$

მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

$\cos x = a$ განტოლება

ანალოგიური წესით მივიღებთ, რომ როცა $|a| > 1$, მაშინ $\cos x = a$ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს, ხოლო როცა $|a| \leq 1$, მაშინ კი უსასრულო რაოდენობის ფესვი აქვს. გრაფიკიდან (ასევე ერთეულოვანი წრეწირიდან) ჩანს, რომ პერიოდის სიგრძის (ანუ 2π -ს) ტოლ მონაკვეთზე $\cos x = a$ ($|a| < 1$) განტოლებას ორი ფესვი აქვს.



თუ a არის $\cos x = a$ განტოლების ფესვი, მაშინ $-a$ ასევე ფესვია, რადგან $\cos(-a) = \cos a$. ამრიგად, თუ ცნობილია, რომ $\cos x = a$ განტოლების ერთი ფესვია a , ამ განტოლების ფესვების $x = \alpha + 2\pi n$ და $x = -\alpha + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) ფორმულებით პოვნა შეიძლება. ამ ორ ფორმულას ზოგჯერ აერთიანებენ და $x = \pm \alpha + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) სახით წარმოადგენენ. როცა $|a| \leq 1$, მაშინ $\cos x = a$ განტოლებას $[0; \pi]$ მონაკვეთზე აქვს ფესვი. რადგან $x = \arccos a$, ამ განტოლების ყველა ამონახსენი $x = \pm \arccos a + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) სახით ჩაიწერება.

ნიმუში 5: ამოხსენით განტოლება: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ამოხსნა: $x = \frac{\pi}{4}$ არის განტოლების ერთ-ერთი ფესვი.

მაშინ ყველა ამონახსენი $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ და $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) იქნება.

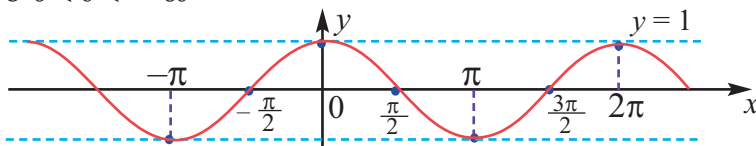
ამოხსნა $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) სახით შეიძლება ჩავწეროთ.

ნიმუში 6: ამოხსენით განტოლება $\cos x = -\frac{1}{2}$.

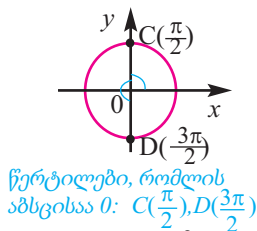
ამოხსნა: $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) რადგან

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, მივიღებთ $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

როცა $a = 0$, $a = 1$ და $a = -1$, მაშინ $\cos x = a$ განტოლების ამონახსნები შეიძლება, რომ უფრო მარტივად გადმოიცეს.



ამის დანახვა ერთეულოვან წრეწირზე გამოსახვითაც არის შესაძლებელი.



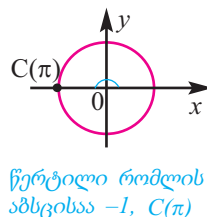
$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$$



$$\cos t = 1$$

$$t = 2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$$



$$\cos t = -1$$

$$t = \pi + 2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$$

მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

ნიმუში 7: ამოხსენით განტოლება: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -1$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $x + \frac{\pi}{4} = t$, მაშინ $\cos t = -1$ $t = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

თუ გავითვალისწინებთ აღნიშვნას: $x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4. x -ის მოცემული მნიშვნელობებიდან რომელია მოცემული განტოლების ფესვი? პერიოდულობის საფუძველზე დაწერეთ და შეამოწმეთ განტოლების კიდევ ორი ფესვი: ერთი დადებითი და ერთი უარყოფითი.

ა) $\cos x + 1 = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ ბ) $\sqrt{8} \cos x = 2$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{6}$

5. განტოლებებისათვის: 1) იპოვეთ ფესვები $[0; \pi]$ მონაკვეთზე; 2) დაწერეთ საერთო ამონახსენი; 3) ამონახსენი გამოსახეთ გრაფიკულად.

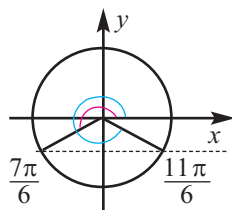
ა) $\cos x = \frac{1}{2}$ ბ) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ გ) $2 \cos x = \sqrt{2}$ დ) $2 \cos x = \sqrt{3}$
 ე) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ ვ) $2 \cos x + 1 = 0$ ზ) $\cos x - 1 = 0$ თ) $\cos 2x = 0$

6. ნიმუში გამოიკვლიეთ, ამოხსნა რვეულში ჩაიწერეთ. მე-2 დავალება შეასრულეთ.

1) დაწერეთ განტოლების ამონახსნები $[0; 3\pi]$ ინტერვალში.

ა) $\sin x = -\frac{1}{2}$ ბ) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

განვიხილოთ ორივე განტოლებისათვის საერთო $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსენი. ერთეულოვან წრეწირზე $-\frac{1}{2}$ ორდინატიანი ორი წერტილი არსებობს. ეს წერტილები $\frac{7\pi}{6}$ და $\frac{11\pi}{6}$ მობრუნებებს შეესაბამება.



განტოლების ამონახსენია: $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ და $\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

ა) ამ შემთხვევაში $\theta = x$ და $0 \leq x \leq 3\pi$. ამ ინტერვალში განტოლებას x -ის მხოლოდ $\frac{7\pi}{6}$ და $\frac{11\pi}{6}$ მნიშვნელობები აკმაყოფილებს. $x = \frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$

ბ) ამ შემთხვევაში $\theta = 2x$. თუ x $0 \leq x \leq 3\pi$ პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ $0 \leq 2x \leq 6\pi$ და მოცემულ ინტერვალში განტოლების ამონახსნები იქნება შემდეგი:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \quad 2x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}, \frac{31\pi}{6}, \frac{35\pi}{6}$$

$$x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}, \frac{35\pi}{12}$$

2) დაწერეთ განტოლებების ამონახსნები $0 \leq x \leq 3\pi$ ინტერვალში.

ა) $\cos x = \frac{1}{2}$ ბ) $\cos 2x = \frac{1}{2}$ გ) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

$\operatorname{tg} x = a$ და $\operatorname{ctg} x = a$ განტოლებების ამოხსნა

$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედში $\operatorname{tg} x = a$ განტოლების ამონახსენი $x = \operatorname{arctg} a$ იქნება.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\operatorname{tg} x$ ფუნქციის ძირითადი პერი-

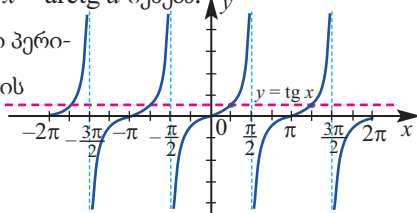
ოდია π , მაშინ $\operatorname{tg} x = a$ განტოლების ყველა ამონახსენის

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$$

ფორმულით ჩაწერა შეიძლება.

$y = \operatorname{tg} x$ და $y = a$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის

წერტილებიც უჩვენებენ ამოხსნის სისწორეს.



ანალოგიური წესით შეიძლება იმის ჩვენება, რომ $\operatorname{ctg} x = a$ განტოლების ყველა ამონახსენი

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n (n \in \mathbb{Z}) \text{ სახისაა.}$$

ნიმუში 8: ამოხსენით განტოლება: $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$.

ამოხსნა: შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $x - \frac{\pi}{6} = t$ მივიღებთ განტოლებას:

$\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$ ამ განტოლების ამონახსნები $t = \frac{\pi}{3} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$ იქნება.

თუ გავითვალისწინებთ პირობით აღნიშვნას:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$$

ნიმუში 9: ამოხსენით განტოლება: $\operatorname{ctg} 3x = -1$.

ამოხსნა: შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $3x = t$ მივიღებთ განტოლებას: $\operatorname{ctg} t = -1$. რადგან

$$\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \text{ ამიტომ } t = \frac{3\pi}{4} + \pi n.$$

აღნიშვნის გამო: $3x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$. ორივე მხარის 3-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\operatorname{ctg} 3x = -1 \text{ განტოლების ყველა ამონახსენი: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, (n \in \mathbb{Z}) \text{ სახისაა.}$$

ნიმუში 10: ამოხსენით განტოლება $\operatorname{tg} x = 0,57$.

ამ ტიპის განტოლებების ამოხსნისას ისარგებლეთ კალკულატორზე გამოთვლით.

კალკულატორის $\tan^{-1}$ ღილაკით შეიტანება რიცხვი 0,57, Degree ღილაკის აქტიურ მდგომარეობაში $36,87^\circ$ მნიშვნელობა გამოთვლილი იქნება. ვინაიდან ტანგენსი პერიოდული ფუნქციაა, $36,87^\circ + 180^\circ$, $36,87^\circ - 180^\circ$, $36,87^\circ + 360^\circ$, $36,87^\circ - 360^\circ$, $36,87^\circ + 540^\circ$, $36,87^\circ - 540^\circ$ მნიშვნელობებშიც ტანგენსის მნიშვნელობა 0,57-ის ტოლია. განტოლების ამოხსნა გრადუსობით ზოგადი $x = 36,87^\circ + 180^\circ k \quad k \in \mathbb{Z}, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$ სახით იწერება.

Radian ღილაკის დახმარებით განტოლების ამოხსნა $A = 0,6435 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ იქნება.

მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

$\operatorname{ctg} x = a$, $\sec x = a$, $\operatorname{cosec} x = a$ სახის განტოლებების

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \sec x = \frac{1}{\sin x}, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\cos x}$$

ტოლობების გამოყენებით ამოხსნა შეიძლება.

ნიმუში 11: ამოხსენით განტოლება $\sec x + 1 = 0$, $x \in [0; 2\pi]$ შუალედში.

ამოხსნა: $\sec x = -1$

$$\frac{1}{\sin x} = -1 \quad \sin x = -1 \quad \text{განტოლების ზოგადი სახის ამონახსენი} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

იქნება. $\sin x = -1$ განტოლების $[0; 2\pi]$ შუალედში ამონახსენია $x = \frac{3\pi}{2}$.

7. x -ის მოცემული მნიშვნელობებიდან რომელია მოცემული განტოლების ფესვი? პერიოდულობის საფუძველზე დაწერეთ და შეამოწმეთ განტოლების კიდევ ორი ფესვი: ერთი დადებითი და ერთი უარყოფითი.

ა) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ ბ) $\sqrt{6} \operatorname{ctg} x = \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$

8. განტოლებებისათვის: 1) იპოვეთ ფესვი $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ მონაკვეთზე; 2) დაწერეთ საერთო ამონახსენი.

ა) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ ბ) $\operatorname{tg} x = -1$ გ) $\operatorname{tg} x = 1$ დ) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

9. განტოლებებისათვის: 1) იპოვეთ ფესვი 1) $(0; \pi)$ მონაკვეთზე; 2) დაწერეთ საერთო ამონახსენი.

ა) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ ბ) $\operatorname{ctg} x = -1$ გ) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ დ) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. ამოხსენით განტოლება $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ ისარგებლეთ ამონახსენით და დაწერეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ზოგადი ამონახსენი.

ა) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ ბ) $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$ ც) $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

11. განტოლებებისათვის: 1) დაწერეთ ამონახსენი $[0; 2\pi]$ შუალედში;

2) დაწერეთ ამონახსენის ზოგადი სახე;

3) დაწერეთ ამოხსნა გრაფიკულად.

ა) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ ბ) $2\cos x = 1$ გ) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$

დ) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ ე) $\sin x = 0$ ვ) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

12. ამოხსენით განტოლებები კალკულატორის დახმარებით და უჩვენეთ თითოეულისათვის სამი ფესვი.

ა) $\operatorname{tg} \theta = 3$ ბ) $\sin \theta = 0,85$ გ) $\cos \theta = 0,47$

მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

13. ნიმუშის შესაბამისად იპოვეთ განტოლებების ამონახსნები $0 \leq x \leq 4\pi$ ინტერვალში.

ა) $2 \operatorname{tg} x = -2$

ბ) $2 \sin x = -1$

გ) $2 \cos x = -\sqrt{3}$

ნიმუში: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

ამოხსნა: ერთეულოვან წრეწირზე ტანგენსი ფუნქციის $-\sqrt{3}$ -ის ტოლი

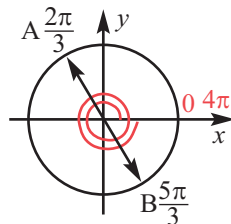
მობრუნების კუთხის შესაბამისი ორი წერტილია აღნიშნული: $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

თუმცა ვინაიდან პერიოდი არის π ტანგენსი $-\sqrt{3}$ -ის ტოლ

მნიშვნელობებს π დაშორებით მდებარე წერტილებში იღებს,

ანუ $\operatorname{tg}(\pi + \theta) = \operatorname{tg} \theta$.

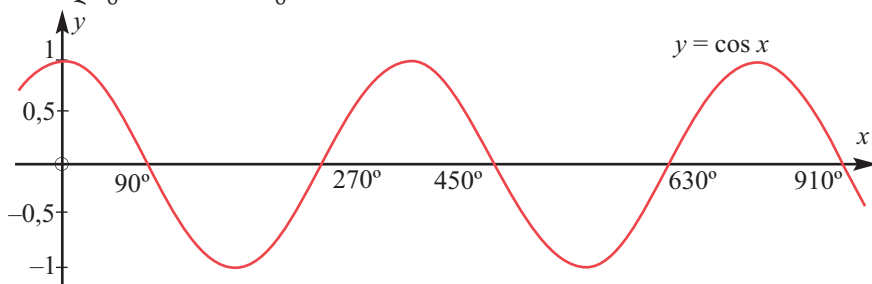
მაშასადამე, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ განტოლების $0 \leq x \leq 4\pi$ ინტერვალში არსებული ამონახსნები შეგვიძლია ვიპოვოთ ქვემოთ მოცემული წესით:



$$0 \leftarrow \frac{2\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{8\pi}{3} + \pi = \frac{11\pi}{3} \rightarrow 4\pi$$

$0 \leq x \leq 4\pi$

14. $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით იპოვეთ მოცემულ შუალედებში განტოლებების მიახლოებითი ამონახსნები.



ა) $\cos x = 0,4$ $0 \leq x \leq 450^\circ$

ბ) $\cos x = -0,5$ $0 \leq x \leq 630^\circ$

გ) $\cos x + 1 = 1$ $0 \leq x \leq 910^\circ$

დ) $2 \cos x = -2$ $0 \leq x \leq 630^\circ$

15. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

ბ) $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

გ) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

დ) $2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

ე) $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$

ვ) $\operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{6}) = 0$

16. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\sin 2x \sin x - \cos 2x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ბ) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$

გ) $\sin 3x \cos x = 1 + \sin x \cos 3x$

დ) $\sin x \cos x = 0$

მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

17. იპოვეთ განტოლების ფესვები მოცემულ შუალედებში.

ა) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1, (0; 3\pi]$

ბ) $\cos^2(x + 30^\circ) - \sin^2(x + 30^\circ) = -1, (180^\circ; 270^\circ)$

გ) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}, [-\pi; 2\pi]$

ნიმუში: ა) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1, (0; 3\pi]$

ამოხსნა: ჩავწერთ განტოლებას $\cos 2x = 1$ სახით. რადგან $\cos \theta = 1$ განტოლების

ზოგადი ამონახსენია $\theta = 2\pi k, (k \in \mathbb{Z})$ მივიღებთ: $2x = 2\pi k, x = \pi k, (k \in \mathbb{Z})$

პირობის თანახმად $0 < x \leq 3\pi$. აქედან თუ $0 < \pi k \leq 3\pi$ უტოლობის ორივე მხარეს

გავყოფთ π -ზე მივიღებთ, $0 < k \leq 3, (k \in \mathbb{Z})$.

$k = 1; 2; 3$ მნიშვნელობების მიმდევრობით $x = \pi k (k \in \mathbb{Z})$ ამონახსენში ჩაწერით ვპოულობთ განტოლების ფესვებს მოცემულ შუალედში: $\pi; 2\pi; 3\pi$.

18. იპოვეთ ფუნქციის ნულები მოცემულ ინტერვალში.

ა) $y = \sin 2x, 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

ბ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4}), 0 \leq x \leq 3\pi$

19 იპოვეთ $y = 3 \cos(x + \frac{\pi}{3})$ ფუნქციის გრაფიკისა და $y = 1,5$ წრფის გადაკვეთის წერტილების აბსცისები.

20 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\sin(\pi + x) = -1$

ბ) $\cos(\pi - x) = 1$

გ) $\sin \pi x = 0$

დ) $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = 0$

ე) $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + x) = 1$

ვ) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \sqrt{3}$

21 ამოხსენით განტოლებები მოცემულ ინტერვალში.

ა) $4 \operatorname{tg} 3x + 5 = 1, 0 \leq x \leq \pi$

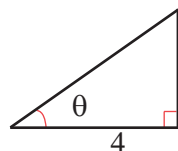
ბ) $2 \sin 2x + \sqrt{3} = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

გ) $2 \cos 2x + 3 = 2, 0 \leq x \leq 360^\circ$

დ) $\sqrt{2} \sin 2x + 3 = 2, 0 \leq x \leq 360^\circ$

22 რამდენი ფესვი აქვს $\frac{\sin \pi x}{x-1} = 0$ განტოლებას $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე?

23. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$.



ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის ხერხები

მოცემული ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა განსაზღვრული ხერხებით მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნაზე დაიყვანება.

1) მამრავლებად დაშლის ხერხი

ნიმუში: ამოხსენით განტოლება $\sin 2x - \sin x = 0$.

ამოხსნა:

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cdot \cos x - \sin x &= 0 && \text{ორმაგი კუთხის ფორმულის თანახმად } \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \\ \sin x(2 \cos x - 1) &= 0 && \text{საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა} \\ \sin x &= 0 && \text{ან } 2 \cos x - 1 = 0 \text{ ნამრავლის "0"-ის ტოლად ყოფნის პირობა.} \\ x = \pi n, n \in Z & \quad \text{ან} \quad \cos x = \frac{1}{2} && x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \\ \text{პასუხი: } \pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. && \end{aligned}$$

სხვადასხვა ამონახსენთა ოჯახებში პარამეტრების სხვადასხვა ასოებით აღნიშვნას მიაქცევთ ყურადღება.

ნიმუში: ამოხსენით განტოლება $\sin x \cos^2 x = 4 \sin x$ და იპოვეთ ფესვები $[0; 2\pi]$

მონაკვეთზე.

ამოხსნა: $\sin x \cos^2 x = 4 \sin x$ *მოცემული განტოლება*

$$\sin x \cos^2 x - 4 \sin x = 0$$

თითოეულ მხარეს $4 \sin x$ გამოაკლდება

$$\sin x (\cos^2 x - 4) = 0$$

$\sin x$ ფრჩხილებს გარეთ გაიტანება

$$\sin x (\cos x - 2)(\cos x + 2) = 0$$

დაიშლება მამრავლებად კვადრატების სხვაობის ფორმულით.

თითოეული მამრავლის 0-თან გატოლებით ვპოულობთ x -ს (თუ შესაძლებელია).

$$\begin{array}{lll} \sin x = 0 & \cos x - 2 = 0 & \cos x + 2 = 0 \\ x = \pi k, k \in Z & \cos x = 2 & \cos x = -2 \end{array}$$

ამონახსენი არა აქვს ამონახსენი არა აქვს

განტოლების ამონახსნის ზოგადი სახე: $x = \pi n$, ($n \in Z$) იქნება.

განტოლების ფესვები $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე : $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$.

2) ახალი ცვლადის შემოტანით

ნიმუში: ამოხსენით განტოლება $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 &= 0 && \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ იგივეობის თანახმად} \\ -2 \cos^2 x - \cos x + 3 &= 0 \\ 2 \cos^2 x + \cos x - 3 &= 0 && \text{გამარტივება} \\ 2a^2 + a - 3 &= 0 && \cos x = a \text{ ახალი ცვლადის შემოტანა} \\ (2a + 3)(a - 1) &= 0 \\ a = -1,5 & \quad a = 1 && \text{კვადრატული განტოლების ამოხსნა} \\ \cos x = -1,5 & \quad \cos x = 1 && \cos x = a \text{ ჩასმის თანახმად} \\ \text{ფესვი არა აქვს} & \quad x = 2\pi k, k \in Z \\ \text{პასუხი: } x &= 2\pi k, (k \in Z). \end{aligned}$$

3) ერთგვაროვანი განტოლებების ამოხსნა

თუ $\sin x = a$, $\cos x = b$ განტოლების ყველა წევრი a -სა და b -ს მიხედვით ერთი და იგივე ხარისხის ერთწევრები იქნება, ასეთ განტოლებას ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება.

ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის ხერხები

ნამუშები: $2 \sin x - \cos x = 0$

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

თუ საერთო მამრავლი არ არის, პირველი განტოლების ორივე მხარის $\cos x$ -ის მაღალ ხარისხზე გაყოფით იხსნება.

ნამუში: $\sin x + \cos x = 0$

აქ არ შეიძლება $\cos x = 0$, რადგან თუ $\cos x = 0$, მაშინ განტოლებიდან მიიღება, რომ $\sin x = 0$ ეს კი ეწინააღმდეგება $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ იგივეობას. მაშასადამე $\cos x \neq 0$, განტოლების ორივე მხარე შეიძლება გავყოთ $\cos x$ -ზე:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$\text{აქედან} \quad \operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4) ხარისხის დაწვევის ფორმულების გამოყენება

ნამუში: ამოხსენით განტოლება $\cos^2 x = \frac{1}{4}$.

აქ ხარისხის დაწვევისათვის ($\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$) ფორმულის გამოყენება ხელსაყრელი ხდება.

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$$

ორივე მხარე გავამრავლოთ 2-ზე

$$1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$$

ორივე მხარეს გამოვაკლოთ 1

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $2x = t$

$$\cos t = -\frac{1}{2}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

ამიტომაც

$$t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

ორივე მხარე გავყოთ 2-ზე

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

5) დამხმარე კუთხის შემოტანა

$a \sin x \pm b \cos x = d$ ტიპის განტოლებების ორივე მხარის $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ რიცხვზე გაყოფით, დამხმარე კუთხის შემოტანით ამოხსნაა ხელსაყრელი.

ნამუში: $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$

სადაც, რადგან $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ ორივე მხარე $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$ -ზე გავყოთ:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{\pi}{6}$$

შემოიტანება დამხმარე $\frac{\pi}{6}$ კუთხე

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

შეკრების ფორმულის თანახმად

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = x - \frac{\pi}{6} \quad \text{ჩავანაცვლოთ}$$

ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის ხერხები

$$\begin{array}{ll}
 t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n & \text{ან} \quad t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\
 x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n & x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\
 x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n & x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\
 x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} &
 \end{array}$$

პასუხი: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ნიმუში: რამდენი ფესვი აქვს $\cos x = \sin \frac{x}{2}$ განტოლებას $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე?

ამოხსნა: $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$ ორმაგი კუთხის ფორმულის თანახმად

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \quad \sin \frac{x}{2} = a \text{ შემოვიტანოთ აღნიშვნა}$$

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

$$a = -1 \quad \text{და}$$

$$\sin \frac{x}{2} = -1$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = -\pi + 4\pi k$$

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{კვადრატული განტოლების ამოხსნა.}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{და} \quad \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k \quad \text{და} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

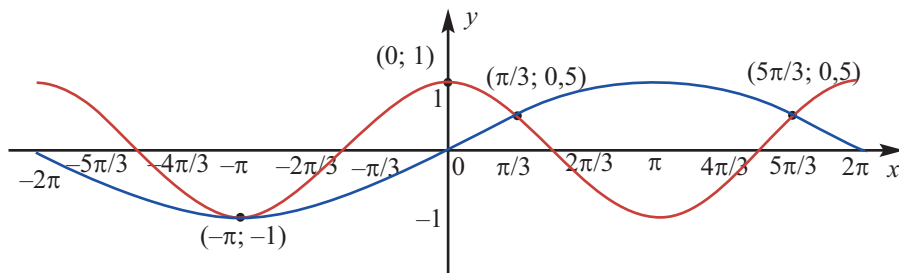
n პარამეტრის არცერთი მნიშვნელობისათვის მოძებნილი ფესვები მოცემულ მონაკვეთზე არ ძევს.

როცა $k = 0$, მოძებნილი $\frac{\pi}{3}$ და $\frac{5\pi}{3}$ მოცემული განტოლების $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე არსებული ფესვებია.

k პარამეტრის სხვა მნიშვნელობების შესაბამისი ფესვები ამ მონაკვეთზე არ მდებარეობენ.

პასუხი: ორი ფესვი აქვს.

$y = \cos x$ და $y = \sin \frac{x}{2}$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების მიხედვითაც შეიძლება ამოხსნის სისწორის შემოწმება. ამ გრაფიკების გრაფიკალურატორით (<https://www.desmos.com/calculator>) აგებით შევამოწმოთ ამოხსნა.



ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის ხერხები

სასწავლო დაფალებები

1. x -ის მოცემული მნიშვნელობებიდან რომელია განტოლების ამონახსნი?

1) $2 \cos x - 1 = 0$

ა) $x = \frac{\pi}{3}$ ბ) $x = \frac{5\pi}{3}$

2) $\operatorname{cosec} x - 2 = 0$

ა) $x = \frac{\pi}{6}$ ბ) $x = \frac{5\pi}{6}$

3) $3 \operatorname{tg}^2 2x - 1 = 0$

ა) $x = \frac{\pi}{12}$ ბ) $x = \frac{5\pi}{12}$

4) $2 \cos^2 4x - 1 = 0$

ა) $x = \frac{\pi}{16}$ ბ) $x = \frac{3\pi}{16}$

5) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

ა) $x = \frac{\pi}{2}$ ბ) $x = \frac{7\pi}{6}$

6) $\sec^4 x - 4 \sec^2 x = 0$

ა) $x = \frac{2\pi}{3}$ ბ) $x = \frac{5\pi}{3}$

2. ამოხსენით განტოლებები მამრავლებად დაშლის ხერხით.

ა) $2 \sin^2 x - \sin x = 0$

ბ) $\sin^2 x + 2 \sin x = 0$

გ) $\cos^2 x - 3 \cos x = 0$

დ) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$

3. ამოხსენით განტოლებები ახალი ცვლადის შემოტანით.

ა) $\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$

ბ) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$

გ) $\cos^2 x - 4 \cos x - 5 = 0$

დ) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

ე) $2 \sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

ვ) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

ზ) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2 = 0$

თ) $\operatorname{ctg} x + 3 \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$

4. ამოხსენით ერთგვაროვანი განტოლებები.

ა) $\sin x + \cos x = 0$ ბ) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$ გ) $\sin^2 x - 2 \sin 2x + 3 \cos^2 x = 0$

5. ამოხსენით განტოლებები ხარისხების დაწევის ფორმულების გამოყენებით.

ა) $4 \sin^2 \frac{x}{2} - 3 = 0$

ბ) $4 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 0$

6. იპოვეთ განტოლების ფესვები, რომლებიც მოცემულ შუალედში მდებარეობს.

ა) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0, 0 \leq x \leq 360^\circ$

ბ) $6 \sin^2 x + 5 = 8, 0 \leq x \leq 2\pi$

გ) $4 \cos^2 x - 1 = 2, 0 \leq x \leq 2\pi$

დ) $2 \cos 2x + 3 = 2, 0 \leq x \leq 360^\circ$

7. ამოხსენით განტოლებები სხვადასხვა ხერხის გამოყენებით.

ა) $\cos 3x - \cos x = 0$

ბ) $\sin 3x + \sin x = 0$

გ) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$

დ) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

ე) $\sin 2x - 2\sqrt{3} \sin^2 x = 0$

ვ) $\sin 2x = 2 \cos^2 x$

ზ) $(1 + \operatorname{tg} x) \cdot \cos x = 0$

თ) $(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \sin 2x = 0$

ი) $\sin x + 1,5 \sin 2x = \sin^3 x$

კ) $\cos x + \sin 2x = \cos^3 x$

ლ) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

მ) $\sin 3x = 3 \sin x$

ნ) $\sin 3x - 2 \cos 2x = 3$

ო) $\cos 4x + \sin x = 2$

ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის სერეები

8. კალკულატორის გამოყენებით იპოვეთ განტოლებების ამონახსნების მიახლოებითი მნიშვნელობა $0 \leq x < 2\pi$ ინტერვალში.

ა) $3 \operatorname{tg} x + 1 = 13$

ბ) $8 \cos x + 3 = 4$

გ) $4 \sin x = -2 \sin x - 5$

დ) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$

9. ამოხსენით განტოლებები.

1) $(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$

8) $(\operatorname{tg} x - 1)(\cos x - 1) = 0$

2) $2 \sin x - 1 = \operatorname{cosec} x$

9) $\operatorname{tg} x + 1 = \sqrt{3} + \sqrt{3} \operatorname{ctg} x$

3) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$

10) $\cos^2 x = \sin^2 x + 1$

4) $\operatorname{cosec}^2 x - 2 \operatorname{ctg} x = 0$

11) $\sin^2 x \cos x = \cos x$

5) $2 \operatorname{tg}^2 x \sin x - \operatorname{tg}^2 x = 0$

12) $\sin^2 x \cos^2 x = 0$

6) $\sec^2 x \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x$

13) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

7) $9 \sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0$

14) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

10. 1) $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ განტოლებისათვის იპოვეთ:

ა) უმცირესი დადებითი მნიშვნელობა; ბ) უდიდესი უარყოფითი მნიშვნელობა;

გ) $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ შუალედში მდებარე ფესვები.

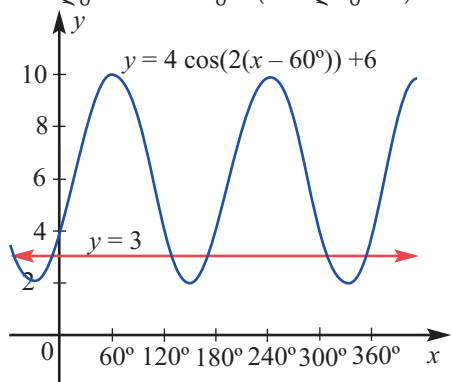
2) იპოვეთ $\sin 3x \cdot \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos 3x$ განტოლების $(-\pi; \frac{\pi}{2})$ შუალედში მდებარე ფესვები.

11. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკები. დაწერეთ გრაფიკების $0 \leq x < 2\pi$ ინტერვალში x ღერძთან გადაკვეთის წერტილები.

ა) $y = 2 \sin x + 1$

ბ) $y = 2 \cos x - 1$

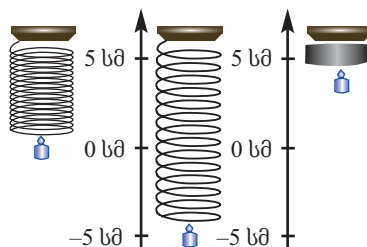
12. სურათზე მოცემული გრაფიკების მიხედვით დაწერეთ $4 \cos(2(x - 60^\circ)) + 6 = 3$ განტოლების ამონახსენი (მიახლოებით).



13. დენის ძაბვა. სინათლის წყაროდ გამოყენებული გენერატორის ელექტრო ძალის $I = 20 \sin 80\pi t$ ფორმულით გამოსახვა შეიძლება სადაც t არის დრო წამებით. I -დენის ძალას ამპერით უწვენებს. იპოვეთ t -ს ისეთი უმცირესი დადებითი მნიშვნელობა, რომ:

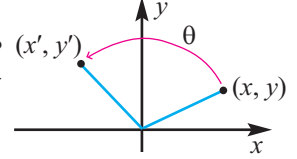
ა) $I = -10 A$; ბ) $I = 20 A$ გახდეს.

14. ზამბარაზე დამოკიდებული სხეულის რხევის მოძრაობის $d = 4 \sin \pi t$ ფორმულით მოდელირება შეიძლება. მერამდენე წამზე შეიძლება იყოს ადგილმონაცვლეობა 2 სმ-ის ტოლი?



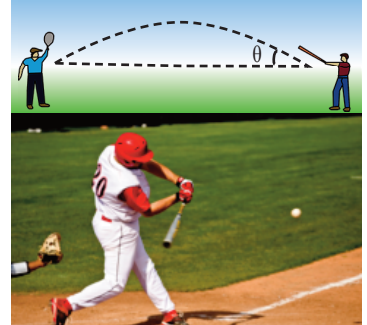
15. ა) კოორდინატა სათავის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით $\frac{\pi}{3}$ ზომით მობრუნებისას რომელ წერტილად გარდაიქმნება $(\sqrt{3}; 1)$ წერტილი?

ბ) წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(2; 2)$ კოორდინატა (x', y') კოორდინატა სათავის გარშემო რამდენი გრადუსით მობრუნებისას გარდაიქმნება წერტილად, რომლის კოორდინატებია $(-\sqrt{2}; \sqrt{6})$?



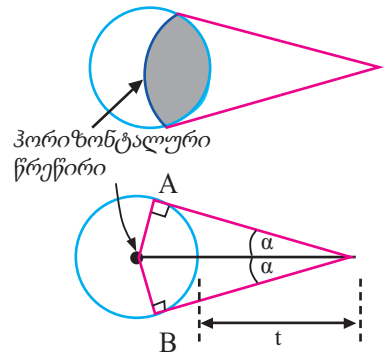
16. ბეისბოლის ბურთის დარტყმის ძალასა და ბურთის მიერ გავლილი მანძილის v_0 საწყისი სიჩქარეზე და θ დახრის კუთხეზე დამოკიდებულება $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

სახისაა. სადაც g თავისუფალი ვარდნის სიჩქარეა. ბეისბოლის ბურთზე დარტყმით $v_0 = 30$ მ/წმ საწყისი სიჩქარით მოძრავი ბურთი 70 მ მანძილზე მდგომმა მოწინააღმდეგე მოთამაშემ დაიჭირა. იპოვეთ θ დახრის კუთხე.



17. მაჰირს ველოსიპედის საბურავის ბალანსირების შემოწმება სურს. ის საბურავის ზონარზე აღნიშვნას აკეთებს და მას აბრუნებს. საბურავზე გაკეთებული აღნიშვნის მოძრაობა $h(t) = 59 + 24 \sin 125t$ -ით შეიძლება გამოისახოს. სადაც h არის სიმაღლე (სმ-ობით), t დრო (წამობით). ა) რა სიმაღლეზე იქნება აღნიშვნა, როცა $t = 15$ წმ? ბ) მერამდენე წამებზე იქნება ნიშანი 60 მ-ის სიმაღლეზე?

18. კოსმოსი. კომუნიკაციური მიზნებისათვის გათვალისწინებული ახალი ხელოვნური თანამგზავრის ორბიტა დედამიწის ზედაპირიდან t მილის მანძილზეა. დედამიწის რადიუსი 3960 მილია. წარმოდგინეთ, რომ დედამიწის განსაზღვრული ნაწილი თანამგზავრის ხედვის არეშია. სურათზე ჰორიზონტის წრით შემოსაზღვრული ეს ნაწილი შავი ფერითაა აღნიშნული. ჰორიზონტზე წრეწირის ზოგიერთი ზომების განსაზღვრისათვის სურათით ისარგებლეთ.

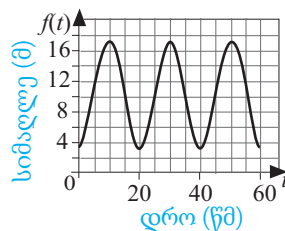


ა) დაწერეთ t -ს α -ზე დამოკიდებულების ფორმულა.

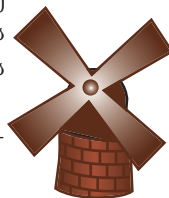
ბ) იპოვეთ t , როცა $\alpha = 10^\circ$ -ს

გ) იპოვეთ α -ს მნიშვნელობა, თუ $t = 30\,000$ მილს. გამოთვალეთ AB მინორული რკალის სიგრძე. სულ მცირე, რამდენი ასეთი თანამგზავრია საჭირო დედამიწის ეკვატორის გასწვრივ სრული დანახვისათვის?

- 19. ლიტერატურა.** ესპანელი მწერლის მიგელ დე სერვანტესის ცნობილი რომანის გმირს დონ კიხოტს, თავი ძალიან ძლიერად მიაჩნდა და ერთ დღეს ქარის წისქვილის გაჩერება გადაწყვიტა. დონ კიხოტმა, რომელმაც ეს ვერ შეძლო წისქვილის ერთ-ერთ ფარს ჩაეჭიდა და ჰაერში ტრიალი დაიწყო.



ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დახმარებით შეიძლება იმის მოდელირება, თუ რა მდგომარეობაში იყო დონ კიხოტი. სურათზე მოცემული გრაფიკი ფართან ერთად მოტრიალე დონ კიხოტის დედამიწის ზედაპირიდან სიმაღლის დროზე დამოკიდებულებას უჩვენებს.



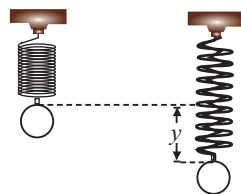
1) მოთხოვნილი მაჩვენებლები იპოვეთ გრაფიკის მიხედვით და რეალური სიტუაციის შესაბამისად დაწერეთ განმარტება:

ა) ამპლიტუდა; ბ) პერიოდი.

3) რომელ წამებზე იქნება დონ კიხოტი დედამიწიდან 10 მ სიმაღლეზე?

4) როგორ გავლენას მოახდენს ფარის სიჩქარის შესუსტება სინუსოიდის გრაფიკის ფორმაზე?

- 20. პარმონიული რხევა.** ზამბარაზე დაკიდებული სხეულის სიმძიმესა და წინასწორობის მდგომარეობით ადგილმონაცვლეობის $y = \frac{1}{12}(\sin t - 3 \cos t)$ ფორმულით გამოსახვა შეიძლება. სადაც t არის დრო წამებით, y ადგილმონაცვლეობა მეტრებით. იპოვეთ ზამბარის $0 \leq t \leq 1$ დროის ინტერვალში წონასწორობის წერტილში ყოფნის ვადები.



- 21. წყლის ბორბალი წყლის მოძრაობის ენერგიის სასარგებლო ენერგიად გარდაქმნისათვის გამოიყენება.**

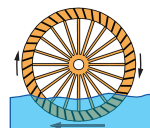
ჩარხის ბალანსის შემოწმებისათვის ზედ ლურსმანი დამაგრდა და დატრიალებულ იქნა. ლურსმანის უმაღლეს წერტილში ყოფნისას წყლის ზედაპირიდან 3,5 მ მანძილზე, ჩარხის მოძრაობით 12 წამის შემდეგ ყველაზე დაბალ წერტილში - წყლის ზედაპირიდან 0,5 მ - ით ქვევით მდებარეობს.



ა) დაწერეთ ლურსმანის წყლის ზედაპირიდან h სიმაღლის დროზე დამოკიდებულების მაჩვენებელი ფუნქციის ფორმულა.

ბ) რა სიმაღლეზე იქნება ლურსმანი მოძრაობის დაწყებიდან 15 წამის შემდეგ?

გ) ჩარხის მოძრაობის დაწყებიდან რამდენი წამის შემდეგ იქნება ლურსმანი წყლის ზედაპირიდან 1,5 მეტრ სიმაღლეზე?



ტრიგონომეტრიული უტოლობები

მარტივი ტრიგონომეტრიული უტოლობების ამოხსნა ერთეულოვანი წრეწირის ან ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დახმარებით ხდება.

ნამუში 1: $\sin x > \frac{1}{2}$ უტოლობა $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში ამოხსენით გრაფიკული ხერხით. დაწერეთ უტოლობის ამონახსნები ზოგადი სახით.

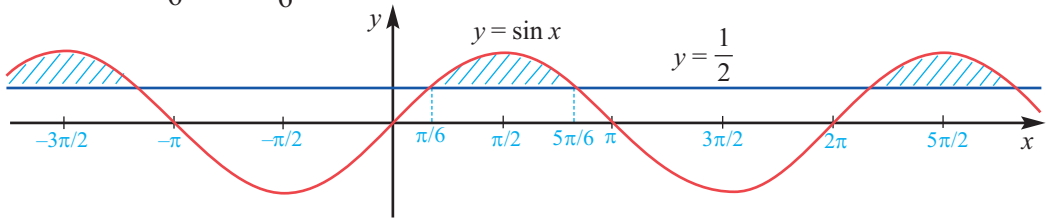
ამოხსნა: მოცემული უტოლობის ამოხსნა $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის $\frac{1}{2}$ -ზე მეტი ორდინატის მქონე წერტილების სიმრავლის აბსცისების განსაზღვრას ნიშნავს.

1. ავაგოთ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი.

2. იმავე კოორდინატა სისტემაში ავაგოთ $y = \frac{1}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი.

3. ავღნიშნოთ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილები.

4. როგორც ხედავთ, $y = \frac{1}{2}$ წრფე $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკს ორ ნაწილად ყოფს. გრაფიკის $y = \frac{1}{2}$ წრფის ზევით დარჩენილი ნაწილის წერტილების აბსცისები მოცემული უტოლობების ამონახსნებია. ეს წერტილები $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში აბსცისა $x > \frac{\pi}{6}$ და $x < \frac{5\pi}{6}$ მქონე წერტილებია. მაშასადამე, უტოლობის $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში არსებული ამონახსნები $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ პირობის დამაკმაყოფილებელ წერტილთა ერთობლიობაა.



ტრიგონომეტრიული უტოლობის ამონახსნი თვალნათლივ შეიძლება დავინახოთ ერთეულოვან წრეწირზე გამოსახვითაც.

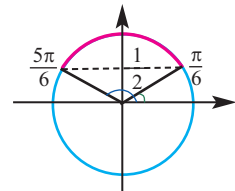
მოცემული უტოლობის დამაკმაყოფილებელი ყველა სხვა

ინტერვალები $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ ინტერვალის 2π -ის ჯერადის ტოლი

მანძილით მარჯვნივ და მარცხნივ მოცურებით მიიღება.

ამიტომაც $\sin x > \frac{1}{2}$ უტოლობის ამონახსენი

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ იქნება.}$$



ნამუში 2: ამოხსენით უტოლობა: $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ამოხსნა: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ განტოლების ფესვები $y = \sin x$ და $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ფუნქციების

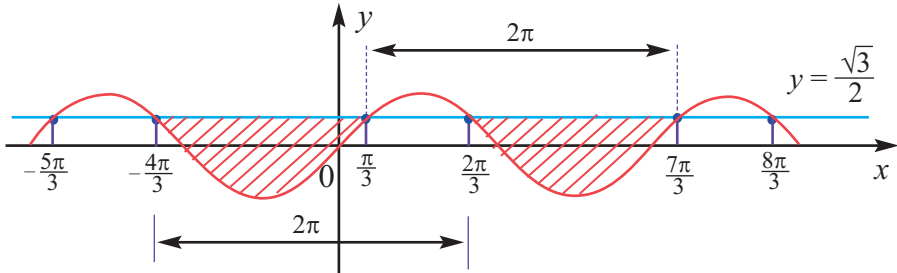
გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისებია. რადგან განტოლების ერთი ამონახსნია

$x_1 = \frac{\pi}{3}$, ამიტომ 2π სიგრძის შუალედში მეორე ამონახსენი $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ იქნება.

გრაფიკზე ავღნიშნოთ გადაკვეთის წერტილები, რომელთა აბსცისებია $\frac{\pi}{3}$ და $\frac{2\pi}{3}$.

ტრიგონომეტრიული უტოლობები

ამ წერტილებიდან ორივე მხარეს კიდევ ორი წერტილი ვუჩვენოთ: $\frac{\pi}{3}$ წერტილიდან 2π მანძილით მარჯვნივ $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ და $\frac{2\pi}{3}$ წერტილიდან 2π -ით მარცხნივ $\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$ წერტილებიც ამ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისებია.



$(-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$ შუალედში $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკზე არსებული წერტილების ორდინატი $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -ზე ნაკლებია. პერიოდულობის მხედველობაში მიღებით $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ უტოლობის ამონახსენი $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) სახით შეიძლება ჩავეწერთ.

როგორც გრაფიკული გამოსახულებიდან ჩანს $(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$ შუალედი $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ უტოლობას აკმაყოფილებს. $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი დანარჩენი ინტერვალები $(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$ ინტერვალის 2π -ის ჯერადის ტოლ მანძილზე მარჯვნივ და მარცხნივ მოძრაობით მიიღება. მაშასადამე, $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე:

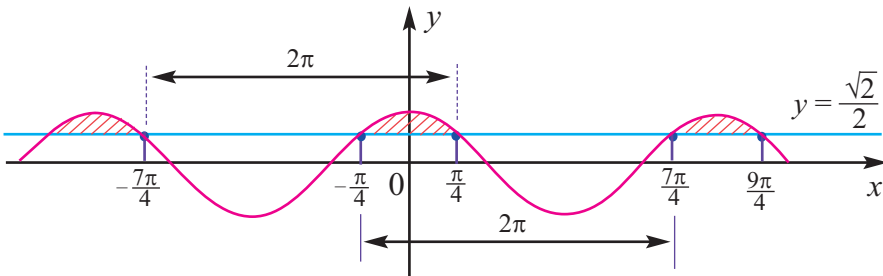
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ სახისა იქნება.}$$

ნიმუში 3: ამოხსენით უტოლობა: $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ამოხსნა: $y = \cos x$ და $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები ვიპოვოთ $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ განტოლებიდან,

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \text{ და } x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

როცა $n = 0$ გადაკვეთის წერტილების აბსცისები $\frac{\pi}{4}$ და $-\frac{\pi}{4}$ იქნება. ავღნიშნოთ ეს წერტილები გრაფიკზე. ამ წერტილებიდან ორივე მხარეს ვუჩვენოთ კიდევ ორი წერტილი.



ტრიგონომეტრიული უტოლობები

$-\frac{\pi}{4}$ წერტილიდან 2π -ით მარჯვნივ $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ და $\frac{\pi}{4}$ წერტილიდან 2π -ით მარცხნივ $\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$ წერტილებიც ავღნიშნოთ გრაფიკზე.

მოცემული უტოლობის დამაკმაყოფილებელი ინტერვალებიდან ერთი შესაბამისი განტოლების აბსოლუტური მნიშვნელობით უმცირესი ფესვების ანუ, $-\frac{\pi}{4}$ და $\frac{\pi}{4}$ წერტილებს

შორისაა. პერიოდულობის მხედველობაში მიღებით $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ უტოლობის ამონახსენს

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ სახით მივიღებთ.}$$

გრაფიკის გამოსახულების თანახმად $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ უტოლობის ამონახსენი

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ იქნება.}$$

ნიმუში 4: ამონახსენით უტოლობები $\operatorname{tg} x > 1$ და $\operatorname{tg} x < 1$.

ამოხსნა: ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაზე

გამოვსახოთ $y = \operatorname{tg} x$ და $y = 1$ ფუნქციების გრაფიკები.

$\operatorname{tg} x = 1$ განტოლებიდან ვიპოვოთ გრაფიკების $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

შუალედში მდებარე გადაკვეთის წერტილის აბსცისა: $x = \frac{\pi}{4}$

$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედში $\operatorname{tg} x$ ზრდადი ფუნქციაა. როცა

$x = \frac{\pi}{4}$, რადგან $\operatorname{tg} x = 1$ ამიტომ, როცა

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$, მაშინ $\operatorname{tg} x < 1$, როცა $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, მაშინ $\operatorname{tg} x > 1$ -ზე. რადგან

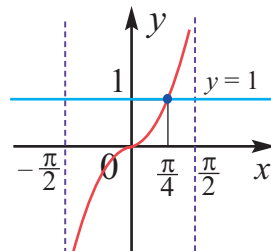
$\operatorname{tg} x$ არის π პერიოდული ფუნქცია

$\operatorname{tg} x < 1$ უტოლობის ამონახსენია

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$\operatorname{tg} x > 1$ უტოლობის ამონახსენი კი

$$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ იქნება.}$$



ნიმუში 5: ამოხსენით უტოლობები $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$ და $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$.

ამოხსნა: ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაზე

გამოვსახოთ $y = \operatorname{ctg} x$ და $y = \sqrt{3}$ ფუნქციების გრაფიკები.

$(0; \pi)$ შუალედში გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისას

ვპოულობთ $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ განტოლებიდან: $x = \frac{\pi}{6}$

$(0; \pi)$ შუალედში $\operatorname{ctg} x$ კლებადი ფუნქციაა.

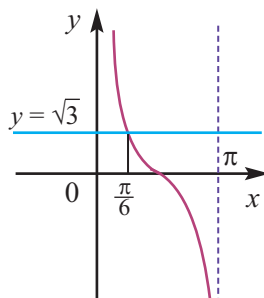
რადგან $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, როცა $x = \frac{\pi}{6}$, ამიტომ, როცა

$0 < x < \frac{\pi}{6}$, მაშინ $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$, ხოლო როცა

$\frac{\pi}{6} < x < \pi$ მაშინ კი $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ იქნება.

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$ უტოლობა $0 + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$ პირობას,

$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ უტოლობა კი $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$ პირობას აკმაყოფილებს.



ტრიგონომეტრიული უტოლობები

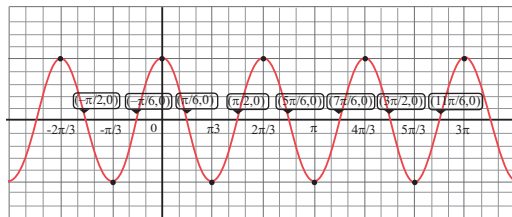
ტრიგონომეტრიული უტოლობების ამოხსნისათვის:

- 1) ერთსა და იმავე კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ უტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეების მომცველი გრაფიკები;
- 2) ამოხსენით შესაბამისი განტოლება, გრაფიკების კოორდინატთა სათავის სიახლოვეს რამდენიმე ადგილას იპოვეთ და აღნიშნეთ გადაკვეთის წერტილების აბსცისები;
- 3) განსაზღვრეთ მოცემული უტოლობის დამაკმაყოფილებელი რაიმე შუალედი;
- 4) პერიოდულობის გათვალისწინებით დაწერეთ უტოლობის ამონახსენი.

ნამუში 6: ამოხსენით $\cos 3x \leq 0$ უტოლობა $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში.

ამოხსნა:

1. ავაგოთ $y = \cos 3x$ ფუნქციის გრაფიკი.



როგორც გრაფიკიდან ჩანს, $\cos 3x$ -ის 0-ზე ნაკლებ ან 0-ის ტოლ მნიშვნელობებს გრაფიკის

აბსცისათა ღერძზე ($y = 0$ წრეზე) და მის ქვევით მდებარე წერტილები შეესაბამება.

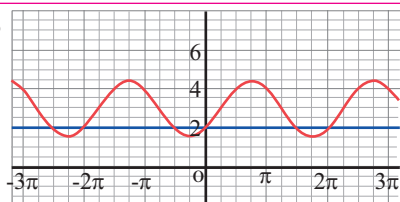
$$0 < x < 2\pi \text{ ინტერვალში უტოლობის ამონახსნები } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} < x < \frac{11\pi}{6} \text{ შუალედები იქნება.}$$

ნამუში 7: ამოხსენით $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 3 \geq 2$ უტოლობა $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში.

1. გრაფიკულატორით ავაგოთ $y = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 3$ და $y = 2$ ფუნქციების გრაფიკები.

$$y = \sqrt{2} \sin x - \frac{\pi}{4} + 3$$

$$y = 2$$



გრაფიკის $y = 2$ წრეზე და მის ზემოთ დარჩენილი ნაწილის წერტილების აბსცისები არის

უტოლობის ამონახსენი. ეს $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ წერტილებია.

უტოლობის ამონახსნების ზოგადი სახე $2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ იქნება.

შემაჯავებელი: ამოხსნის ინტერვალიდან ერთი წერტილი, მაგალითად $x = \frac{\pi}{2}$ წერტილი შევარჩიოთ, როგორც საცდელი წერტილი და შევამოწმოთ ამოხსნის სისწორე:

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \geq 2$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + 3 \geq 2$$

$$1 + 3 \geq 2$$

სასწავლო დაგეგმვა

1. იპოვეთ უტოლობის $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ მონაკვეთზე მდებარე ამონახსნები.

ა) $\sin x > \frac{1}{2}$ ბ) $\sin x > -\frac{1}{2}$ გ) $\sin x > 0$

2. იპოვეთ უტოლობის $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ მონაკვეთზე მდებარე ამონახსნები.

ა) $\sin x < \frac{1}{2}$ ბ) $\sin x < -\frac{1}{2}$ გ) $\sin x < 0$

3. იპოვეთ უტოლობის $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე მდებარე ამონახსნები.

ა) $\cos x < \frac{1}{2}$ ბ) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ გ) $\cos x < 0$

4. იპოვეთ უტოლობის $[-\pi; \pi]$ მონაკვეთზე მდებარე ამონახსნები.

ა) $\cos x > 0$ ბ) $\cos x > -\frac{1}{2}$ გ) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. იპოვეთ უტოლობის $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედში მდებარე ამონახსნები.

ა) $\operatorname{tg} x > -1$ ბ) $\operatorname{tg} x < -1$ გ) $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$

6. იპოვეთ უტოლობის $(0; \pi)$ შუალედში მდებარე ამონახსნები.

ა) $\operatorname{ctg} x < 1$ ბ) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$ გ) $\operatorname{ctg} x \leq 0$

7. ამოხსენით უტოლობები.

ა) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ბ) $\sin x > -\frac{1}{2}$ გ) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ დ) $\sin x < \frac{1}{2}$
 ე) $\cos x \geq \frac{1}{2}$ ვ) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ზ) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ თ) $\cos x \leq \frac{1}{2}$
 ი) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ კ) $\operatorname{tg} x > -1$ ლ) $\operatorname{tg} x \leq 1$ მ) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$
 ნ) $\operatorname{ctg} x > 1$ ო) $\operatorname{ctg} x > -1$ პ) $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$ ჟ) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$

8. გამოიკვლიეთ ნიმუში. ამოხსენით უტოლობები.

ნიმუში: $2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1 > 0$

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) > \frac{1}{2}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$x + \frac{\pi}{6} = t.$$

$$\sin t > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

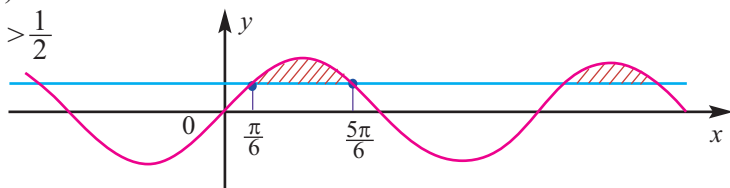
$$2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ა) $2 \sin 2x - \sqrt{3} > 0$

ბ) $2 \cos 2x - \sqrt{2} \leq 0$

გ) $2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1 > 0$

დ) $2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1 < 0$



ტრიგონომეტრიული უტოლობები

9. ერთეულოვან წრეწირზე, რომელი მეოთხედი აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემულ პირობებს?

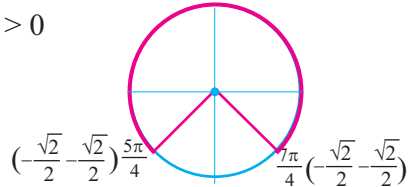
ა) $\sin x > 0, \cos x < 0$

ბ) $\cos x < 0, \operatorname{tg} x < 0$

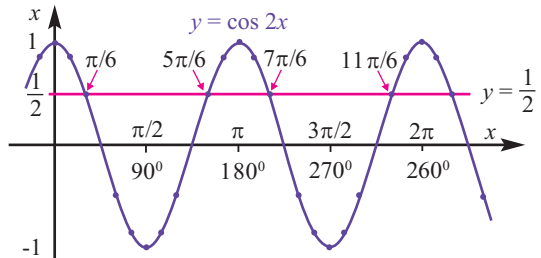
გ) $\sec x > 0, \operatorname{tg} x > 0$

დ) $\operatorname{tg} x < 0, \sin x > 0$

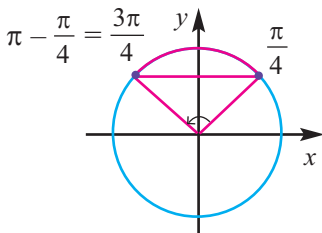
10. **ღია ტიპის დაგალებები.** დაწერეთ ერთეულოვანი წრეწირის წითელფერიანი ნაწილით გამოსახული ტრიგონომეტრიული უტოლობა.



11. უტოლობის ამოხსნის გრაფიკის გამოსახულების მიხედვით დაწერეთ უტოლობა და ამოხსნის ინტერვალი.

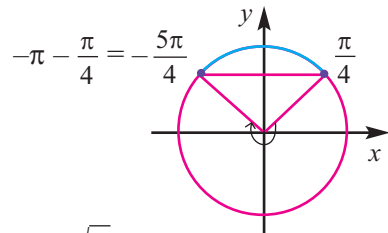


12. სურათზე $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ და $\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ უტოლობების ამოხსნის ზოგადი ჩანაწერი და ერთეულოვან წრეწირზე ასახვა სხვადასხვა ფერებით ნიმუშადაა მოცემული.



$$\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ქვემოთ მოცემული უტოლობების ამონახსნები წარმოადგინეთ ნიმუშის შესაბამისად.

ა) $\sin t \geq \frac{1}{2}$

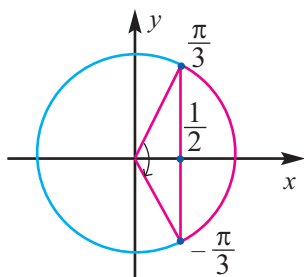
ბ) $\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

გ) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$

დ) $\sin t \leq \frac{1}{2}$

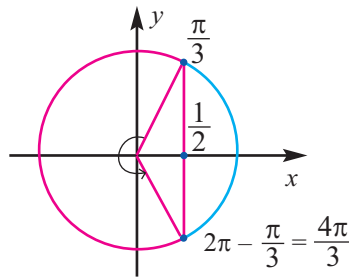
ე) $\sin t \geq -\frac{1}{2}$

- 13.** ნიშნულზე $\cos t \geq \frac{1}{2}$ და $\cos t \leq \frac{1}{2}$ უტოლობების ზოგადი ამონახსენი და ერთეულოვან წრეწირზე ასახვაა მოცემული.



$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$



$$\cos t \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$$

წარმოადგინეთ ქვემოთ მოცემული უტოლობების ამონახსნები ნიშნუმის მსგავსი ხერხით.

ა) $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

ბ) $\cos t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

გ) $\cos t \geq -\frac{1}{2}$

- 14.** უტოლობები გაამარტივეთ ტრიგონომეტრიული იგივეობების მიხედვით და ამოხსენით.

ა) $\sin 3x \cdot \sin x - \cos 3x \cdot \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ბ) $\sin x \cdot \cos x > -\frac{1}{4}$

გ) $\sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x < \frac{1}{2}$

- 15.** უტოლობის ორივე მხარე გაყავით განსაზღვრულ რიცხვზე, გაამარტივეთ დამხმარე კუთხის შემოტანით და ამოხსენით.

ა) $\sqrt{3} \sin x + \cos x > 1$

ბ) $\sin x - \cos x < 1$

- 16.** ამოხსენით უტოლობა.

ა) $(2 \sin x - 1) \cdot (\sin x - 3) < 0$

ბ) $(2 \cos x - \sqrt{3}) \cdot (\cos x + 2) > 0$

გ) $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 < 0$

- 17.** ამოხსენით უტოლობები $(0; 2\pi)$ ინტერვალში.

ა) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

ბ) $\cos(2x - \frac{\pi}{6}) \leq -\frac{1}{2}$

გ) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2}$

დ) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 0$

ე) $\cos \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ვ) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) > -1$

ზ) $\operatorname{tg} 2x \geq \sqrt{3}$

თ) $\sin(\frac{\pi}{4} - x) < \frac{1}{2}$

ტრიგონომეტრიული უტოლობები

ამოცანის ამოხსნის ნიმუში: 20 მ რადიუსიანი კარუსელი ყოველ 40 წამში ერთ სრულ ბრუნს ასრულებს. ყველაზე დაბლა მყოფი სკამი 1 მ სიმაღლეზეა.

ა) დახაზეთ ამოცანის შესაბამისი გრაფიკული გამოსახულება.

ბ) მოძრაობის დაწყებისას ყველაზე დაბლა მყოფი კაბინა კარუსელის ერთი სრული ბრუნის განმავლობაში რომელ წამებზე იქნება დედამიწიდან 21 მ და უფრო მეტ სიმაღლეზე?

გ) დაწერეთ ამ სკამზე მჯდომი პიროვნების კარუსელზე ბრუნვისას დედამიწიდან არსებული სიმაღლის დროზე დამოკიდებულების მაჩვენებელი ფუნქცია $h(t) = a \sin b(t - c) + d$ სახით.



ამოხსნა: ა) ამოცანის მონაცემების მიხედვით ავაგოთ სქემატური გამოსახულება. კარუსელის წრეწირის გარშემო მოძრაობისას ყოველი მეოთხედი ბრუნის შესაბამისი წერტილები.

თუ შევერთებთ ამ წერტილებს, მივიღებთ კარუსელის ერთი ბრუნის შესაბამის (360°) გრაფიკს- სინუსოიდას.

ბ) როგორც გრაფიკიდან ჩანს ეს პიროვნება მე-10 წამიდან 30-ე წამამდე დროის განმავლობაში დედამიწიდან 21 მ და მეტ სიმაღლეზე იქნება.

გ) ამოცანის მონაცემებისა და გრაფიკის მიხედვით დავწეროთ ფუნქციის ფორმულა.

ვიპოვოთ b სიხშირე პერიოდის მიხედვით: $T = \frac{2\pi}{b}$

$$T = 40 \text{ წმ}, \quad \frac{360}{b} = 40 \quad b = \frac{360}{40} = 9$$

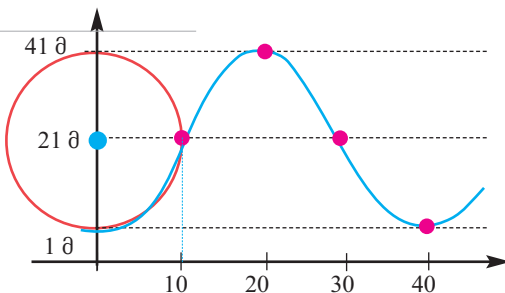
ამოცანაში მოცემული მაქსიმუმისა და მინიმუმის მიხედვით ვიპოვოთ ამპლიტუდა და შუახაზი.

$$a = \frac{\text{მაქსიმუმი} - \text{მინიმუმი}}{2} = \frac{41 - 1}{2} = 20$$

$$d = \frac{\text{მაქსიმუმი} + \text{მინიმუმი}}{2} = \frac{41 + 1}{2} = 21$$

განვსაზღვროთ სივრცითი მოცურება - c . სინუსის ფუნქცია მაქსიმუმს იღებს პერიოდის ერთ მეოთხედზე. თუმცა ამ ფუნქციის მაქსიმუმი 10 წამით გვიან (მე-20 წამზე) მიიღწევა. სივრცითი მოცურება $c = 10$. მაშასადამე

$$h(t) = 20 \sin 9(t - 10) + 21.$$



განმაზოგადებელი დაგალებები

1. კალკულატორით გამოთვალეთ.

ა) $\cos^{-1}(-0,8)$ ბ) $\sin^{-1} 0,99$ გ) $\operatorname{tg}^{-1} 12$ დ) $\cos^{-1} 0,55$

2. იპოვეთ განტოლებების $[0; 2\pi)$ (ანუ $[0; 360^\circ)$) შუალედში არსებული ფესვები.

ა) $\sin(x + 60^\circ) = \frac{1}{2}$ ბ) $\cos(x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 გ) $\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = -1$ დ) $\sin(x - 20^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 ე) $\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ ვ) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = 1$

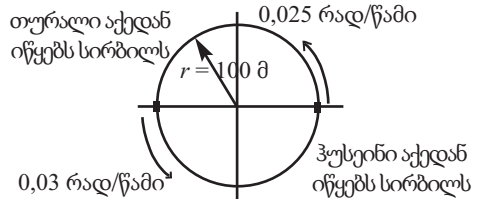
3. ამოხსენით უტოლობები $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში.

ა) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ბ) $\cos x - \frac{1}{2} > 0$ გ) $\sqrt{2} \sin x - 1 < 0$
 დ) $\sin x \leq 0$ ე) $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$ ვ) $\sec^2 x \leq 4$
 ზ) $\cos^2 x > \frac{1}{2}$ თ) $\cos 2x \leq 0$ ი) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) > \frac{1}{2}$
 კ) $\cos^2 x \geq \frac{1}{3}$ ლ) $2 \cos x \geq 1$ მ) $\sin 5x \geq 5$
 ნ) $\cos 2x \leq 1$ ო) $\sec x \leq \sqrt{2}$ პ) $\operatorname{ctg} x \leq 4$

4. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $2 \operatorname{ctg} x + 1 = -1$ ე) $\sin x + 2 = 3$
 ბ) $5 \sec^2 x = 6 \sec x$ ვ) $2 \cos^2 x - \cos x = 1$
 გ) $4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$ ზ) $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 4 = 0$
 დ) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$ თ) $\cos^2 x = \sin^2 x + 1$

5. თურალი და ჰუსეინი სურათზე აღნიშნული წესით 100 მ რადიუსიანი წრეწირის გარშემო დარბიან. თურალი სურათზე აღნიშნული წერტილიდან დაწყებით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით 0,03 რად/წმ, ჰუსეინი კი აღნიშნული წერტილიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით 0,025 რად/წმ სიჩქარით დარბის.



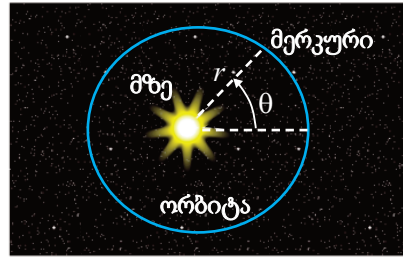
- განსაზღვრეთ 6 წამის შემდეგ მათი ადგილმდებარეობის წერტილების კოორდინატები.
- რა მანძილს გაივლიან ისინი 8 წამის განმავლობაში?
- გამოსახეთ თურალის მიერ t წამის შემდეგ მოძრაობით შემოხაზული მოზრუნების კუთხე.
- თურალი პირველად მერამდენე წამზე იქნება იმ წერტილში, რომლის აბსცისაც არის 50?
- ჰუსეინი პირველად მერამდენე წამზე იქნება იმ წერტილში, რომლის აბსცისაც არის 50?
- თურალი პირველად მერამდენე წამზე დაეწევა და გაასწრებს ჰუსეინს?

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 6. ასტრონომია.** პლანეტა მერკური მზის გარშემო ელიფსის ფორმით მოძრაობს. მისი მოძრაობა შეიძლება გამოისახოს ქვემოთ მოცემული ფორმულით.

$$r = \frac{3,44 \times 10^7}{1 - 0,206 \cos \theta}$$

θ კუთხის რა უმცირესი დადებითი მნიშვნელობისათვის იქნება პლანეტა მერკურსა და მზეს შორის მანძილი 5×10^7 კმ-ის ტოლი?



- 7.** შერჩეულ ტერიტორიაზე მიწდვრის კურდღლების რაოდენობის გამრავლების (მათთან ერთად მტაცებლების გამრავლების მიხედვით) დროზე დამოკიდებულების $D(t) = 400 \cos(72t) + 800$ სახით მოდელირება შეიძლება. D არის კურდღლების რაოდენობა, t კი 2000 წლიდან დაწყებული უჩვენებს დროს (წლებით).

- რამდენია კურდღლების მაქსიმალური და მინიმალური რაოდენობა?
- რამდენი იქნება კურდღლების რაოდენობა მიმდინარე წელს?
- რომელ წელს იყო დაახლოებით 1000 კურდღელი?
- დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი 2 წლიანი პერიოდისათვის.

- 8.** ერთი წლის განმავლობაში შეგროვებული ინფორმაციების გამოკვლევის შედეგად ქალაქში დღის ხანგრძლივობის (საათობით) ქვემოთ მოცემული დამოკიდებულებით ცვლილება განისაზღვრა:

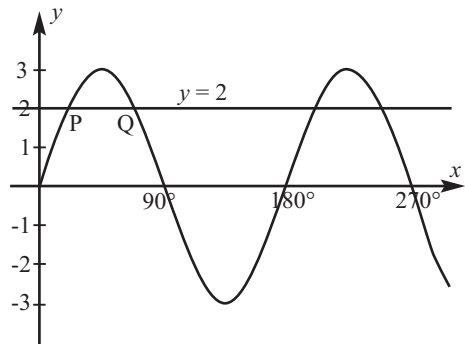
$$D(x) = \frac{7}{3} \sin \frac{2\pi}{365}x + \frac{35}{3}$$

სადაც x -ით აღინიშნება დღის, წლის დასაწყისიდან გამოთვლილი ნომერი.

- რამდენი საათი იყო დღის ხანგრძლივობა 1 იანვარს, 22 მარტს და 5 ნოემბერს?
- რომელ თარიღებშია დღის ხანგრძლივობა 11 საათზე მეტი?

- 9.** სურათზე მოცემულია $y = a \sin bx$ ფუნქციის გრაფიკი.

- გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ a და b მნიშვნელობები.
- იპოვეთ $y = 2$ წრფესთან გადაკვეთის P და Q წერტილების კოორდინატები.



- 10.** იპოვეთ განტოლებების ფესვები $[0; 2\pi)$ შუალედში.

ა) $2 \cos^2 x = \sin x$

ბ) $\sin^3 x - 5 \sin x = 0$

გ) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$

დ) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$

ე) $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{8}) = \sqrt{3}$

ვ) $\sin 3x - \cos 2x = 2$

პრიზმის მოცულობა

პირამიდის მოცულობა

სივრცითი ფიგურების მსგავსება

მსგავსი სივრცითი ფიგურების ზედაპირები
და მოცულობები

წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა

ამოცანები სიბრტყითი კვეთების შესახებ
სიმეტრია სივრცეში

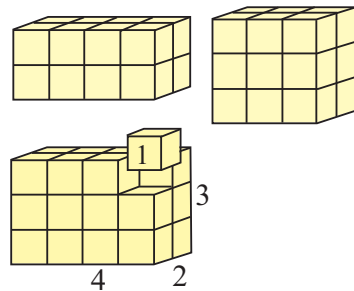


პრიზმის მოცულობა

გამოკვლევა. კუბებით ააგეთ სხვადასხვა ზომის პრიზმები და დახაზეთ მათი სურათები. ააგეთ სულ მცირე ოთხი პრიზმა.

1. წარმოადგინეთ, რომ პრიზმის შემადგენელი თითოეული კუბის გვერდის სიგრძე 1 ერთეულია. ყოველი წახნაგი კვადრატული ერთეულია, მოცულობა 1 კუბური ერთეულია.
2. პრიზმების მიხედვით განსაზღვრეთ ცხრილში მითითებული სიდიდეები და შეავსეთ ოგი.
3. რა კავშირი აღმოაჩინეთ პრიზმის ფუძის ფართობს, სიმაღლესა და მოცულობას შორის?
4. კონსტრუქციების კუთხიდან აიღეთ ერთი კუბი. დახაზეთ მიღებული კუბოიდების ზედახედი, წინხედისა და გვერდხედის სურათები.

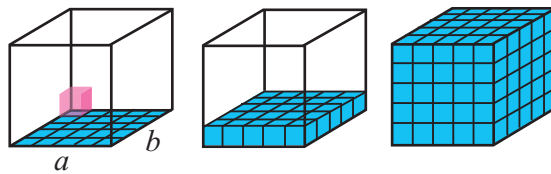
პრიზმა	ფუძის ფართობი	სიმაღლე	მოცულობა
1.			
2.			
3.			
4.			



თუ სხეულის სასრული რაოდენობის სამკუთხა სხეულებად დაყოფა შესაძლებელია, მას მარტივი სხეული ეწოდება. მარტივი სხეულებისათვის მოცულობა - რიცხვითი მნიშვნელობა ქვემოთ მოცემული თვისებების დამაკმაყოფილებელი დადებითი სიდიდეა.

- 1) კონგრუენტული სხეულების მოცულობები ტოლია.
 - 2) იმ კუბის მოცულობა, რომლის წიბო სიგრძის ერთეულის ტოლია, კუბური ერთეულის ტოლია.
 - 3) თუ სხეული მარტივ სხეულებად, ნაწილებად იყოფა, მაშინ ამ სხეულის მოცულობა მისი ნაწილების მოცულობების ჯამის ტოლია.
- სხეულებს, რომელთა მოცულობები ერთმანეთის ტოლია ტოლიდები სხეულები ეწოდება.

როცა ზომები ნატურალური რიცხვებია, მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობა რიცხვითი მნიშვნელობით მისი შემადგენელი ერთეულოვანი კუბების რაოდენობის ტოლია. იმ შემთხვევაში,

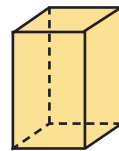


როცა ზომები ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობა მისი სამი განზომილების ნამრავლის ტოლია $V = a \cdot b \cdot c$ ვინაიდან მოცულობის ფორმულაში $a \cdot b$ ნამრავლი ფუძის ფართობია, c კი სიმაღლეა, ის შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ.

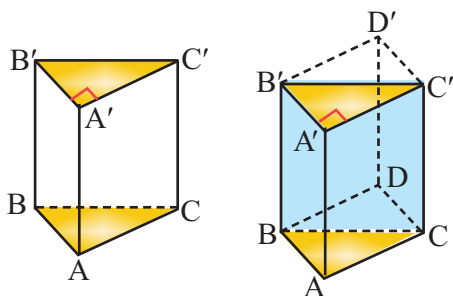
მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია: $V = S_{\text{ფ}} \cdot h$.

იმ კუბის მოცულობა, რომლის წიბოს სიგრძეა a იქნება $V = a^3$.

ნებისმიერი პრიზმის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. ამ მოსაზრების მართებულობა ვუჩვენოთ მართ პრიზმაზე რომლის ფუძეც მართკუთხა სამკუთხედი.



პრიზმის მოცულობა



ფუძეში მოცემული მართკუთხა სამკუთხედების მართკუთხედებამდე შევსებით პრიზმაც მართკუთხა პარალელებიპედამდე შევავსოთ. მიღებული მართი პრიზმის მოცულობა $V = AB \cdot AC \cdot AA'$ იქნება.

პრიზმის ფუძის დიაგონალზე გამავალი $BB'C'C$ სიბრტყე პრიზმას ორ კონგრუენტულ სამკუთხა პრიზმად ყოფს. მამა-

სადამე, მართი პრიზმის მოცულობა, რომლის ფუძეც მართკუთხა სამკუთხედი, შეიძლება ჩაიწეროს ქვემოთ მოცემული სახით:

$$V = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot AA' = S_{\text{ფ}} h$$

თუ პრიზმის ფუძე ნებისმიერი ABC სამკუთხედი, ამ სამკუთხედების სიმაღლეებიდან ისეთი გავავლოთ, რომ მოპირდაპირე გვერდი მის შიდა წერტილში გადაკვეთოს: $AM \perp BC$.

AA' წიბოზე გავლით BC წიბოს მართობული სიბრტყე ამ პრიზმას ერთი და იმავე სიმაღლის მქონე ორ პრიზმად ყოფს, რომელთა ფუძეებიც მართკუთხა სამკუთხედებია. მოცემული პრიზმის მოცულობა ამ პრიზმების მოცულობების ჯამის ტოლია.

მამასადამე, მართი პრიზმის მოცულობა, რომლის ფუძეც ნებისმიერი სამკუთხედი, ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

თუ მართი პრიზმის ფუძეები ნებისმიერი მრავალკუთხედი იქნება, ამ პრიზმის ფუძის სამკუთხედებად დაყოფით მართ პრიზმებად დაიყოფა და მათი მოცულობების შეკრებით, მოცემული პრიზმის მოცულობის გამოთვლა შეიძლება.

სურათზე მოცემული $ABCA'B'C'$ დახრილი პრიზმა გარდავქმნათ მისი ტოლი მოცულობის მქონე მართ პრიზმად, ამისათვის:

1. გავავლოთ პრიზმის გვერდითი წიბოს მართობული სიბრტყითი მკვეთი.
2. გამოვყოთ სიბრტყითი კვეთის ზევით დარჩენილი ნაწილი.
3. გამოყოფილი ნაწილის გარდაქმნით პრიზმის სიბრტყითი კვეთის ქვევით დარჩენილი ნაწილი დავაწებოთ.
4. მიღებული მართი პრიზმის სიმაღლე დახრილი პრიზმის გვერდითი წიბოა ანუ $h = l$, ფუძე კი დახრილი პრიზმის პერპენდიკულარული კვეთაა.

ამ მართი პრიზმის მოცულობა იგივე დახრილი პრიზმის მოცულობაა.

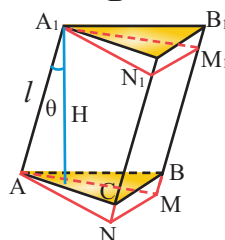
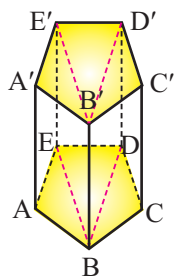
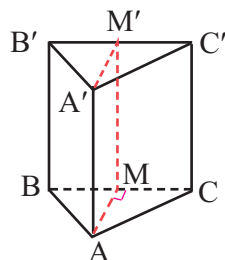
დასკვნა: დახრილი პრიზმის მოცულობა მართობული კვეთის ფართობისა და გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია: $V = S_{\perp} \cdot l$

მართობულ მკვეთის სიბრტყესა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე დახრილი პრიზმის გვერდითი წიბოსა და სიმაღლეს შორის არსებულ θ კუთხესთან ტოლობიდან გამომდინარე

$$V = S_{\perp} \cdot l = S_{\text{ფ}} \cos \theta \cdot l = S_{\text{ფ}} \cdot H$$

ამრიგად, პრიზმის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

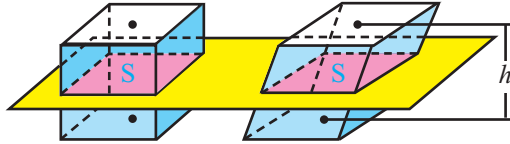
$$V = S_{\text{ფ}} \cdot H$$



პრიზმის მოცულობა

კავალიერის პრინციპი მოცულობების შესახებ. თუ ფუძეების ერთსა და იმავე სიბრტყეში მქონე თანაბარსიმაღლიანი ორი სხეულის ფუძეებზე პარალელური ნებისმიერი სიბრტყითი კვეთის ფართობები ტოლია, მაშინ მოცულობებიც ტოლია.

ეს პრინციპი აღმოაჩინა იტალიელმა მათემატიკოსმა ბონავენტურა კავალიერმა (1598-1647).

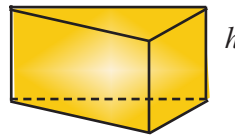


პრიზმის მოცულობა

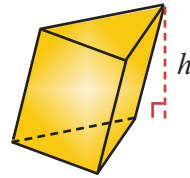
პრიზმის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

$$V = S_{\text{ფ}} h$$

მართი პრიზმა



დახრილი პრიზმა

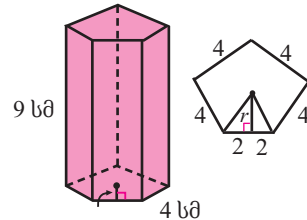


ნამუშაო. იპოვეთ წესიერი ხუთკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ ფუძის გვერდის სიგრძე 4 სმ-ია, გვერდითი წიბოს სიგრძე კი 9 სმ-ია.

წესიერი ხუთკუთხედის ცენტრული კუთხეა: $360 : 5 = 72^\circ$,
ამიტომ აპოთემა

$$r = \frac{2}{\operatorname{tg} 36^\circ}$$

წესიერი ხუთკუთხედის ფართობი პერიმეტრისა და აპოთემის ნამრავლის ნახევრის ტოლია:



$$S_{\text{ფ}} = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{20}{\operatorname{tg} 36^\circ} \quad V = S_0 \cdot h = \frac{180}{\operatorname{tg} 36^\circ} \approx 248 \text{ (სმ}^3\text{)}$$

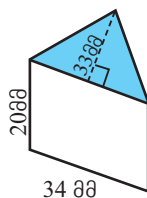
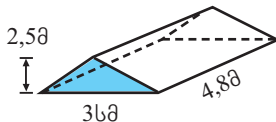
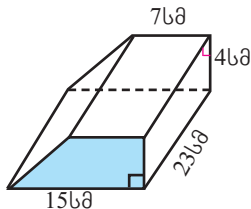
1. ცხრილის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ კითხვის ნიშნების ადგილას საჭირო ზომები.

მართკუთხა პარალელეპიპედის ზომები	მნიშვნელობები					
სიგრძე a	6	20	2	3	?	8
სიგანე b	4	30	5	?	8	2
სიმაღლე c	3	15	?	4	2	?
$S_{\text{გვ}}$	?	?	?	40	40	60
$S_{\text{სრ}}$	?	?	?	?	?	?
V	?	?	60	?	?	?

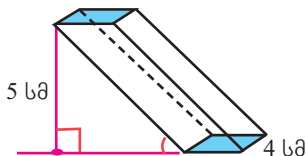
2. 8 სმ $\times$ 15 სმ $\times$ 40 სმ ზომის მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის მეტალის ბლოკი მთლიანად 1 სმ $\times$ 1,5 სმ $\times$ 2 სმ ზომის მეტალის ფილებისაგან შედგება. რამდენი ასეთი ფილაა მეტალის ბლოკში?

პრიზმის მოცულობა

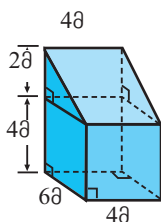
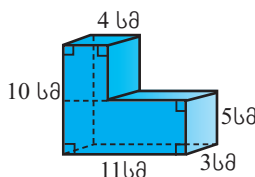
3. სურათის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ მართი პრიზმის მოცულობა.



4. იპოვეთ დახრილი პრიზმის მოცულობა, რომლის ფუძეც კვადრატია.



5. გამოთვალეთ შედგენილი ფიგურების მოცულობა.



6. როგორ შეიცვლება პარალელეპიპედის მოცულობა?

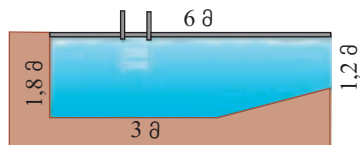
ა) თუ ზომებიდან ერთი ორჯერ გაიზარდება; ბ) ორი ზომიდან თითოეული ორჯერ გაიზარდება; გ) სამივე ზომა ორჯერ გაიზარდება.

7. რძის პროდუქციის წარმოებით დასაქმებული კომპანია ახალი სავაჭრო კამპანიისათვის ფასების შენარჩუნების პირობებში რძის ყუთების ტევადობის 25%-ით გაზრდას გეგმავს. როგორ შეიძლება ამის მიღწევა მხოლოდ ყუთების სიმაღლის შეცვლით?

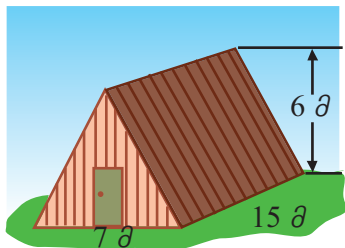


8. 10 მ სიგრძის აუზის განივი კვეთის სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ:

ა) რამდენ ტონა წყალს იტევს აუზი ($1\text{ მ}^3 = 1\text{ ტონა}$)?
ბ) სავსე აუზი ორი ერთნაირი მილით 4 საათში დაიცლება. რამდენ კუბურ მეტრ წყალს ატარებს თითოეული მილი ერთ წუთში?

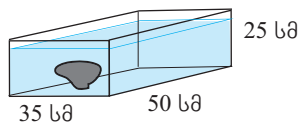


9. სურათზე მოცემული ხორბლის საწყობი (ამბარი) რომელი სივრცითი ფიგურის ფორმისაა? რამდენი წახნაგი და რამდენი წიბო აქვს მას? მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ მისი მოცულობა.



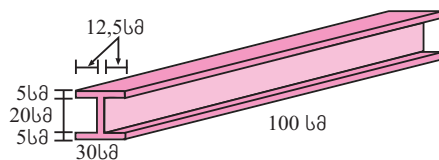
10. ა) დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა პარალელეპიპედის ნებისმიერი დიაგონალის კვადრატია მისი სამივე განზომილების კვადრატის ჯამის ტოლია: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
ბ) იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ $a = 3$, $b = 4$, $d = 13$.

11. სურათზე ნაჩვენებია ზომების ყუთში ჩაგდებული ქვით წყლის დონე 0,5 სმ აიწია. იპოვეთ ქვის მოცულობა.

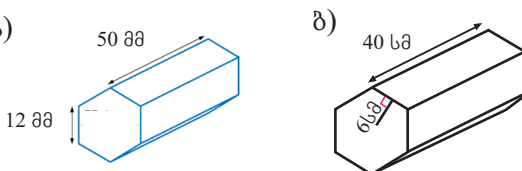


პრიზმის მოცულობა

12. სურათზე მოცემული მეტალის ბლოკის სიმკვრივე 7860 კგ/მ^3 -ია. გამოთვალეთ მისი საერთო მასა 10 კგ-ის სიზუსტით.

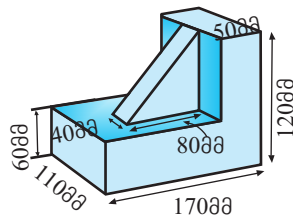


13. იპოვეთ მართი პრიზმის მოცულობა, რომლის ფუძეც წესიერი ექვსკუთხედიცაა.



14. ა) სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ კონსტრუქციის სრული ზედაპირის ფართობი.

ბ) 1 მ^3 -ის ფასი 2 კაპიკი ალუმინისგან დამზადებული ეს კონსტრუქცია 1 მ^3 -ის ფასი 10 კაპიკიანი გამძლე მეტალისაგან დამზადებული კონსტრუქციასთან შედარებით რამდენი მანეთით იაფი იქნება?



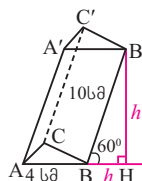
15. წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 48 მ^2 -ია, სიმაღლე კი 8 მ-ია.

ა) იპოვეთ ფუძის გვერდის სიგრძე.

ბ) იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

16. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი $6\sqrt{3}$ მ-ია, სიმაღლე - 4 მ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირი და მოცულობა.

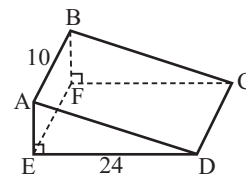
17. დახრილი პრიზმის ფუძე ტოლგვერდა სამკუთხედიცაა, რომლის გვერდი 4 მ-ია. პრიზმის გვერდითი წიბო 10 მ-ია და ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ ამ პრიზმის მოცულობა.



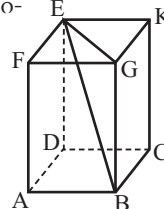
18. ა) მართკუთხა პარალელეპიპედის სამი წახნაგის ფართობი: 2 მ^2 ; 3 მ^2 ; 6 მ^2 -ია. იპოვეთ ამ პარალელეპიპედის მოცულობა.

ბ) მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 3 მ; 4 მ და 5 მ. თუ მის თითოეულ წიბოს x მ-ით გავზრდით, ფართობი 54 მ^2 -ით გაიზრდება. იპოვეთ რამდენით გაიზრდება მოცულობა.

19. სურათზე მოცემული ABCD მართკუთხედის ფორმის დახრილი ზედაპირიდან მიწის ამოღების შემდეგ CDEF მართკუთხედის სახის სწორი ზედაპირი მიიღეს. რამდენი კუბური მეტრი მიწა იქნა გატანილი ამ ფართობიდან, თუ $AB = 10 \text{ მ}$, $ED = 24 \text{ მ}$ და ფართობი 10 მ^2 -ითაა შემცირებული?

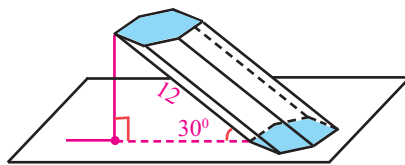
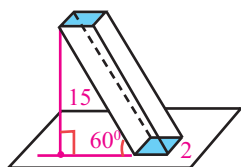


20. სურათზე მოცემული მართი პრიზმის ფუძე კვარდატია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $S_{ABCD} = 24 \text{ მ}^2$ და $\angle BEG = 60^\circ$.

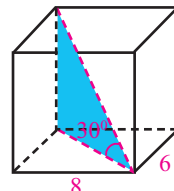


პრიზმის მოცულობა

- 21.** 2 დმ^2 ფართობის მქონე რომში მართი პარალელეპიპედის ფუძეა. დიაგონალური კვეთის ფართობები 9 დმ^2 და 16 დმ^2 -ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.
- 22.** იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ გვერდითი წახნაგის დიაგონალი 5 მ -ია ხოლო თვით მისი დიაგონალი 7 მ .
- 23.** ა) დახრილი პრიზმის ფუძეა კვადრეტი, რომლის გვერდი 2 ერთეულია. 15 ერთეული სიგრძის გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.
- ბ) წესიერი ექვსკუთხა დახრილი პრიზმის მოცულობა $36\sqrt{3}$ კუბური ერთეულია. მისი 12 ერთეული სიგრძის გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ ფუძის გვერდი.



- 24.** ა) მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი ფუძის დიაგონალთან 30° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მისი მოცულობა სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით.



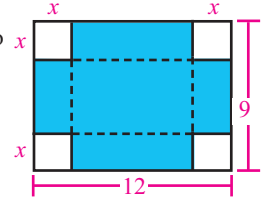
ბ) სხვა მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ყუთის ზომები

8×6 -ია. თუმცა მისი დიაგონალი ფუძის დიაგონალთან 60° -იან კუთხეს ქმნის. უჩვენეთ, რომ ამ ორი პარალელეპიპედის მოცულობების შეფარდება $\frac{\text{tg}60^\circ}{\text{tg}30^\circ}$ -ის ტოლია.

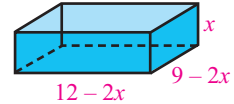
- 25.** მართი პრიზმის ფუძე კვადრატია. მისი გვერდითი წიბოს სიგრძე ფუძის გვერდზე 3 -ჯერ მეტია. სრული ზედაპირის ფართობი კი 350 მ^2 -ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.
- 26.** წესიერი სამკუთხა პრიზმის ყველა წიბოს სიგრძე x -ის ტოლია. უჩვენეთ, რომ მისი მოცულობა $V = \frac{\sqrt{3}}{4} x^3$ -ის ტოლია.
- 27.** მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდები 4 სმ , 5 სმ და 7 სმ -ია, გვერდითი წიბო კი ფუძის დიდი სიმაღლის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.
- 28.** დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბოები 20 სმ -ია. მართობული კვეთის გვერდები 13 სმ , 14 სმ და 15 სმ -ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.
- 29.** წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის სიმაღლეა h , ფუძის გვერდი კი a -ს ტოლია. უჩვენეთ, რომ მისი მოცულობა $V = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$ -ის ტოლია.
- 30.** წესიერი სამკუთხა პრიზმის ყველა 9 წიბო ერთი და იგივე სიგრძისაა. რამდენი სანტიმეტრია ერთი წიბოს სიგრძე, თუ პრიზმის მოცულობა $16\sqrt{3} \text{ სმ}^3$ -ია?
- 31.** თუ პარალელეპიპედის სიგრძე და სიგანე 20% -ით შემცირდება, რამდენი პროცენტით უნდა გაიზარდოს სიმაღლე, რომ მოცულობა არ შეიცვალოს?

32. მცირე საპროექტო სამუშაო.

ინფორმაცია. 9 სმ × 12 სმ მუყაოს კუთხეებიდან კვადრატები ჩამოაჭრეს. წყვეტილი ხაზების გასწვრივ მუყაოს გადაკეცვით ყუთის ფორმა მიიღება. რა ზომისა უნდა იყვნენ ისინი, რომ ყუთი გახდეს მაქსიმალური მოცულობის? გამოვსახოთ ყუთის მოცულობა x ცვლადით.



$V = (12 - 2x)(9 - 2x)x$
მოცემული მუყაოდან ყუთის დამზადებისათვის x -ის მნიშვნელობა შეიძლება შეიცვალოს 0 და $\frac{9}{2}$ შორის. $0 < x < 4,5$. ქვემოთ მოცემულ კომპიუტერულ პროგრამას x -ის 10 მნიშვნელობისათვის მოცულობა გაუანგარიშებია.



	PRINT	"X", "მოცულობა"	X	მოცულობა
10	PRINT		0	0
20	FOR X = 0 TO 4,5 STEP 0,5		0,5	44
30	LET V = (12 - 2*X) (9 - 2*X) *X		1	70
40	PRINT X, V		1,5	81
50	NEXT X		2	80
60	END		2,5	70
			3	54
			3,5	35
			4	16
			4,5	0

პროგრამის შესრულებული ნაწილის მიხედვით შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული გამოთვლები:

ა) უფრო ზუსტი გამოთვლების წარმოებისათვის პროგრამის x -ის მნიშვნელობების შეცვლის ბრძანება ისე შეარჩიეთ, რომ x -ის მნიშვნელობები 1-დან 2-მდე 0,1 ბიჯით შეიცვალოს.

ბ) მე-20 ბრძანება ისე შეცვალეთ, რომ მოცულობის მნიშვნელობა 0,1 სმ³ სიზუსტით გამოთვალოს.

გ) მოცულობის მაქსიმალური მნიშვნელობის შესაბამისად დაწერეთ ყუთის ზომები (სიგრძე, სიგანე და სიმაღლე).

დ) დაწერეთ კომპიუტერის პროგრამა მუყაოს 8 სმ × 20 სმ ზომებისათვის და კომპიუტერში სამუშაოები შეასრულეთ.

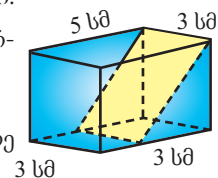
ე) მოცემული პროგრამის (შეგიძლიათ შეცვალოთ დაპროგრამების ენა) კომპიუტერში მუშაობის უზრუნველყოფისათვის შეასრულეთ საჭირო სამუშაოები.

33. სურათზე ასახულია ყუთი, რომლის სახურავი შიგნითაა ჩავარდნილი. სახურავის ფართობი 15 სმ²-ია.

ა) იპოვეთ ყუთის მე-3 ზომა.

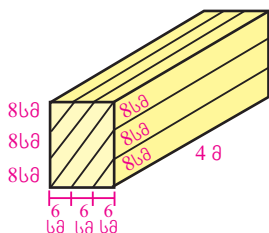
ბ) იპოვეთ ყუთის სახურავის მიერ ყუთიდან გამოყოფილი მცირე დაფარული ნაწილის მოცულობა.

გ) იპოვეთ ყუთის ღია დიდი ნაწილის მოცულობა.

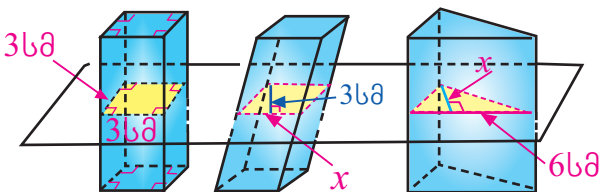


პირამიდის მოცულობა

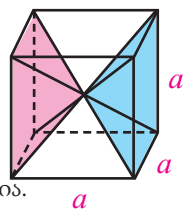
34. სურათზე ნაჩვენებია 4 მ სიგრძის, 18 სმ სიგანის და 24 სმ სისქის ხის მასალა ნაჩვენებია წესით 6 ნაწილად დაიყო. იპოვეთ თითო-ეული ნაწილის მოცულობა.



35. ფიგურების მოცულობები და სიმაღლეები ტოლია. განსაზღვრეთ პრიზმების x -ით აღნიშნული ნაწილები.



გამოკვლევა. 1. კუბის დიაგონალები მას ექვს კონგრუენტულ პირამიდად ყოფს. თითოეული პირამიდის ფუძე კუბის წახნაგია, თითოეული პირამიდის სიმაღლე კი $\frac{1}{2}a$ -ს ტოლია.



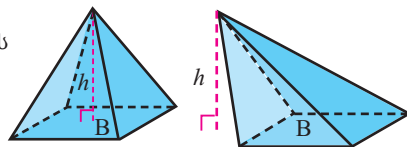
ა) განმარტეთ, რომ თითოეული პირამიდის მოცულობა $V = \frac{1}{6} a^3$ -ის ტოლია.

ბ) განმარტეთ, რომ თითოეული პირამიდის მოცულობა $V = \frac{1}{3} S_{\text{ფ}} h$ -ის ტოლია.

პირამიდის მოცულობა

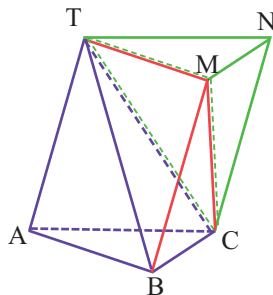
პირამიდის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{ფ}} h$$



დავუშვათ, რომ $TABC$ არის T წვეროსა და ABC ფუძის მქონე სამკუთხა პირამიდა. შევავსოთ ეს პირამიდა სამკუთხა პრიზმამდე. მიღებული პრიზმა სამი პირამიდისაგან შედგება:

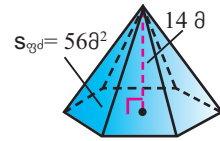
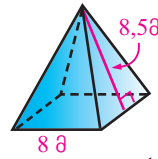
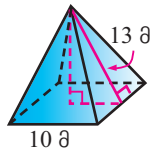
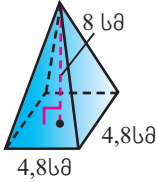
1) მოცემული $TABC$ პირამიდა, 2) $TCNM$ და 3) $TMBC$ პირამიდებისაგან. მე-2 და მე-3 პირამიდების ფუძეები კონგრუენტულია. $\triangle CNM \cong \triangle MBC$ და T წვეროდან გავლებული სიმაღლეები საერთოა. ამიტომაც მათი მოცულობები ტოლია. 1-ლი და მე-3 პირამიდების ფუძეებიც კონგრუენტულია. $\triangle TAB \cong \triangle BMT$ და C წვეროდან გავლებული სიმაღლეები საერთოა. ამიტომაც მათი მოცულობებიც ტოლია. მაშინ მოცემული პირამიდის მოცულობა $\frac{1}{3} S_{\text{ფ}} h$ -ის ტოლია.



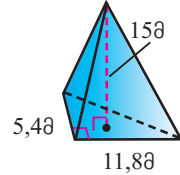
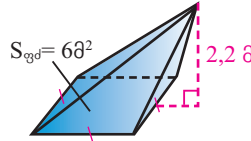
ნებისმიერი პირამიდის ფუძის სამკუთხედებად დაყოფა, მიღებული სამკუთხა პირამიდების მოცულობების პოვნა, შეჯამებით მოცემული პირამიდის მოცულობის გამოთვლა შეიძლება. ამრიგად, ნებისმიერი პირამიდის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია: $V = \frac{1}{3} S_{\text{ფ}} h$

პირამიდის მოცულობა

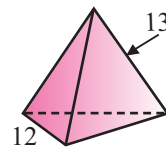
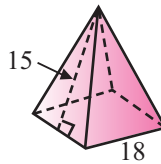
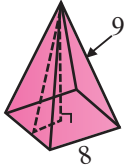
1. ა) სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ წესიერი პირამიდის მოცულობა.



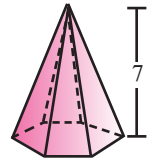
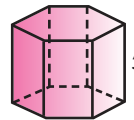
- ბ) სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ პირამიდების მოცულობა.



2. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ წესიერი პირამიდების მოცულობა.



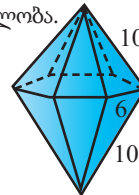
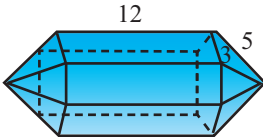
3. პრიზმისა და პირამიდის ფუძეები კონგრუენტული ფიგურებია. პრიზმის სიმაღლე 5 ერთეულია. პირამიდის სიმაღლე 7 ერთეულია. იპოვეთ ამ ფიგურების მოცულობების შეფარდება.



4. პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო 25 მმ-ია, ხოლო პირამიდის ფუძე მართკუთხედი. ამ მართკუთხედის გვერდები 18 მმ და 24 მმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

5. პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო 13 სმ-ია, ხოლო პირამიდის ფუძე 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ გვერდებიანი სამკუთხედი. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

6. სურათზე მინერალური კრისტალურია მოცემული. გამოთვალეთ მოცულობა.



7. $TABC$ წესიერი სამკუთხა პირამიდაა. შეასრულეთ დავალებები სურათის მიხედვით.

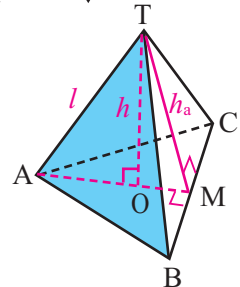
ა) იპოვეთ h და l , თუ $AM = 9$ და $TM = 5$

ბ) იპოვეთ AO და AM , თუ $BC = 6$

გ) იპოვეთ BC , OM და AM თუ $h = 4$, $l = 5$.

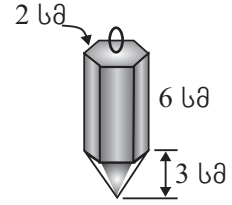
იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

დ) იპოვეთ მოცულობა, გვერდითი ზედაპირის ფართობი და აპოთემა, თუ $AB = 12$, $TA = 10$.



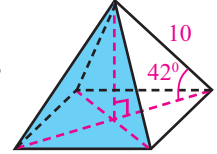
პირამიდის მოცულობა

8. შვეულად წოდებული ინსტრუმენტი სამშენებლო საქმეში ვერტიკალური ხაზების სისწორის შემოწმებისათვის გამოიყენება. სურათზე წარმოდგენილი შვეული წესიერი ექვსკუთხა პრიზმისა და პირამიდისაგან შედგება. იპოვეთ ინსტრუმენტის მოცულობა.

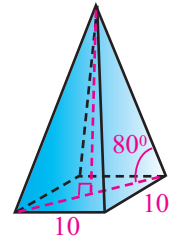
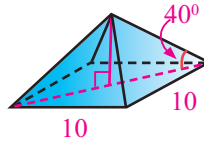
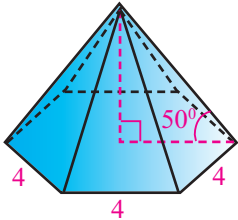


9. პირამიდის ფუძე ტოლგვერდა სამკუთხედიანია. აპოთემა 10 სმ-ია, ფუძის გვერდი 6 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

10. სურათის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ წესიერი პირამიდის მოცულობა, პასუხი დაამრგვალეთ მეათედებამდე.



11. იპოვეთ წესიერი პირამიდების მოცულობა. პასუხი დაამრგვალეთ მეათედებამდე.



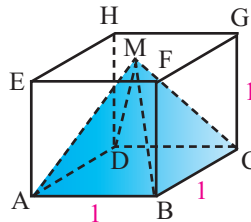
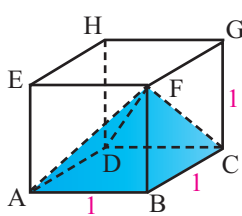
12. პირამიდის ფუძეა რომბი, რომლის გვერდი 3 სმ-ია. თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან 45° -იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $S_{\text{გვ}} = 12 \text{ სმ}^2$.

13. სამკუთხა პირამიდის ერთი წიბო 6-ის, დანარჩენი წიბოები კი 5-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

14. კონგრუენტულ კუბებში ორი სხვადასხვა პირამიდა $F-ABCD$ და $M-ABCD$ არის ჩახაზული. $M-ABCD$ პირამიდის M წვერო $EFGH$ კუბდრატის ცენტრშია.

ა) რომელი პირამიდის მოცულობა არის უფრო მეტი?

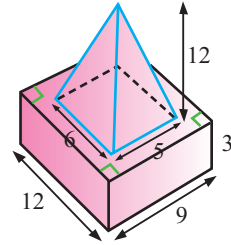
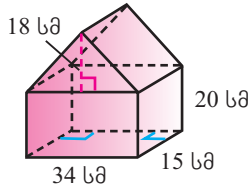
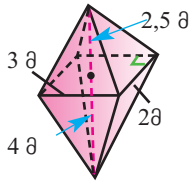
ბ) რომელი პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი არის უფრო მეტი?



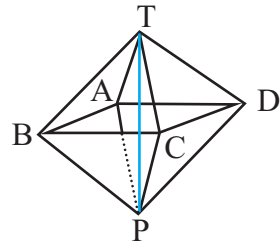
15. სამკუთხა პირამიდის ურთიერთმართობული გვერდითი წახნაგების ფართობებია 24 დმ^2 , 16 სმ^2 და 12 დმ^2 . იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

პირამიდის მოცულობა

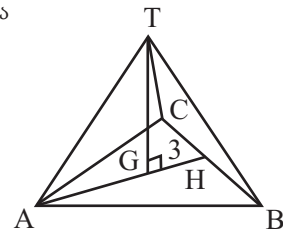
16. სურათის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ ფიგურების მოცულობები.



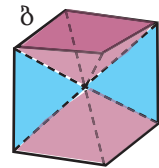
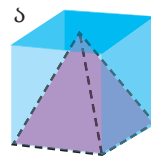
17. სურათზე მოცემული წესიერი ოქტაედრის წიბოების სიგრძეთა ჯამი 18 ერთეულია. იპოვეთ ოქტაედრის:
ა) სიმაღლე, ბ) მოცულობა.



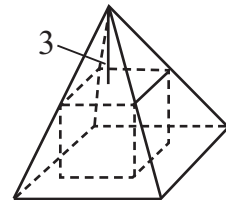
18. G წერტილი წესიერი ტეტრაედრის ფუძის სიმძიმის ცენტრია (მედიანების გადაკვეთის წერტილი). იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $GH = 3$ სმ.



19. ორ კონგრუენტულ კუბში ჩახაზული პირამიდების ფუძეები კუბის წახნაგებია. დაწერეთ ბ სურათზე მოცემული პირამიდის მოცულობის ა სურათზე მოცემული პირამიდის მოცულობასთან შეფარდება.



20. პირამიდაში სურათზე ნაჩვენები წესით მოთავსებულია კუბი. კუბის ქვედა ფუძე პირამიდის ფუძესთან ერთ სიბრტყეზე, ზედა ფუძის წვეროები კი პირამიდის წიბოებზეა. იმ პატარა პირამიდის მოცულობა, რომლის ფუძეც კუბის ზედა წახნაგია 36 სმ^3 -ია, სიმაღლე 3 სმ-ია. იპოვეთ:



- ა) კუბის წიბოს სიგრძე.
ბ) დიდი პირამიდის ფუძის გვერდი.
გ) დიდი პირამიდის მოცულობა.
დ) დიდი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

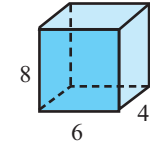
სივრცითი ფიგურების მსგავსება

მსგავსი ფიგურები ფორმით ერთნაირია, შესაბამისი ზომები პროპორციული აქვთ.

მაგალითად, სურათზე მოცემული სამკუთხედები მსგავსია, რადგან შესაბამისი გვერდების შეფარდებები ტოლია.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 3 \quad 5 \\ \triangle \\ 4 \end{array} & \begin{array}{c} 6 \quad 10 \\ \triangle \\ 8 \end{array} & \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \end{array}$$

სურათზე მოცემული მართკუთხა პარალელებიპედებიც მსგავსია, რადგან შესაბამისი წრფივი ზომები პროპორციულია და შესაბამისი წახნაგები მსგავსი მართკუთხედებია.

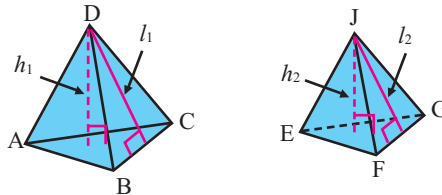


წესიერი მრავალწახნაგები მსგავსია. კერძოდ, ყველა კუბი მსგავსია, წესიერი ტეტრაედრები მსგავსია და ა. შ.

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$

მსგავსი ფიგურები

თუ გარდაქმნის დროს ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იგივე რიცხვჯერ იცვლება, ასეთ გარდაქმნას მსგავსების გარდაქმნა ეწოდება. მსგავსების გარდაქმნით რაიმე ფიგურისა და მისი მსგავსების გარდაქმნით მიღებულ ფიგურას მსგავსი ფიგურა ეწოდება. მსგავსების კოეფიციენტი ნებისმიერი ორ შესაბამისი წერტილთა წყვილს შორის მანძილების თანაფარდობის ტოლია.

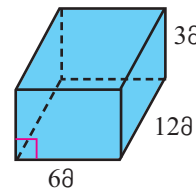
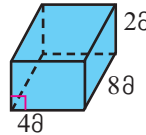
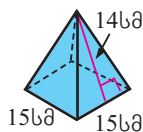
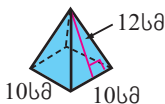


$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE} = \frac{AD}{EJ} = \frac{BD}{FJ} = \frac{CD}{GJ} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2} = k$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle EFG, \triangle ABD \sim \triangle EFJ, \\ \triangle BCD &\sim \triangle FGJ, \triangle ACD \sim \triangle EGJ \end{aligned}$$

შესაბამისი წრფივი ზომების თანაფარდობის მაჩვენებელ რიცხვს მსგავსების კოეფიციენტი ეწოდება.

ნიშ.შ.ი. უჩვენეთ მსგავსია თუ არა მოცემული ფიგურები.



$$\frac{10}{15} = \frac{10}{15} \neq \frac{12}{14}$$

მსგავსი ფიგურები არ არიან

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{28}{38}$$

მსგავსი ფიგურებია

მსგავსი სივრცითი ფიგურების ზედაპირები და მოცულობები

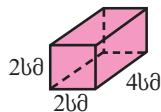
გამოკვლევა. ვუჩვენოთ მსგავსია თუ არა მოცემული ფიგურები.

A და B პრიზმები (მართკუთხა პარალელებიპედები) მსგავსი პრიზმებია, რომელთა მსგავსების კოეფიციენტი $\frac{2}{3}$ -ის ტოლია.

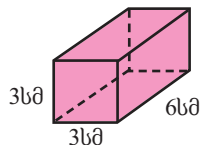
იპოვეთ ამ პრიზმების:

ა) სრული ზედაპირის ფართობების შეფარდება;

ბ) მოცულობების შეფარდება.



A პრიზმა



B პრიზმა

ა) A პრიზმის სრული ზედაპირი

B პრიზმის სრული ზედაპირი

$$S_{\text{სრ}} = Ph + 2S_{\text{ფძ}} =$$

$$= 12 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 40 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

$$S_{\text{სრ}} = Ph + 2S_{\text{ფძ}} =$$

$$= 18 \cdot 3 + 2 \cdot 18 = 90 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

A პრიზმის სრული ზედაპირის B პრიზმის სრულ ზედაპირთან შეფარდება:

$$\frac{40}{90} = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

ბ) A პრიზმის მოცულობა

B პრიზმის მოცულობა

$$V = S_{\text{ფძ}}h = 8 \cdot 2 = 16 \text{ (სმ}^3\text{)}$$

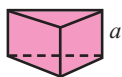
$$V = S_{\text{ფძ}}h = 18 \cdot 3 = 54 \text{ (სმ}^3\text{)}$$

A პრიზმის მოცულობის B პრიზმის მოცულობასთან შეფარდება:

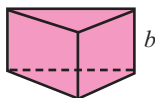
$$\frac{16}{54} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

მსგავსი ფიგურები

თუ ორი სივრცითი ფიგურის მსგავსების კოეფიციენტებია $\frac{a}{b}$, ამ ფიგურების ზედაპირების (გვერდითი, სრული, ფუძის) თანაფარდობაა $\frac{a^2}{b^2}$, მოცულობის თანაფარდობა კი $\frac{a^3}{b^3}$.



A ფიგურა

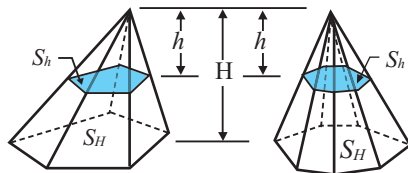


B ფიგურა

მსგავსების კოეფიციენტი: $\frac{a}{b}$

$$\frac{S_{\text{სრA}}}{S_{\text{სრB}}} = \frac{a^2}{b^2} \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{a^3}{b^3}$$

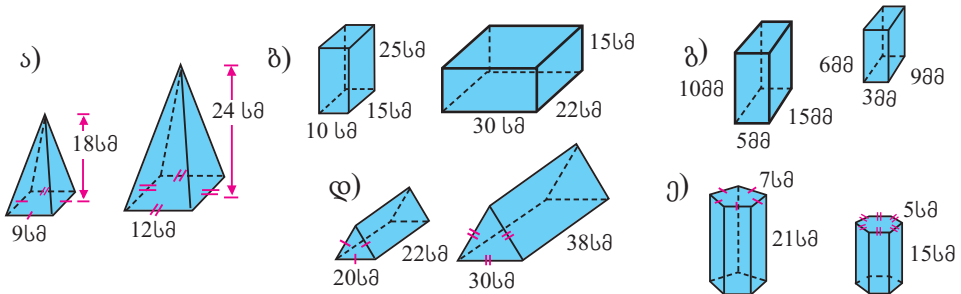
პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყით გადაკვეთისას მიღებული მცირე პირამიდა მოცემული პირამიდის მსგავსია. მსგავსების კოეფიციენტის პოვნა ნებისმიერი შესაბამისი წრფივი ზომების შეფარდებით შეიძლება. მაგალითად, სურათზე მოცემული პირამიდების სიმაღლეები ცნობილია. მათი ზედაპირების, ფუძეების ან სრული ზედაპირების ფართობების შეფარდება სიმაღლეების კვადრატების ტოლია.



$$\frac{S_{\text{პატ}}}{S_{\text{დიდ}}} = \frac{h^2}{H^2}$$

მსგავსი სივრცითი ფიგურების ზედაპირები და მოცულობები

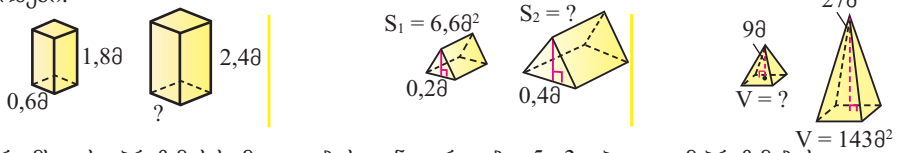
1. მსგავსების კოეფიციენტის განსაზღვრით დაადგინეთ მსგავსია თუ არა მოცემული ფიგურები.



2. ორი ფიგურა მსგავსია. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ფიგურების მსგავსების კოეფიციენტები.



3. ცნობილია, რომ ფიგურები მსგავსია. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი ზომები.



4. ორი მსგავსი პრიზმის სიმაღლეების თანაფარდობაა 5 : 3. იპოვეთ ამ პრიზმების:

- ა) გვერდითი ზედაპირების ფართობების შეფარდება;
- ბ) მოცულობების შეფარდება.

5. A და B წესიერი ოთხკუთხა პრიზმები მსგავსია. A პირამიდის ფუძის გვერდი 6 სმ, მოცულობა 48 სმ³-ია. B პირამიდის ფუძის გვერდი 12 სმ-ია. იპოვეთ:

- ა) B პირამიდის მოცულობა.
- ბ) გვერდითი ზედაპირების თანაფარდობა.
- გ) თითოეული პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

6. მოცემულია ორი მსგავსი ფიგურის ზედაპირების ფართობი და დიდი ფიგურის მოცულობა. იპოვეთ მცირე ფიგურის მოცულობა.

ა) $S_1 = 18 \text{ სმ}^2$	ბ) $S_1 = 192 \text{ მ}^2$	გ) $S_1 = 52 \text{ დმ}^2$
$S_2 = 72 \text{ სმ}^2$	$S_2 = 1728 \text{ მ}^2$	$S_2 = 208 \text{ დმ}^2$
$V_2 = 344 \text{ სმ}^3$	$V_2 = 4860 \text{ მ}^3$	$V_2 = 192 \text{ დმ}^3$

7. მოცემული ორი მსგავსი ფიგურის მოცულობები და მცირე ფიგურის ზედაპირის ფართობი. იპოვეთ დიდი ფიგურის ზედაპირის ფართობი.

ა) $V_1 = 27 \text{ სმ}^3$	ბ) $V_1 = 5 \text{ მ}^3$	გ) $V_1 = 54 \text{ სმ}^3$
$V_2 = 125 \text{ სმ}^3$	$V_2 = 40 \text{ მ}^3$	$V_2 = 128 \text{ სმ}^3$
$S_1 = 63 \text{ სმ}^2$	$S_1 = 4 \text{ მ}^2$	$S_1 = 18 \text{ სმ}^2$

მსგავსი სივრცითი ფიგურების ზედაპირები და მოცულობები

8. სარეცხი ფხვნილის მწარმოებელი კომპანია ერთი და იგივე სახის ფხვნილის დასაფასოებელ ყუთებს განსაზღვრული მასშტაბით გაზრდილ ყუთებში ათავსებს. 450 გრამი ტევადობის ყუთის ზომები 1 : 2 მასშტაბით პროპორციულადაა გაზრდილი. იპოვეთ ახალი ყუთის ტევადობა.

9. ორი კუბიდან ერთის დიაგონალია $\sqrt{3}$ სმ, მეორისა კი $4\sqrt{3}$ სმ-ია. იპოვეთ ამ კუბების მოცულობების სხვაობა.

10. ორი მსგავსი პირამიდის მოცულობაა 2 და 54 კუბური ერთეული. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული თანაფარდობები:

ა) სიმაღლეების

ბ) აპოთემების

გ) ფუძეების ფართობების

დ) სრული ფართობების.

11. თვითმფრინავის მოდელი თვითმფრინავის რეალურ ზომებთან 1:200 შეფარდებითი მასშტაბითაა დამზადებული. შეადარეთ მოდელზე დახარჯული საღებავის რაოდენობა რეალურ თვითმფრინავზე გამოყენებულ საღებავის ოდენობასთან.

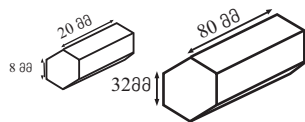


12. სპილენძისაგან დამზადებული წესიერი ექვსკუთხა ფორმის

დეტალები მსგავსია. სპილენძის სიმკვრივე $8,6 \text{ გრ/სმ}^3$ -ია.

1 კგ სპილენძის ფასი 2,55 კაპიკია. დეტალის დამამზადებელი

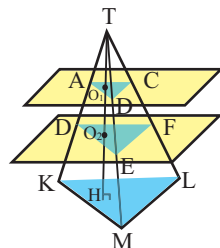
კომპანია თითოეული დეტალისათვის (სიდიდისაგან დამოუკიდებლად) მასალის ფასის 125% ოდენობით წარმოების დანახარჯების დამატებით დეტალის წარმოების ღირებულებას განსაზღვრავს. სარეალიზაციო ფასი კი თვითღირებულებაზე კომპანიის 22%-იანი მოგების დამატებით ფორმირდება. იპოვეთ თითოეული დეტალის სარეალიზაციო ფასი.



13. ახალი ავტომობილის დიზაინის შექმნისას, ჯერ ავტომობილის განსაზღვრულ მასშტაბთან მოდელს თიხით ამზადებენ. რეალობაში 5 მ სიგრძის ავტომობილის თიხის მოდელის სიგრძე 10 სმ-ია. იპოვეთ მოდელის ზედაპირის ფართობის რელური ავტომობილის ზედაპირის ფართობთან შეფარდება.



14. სურათზე მოცემული წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 8 სმ, სიმაღლე 12 სმ-ია. პირამიდა T წვეროდან დაწყებული 4 სმ და 6 სმ მანძილზე ფუძის პარალელური სიბრტითაა გადაკვეთილი. იპოვეთ კვეთაში მიღებული მრავალკუთხედების პერიმეტრები.



15. იპოვეთ მანძილი H სიმაღლიანი პირამიდის წვეროდან ფუძის პარალელურ და მოცულობის შუაზე გამყოფ მკვეთამდე.

16. ფუძის პარალელური სიბრტყეები პირამიდის სიმაღლეს 3 ტოლ ნაწილად ყოფენ. როგორი თანაფარდობით იყოფა პირამიდის მოცულობა?

17. ორი მსგავსი პირამიდის სიმაღლე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:3. იპოვეთ მცირე პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ პირამიდების გვერდითი ზედაპირების სხვაობა 96 მ^2 იქნება.

წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა

გამოკვლევა. ძველმა ეგვიპტელებმა წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობის

$V = \frac{1}{3} h(x^2 + xy + y^2)$ ფორმულით გამოთვლა იცოდნენ. თუმცა მათ არ იცოდნენ, როგორ

მიიღებოდა ეს ფორმულა. მიიღეთ ეს ფორმულა ქვემოთ მოცემული ნაბიჯებით:

ა) დაწერეთ იმ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, რომლის ფუძის გვერდი y ერთეულის ტოლია.

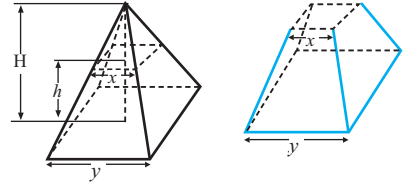
ბ) დაწერეთ იმ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, რომლის ფუძის გვერდი x ერთეულის ტოლია.

გ) უჩვენეთ, რომ H და h სიმაღლეებს შორის არსებული

დამოკიდებულება $H = \frac{yh}{y-x}$ სახისაა.

დ) უჩვენეთ, რომ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა

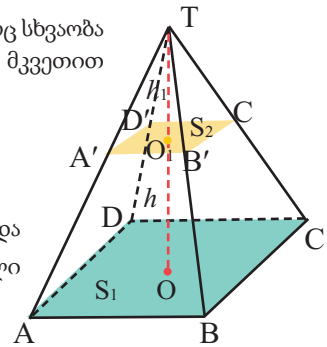
$V = \frac{1}{3} h(x^2 + xy + y^2)$ ფორმულით გამოითვლება.



წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა შეიძლება ვიპოვოთ როგორც სხვაობა მოცემული სრული პირამიდისა და ფუძის პარალელური მკვეთით გამოყოფილი მცირე პირამიდის მოცულობებს შორის.

$$V = \frac{1}{3} S_1(h_1 + h) - \frac{1}{3} S_2 h_1 = \frac{1}{3} [(S_1 - S_2)h_1 + S_1 h]$$

სადაც V წაკვეთილი პირამიდის მოცულობაა, S_1 და S_2 დიდი და მცირე პირამიდების ფუძეების ფართობებია. h წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლეა, h_1 - მცირე პირამიდის სიმაღლეა.



ვინაიდან ეს პირამიდები მსგავსია, ფართობების შეფარდება სიმაღლეების შეფარდების კვადრატის ტოლია. დაწერეთ ეს ტოლობა და ვიპოვოთ მცირე პირამიდის სიმაღლე.

$$\frac{S_1}{S_2} = \left[\frac{h_1}{h_1 + h} \right]^2 \quad \frac{h_1}{h_1 + h} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} \quad h_1 \sqrt{S_2} = (h_1 + h) \sqrt{S_1}$$

$$h_1 = \frac{h \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}} \quad \text{გამოსახულება } V = \frac{1}{3} [(S_1 - S_2)h_1 + S_1 h] \quad \text{ტოლობაში გავითვალისწინოთ.}$$

$$V = \frac{1}{3} [(S_1 - S_2) \frac{h \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}} + S_1 h] = \frac{1}{3} [(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}) h \sqrt{S_1} + S_1 h] =$$

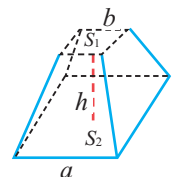
$$= \frac{1}{3} [(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}) h \sqrt{S_1} + S_1 h] = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა

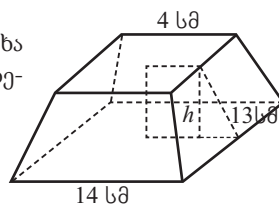
წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა, რომლის ფუძეების ფართობებია S_1 და S_2 ,

სიმაღლე კი h , გამოითვლება ფორმულით: $V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

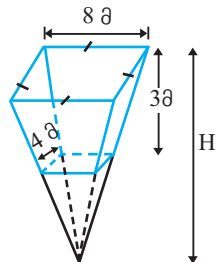


წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა

1. სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, სრული ზედაპირი და მოცულობა.



2. H სიმაღლის პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყითი კვეთის შედეგად მიღებული წაკვეთილი პირამიდის ზომები სურათზეა ნაჩვენები.



ა) იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა

ბ) იპოვეთ პირამიდის H სიმაღლე

გ) სურათზე ნაჩვენები ზომის წყლის აუზი რომ ამოითხაროს ამ მიწის გასაზიდად რამდენი 12 მ^3 ტევადობის მანქანაა საჭირო?

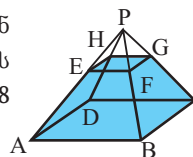
დ) რამდენი ლიტრი წყალი დაეტევა აუზში?

ე) თუ წყალს შევავსებთ აუზის ტევადობის ნახევარი ოდენობით, რამდენი იქნება წყლის სიღრმე?

3. ა) წესიერი სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბოს სიგრძე ტოლია და x -ითაა აღნიშნული. გამოსახეთ პირამიდის მოცულობა x ცვლადით.

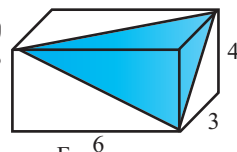
ბ) წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია x . გვერდითი წიბო $2x$ -ია. გამოსახეთ პირამიდის მოცულობა x ცვლადით.

4. პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყე მის სიმაღლეს წვეროდან დაწყებული ყოფს შეფარდებით $1 : 2$. იპოვეთ მოცემული პირამიდის მოცულობა, თუ მიღებული წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა 208 კუბური ერთეულია.



5. ა) იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი წიბო 10 სმ-ია, ფუძის გვერდი კი 6 სმ.

ბ) მართკუთხა პარალელეპიპედიდან სიბრტყითი კვეთით სურათზე ნაჩვენებების მსგავსი პირამიდა გამოიყ. შეადარეთ პირამიდისა და პარალელეპიპედის მოცულობა.

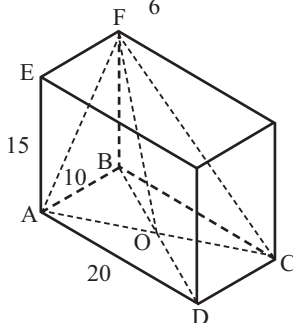


6. მართკუთხა პარალელეპიპედის ზომებია: $AD = 20$ სმ, $AB = 10$ სმ, $AE = 15$ სმ. იპოვეთ:

ა) $\angle AFB$, $\angle BFO$, $\angle AFO$, $\angle BOF$, $\angle AOF$, $\angle OFC$ კუთხეების გრადუსული ზომები.

ბ) $\triangle ABO$, $\triangle BOF$, $\triangle AOF$ სამკუთხედების ფართობები.

გ) უმოკლესი მანძილი B წერტილიდან AOF სიბრტყემდე.



ამოცანები სიბრტყითი კვეთების შესახებ

ნამუშაუ. სურათზე a წიბოს მქონე კუბის ABCD კვეთაა ნაჩვენები. D და C წერტილები შესაბამისი წიბოების შუა წერტილებია. იპოვეთ სიბრტყითი კვეთის ფართობი. ამოხსნა:

მოცემულია: მოცემულია კუბი და მისი წიბოს a სიგრძე.

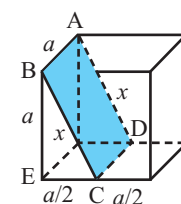
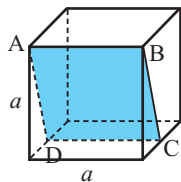
D და C წერტილები წიბოს შუა წერტილებია.

იპოვეთ: S_{ABCD}

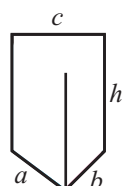
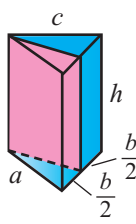
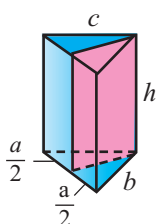
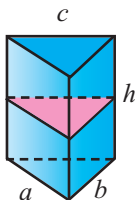
უფრო თვალნათლივ დანახვისათვის კუბი შევაბრუნოთ და ამოცანაში მოცემული ინფორმაცია სურათზე ავლნიშნოთ. $\triangle BEC$ -დან პითაგორას თეორემის თანახმად

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \quad x^2 = \frac{5}{4}a^2 \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{5}a$$

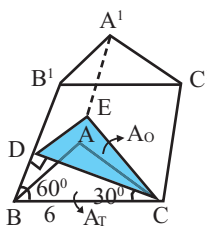
$$S_{ABCD} = ax = a\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}a\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5}a^2 \quad \text{პასუხი: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{5}a^2$$



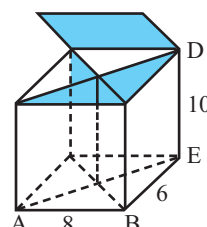
- 1.** მართ სამკუთხა პრიზმაში სურათზე მონაცემების მიხედვით შეადარეთ: ა) სიბრტყითი კვეთის ფართობები. ბ) სიბრტყითი კვეთით გამოყოფილი პრიზმების მოცულობები.



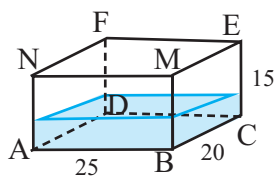
- 2.** დახრილი პრიზმის, რომლის ფუძეც წესიერი სამკუთხედია, გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პრიზმის მართობული კვეთის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ ფუძის გვერდები 6 სმ-ია.



- 3.** სასაჩუქრე ყუთი სურათზე ნაჩვენები წესით მუყაოთი 4 ნაწილადაა დაყოფილი. მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ ყუთის დამზადებისათვის საჭირო მუყაოს ოდენობა.



- 4.** მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის $15 \text{ სმ} \times 12 \text{ სმ} \times 25 \text{ სმ}$ ზომებიან ჭურჭელში წყლის სიმაღლე h_1 -ია. ჭურჭლის BCEM წახნაგზე გადატრიალებისას მისი სიმაღლე h_2 , ABMN წახნაგზე მობრუნებისას კი h_3 ხდება. განსაზღვრეთ რამდენი კუბური მეტრი წყალია ჭურჭელში, თუ $h_1 + h_2 + h_3 = 24$ სმ-ს.



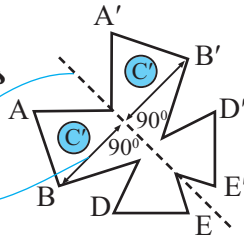
სიმეტრია სივრცეში

სიბრტყეზე სიმეტრია

ასახვითი (ღერძული) სიმეტრია

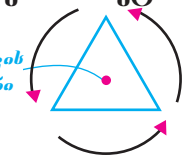
სიმეტრიის ღერძი

სიმეტრიის ღერძის წრფიდან მანძილის მანევრებული მართობი

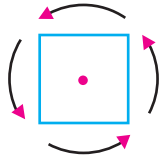


ბრუნვითი სიმეტრია

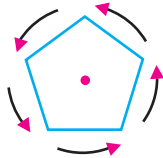
ბრუნვის ცენტრი



3 შემადგენელი



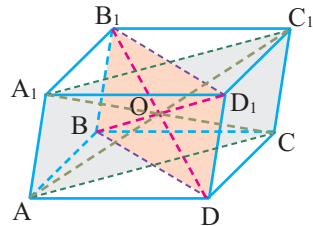
4 შემადგენელი



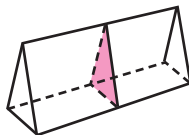
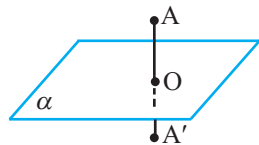
5 შემადგენელი



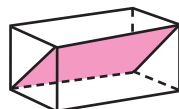
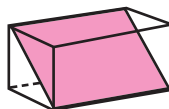
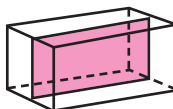
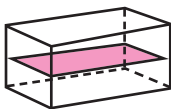
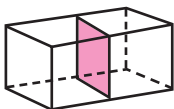
სიმეტრია სივრცეში. სხვადასხვა სივრცით სხეულებზე სხვადასხვა სიმეტრიების შემჩნევა შეიძლება. პარალელოპიპედის დიაგონალური კვეთები ვინაიდან პარალელოგრამები არიან გასაგებია, რომ BD_1 და DB_1 დიაგონალები ერთ O წერტილში იკვეთებიან და შუაზე იყოფიან. შეიძლება იმის ჩვენებაც, რომ სხვა დიაგონალებიც O წერტილში იკვეთებიან და შუაზე იყოფიან. მაშასადამე პარალელოპიპედების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მისი სიმეტრიის ცენტრია.



სივრცეში წერტილისა და წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდა განიხილება სიბრტყის მიმართ სიმეტრიაც. თუ α სიბრტყე AA' მონაკვეთის შუაზე გაივლის და მისი მართობულია, A და A' წერტილებს α სიბრტყის მიმართ სიმეტრიულ წერტილები ეწოდება. თუ ფიგურის წერტილების განსაზღვრული სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული წერტილებიც ამ ფიგურას ეკუთვნის, ამ სიბრტყეს ფიგურის სიმეტრიული სიბრტყე, ფიგურას კი სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ფიგურა ეწოდება.



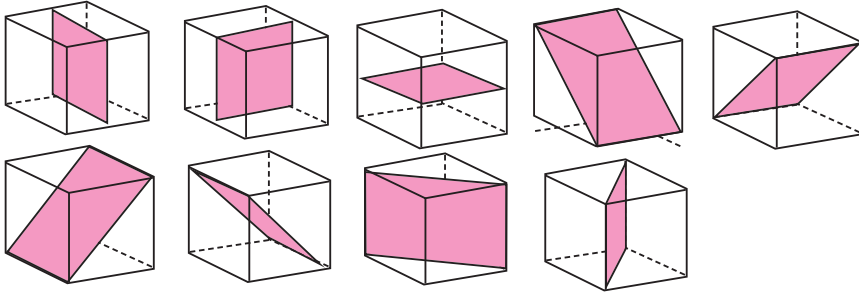
სხვადასხვა წრფივი ზომების მქონე მართკუთხა პარალელოპიპედს სიმეტრიის ცენტრის გარდა სამი სიმეტრიის ღერძი და სამი სიმეტრიული სიბრტყე გააჩნია. მოპირდაპირე წახნაგების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი წრფე მისი სიმეტრიის ღერძია. შუა წიბოზე გამავალი, მისი მართობული სიბრტყე სიმეტრიული სიბრტყეა. მართკუთხა პარალელოპიპედს, რომელსაც ორი წრფივი ზომა ტოლი აქვს 5 სიმეტრიის სიბრტყე გააჩნია. ეს გამოსახულებები რვეულში ჩაიხაზეთ.



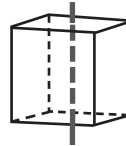
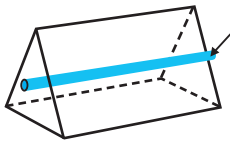
სიმეტრია სივრცეში

კუბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მისი სიმეტრიის ცენტრია. ერთ წახნაგზე არამდებარე პარალელური წიბოების შუა წერტილებზე გამავალი წრფეები (მათი რაოდენობა 6-ია) და მოპირდაპირე წახნაგების ცენტრებზე გამავალი წრფეები (მათი რაოდენობა 3-ია) კუბის სიმეტრიის ღერძებია.

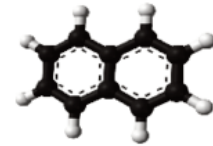
კუბს 9 სიმეტრიის სიბრტყე გააჩნია და ისინი სურათებზეა ნაჩვენები.



ბრუნვითი სიმეტრია. სივრცითი ფიგურების ბრუნვითი სიმეტრია სიბრტყითი ფიგურების მსგავსია. თუმცა სივრცითი ფიგურებში ბრუნვითი სიმეტრია ღერძის მიმართ განისაზღვრება.

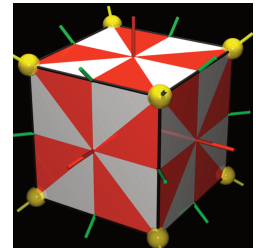


ნაფტალინი: $C_{10}H_8$

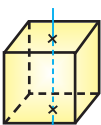


ბრუნვისა და ასახვის სიმეტრიები ფართოდ გამოიყენება ნივთიერებების მოლეკულური აგებულების შესწავლისას.

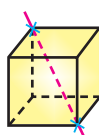
- სურათზე კუბის ბრუნვის ღერძებია ნაჩვენები. ეს ღერძები გეომეტრიულად სიტყვიერადაა მოცემული. კუბის სურათზე შესაძლო გამოსახულებები დახაზეთ და უჩვენეთ. თითოეული შემთხვევისათვის ერთი სურათი ნიმუშის სახითაა მოცემული.



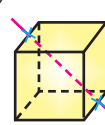
ა) სიმეტრიის (ბრუნვითი) ღერძი ორი მოპირდაპირე წახნაგის ცენტრებს აერთებს. თითოეულ შემთხვევაში 3 დამთხვევა აღინიშნება.



ბ) ბრუნვითი ღერძი კუბის დიაგონალის მომცავი წრფეა, თითოეულ შემთხვევაში 4 დამთხვევა აღინიშნება.

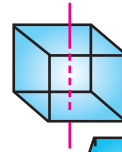


გ) ბრუნვითი ღერძი ორი მოპირდაპირე წიბოს შუა წერტილებზე გამავალი წრფეა. თითოეულ შემთხვევაში 2 დამთხვევა აღინიშნება.



სიმეტრია სივრცეში

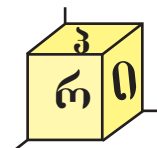
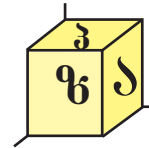
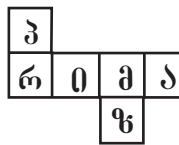
2. კუბი ორი მოპირდაპირე წახნაგის ცენტრებზე გამავალი ღერძის გარშემო რამდენჯერ მობრუნებით დაემთხვევა თავის თავს?



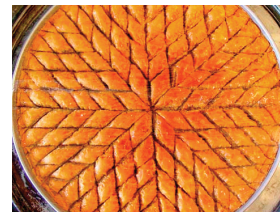
3. სურათზე მოცემული წესიერი ხუთკუთხა პრიზმა ფუძეების ცენტრებზე გამავალი ღერძის გარშემო რამდენი გრადუსით მობრუნებისას დაემთხვევა თავისთავს?



4. კუბს, რომლის წახნაგებზე ასოებია დაწერილი საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 270° -ით თუ შევატრიალებთ, რომელი მხრიდან (ზე-მოდან, წინიდან და გვერდიდან) რომელი ასო გამოჩნდება? განიხილეთ ყველა შემთხვევა.

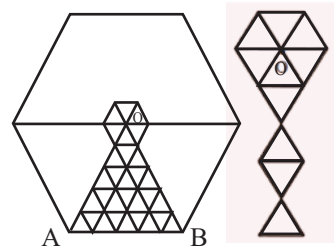


5. ჩვენ სიმეტრიითი ფიგურების ფართობის დაფარვა-პარკეტირების შესახებ დავალებები შევასრულებთ. ანალოგიურად სივრცითი ფიგურების მოცულობის შევსების, განსაზღვრული ფიგურის მიღების სავარჯიშოებს პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. ამ დროს ასახვა და ბრუნვითი სიმეტრიები გამოიყენება.



სურათზე ასახულია ფუძეში ტოლგვერდა სამკუთხედის მქონე მართი სამკუთხა პრიზმისაგან დამზადებული დეტალის ზედხედი. ამ დეტალებით კი ფუძის ცენტრის O წერტილში მქონე წესიერი ექვსკუთხა პრიზმა უნდა აიგოს. რამდენი ასეთი დეტალი იქნება საჭირო?

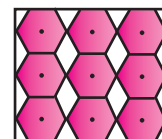
- 1) პრიზმის ფუძე 6 კონგრუენტული სამკუთხედისაგან შემდგარი წესიერი ექვსკუთხედი. თითოეული სამკუთხედი პრიზმებითაა შევსებული. როგორც ხედავთ ერთ სამკუთხედში $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ პრიზმაა მოთავსებული. ექვსკუთხა წესიერი პრიზმისათვის კი $6 \cdot 25 = 150$ ასეთი პრიზმაა საჭირო.



- 2) დახაზეთ ზედხედი იმ შემთხვევისათვის, როცა მცირე პრიზმების რაოდენობა 216-ია. გამოთვალეთ ყუთის მოცულობა, თუ ყუთის სიმაღლე იქნება 10 სმ, ყველაზე პატარა პრიზმების წიბო კი 0.5 სმ.



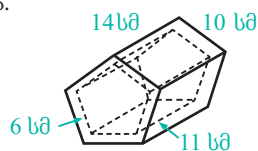
6. სურათზე 40 სმ სიმაღლის ყუთში ჩაწყობილი წესიერი ექვსკუთხა პრიზმების ზედხედი მოცემული. განსაზღვრეთ ყუთის ცარიელი ნაწილის მოცულობა, თუ წესიერი ექვსკუთხედის ფუძის გვერდი 4 სმ-ია.



განმაზოგადებელი დაგალებები

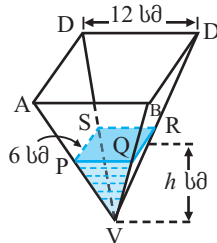
1. სურათზე მოცემული შეკრული ყუთი წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ფორმისაა. ყუთის გარე ფუძის გვერდი 10 სმ, სიმაღლე კი 14 სმ-ია. შიდა ფუძე და სიმაღლე კი შესაბამისად 6 სმ და 11 სმ-ია. იპოვეთ:

- ყუთის გარე ზედაპირის (სრული) ფართობი;
- ყუთის შიდა ზედაპირის (სრული) ფართობი;
- ყუთის მოცულობა.



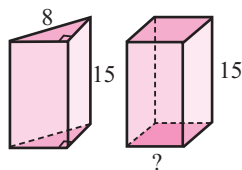
2. პირამიდის ფუძე კვადრატია და მასში 60 სმ^3 წყალი დგას. სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ:

- წყლის h სიმაღლე;
- რა ოდენობის წყლის დამატება არის საჭირო, რომ ჭურჭელი გაივსოს?



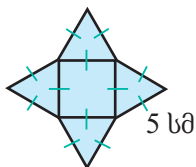
3. ორი მსგავსი პირამიდის ზედაპირის ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $\frac{1}{25}$ იპოვეთ ამ პირამიდების მოცულობების შეფარდება.

4. 15 სმ სიმაღლეების მქონე მართი სამკუთხა პრიზმისა და წესიერი ოთხკუთხა პრიზმების მოცულობები ტოლია. სამკუთხა პრიზმის ფუძე არის მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზაა 8 სმ იპოვეთ ოთხკუთხა პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი.

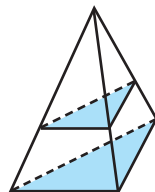


5. **ღია ტიპის შეკითხვა.** დახაზეთ ორი მსგავსი პრიზმა და ორი მსგავსი პარალელეპიპედი, რომელთა მსგავსების კოეფიციენტი 2:5. ზედ ზომები დააწერეთ.

6. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ პირამიდის მოცემულობა.

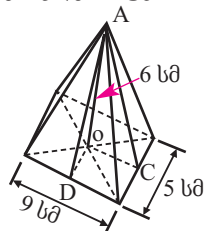


7. პირამიდა ფუძის პარალელური სიბრტყით ტოლმოცულობიან ორ ნაწილადაა გაყოფილი. იპოვეთ ზედა ნაწილში პირამიდის სიმაღლე, თუ პირამიდის სიმაღლე 12 სმ-ია.



8. 64 სმ^3 მოცულობიანი მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ყუთის დამზადებისას ზომების რომელი მთელი მნიშვნელობისათვის იქნება საჭირო ყველაზე ნაკლები მუყაო? გამოიკვლიეთ ვარიანტები.

9. სურათზე მოცემულია მართკუთხედის ფორმის ფუძის მქონე პირამიდა და მისი ზომები. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა და სრული ზედაპირის ფართობი.



ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხი
 მაჩვენებლიანი ფუნქცია
 მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნები
 მაჩვენებლიანი ფუნქცია. e რიცხვი
 რიცხვის ლოგარიტმი
 ლოგარიტმული ფუნქცია
 ლოგარიტმული სკალა და ამოცანების ამოხსნა
 ლოგარიტმის თვისებები
 მაჩვენებლიანი განტოლებები
 ლოგარიტმული განტოლებები
 მაჩვენებლიანი უტოლებები
 ლოგარიტმული უტოლებები

არქეოლოგიური გათხრების დროს ნარჩენების ასაკი შემაღვენ-
 ლობაში ნახშირბადის 14 ნივთიერების რაოდენობის გამოთვლით გან-
 ისაზღვრება. ამისათვის მაჩვენებლიანი განტოლებები იხსნება.



ქალაქ შამქორში ჩატარებული გათხრების დროს აღმოჩენილი უძველესი ქალაქი

ნამდვილმანკენებლიანი ხარისხი

პრაქტიკული მეცადინეობა

- 1) დაწერეთ $\sqrt{2}$ -ის კალკულატორით მოძებნილი მნიშვნელობა.
 $\sqrt{2} \approx 1,414213562...$
- 2) ააგეთ წევრები $\sqrt{2}$ -ის ნაკლებობით აღებული ათეულობით მიახლოებითი მნიშვნელობების მიმდევრობა:
 $1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; ...$
- 3) დაწერეთ 3-ის ამ მიმდევრობის ხარისხების მნიშვნელობების მიმდევრობა:
 $3^1; 3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; 3^{1,4142}; 3^{1,41421}; 3^{1,414213}; ...$
- 4) კალკულატორით გამოთვალეთ ამ მიმდევრობის რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის მიახლოებითი მნიშვნელობები.
 $3^1 = 3$
 $3^{1,4} \approx 4,6555367217$
 $3^{1,41} \approx 4,7069650017$
 $3^{1,414} \approx 4,7276950353$
 $3^{1,4142} \approx 4,7287339302$
 $3^{1,41421} \approx 4,7287858809$
 $3^{1,414213} \approx 4,728801462$
- 5) მიაქციეთ ყურადღება. ხარისხის მაჩვენებელი რაც უფრო $\sqrt{2}$ -თან ახლოსაა, შესაბამისი მნიშვნელობები ყოველ შემდგომ ნაბიჯზე წინამდებარე ნაბიჯისაგან უფრო ნაკლებად განსხვავდება და განსაზღვრულ ერთ რიცხვს უახლოვდება. ამ რიცხვს 3-ის $\sqrt{2}$ (ირაციონალური) მაჩვენებლიანი ხარისხი ეწოდება.
კალკულატორით გამოთვლა: $3^{\sqrt{2}} \approx 4,7288043878 ...$
- 6) შეასრულეთ დავალება $2^{\sqrt{3}}$ რიცხვისათვის.

მსგავსი წესით განიხილება a^α ირაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი. α ირაციონალური რიცხვის $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; ...$

ათობითი მიახლოებითი მნიშვნელობების შესაბამისად

$$a^{\alpha_1}; a^{\alpha_2}; a^{\alpha_3}; ...$$

მიმდევრობა აიგება და ამ მიმდევრობის წევრების მიახლოებული რიცხვი a^α -ით აღინიშნება. ირაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხიც რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის მსგავსად დადებითი ფუძისათვის განისაზღვრება.

ამრიგად, შემოდის ნებისმიერი x ნამდვილი რიცხვისათვის a^x (სადაც $a > 0$) ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხის ცნება.

ითვლება, რომ ნებისმიერი x -თვის $1^x = 1$ და როცა $x > 0$, მაშინ $0^x = 0$ რაციონალურ-მაჩვენებლიანი ხარისხის ცნობილი თვისებები ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხისათვისაც მართებულია.

ნებისმიერი x და y ნამდვილი რიცხვებისათვის და $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ რიცხვებისათვის მართებულია შემდეგი:

ხარისხის თვისებები:

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$ 3) $(a^x)^y = a^{xy}$ 4) $(ab)^x = a^x b^x$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
 6) როცა $a > 1$, $x > y$, მაშინ $a^x > a^y$, როცა $0 < a < 1$, $x > y$, მაშინ $a^x < a^y$
 7) როცა $a > b$, $x > 0$, მაშინ $a^x > b^x$, როცა $a > b$, $x < 0$, მაშინ $a^x < b^x$
 8) როცა $a^x = a^y$, მაშინ $x = y$

სასწავლო დავალებები

- 1.** ირაციონალურმანკვნილიანი ხარისხის მქონე გამოსახულებების მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად გამოიყენება კალკულატორი.

გრაფიკულკულატორზე  კლავიში ირაციონალურმანკვნილიანი ხარისხის გამოთვლის საშუალებას იძლევა.

გამოთვალეთ:

ა) $8^{\sqrt{3}}$; ბ) $5^{-\sqrt{11}}$; გ) $(\sqrt{10})^{\sqrt{2}}$; დ) 9^{π} ; ე) $15^{\sqrt{5}}$; ვ) $(\sqrt{7})^{\sqrt{3}}$

- 2.** დაწერეთ თითოეული წესის შესაბამისი თითო ნიმუში.

ა) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ბ) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ გ) $(a^x)^y = a^{xy}$
 დ) $(a \cdot b)^x = (ab)^x$ ე) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ ვ) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

- 3.** ა) გამოსახეთ 3-ის ხარისხით: $\frac{3^{2n} \cdot 3^{1+n}}{81^{n-1}}$
 ბ) გამოსახეთ 2-ის ხარისხით: $\frac{32 \cdot 8^x}{16^x}$
 გ) გამოსახეთ 5-ის ხარისხით: $\frac{25^x \cdot 5^{3x}}{125^{2+x}}$

- 4.** კალკულატორის დახმარებით იპოვეთ მოცემული გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობები. მიმდინარე შემდეგ დატოვეთ 5 ციფრი.

$2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$, $2^{1,4142}$, $2^{1,41421}$, $2^{1,414213}$

მოცემული გამოსახულებები რაციონალურმანკვნილიანი ხარისხებია. როგორ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ამ გამოსახულებებით $2^{\sqrt{2}}$ ირაციონალურმანკვნილიანი ხარისხის გამოსათვლელად?

- 5.** გაამარტივეთ და გამოთვალეთ მნიშვნელობა.

ა) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$; ბ) $(\sqrt{2}^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}}$; გ) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{3}+2} : 2^{2\sqrt{3}}$;
 დ) $3^{\sqrt{2}} \cdot 9^{\sqrt{2}+1} : 27^{\sqrt{2}}$; ე) $\sqrt[4]{2^{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot 4^{-\sqrt{3}}}$ ვ) $\sqrt[3]{5^{(\sqrt{2}+1)^2} \cdot 25^{-\sqrt{2}}}$
 ზ) $\sqrt[4]{3^{(\sqrt{7}+1)^2} \cdot 9^{\sqrt{7}}}$ თ) $\sqrt[5]{0,2^{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \cdot 25^{\sqrt{6}}}$ ი) $(2^{(2+\sqrt{2})^2} : 4^3)^{\sqrt{2}}$

6. შეადარეთ.

ა) $10^{\sqrt{5}}$ და $10^{\sqrt{3}}$

ბ) $0,1^{\sqrt{3}}$ და $0,1^{\sqrt{2}}$

გ) $(\frac{2}{3})^{-5}$ და $(\frac{2}{3})^{-3}$

დ) $(\sqrt{3})^{-4}$ და $(\sqrt{3})^{-2}$.

7. რომელია სწორი?

ა) $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$

ბ) $2 < 2^{\sqrt{3}} < 4$

ც) $1 < 5^{\sqrt{2}} < 5$

დ) $4^{\sqrt{2}} < 4^{\sqrt{3}} < 4^{\sqrt{5}}$.

8. მოცემული რიცხვები შეადარეთ 1-თან.

ა) $(\frac{3}{4})^{\frac{10}{3}}$

ბ) $(\frac{5}{7})^{-\frac{4}{3}}$

გ) $(\frac{2}{5})^0$

დ) $2^{-\sqrt{3}}$

9. დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით.

ა) 8^{200} ; 9^{150} ; 125^{100}

ბ) $(0,008)^{50}$; $(0,09)^{75}$; $(0,5)^{150}$

გ) $(\frac{9}{4})^{-0,1}$; $(\frac{9}{4})^{0,2}$; $(\frac{3}{2})^{\frac{1}{6}}$;

დ) $(\frac{4}{7})^{-\frac{2}{3}}$; $(\frac{49}{16})^{\frac{4}{3}}$; $(\frac{16}{49})^{\frac{1}{4}}$

10. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $100^{-\frac{1}{2}} \cdot (\frac{1}{5})^{-1}$

ბ) $(\frac{4}{25})^{\frac{1}{2}} : (\frac{9}{4})^{-\frac{1}{2}}$

ა) $(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}$

დ) $(8^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{9})^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{125^{\frac{2}{3}}})^{\frac{1}{2}}$

11. დაწერეთ რაციონალურმანკენებლიანი ხარისხის სახით და გაამარტივეთ, თუ ცნობილია, რომ ცვლადები დადებით მნიშვნელობებს იღებენ.

ა) $\sqrt{m^6 n^4}$

ბ) $\sqrt[3]{8x^3 y^6}$

გ) $\sqrt[5]{a^{10} b^2} \cdot \sqrt[5]{b^3}$

დ) $\sqrt{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}}$

12. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, თუ ცნობილია, რომ $b_2 = \sqrt[3]{3}$ და $b_3 = \sqrt[5]{81}$.

13. დაალაგეთ ზრდის რიგით მიხედვით: $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{-\sqrt{3}}$; $a^{-\sqrt{2}}$; a^0 ; a^{π}

ა) როცა $a > 1$

ბ) როცა $0 < a < 1$

14. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $x^{-\frac{3}{2}} = 8$

ბ) $6x^{\frac{2}{3}} + 12 = 36$

გ) $\frac{1}{5} \sqrt{x^3} = 5,4$

დ) $\sqrt[3]{x^2 + 2} + 1 = 4$

ე) $x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} - 3 = 0$

ვ) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 2$

ზ) $x^2 + 2 = 2\sqrt{x^2 + 5}$

თ) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = 2$

მაჩვენებლიანი ფუნქცია

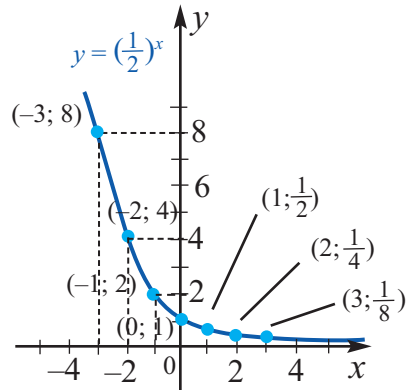
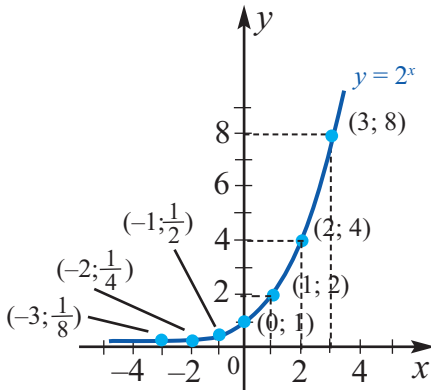
პრაქტიკული მეცადინეობა

1) $y = 2^x$ და $y = (\frac{1}{2})^x$ ფუნქციებისათვის შევადგინოთ მნიშვნელობათა ცხრილი.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2) საკოორდინატო სისტემაზე ავაგოთ წერტილები, რომელთა აბცისები არგუმენტის, ორდინატები კი ფუნქციის ცხრილში მოცემული მნიშვნელობების ტოლია და ამ წერტილებზე გავლით დახაზეთ გლუვი მრუდი.



3) ნებისმიერი x -ისათვის 2^x და $(\frac{1}{2})^x$ გამოსახულების მნიშვნელობები შეადარეთ “0”-ს

4) რაც უფრო იზრდება x -ის მნიშვნელობა, $y = 2^x$ ფუნქციის მნიშვნელობა იზრდება თუ მცირდება? რაც უფრო იზრდება x -ის მნიშვნელობა, $y = (\frac{1}{2})^x$ ფუნქციის მნიშვნელობა იზრდება თუ მცირდება?

5. რომელ წერტილში კვეთენ გრაფიკები y ღერძს?

6. შეადარეთ გრაფიკები. აღნიშნეთ მათი მსგავსი და განსხვავებული ნიშნები.

7. შეარჩიეთ დავალებები $y = 3^x$ და $y = (\frac{1}{3})^x$ ფუნქციებისათვის.

როცა $a > 0$ და $a \neq 1$, მაშინ $y = a^x$ ფუნქციას მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

1) მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არე ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

$$D(a^x) = (-\infty; +\infty)$$

2) მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

$$E(a^x) = (0; +\infty)$$

3) როცა $x = 0$, მაშინ $a^0 = 1$, ამიტომ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი y ღერძს $(0; 1)$ წერტილში კვეთს.

4) როცა $a > 1$, მაშინ a^x ფუნქცია ზრდადია, როცა $0 < a < 1$, მაშინ a^x ფუნქცია კლებადია.

5) მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი აბცისთა ღერძს არ კვეთს და გრაფიკი x ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს.

$y = a^x$ ფუნქციასა და მის გრაფიკს ექსპონენტა ეწოდება.

ექსპონენტა არგუმენტის ცვლილებით სწრაფად იზრდება ან სწრაფად მცირდება.

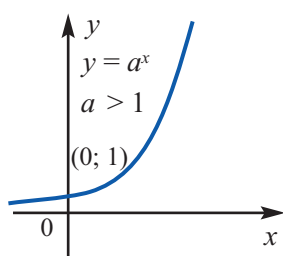
მანკენებლიანი ფუნქცია

6) $0 < a < 1$ როცა x -ის უსასრულოდ გაზრდისას y -ის შესაბამისი მნიშვნელობა მცირდება და $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკზე არსებული წერტილები შეუზღუდავად უახლოვდება აბცისთა ღერძს.

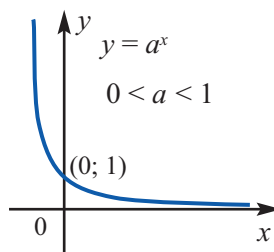
როცა $a > 1$ და $x \rightarrow -\infty$ გრაფიკზე მდებარე წერტილები შეუზღუდავად უახლოვდება აბცისთა ღერძს.

აბცისთა ღერძი მანკენებლიანი ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტაა.

ექსპონენციალურად ზრდადი და ექსპონენციალურად კლებადი ფუნქციები



ექსპონენციალურად ზრდადი



ექსპონენციალურად კლებადი

$y = c \cdot a^x$ ფუნქციასაც ექსპონენტა ეწოდება.

მაგალითად: $y = 8 \cdot 2^x$ ფუნქციის $y = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$ სახით ჩაწერა შესაძლებელია.

ნიმუში: ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ მისი განტოლება.

ამოხსნა: შევადგინოთ მნიშვნელობათა ცხრილი.

x	-2	-1	0	1
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$

როგორც მნიშვნელობათა ცხრილიდან ჩანს, x -ის მნიშვნელობის ერთი ერთეულით გაზრდისას, y -ის მნიშვნელობები $\frac{1}{3}$ -ის ჯერადობით მცირდება. მაშასადამე $a = \frac{1}{3}$ ფუნქციის ფორმულა: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

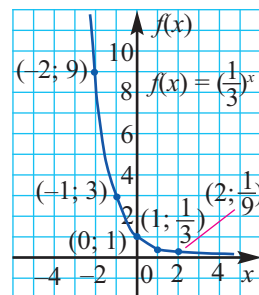
ნიმუში: ცვლადის რომელი მნიშვნელობისათვის არის მართებული

ა) $4^x = 64$ ტოლობა; ბ) $3^x > 9$; გ) $0,4^x > 0,16$ უტოლობა?

ამოხსნა: ა) $4^x = 64$ ტოლობა $4^x = 4^3$ ჩაწეროთ სახით. აქედან ნამდვილმანკენებლიანი ხარისხის თვისებების თანახმად $x = 3$.

ბ) $3^x > 9$ უტოლობა ჩაწეროთ $3^x > 3^2$ სახით. საიდანაც გასაგებია, რომ $x > 2$.

გ) $0,4^x > 0,16$ უტოლობა ჩაწეროთ $0,4^x > 0,4^2$ (ტოლფუძიანი ხარისხების) სახით, ვინაიდან ფუძე ერთეულზე ნაკლებია: $x < 2$.



მაჩვენებლური ფუნქცია

სასწავლო დაფალებები

1. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკები არანაკლებ სამი წერტილის კოორდინატების განსაზღვრით.

$$1) f(x) = 4^x \quad 2) g(x) = 6^x \quad 3) m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad 4) h(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$$

- ა) უჩვენეთ ფუნქცია ზრდადია თუ კლებადია;
 ბ) უჩვენეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე;
 გ) განსაზღვრეთ გრაფიკის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილი.

2. ზრდადია, თუ კლებადია ფუნქცია:

$$ა) y = 5^x; \quad ბ) y = 0,3^x; \quad გ) y = 5^{-x}; \quad დ) y = (\sqrt{2} - 1)^x; \quad ე) y = (\sqrt{5} - 1)^{-x}.$$

3. გამოთვალეთ ფუნქციის მოთხოვნილი მნიშვნელობები.

$$ა) f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad f(1), f(2), f(-1), f(-2) \quad ბ) n(x) = (\sqrt{5})^x \quad h(1), h(2), h(-1), h(-2)$$

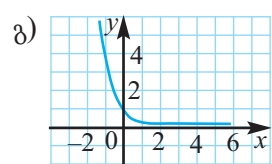
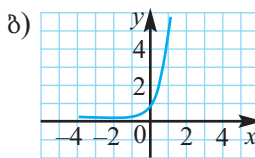
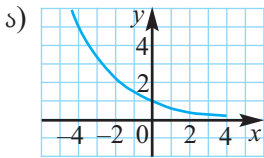
$$გ) g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x \quad g(0), g(2), g(\sqrt{2}), g(-1) \quad დ) m(x) = 2^{3x-1} \quad m(0), m(2), m(\sqrt{2}), m(-1)$$

4. რომელი გრაფიკი რომელი ფუნქციისაა?

$$1) y = 5^x$$

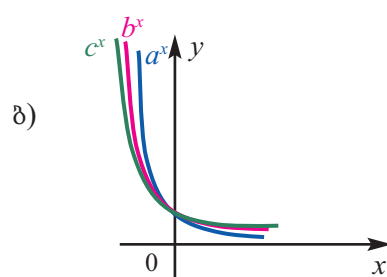
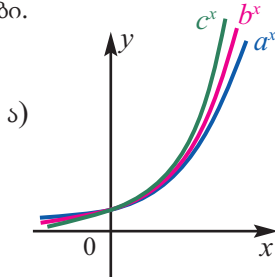
$$2) y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$3) y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$



5. $y = 0^x$ და $y = 1^x$ ფუნქციებს შეიძლება თუ არა ეწოდოს მაჩვენებლური ფუნქცია? მაშინ $y = (-1)^x$ ფუნქციას?

6. $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ ფუნქციების გრაფიკების მიხედვით შეადარეთ a , b და c რიცხვები.



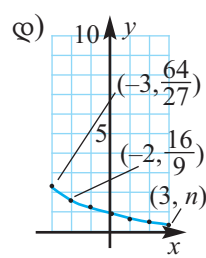
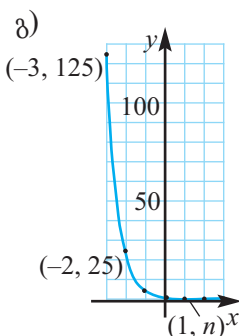
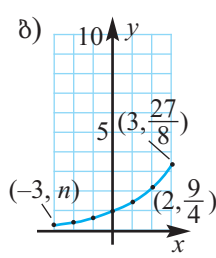
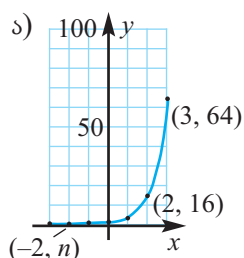
7. დაწერეთ $y = c \cdot a^x$ მაჩვენებლური ფუნქციის ფორმულა, რომლის გრაფიკი გადის მოცემულ წერტილებზე.

ა) (0; -2) და (-2; -32);
 გ) (0; 7) და (2; 63);
 ე) (0; 0,2) და (4; 51,2);

ბ) (0; 3) და (1; 15);
 დ) (0; -5) და (-3; -135);
 ვ) (0; -0,3) და (5; -9,6);

მანკენებლიანი ფუნქცია

8. 1) მოცემული გრაფიკების შესაბამისად დაწერეთ ფუნქციის ფორმულა $y = a^x$ სახით.
2) შეადგინეთ მნიშვნელობათა ცხრილი და გრაფიკი რვეულში ხელახლა ააგეთ.



9. $f(x) = 5^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $h(x) = 3^x$ ფუნქციებიდან რომლის მნიშვნელობა:

- ა) არის უდიდესი, როცა $x = 5$? ბ) არის უმცირესი, როცა $x = -5$?
გ) x -ის რა მნიშვნელობისათვის არის სამივე მათგანის მნიშვნელობა ტოლი?

10. შეადარეთ ქვემოთ მოცემულები, თუ $f(x) = 3 \cdot 2^x$, $g(x) = 0,3^x$.

- ა) $f(5)$ და $f(6)$; ბ) $f(0,1)$ და $f(0,5)$; გ) $f(-\sqrt{2})$ და $f(\sqrt{2})$;
დ) $g(5)$ და $g(6)$; ე) $g(0,1)$ და $g(0,5)$; ვ) $g(-\sqrt{2})$ და $g(\sqrt{2})$.

11. შეადარეთ:

- ა) $(\sqrt{2})^3$ და $(\sqrt{2})^6$; ბ) $0,1^3$ და $0,1^{\sqrt{8}}$; გ) $4^{-\sqrt{2}}$ და $4^{-\sqrt{3}}$.

12. ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის არის ტოლობა მართებული?

- ა) $3^{x+1} = 27$; ბ) $4^{x-2} = 64$; გ) $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2}$.

13. ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის არის უტოლობა მართებული?

- ა) $2^x > 32$; ბ) $3^x < 27$; გ) $0,2^x > 0,04$; დ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8}$

14. ამოხსენით განტოლებები გრაფიკული ხერხით.

- ა) $2^x = 3 - x$; ბ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 6$

15. განსაზღვრეთ განტოლების ფესვის ნიშანი გრაფიკული ხერხით.

- ა) $5^x = 6$; ბ) $0,2^x = 3$; გ) $4^x = \frac{1}{3}$; დ) $0,3^x = 0,1$.

16. ზეპირად იპოვეთ: $2^x = x^2$ განტოლების დამაკმაყოფილებელი ორი რიცხვი.
გრაფიკული ხერხით განსაზღვრეთ განტოლების ფესვების რაოდენობა.

17. ერთსა და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ $y = 2^x$ და $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქციების გრაფიკები და უჩვენეთ რომელი ღერძის მიმართ არიან გრაფიკები სიმეტრიული. შედეგები განაზოგადეთ.

მაჩვენებლიანი ფუნქცია

გამოყენებითი დავალებები

მარია კიური. რადიოაქტიური დაშლა ერთი ან რამდენიმე ნაწილაკის (მაგალითად, ელექტრონები, ნეიტრონები, ალფა - ნაწილაკები, ფოტონები) გამოყოფით აღინიშნება. ატომების დაყოფით სხვა ქიმიურ ნივთიერებად გარდაქმნის შედეგად რადიოაქტიური ნივთიერება გარკვეულ დროში საწყისი ოდენობის ნახევარს კარგავს. ეს დრო მოცემული რადიოაქტიური ნივთიერებისათვის მუდმივია და ნახევრადდაშლის პერიოდი ეწოდება. 1898 წელს მარია კიურიმ მაღალი რადიოაქტიურობის მქონე რადიუმისა და პოლონიუმის ნივთიერებები აღმოაჩინა და ამ აღმოჩენისათვის ნობელის პრემია მიიღო. რადიუმის ელემენტის იზოტოპის - რადიუმ 226-ის ნახევრადდაშლის დრო 1620 წელია. რადიუმ 226 ნახევრადდაშლისას რადონ 222 ნივთიერებად - რადიოაქტიურ გაზად გარდაიქმნება.



რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის კანონი: $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

m_0 - ნივთიერების საწყისი რაოდენობა,

T - ნივთიერების ნახევრადდაშლის პერიოდი,

m - ნივთიერების ოდენობა განხილვის t მომენტში,

სადაც t არის დრო, იღებს არაუარყოფით მნიშვნელობებს.

ნამუში. რადიუმი (Ra -225) ნივთიერების ნახევრადდაშლის ხანგრძლივობა 15 დღეა. დაშლის პროცესში მისი დანარჩენი მასის (გრამობით) დროზე (15 დღიანი ინტერვალთ) დამოკიდებულების მაჩვენებლიანი ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. ამ ფუნქციის გრაფიკი სურათზეა მოცემული.

ა) რამდენი გრამია Ra -225 ნივთიერების საწყისი მასა?

გრაფიკზე აღნიშნული წერტილების კოორდინატები სიტუაციების შესაბამისად განმარტეთ წერილობით.

ბ) იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე.

გ) დაწერეთ ნივთიერების მასის დროზე დამოკიდებულებით

ცვლილება მაჩვენებლიანი ფუნქციის სახით.

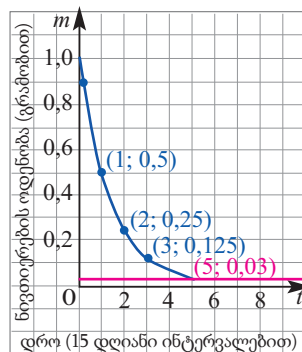
დ) ივარაუდეთ რა დროის განმავლობაში მოხდება Ra -225 ნივთიერების საწყისი მასის მის

$\frac{1}{30}$ -მდე შემცირება.

ამოხსნა: ა) როგორც სურათიდან ჩანს გრაფიკი, როცა $t = 0$, მაშინ y ღერძს $(0; 1)$ წერტილში კვეთს. მაშასადამე რადიოაქტიური ნივთიერების საწყისი მასა $m = 1$ გრ-ია.

ბ) როგორც გრაფიკიდან ჩანს, ფუნქციის განსაზღვრის არე ანუ t -ს დასაშვები მნიშვნელობები $t \geq 0$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ანუ m -ის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე $0 < m \leq 1$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

გ) რადიოაქტიური ნივთიერების ნახევარი 15 დღეში ერთხელ იშლება. მაშასადამე მაჩვენებლიანი ფუნქციის ფუძე არის $\frac{1}{2}$, მაჩვენებელი კი 15 დღეების რაოდენობის მაჩვენებელი t ცვლადი იქნება: $m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$



მარკენებლიანი ფუნქცია

დ) ამ ინფორმაციის გრაფიკის მიხედვითაც სავარაუდოდ გამოთქმა შეიძლება. მნიშვნელობათა ცხრილის შედგენაც შეიძლება. როცა საწყისი ნივთიერება 1 გრ-ია მისი $\frac{1}{30}$ ნაწილი დაახლოებით 0,033 გრ-ია. y ღერძზე ავლნიშნოთ ეს წერტილი და გავავლოთ ამ წერტილზე გამავალი გრაფიკის მკვეთი ჰორიზონტალური წრფე. წრფე გრაფიკს კვეთს წერტილში, რომლის აბცისაც მიახლოებით 5-ია. მაშასადამე $5 \cdot 15 = 75$ დღის შემდეგ საწყისი რადიოაქტიური ნივთიერების მასის დაახლოებით $\frac{1}{30}$ ნაწილი დარჩება.

1. საწყისი მასა 1 გრ-ის მქონე რადიუმ 226 რადიოაქტიური ნივთიერების დამლის კანონი $m(t) = (\frac{1}{2})^{t/1620}$ ფორმულითაა მოცემული, სადაც m არის რადიუმის მასა (გრამებით), t კი დრო (წლებით). რამდენი დარჩება მოცემული ნივთიერების მასიდან?

a) 1620 წლის შემდეგ; b) 3240 წლის შემდეგ; c) 4860 წლის შემდეგ.

2. ქვემოთ მოცემული სიტუაციებიდან თითოეულის მარკენებლიანი ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. რომელია ექსპონენციალურად ზრდადი ($a > 1$), რომელია ექსპონენციალურად კლებადი ($0 < a < 1$) სიტუაცია?

ა) ბაქტერიების გამრავლების პეტრის ჭურჭელში მათი რაოდენობა საათში 2-ჯერ იზრდება.

ბ) აქტინიუმ 225-ის იზოტოპის ნახევარდაშლის ხანგრძლივობა 10 დღეა.

გ) ტბაზე დაცემული სინათლის ოდენობა ყოველ 1 მ სიღრმეზე 25%-ით მცირდება.

დ) მწერების გუნდში მათი რაოდენობა დღეში 3-ჯერ იზრდება.

3. ბანკის ანგარიშზე არსებული თანხა ყოველწლიურად 2,5% შემოსავალს იძლევა. ამ ანგარიშზე არსებული თანხის n წელში $A = P(1+r)^n$ ფორმულით გამოთვლა შეიძლება. სადაც P არის წლიური თანხა. r - წლიური ნაზრდი (ათწილადობით). ანგარიშზე არსებული თანხა $A = P(1,025)^n$ წესით შეიცვლება.

ა) ანგარიშზე არსებული საწყისი თანხა ჩათვალეთ ერთ მანეთად და ააგეთ შესაბამისი მარკენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი.

ბ) გრაფიკის თანახმად ივარაუდეთ ეს თანხა რამდენი წლის შემდეგ იქნება საწყისი თანხის სამმაგი ოდენობის. ანგარიშზე არსებული თანხის სამმაგი ზრდის ხანგრძლივობა საწყისი თანხის ოდენობაზე არის დამოკიდებული?

გ) ფინანსებში წლიური რთული პროცენტის ზრდის მიხედვით საწყისი თანხის ორმაგის მიღწევის ხანგრძლივობას “72 ხერხით” გამოითვლიან. მაგალითად, 100 მანეთი ფული რამდენ წელიწადში 200 მანეთი გახდება რომ ვიპოვოთ, წლების რაოდენობის ზრდის პროცენტზე ნამრავლი 72-ის ტოლი უნდა იყოს, ანუ $n \cdot r = 72$ უნდა იყოს.

ამ წესისა და გრაფიკის მიხედვით ერთი მანეთი ფული 2,5%-ობით, იპოვეთ რამდენი წლის შემდეგ იქნება დაახლოებით 2 მანეთი და შედეგები შეადარეთ.

4. ააგეთ $y = 3x$, $y = x^3$ და $y = 3^x$ ფუნქციების გრაფიკები.

დაწერეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე და ნულები (თუ არსებობს). შეადარეთ ამ ფუნქციების მნიშვნელობები $x = 1; 2; 3; 4$ მნიშვნელობებისათვის. რომელი ფუნქციის მნიშვნელობები იცვლება უფრო სწრაფად?

მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნები

მაჩვენებლიანი ფუნქციის ზოგადი სახე $f(x) = l \cdot a^{x-m} + n$

$f(x) = a^x$ ფუნქცია მაჩვენებლიანი ფუნქციების ოჯახის ძირითადი ფუნქციაა. ამ ფუნქციის სხვადასხვა გარდაქმნების მიხედვით $f(x) = l \cdot a^x$, $f(x) = l \cdot a^{x-m}$, $f(x) = l \cdot a^{x-m} + n$ სახის მაჩვენებლიანი ფუნქციების გრაფიკის აგება შეიძლება.

- გრაფიკი $|l|$ ჯერ x ღერძიდან ჰორიზონტალურად იწელება.

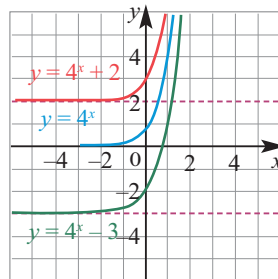
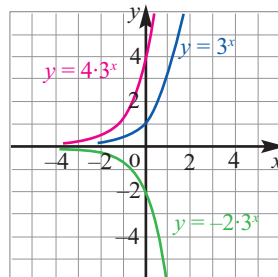
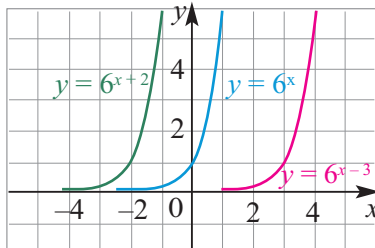
$$(x, y) \rightarrow (x, ly)$$

მაგალითად, $y = 3^x$ და $y = 4 \cdot 3^x$

- როცა $l < 0$, მაშინ x ღერძის მიმართ ხდება ასახვა.

მაგალითად, $y = 3^x$ და $y = -2 \cdot 3^x$

$f(x) = l \cdot a^{x-m} + n$ ფუნქციის გრაფიკი $y = l \cdot a^x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით აგება შეიძლება.



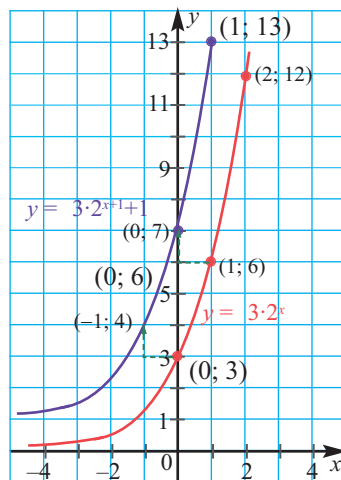
m ● მარჯვნივ ან მარცხნივ ჰორიზონტალური მოცურება

n ზევით ან ქვევით ვერტიკალური მოცურება

ნამუშა: $y = 3 \cdot 2^x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით ააგეთ $y = 3 \cdot 2^{x+1} + 1$ ფუნქციის გრაფიკი.

1. $y = 3 \cdot 2^x$ ფუნქციის შესაბამისი $(0; 3)$, $(1; 6)$; $(2; 12)$ წერტილები ავლნიშნოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და ეს წერტილები შევავროთთ გლუვი მრუდი წირის სახით. ფუნქციის ასიმპტოტი $y = 0$ წრფეა.

2. $y = 3 \cdot 2^x$ ფუნქციის გრაფიკის ერთი ერთეულით მარცხნივ ($3 \cdot 2^{x+1}$) და ერთი ერთეულით ზევით ($3 \cdot 2^{x+1} + 1$) პარალელური გადატანის შესაბამისად (მოცურების ვექტორი $\langle -1; 1 \rangle$) აღნიშნული წერტილებისათვის განვსაზღვროთ ახალი კოორდინატები და განვათავსოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. შევავროთთ ეს წერტილები გლუვი მრუდი წირით. მიიღება $y = 3 \cdot 2^{x+1} + 1$ ფუნქციის გრაფიკი.



$$(0; 3) \rightarrow (-1; 4) \quad (1; 6) \rightarrow (0; 7) \quad (2; 12) \rightarrow (1; 13)$$

$y = 1$ წრფე ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი იქნება.

მარგენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნები

სასწავლო დაფალებები

1. ა) ცხრილში $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სვეტის დამატებით ააგეთ გრაფიკი.
 ბ) განმარტეთ $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$ ფუნქციის $y = l \cdot a^{x-m} + n$ ფუნქციასთან პარამეტრებით დაკავშირებით თითოეულ ნაბიჯზე ცვლილების გრაფიკის მდგომარეობაზე გავლენა.

$y = 3^x$	$y = 2 \cdot 3^x$	$y = 2 \cdot 3^{x-4}$
$(-1; \frac{1}{3})$	$(-1; \frac{2}{3})$	$(3; \frac{2}{3})$
$(0; 1)$	$(0; 2)$	$(4; 2)$
$(1; 3)$	$(1; 6)$	$(5; 6)$
$(2; 9)$	$(2; 18)$	$(6; 18)$
$(3; 27)$	$(3; 54)$	$(7; 54)$

გ) $y = 3^x$ და $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$ ფუნქციებიდან თითოეულისათვის უჩვენეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

2. არანაკლებ სამი წერტილის კოორდინატების განსაზღვრით ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

ა) $y = 2 \cdot 3^x$

ბ) $y = 5 \cdot 2^x$

გ) $y = 0,5 \cdot 4^x$

დ) $y = 4 \cdot (\frac{1}{3})^x$

ე) $y = -(\frac{1}{5})^x$

ვ) $y = -2,5 \cdot 5^x$

3. $y = (\frac{1}{3})^x$ ფუნქციის გრაფიკი ვერტიკალური მიმართულებით ისეა მოცურებული, რომ მიღებული გრაფიკი $(2; \frac{1}{12})$ წერტილზე გადის. დაწერეთ მოცურებული გრაფიკის შესაბამისი ფუნქციის ფორმულა. ნიმუშის შესაბამისად დაწერეთ შესაბამისი პარალელური გადატანა.

ნიმუში: $f(x) = 3^x$ და $g(x) = 3^{x-4}$

რადგან $g(x) = f(x-4)$ ამიტომ $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის 4 ერთეულით მარჯვნივ მოცურებითაა მიღებული.

ა) $f(x) = 4^x$ და $g(x) = 4^{x+1}$

ბ) $f(x) = -2^x$ და $g(x) = 5 - 2^x$

გ) $f(x) = 10^x$ და $g(x) = 10^{-x+2}$

4. ააგეთ $y = 4^x$, $y = 4^{x+2}$, $y = 4^{x-3}$ ფუნქციების გრაფიკები. გამოთქვით მოსაზრებები ამ ფუნქციების განსაზღვრის არის, მნიშვნელობათა სიმრავლისა და ასიმპტოტების შესახებ.

5. $y = 10^x$ ფუნქცია შეიძლება ჩაიწეროს $y = (2 \cdot 5)^x$ სახით. ააგეთ ამ ფუნქციისა და $y = 2 \cdot 5^x$ ფუნქციის გრაფიკი. შეადარეთ ისინი.

6. დაწერეთ მოცემული ფუნქციები $y = l \cdot a^x$ სახით.

ა) $y = 4^{x+1}$

ბ) $y = 5 \cdot \sqrt{9^{x-1}}$

გ) $y = \sqrt{5 \cdot 2^{3x}}$

დ) $y = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 5^{2x}}$

7. ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები $f(x) = l \cdot a^x$ მარგენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით. თითოეული ფუნქციისათვის დაწერეთ პარალელური გადატანის ვექტორი.

ა) $y = 3 \cdot (\frac{1}{4})^{x-1}$

ბ) $y = \frac{1}{3} \cdot 3^{x+2}$

გ) $y = 2 \cdot 2^{x-2}$

დ) $y = -3 \cdot 3^{x+2} - 2$

ე) $y = 4 \cdot 2^{x-3} + 1$

ვ) $y = 4 \cdot 2^{x-3} - 4$

მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნები

8. განსაზღვრეთ რომელი გრაფიკი რომელ ფუნქციას შეესაბამება.

1) $y = 2 \cdot 5^x$

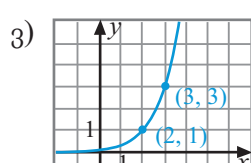
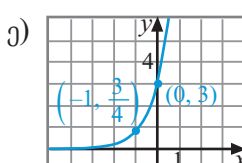
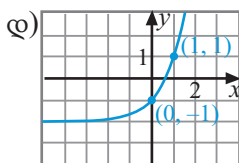
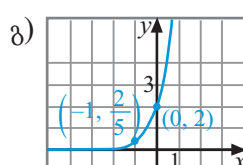
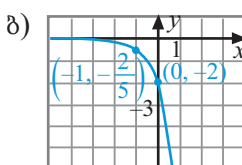
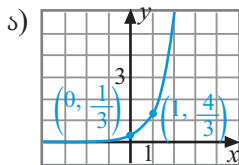
2) $y = 3 \cdot 4^x$

3) $y = -2 \cdot 5^x$

4) $y = \frac{1}{3} \cdot 4^x$

5) $y = 3^{x-2}$

6) $y = 3^x - 2$



9. განსაზღვრეთ ფუნქციის ექსპონენციალური ზრდადობა და კლებადობა.

ა) $y = 10 \cdot 3,5^x$

ბ) $y = 2 \cdot 4^x$

გ) $y = 0,4 \cdot (\frac{1}{3})^x$

დ) $y = 3 \cdot (\frac{5}{2})^x$

ე) $y = 30^{-x}$

ვ) $y = 0,2 \cdot 5^{-x}$

10. რეალურ ცხოვრებისეულ სიტუაციებში თუ სიდიდე წლის განმავლობაში მუდმივი სიდიდით იზრდება. t წლის შემდგომი მდგომარეობის რაოდენობრივი შეფასებისათვის $y = a(1+r)^t$ ფორმულა, კლებისას კი $y = a(1-r)^t$ ფორმულა გამოიყენება. სადაც a არის საწყისი რაოდენობა, r ზრდის (კლების) პროცენტი ათწილადობით, t - წლების რაოდენობა. ამოხსენით ამოცანები ამ ფორმულის მიხედვით.

ნიმუში. 24 000 მანეთად შეძენილი ავტომობილის ფასი ყოველწლიურად 12%-ით დაბლა იწევს. დაწერეთ ავტომობილის ფასის გამოყენების წლებზე (t) დამოკიდებულების მაჩვენებელი მაჩვენებლიანი ფუნქციის ფორმულა.

ამოხსნა: $y = a(1-r)^t$ ფორმულაში თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a = 24000$, $r = 12\% = 0,12$, $1-r = 0,88$ მოცემული სიტუაცია $y = 24000 \cdot (0,88)^t$ მაჩვენებლიანი ფუნქციით შეიძლება დავამოდელოთ.

ა) 1993 წელს ინტერნეტმომხმარებელთა რიცხვი 1 313 000 იყო და ხუთი წლის განმავლობაში მათი რაოდენობა ყოველწლიურად 100%-ით იზრდებოდა. დაწერეთ ინტერნეტმომხმარებლების t წლის შემდეგ რაოდენობის მაჩვენებელი მაჩვენებლიანი ფუნქცია. რამდენი იქნება მომხმარებელთა რაოდენობა 5 წლის შემდეგ? რამდენი იყო მომხმარებელთა რაოდენობა 2000 წელს?

ბ) საბანკო ანგარიშზე წლიური 8% რთული პროცენტით ზრდით შეტანილია 1000 მანეთი. რამდენი მანეთი იქნება 6 წლის შემდეგ?

გ) წარმოდგინეთ, რომ თქვენ 120 მგ კოფეინის შემცველი ყავა მიირთვით. მიღებული კოფეინის ოდენობა საათში 12%-ით მცირდება. ორგანიზმში დარჩენილი კოფეინის რაოდენობის მაჩვენებელი დაწერეთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის ფორმულის სახით.

11. უჩვენეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა) $y = 3^x + 2$;

ბ) $y = 2^x - 3$;

გ) $y = 8 \cdot 2^x + 2$;

დ) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$;

ე) $y = 3 \cdot 3^{x-1} + 3$;

ვ) $y = 4 \cdot (\frac{1}{2})^x - 1$.

მარვენებლიანი ფუნქცია. e რიცხვი

გამოკვლევა. e რიცხვი.

წარმოიდგინეთ, რომ 1 მანეთი ფული წლიური 100% რთული პროცენტის მატებით ბანკშია შეტანილი და წლის განმავლობაში n -ჯერ ხდება გამოთვლა. რთული პროცენტით ზრდის ფორმულაში $S_0 = 1$, $r = 100\% = 1$, $t = 1$ მნიშვნელობები ჩაწერეთ ადგილებზე.

$$S = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot 1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლით მიუთითეთ რომელ რიცხვს უახლოვდება $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ მნიშვნელობა.

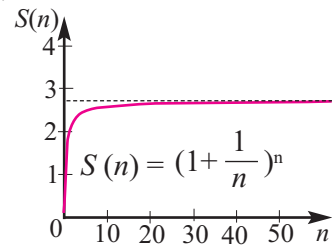
გამოთვლის პირობა	n	$S(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	
წლიური	1	$S(n) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$	2 ო
ნახევარწლიური	2	$S(n) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$	2,25
კვარტალური	4	$S(n) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$	2,4414
ყოველთვიური	12	$S(n) = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$	2,4883
დღიური	365	$S(n) = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$	2,7146
საათობრივი	8760	$S(n) = \left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760}$	2,7181

როგორც ხედავთ, თუ ბანკი მოცემული პროცენტით ფულს უფრო ხშირ-ხშირად გამოთვლის, შემოსავალი იზრდება. თუმცა ბანკის პროცენტით დღიური გამოთვლების ყოველთვიურ გამოთვლებთან შედარებით მიღებული მოგება სულ 10 კაპიკია. წარმოიდგინეთ, რომ ანგარიშზე არსებული ფული მოცემული პროცენტით ყოველი წამისათვის უწყვეტად შემოსავალი იანგარიშება. კვლავაც სხვაობა საათობრივი და დღიური გამოთვლებისაგან დიდად არ იქნება განსხვავებული.

$S(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ფუნქციის გრაფიკალურატორით

აგებული გრაფიკებიდან ჩანს, რომ როცა $n \rightarrow \infty$, $S(n)$

ფუნქციას ჰორიზონტალური ასიმპტოტი აქვს.



e რიცხვი

გამოკვლევებიდან ჩანს, რომ რაც უფრო იზრდება n -ის მნიშვნელობა, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ გამოსახულების მნიშვნელობა 2,71 და 2,72 შორის იცვლება. ეს რიცხვი e ასოთი აღინიშნება და მისი მნიშვნელობაა $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\dots$ e რიცხვიც π რიცხვივით ირაციონალური რიცხვია. ეს რიცხვები ტრანცენდენტული რიცხვებია. ტრანცენდენტული ეწოდება ისეთ რიცხვებს, რომელთა კოეფიციენტები მთელი რიცხვებია და არცერთი n ხარისხის განტოლების ფესვებს არ წარმოადგენენ.

ექსპონენციალური ზრდისა და კლების e ფუძის მიხედვით $N = N_0 e^{kt}$ ფორმულით გამოსახვა შეიძლება. სადაც N_0 - არის საწყისი თანხა, t - დრო, k - მუდმივი რიცხვია.

რიცხვის ლოგარიტმი

გამოკვლევა

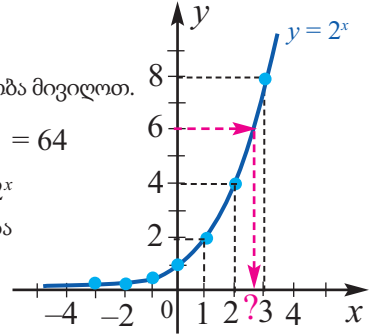
1) x -ის ადგილას ჩაწერეთ ისეთი რიცხვები, რომ სწორი ტოლობა მივიღოთ.

ა) $2^x = 16$

ბ) $3^x = 9$

გ) $4^x = 64$

2) არგუმენტის რა მნიშვნელობისათვის მიიღებს $y = 2^x$ ფუნქცია 6-ის ტოლ მნიშვნელობას? x -ის ეს მნიშვნელობა ერთადერთია?



3) რომელ ორ მიმდევრობით მოცემულ მთელ რიცხვს შორის არის x -ის მოცემული ტოლობის დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობა?

ა) $2^x = 24$

ბ) $3^x = 18$

გ) $4^x = 56$

ლოგარიტმი

ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავსხარისხოთოთ a , რომ მივიღოთ b , b რიცხვის a ფუძიანი ლოგარიტმი ეწოდება და $y = \log_a b$ სახით აღინიშნება, სადაც $a \neq 1$, a და b დადებითი ნამდვილი რიცხვებია.

$y = \log_a x$ ჩანაწერი $a^y = x$ ტოლობის ლოგარიტმული ჩანაწერია $y = \log_a x$ და პირიქით $a^y = x$ ჩანაწერი $y = \log_a x$ ტოლობის ექსპონენციალური ჩანაწერია.

ამრიგად $a^y = x$ და $y = \log_a x$, ჩანაწერები ეკვივალენტური ჩანაწერებია.

- $\log_a 1 = 0$, რადგან $a^0 = 1$
 - $\log_a a^y = y$, რადგან $a^y = a^y$
 - $a^{\log_a x} = x$, რადგან $\log_a x = \log_a x$
 - $\log_a a = 1$, რადგან $a^1 = a$.
 - $a^{\log_a x} = x$, რადგან $\log_a x = \log_a x$
- $a^{\log_a x} = x$ ტოლობას ძირითადი ლოგარიტმული იგივეობა ეწოდება.

ნიმუში 1. ლოგარიტმული ჩანაწერები შეცვალებით ექსპონენციალური ჩანაწერებით.

ა) $\log_2 16 = 4$

ბ) $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$

გ) $\log_8 1 = 0$

ამოხსნა: ლოგარიტმული ჩანაწერი:

ა) $\log_2 16 = 4$

ბ) $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$

გ) $\log_8 1 = 0$

ექსპონენციალური ჩანაწერი:

$2^4 = 16$

$10^{-3} = \frac{1}{1000}$

$8^0 = 1$

ნიმუში 2. იპოვეთ ლოგარიტმული გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\log_3 27$

ბ) $\log_a a$

გ) $\log_5 \sqrt[4]{5}$

ამოხსნა:

$\log_3 27 = x$ ავღნიშნოთ

$3^x = 27$ ექსპონენციალური ჩანაწერი

$3^x = 3^3$, $x = 3$ ხარისხის თვისების თანახმად

$\log_a a = x$

$a^x = a$

$x = 1$

$\log_5 \sqrt[4]{5} = x$

$5^x = \sqrt[4]{5}$

$x = \frac{1}{4}$

რიცხვის ლოგარიტმი

სასწავლო დაფალებები

1. შევვალეთ ტოლობები ეკვივალენტური ლოგარიტმული ჩანაწერებით.

$$\begin{array}{llll} \text{ა) } 3^x = 81 & \text{ბ) } 8^{1/3} = 2 & \text{გ) } 0,5^{-2} = 4 & \text{დ) } b^y = x \\ \text{ე) } e^x = y & \text{ვ) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9 & \text{ზ) } \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5} & \text{თ) } 8^{-2} = \frac{1}{64} \end{array}$$

2. შევვალეთ ტოლობები ეკვივალენტური ექსპონენციალური ჩანაწერებით.

$$\begin{array}{llll} \text{ა) } \log_5 625 = 4 & \text{ბ) } \log_{125} 25 = \frac{2}{3} & \text{გ) } \lg(0,0001) = -4 & \text{დ) } \log_{25}\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{2} \\ \text{ე) } \log_b 15 = x & \text{ვ) } \log_b 82 = y & \text{ზ) } \log_3 5 = x & \text{თ) } \log_2 7 = x \end{array}$$

ლოგარიტმები 10-ისა და e რიცხვის ფუძით შესაბამისად $\lg$ და $\ln$ სახით აღინიშნება. ლოგარიტმს, რომლის ფუძეა 10 ათობითი ლოგარიტმი, ხოლო რომლის ფუძეც არის e ნატურალური ლოგარიტმი ეწოდება. $\log_{10} 0,001 \Rightarrow \lg 0,001$ $\log_e c \Rightarrow \ln c$

ლოგარიტმის გამოთვლისათვის კალკულატორის გამოყენება შეიძლება. მაგალითად, <http://web2.0calc.com> ვირტუალური კალკულატორით შეგვიძლია ვისარგებლოთ.

3. გამოთვალეთ .

$$\text{ა) } \lg 0,001 \quad \text{ბ) } \lg(6,3 \cdot 10^5) \quad \text{გ) } \lg(0,00025) \quad \text{დ) } \ln(e^3) \quad \text{ე) } \ln(8)$$

4. კალკულატორის გამოყენებით იპოვეთ ლოგარიტმული გამოსახულების მნიშვნელობა.

$$\begin{array}{llll} \text{ა) } \log_7 49 & \text{ბ) } \log_3 27 & \text{გ) } \lg 0,1 & \text{დ) } \log_2\left(\frac{1}{16}\right) \\ \text{ე) } \log_{16} 4 & \text{ვ) } \log_8 2 & \text{ზ) } \log_{\frac{7}{2}} 1 & \text{თ) } \log_{0,5} 2 \\ \text{ი) } \log_3 3^5 & \text{კ) } \log_9 9^3 & \text{ლ) } \lg 10 & \text{მ) } \log_7 1 \end{array}$$

5. 1) მაგალითებზე განმარტეთ, რომ ლოგარიტმის ფუძე არ შეიძლება იყოს 0; 1 ან უარყოფითი რიცხვი.

2) აქვს თუ არა გამოსახულებას მნიშვნელობა?

$$\text{ა) } \log_{-3} 9; \quad \text{ბ) } \lg(-10); \quad \text{გ) } \log_1 3; \quad \text{დ) } \ln 7; \quad \text{ე) } \log_3 16.$$

6. a და b ადგილას ჩაწერეთ ისეთი მიმდევრობითი მთელი რიცხვები, რომ სწორი უტოლობა მივიღოთ.

$$\text{ა) } a < \log_2 48 < b \quad \text{ბ) } a < \log_3 100 < b \quad \text{გ) } a < \log_5 90 < b$$

7. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა ძირითადი ლოგარიტმული იგივეობის დახმარებით.

$$\begin{array}{llll} \text{ა) } 2^{\log_2 8} & \text{ბ) } 10^{\lg 2}; & \text{გ) } 3^{1 + \log_3 2}; & \text{დ) } 10^{2 - \lg 4}; \\ \text{ე) } 2^{3 \log_2 5}; & \text{ვ) } 5^{2 \log_5 3}; & \text{ზ) } 4^{\log_2 3}; & \text{თ) } 16^{\log_4 7}; \end{array}$$

8. გამოთვალეთ.

$$\text{ა) } (1 + 3^{\log_3 5})^{\log_6 2}; \quad \text{ბ) } 49^{\frac{1}{2} \log_7 3}; \quad \text{გ) } (7 - 5^{\log_5 3})^{1 + \log_2 3}.$$

9. ტოლობიდან იპოვეთ ცვლადი.

$$\text{ა) } \log_2 x = -1 \quad \text{ბ) } \log_{\frac{1}{4}} x = -2 \quad \text{გ) } \log_x 25 = 2 \quad \text{დ) } \log_x \frac{1}{4} = -2$$

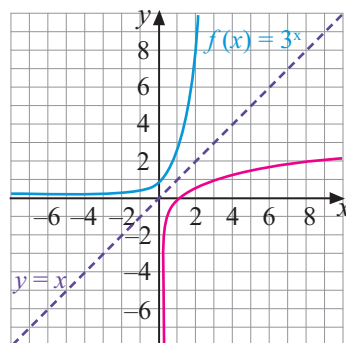
10. სტატისტიკური მაჩვენებლების თანახმად, მსოფლიოს მოსახლეობა 1995 წლიდან დაწყებული წელიწადში 1,27%-ით იზრდება. 2011 წელს მსოფლიოს მოსახლეობა 7 მლრდ კაცი გახდა. ამ ზრდით დაახლოებით რამდენი კაცი იქნება მოსახლეობა 2020 წელს?

ლოგარითმული ფუნქცია

გამოკვლევა. ააგეთ $f(x) = 3^x$ და მისი შექცეული $f^{-1}(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი და გრაფიკები რვეულეზში. დაწერეთ მოსაზრებები ფუნქციისა და შექცეული ფუნქციის შესახებ.

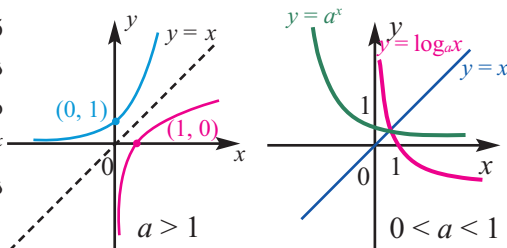
$f(x) = 3^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

$f^{-1}(x)$	
x	y
$\frac{1}{27}$	-3
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2
27	3



ლოგარითმული ფუნქცია

$y = a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არიდან თითოეულ მნიშვნელობას განსაზღვრის არიდან აღებული მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა შეესაბამება. ამრიგად, $y = a^x$ ფუნქციას შექცეული ფუნქცია გააჩნია და ეს ფუნქცია $x = \log_a y$ ფუნქციაა.



მაშასადამე, თუ $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკს $y = x$ წრფის მიმართ სიმეტრიულად გარდავექმნით, მივიღებთ, $y = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკს.

1) ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არე დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა:

$$D(\log_a x) = (0; +\infty)$$

2) ლოგარითმული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეა:

$$E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$$

3) ლოგარითმული ფუნქცია როცა $a > 1$ ზრდადია, როცა $0 < a < 1$, მაშინ კლებადაა.

4) $y = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი აბცისთა ღერძს გადაკვეთს $(1; 0)$ წერტილში.

როცა $a > 1$ ნიმუშად მოცემულია $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log_5 x$

ფუნქციების გრაფიკები. ააგეთ გრაფიკები რვეულში.

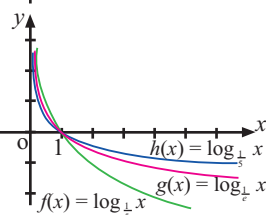
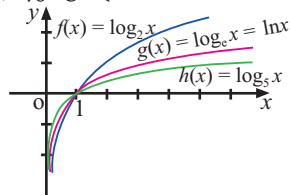
როცა $a > 1$, თუ $0 < x < 1$, მაშინ ლოგარითმული ფუნქცია უარყოფით, ხოლო თუ $x > 1$, მაშინ დადებით მნიშვნელობას იღებს.

როცა $0 < a < 1$ ნიმუშად $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$,

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ ფუნქციების გრაფიკები მოცემული.

როცა $0 < a < 1$, თუ $0 < x < 1$ ლოგარითმული ფუნქცია დადებით,

როცა $x > 1$, უარყოფით მნიშვნელობებს იღებს.



ლოგარითმული ფუნქცია

სასწავლო დაფალებები

1. a -ს მოცემული მნიშვნელობებისათვის ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში ააგეთ $y = a^x$ და $y = \log_a x$ ფუნქციების გრაფიკები.

ა) $a = 2$ ბ) $a = 3$ გ) $a = 4$ დ) $a = \frac{1}{2}$ ე) $a = \frac{1}{3}$

2. $y = \log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკისაგან რომელი სიმეტრიული გარდაქმნით შეიძლება $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ფუნქციის გრაფიკის მიღება? ააგეთ გრაფიკები ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში.

3. დაწერეთ მოცემული ფუნქციის შეცვლული ფუნქციის ფორმულა. ააგეთ მოცემული ფუნქციისა და შეცვლული ფუნქციების გრაფიკები. შეცვლული ფუნქციისათვის განსაზღვრეთ:

- განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე;
- ასიმპტოტის განტოლება;
- საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.

ა) $y = 5^x$ ბ) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

4. $y = \log_3 (x + 9) + 2$ ფუნქციის გრაფიკი $\log_3 x$ ფუნქციის გრაფიკის $\langle -9; 2 \rangle$ ვექტორით შესრულებული პარალელური გადატანისას მიიღება. რომელი ფუნქციის გრაფიკისა და როგორი მოცულების შედეგად შეიძლება მიღებული იქნას მოცემული ფუნქციის გრაფიკი?

ა) $y = \log_2 x + 3$ ბ) $y = \log_2 (x + 3)$ გ) $y = \log_3 (x - 3) - 4$

5. ზრდადია თუ კლებადია ფუნქცია? ა) $y = \log_5 x$ ბ) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

6. შეადარეთ:

ა) $\log_2 5$ და $\log_2 7$ ბ) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ და $\log_{\frac{1}{2}} 3$ გ) $\log_2 3$ და $\log_5 4$

7. $(\frac{1}{8}; -3)$ წერტილი $f(x) = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს. $(4; k)$ წერტილი კი ამ ფუნქციის $f^{-1}(x)$ შეცვლული ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს. იპოვეთ k -ს მნიშვნელობა.

8. განსაზღვრეთ რიცხვის ნიშანი: ა) $\log_5 2$; ბ) $\log_{0,2} \sqrt{3}$; გ) $\log_3 0,2$; დ) $\log_{0,4} 0,6$

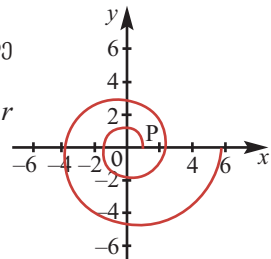
9. ლოგარითმული სპირალისათვის $P(1; 0)$ წერტილში ყოფნით P წერტილის საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით φ კუთხით რადიანებში მობრუნებით მიიღება. ამ დროს P წერტილის კოორდინატთა სათავიდან r მანძილი $r = e^{0,14\varphi}$ ფორმულით განისაზღვრება.



ა) იპოვეთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან P წერტილამდე 2π მობრუნებისას. დაამრგვალეთ პასუხი მესამე მანძილამდე.

ბ) ლოგარითმული ჩანაწერით გამოსახეთ დამოკიდებულება r და φ შორის.

გ) იპოვეთ φ -ის მნიშვნელობა, როცა $r = 12$.

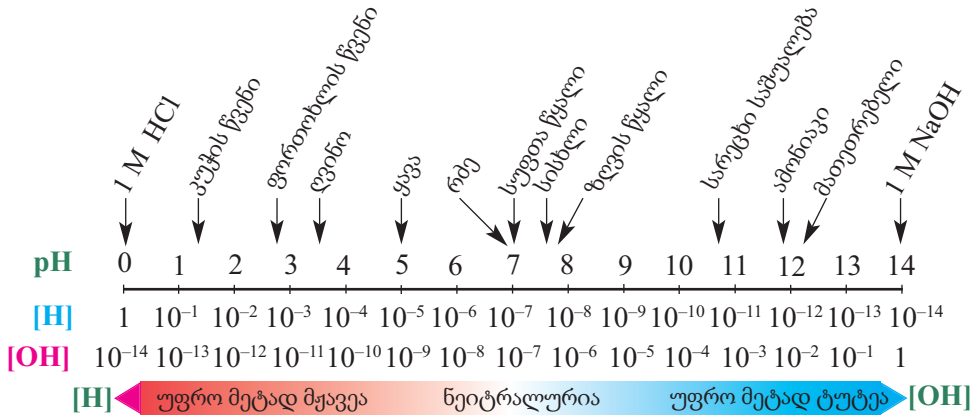


ლოგარიტმული სკალა და ამოცანების ამოხსნა

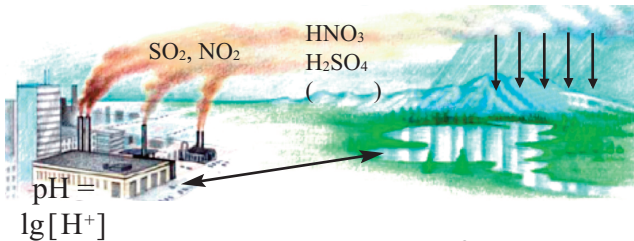
1. **ქიმია - ეკოლოგია.** pH (წყალბადის იონების აქტიურობა) ხსნარის 1 ლიტრში წყალბადის იონების (H_3O^+) ოდენობას მოლით გვიჩვენებს. pH სკალაზე pH-ის მნიშვნელობა 0-დან 14-მდე იცვლება. pH-ის 7-ის ტოლი მნიშვნელობისათვის ხსნარი ნეიტრალურად ითვლება. 7-ზე ნაკლები მნიშვნელობებისათვის ხსნარი მჟავაა, როცა 7-ზე მეტია, მაშინ მისი ტუტეობა მაღალია. ხსნარში pH-ის გამოთვლისათვის გამოიყენება

$$pH = -\lg[H^+]$$

ფორმულა, სადაც H^+ ხსნარის 1 ლიტრში წყალბადის იონების კონცენტრაციას უჩვენებს. ამ ფორმულის თანახმად, თუ ხსნარში pH მაჩვენებელი 1 ერთეულით გაიზრდება, მაშასადამე ხსნარში წყალბადის იონების კონცენტრაცია 10-ჯერ გაიზრდება.



ა) ნორმალური წვიმის წყალში pH 5,6-ის ტოლია. თუმცა ეკოლოგიური თვალსაზრისით დაბინძურებულ უმრავლეს ადგილებში მაღალმჟავიანი წვიმები მოდის. წვიმის წყალში გამოთვალეთ pH მაჩვენებელი, თუ წყალბადის იონების კონცენტრაცია $0,0002 \frac{\text{მოლ}}{\text{ლ}}$ იქნება.



ბ) განსაზღვრეთ pH მაჩვენებელი 5,6 მქონე წყლის $[H^+]$ კონცენტრაცია.

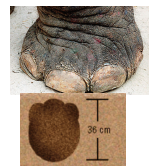
2. **ფიზიკა. ხმოვანი ტალღები.** ხმის სიმძლავრე დეციბალებში იზომება და $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ ფორმულით გამოითვლება, სადაც I ხმის ინტენსივობაა (ვატ/მ^2), I_0 ადამიანის ყურის სმენის უნარის ყველაზე დაბალი ხმის ინტენსივობაა (10^{-12}ვატ/მ^2 არის მიღებული). ადამიანის ყურს ძალიან ვრცელი დიაპაზონით ხმის მოსმენა შეუძლია. ეს 0 დეციბალიდან (ხმაურის არ არსებობა) 180 დეციბალამდე მერყეობს.

ა) რადიოში არსებული მუსიკის ხმის ინტენსივობა ადამიანის ყურის მოსმენის შესაძლებელი მინიმალური ხმის ინტენსივობაზე 4000 ჯერ მეტია. რამდენი დეციბალია მუსიკის ხმის ძალა?

ბ) თაჭირი ამბობს, რომ ხმა, რომლის ინტენსივობაც არის $4 \cdot 10^{-8} \text{ვატ/მ}^2$ ორჯერ ძლიერია ხმაზე, რომლის ინტენსივობაც არის $2 \cdot 10^{-8} \text{ვატ/მ}^2$. თქვენ როგორ ფიქრობთ?

ლოგარიტმული სკალა და ამოცანების ამოხსნა

- 3. მიწისძვრა.** 1935-წელს ამერიკელმა სეისმოლოგმა- ჩარლზ რიხტერმა მიწისძვრის სიმძლავრის გამოთვლისათვის $M = \lg \frac{A}{A_0}$ ფორმულა განსაზღვრა და მიწისძვრის სიმძლავრის მაჩვენებელი (რიხტერის სკალად წოდებული) ლოგარიტმული სკალა შექმნა.
- M - არის მიწისძვრის სიმძლავრე (ბალეზში), A სეისმოგრაფის მომხდარი მიწისძვრის აღნიშნული სეისმური ბიძგების მაქსიმალური ამპლიტუდაა (მიკრონობით) A_0 კი სეისმოგრაფის მიერ დაფიქსირებული ყველაზე სუსტი მიწისძვრის შესაბამისი (ამას ნულოვანი მიწისძვრაც" ეწოდება) სეისმური ტალღის ამპლიტუდაა (1 მიკრონი (10^{-6} მ) არის მიღებული).
- $M = \lg \frac{A}{A_0}$ ფორმულის $A = A_0 10^M$ სახით დაწერაც შეიძლება. მაშასადამე, რიხტერის სკალით 4 ბალიანი მიწისძვრის სეისმური ტალღების ამპლიტუდა 3 ბალიან მიწისძვრაზე 10-ჯერ მეტია.
- ა) მომხდარი მიწისძვრის ამპლიტუდის (A) მაქსიმალური მნიშვნელობა, A_0 მნიშვნელობაზე $10^{7,1}$ ჯერ მეტი იყო. რამდენბალიანი სიმძლავრის მიწისძვრა მოხდა?
- ბ) 4,7 ბალიანი მიწისძვრისას სეისმური ტალღების ამპლიტუდა რამდენჯერ აღემატება 4 ბალის სიმძლავრის მიწისძვრის ამპლიტუდას?
- გ) 1906 წელს სან-ფრანცისკოში მოხდა რიხტერის სკალით 8,3 ბალის სიმძლავრის მიწისძვრა. იმავე წელს კოლუმბია - ეკვადორის საზღვარზე მომხდარი მიწისძვრის ამპლიტუდაა ამ მიწისძვრის ამპლიტუდაზე 4-ჯერ მეტი აღმოჩნდა. რიხტერის სკალით რამდენბალიანი იყო კოლუმბია-ეკვადორის საზღვარზე მომხდარი მიწისძვრა?
- დ) 1976 წლის 28 ივლისს ჩინეთში მომხდარი მიწისძვრის სიმძლავრე 8,5 ბალი იყო და 240000 ადამიანი იმსხვერპლა. 1990 წელს ირანში მომხდარმა 7,4 ბალიანმა მიწისძვრამ 50 000 ადამიანი იმსხვერპლა. შეადარეთ ამ ორი მიწისძვრის ამპლიტუდები.
- 4.** ოთახში თითოეული ჯგუფი $1,4 \times 10^{-7}$ ვატ/მ² -მა ინტენსივობით პიროვნებების 3 ჯგუფი ერთმანეთთან საუბრობს. რამდენ დეციბალს შეადგენს ამ ჯგუფებისაგან წარმოქმნილი ხმა?
- 5.** წარმოიდგინეთ, რომ ბანკის ანგარიშზე არსებული საწყისი 1000 მანეთი ექსპონენციალურად იცვლება. ეს თანხა 7 წლის განმავლობაში ორჯერ გაიზარდა. t წელიწადში ანგარიშზე არსებული თანხის $A(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{t}{7}}$ ფორმულით გამოთვლა შეიძლება. სადაც t წლების რაოდენობას, $A(t)$ კი ანგარიშზე არსებულ თანხას გვიჩვენებს.
- ა) რამდენი მანეთი იქნება ანგარიშზე 5 წლის შემდეგ? 10 წლის შემდეგ?
- ბ) გამოთვალეთ $A(0)$ და $A(8)$ მნიშვნელობები და განმარტეთ რეალური სიტუაციის შესაბამისად.
- 6. ბიოლოგია.** ბიოლოგებს სპილოს ფეხის ნაკვალევის ზომის (l) მიხედვით შეუძლიათ ივარაუდონ მათი ასაკი (a). ამისათვის ისინი $l = 45 - 25,7e^{-0,09a}$ ფორმულით სარგებლობენ.
- გამოთვალეთ სპილოს ასაკი, თუ მისი ფეხის ნაკვალევია 28 სმ; 36 სმ.



ლოგარიტმის თვისებები

გამოკვლევა. 1) უჩვენეთ, რომ $\lg(1000 \cdot 100) \neq (\lg 1000) \cdot (\lg 100)$.

2) გამოთვალეთ. შედეგები შეადარეთ.

ა) $\log_2 4 + \log_2 8$ და $\log_2 32$

ბ) $\log_3 3 + \log_3 27$ და $\log_3 81$

გ) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{2}} 8$ და $\log_{\frac{1}{2}} 2$

მოსაზრებები $\log_a b + \log_a c$ -სათვის არსებული წესის გამოყენებით განაზოგადეთ. b და c დადებითი ნამდვილი რიცხვებია.

3) გამოთვალეთ. შედეგები შეადარეთ.

ა) $\log_2 64 - \log_2 2$ და $\log_2 32$

ბ) $\log_3 27 - \log_3 9$ და $\log_3 3$

გ) $\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ და $\log_{\frac{1}{2}} 16$

მოსაზრებები $\log_a b - \log_a c$ -სათვის არსებული წესის გამოყენებით განაზოგადეთ. b და c დადებითი ნამდვილი რიცხვებია.

4) გამოთვალეთ. შედეგები შეადარეთ.

ა) $3 \cdot \log_2 4$ და $\log_2 64$

ბ) $2 \cdot \log_3 \frac{1}{9}$ და $\log_3 \frac{1}{81}$

გ) $2 \cdot \lg 100$ და $\lg 10000$

მოსაზრებები $b \cdot \log_a c$ -სათვის არსებული წესის გამოყენებით განაზოგადეთ. b და c დადებითი ნამდვილი რიცხვებია.

5) რვეულში სიტყვიერად ჩაწერეთ ხარისხის თვისებები. თითოეული განმარტეთ ორი ნიმუშის ჩაწერით.

• ხარისხების გამრავლება: $c^x \cdot c^y = c^{x+y}$

• ხარისხების გაყოფა: $\frac{c^x}{c^y} = c^{x-y}, c \neq 0$

• ხარისხების ახარისხება: $(c^x)^y = c^{xy}$

ლოგარიტმის თვისებები

1. ნამრავლის ლოგარიტმი: $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$

ორი დადებითი რიცხვის ნამრავლის ლოგარიტმი მამრავლების ლოგარიტმების ჯამის ტოლია. სადაც $c \neq 1$ და $c > 0$, x და y დადებითი ნამდვილი რიცხვებია.

2. განაყოფის ლოგარიტმი: $\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$

ორი დადებითი რიცხვის განაყოფის ლოგარიტმი მათი ლოგარიტმების სხვაობის ტოლია. სადაც $c \neq 1$ და $c > 0$, x და y დადებითი ნამდვილი რიცხვებია.

3. ხარისხის ლოგარიტმი: $\log_c x^y = y \cdot \log_c x$

რიცხვის ხარისხის ლოგარიტმი ხარისხის მაჩვენებლისა და ამ რიცხვის ლოგარიტმის ნამრავლის ტოლია. სადაც $c \neq 1$ და $c > 0$, x და y დადებითი ნამდვილი რიცხვებია.

ლოგარიტმის თვისებები

თვისება 1. $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$

1-ლი თვისების დამტკიცება:

$\log_c x = m$ და $\log_c y = n$ სახით ავღნიშნოთ.

$$x = c^m \text{ და } y = c^n$$

ექსპონენციალური ჩანაწერით

$$xy = (c^m) \cdot (c^n)$$

x და y რიცხვების ნამრავლი

$$xy = c^{m+n}$$

ხარისხების ნამრავლების თვისება

$$\log_c xy = m + n$$

ლოგარიტმული ჩანაწერით

$$\log_c xy = \log_c x + \log_c y$$

m -ისა და n -ის მნიშვნელობების გათვალისწინებით

თვისება 2. $\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$

მე-2 თვისების დამტკიცება:

$\log_c x = m$ და $\log_c y = n$ სახით ავღნიშნოთ.

$$x = c^m \text{ და } y = c^n$$

ექსპონენციალური ჩანაწერით

$$\frac{x}{y} = \frac{c^m}{c^n}$$

x და y რიცხვების შეფარდება

$$\frac{x}{y} = c^{m-n}$$

ხარისხების შეფასებების თვისება

$$\log_c \frac{x}{y} = m - n$$

ლოგარიტმული ჩანაწერით

$$\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$$

m -ისა და n -ის მნიშვნელობების გათვალისწინებით

თვისება 3. $\log_c x^y = y \cdot \log_c x$

მე-3 თვისების დამტკიცება:

$\log_c x = m$ სახით ავღნიშნოთ.

$$x = c^m$$

ექსპონენციალური ჩანაწერით

$$x^y = (c^m)^y$$

ტოლობის თვისება

$$x^y = c^{my}$$

ხარისხის ახარისხება

$$\log_c x^y = my$$

ლოგარიტმული ჩანაწერით

$$\log_c x^y = (\log_c x) \cdot y$$

m -ის მნიშვნელობის გათვალისწინებით

$$\log_c x^y = y \cdot \log_c x$$

გამრავლების გადანაცვლებადობის კანონი

სასწავლო დაფალებები

1. ლოგარიტმის თვისებების გამოყენებით გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\log_2 (64 \cdot 32)$

ბ) $\log_3 \frac{0, (3)}{81}$

გ) $\log_5 (125 \cdot 625)$

დ) $\log_6 3 + \log_6 12$

ე) $\lg 2 + \lg 5$

ვ) $\log_{0,5} 6,4 + \log_{0,5} 10$

ზ) $\log_2 48 - \log_2 3$

თ) $\log_{\frac{1}{3}} 18 - \log_{\frac{1}{3}} 2$

ი) $\lg 0,25 - \lg 25$

ლოგარითმის თვისებები

$$\begin{array}{llll} \text{კ) } \log_2 \sqrt[4]{8} & \text{ლ) } \log_3 (9 \cdot 27) & \text{მ) } \lg \sqrt{10^3} & \text{ნ) } \log_{0,5} \sqrt[4]{8} \\ \text{ო) } \frac{\log_5 8}{\log_5 32} & \text{პ) } \frac{\log_3 125}{\log_3 25} & \text{ჟ) } \frac{\log_7 6}{\log_7 2 + \log_7 18} & \text{რ) } \frac{\lg 2 + \lg 5}{\lg 13 - \lg 130} \end{array}$$

- 2.** ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით ჩაწერეთ გამოსახულება x , y და z რიცხვების ლოგარითმებით.

ნამუშაო 1. $\log_4 xy\sqrt{z} = \log_4 x + \log_4 y + \log_4 (z)^{\frac{1}{2}} = \log_4 x + \log_4 y + \frac{1}{2} \log_4 z$

$$\begin{array}{llll} \text{ა) } \log_6 \frac{x}{y} & \text{ბ) } \log_5 \sqrt{xy} & \text{გ) } \log_3 \frac{9}{\sqrt{x^2}} & \text{დ) } \log_7 \frac{x^5 y}{\sqrt{z}} \\ \text{ე) } \log_7 xy\sqrt[3]{z} & \text{ვ) } \log_5 (xyz)^8 & \text{ზ) } \log_3 \frac{x^2}{y\sqrt[3]{z}} & \text{თ) } \log_3 x \sqrt{\frac{y}{z}} \end{array}$$

- 3.** ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით ჩაწერეთ გამოსახულებები რაიმე რიცხვის ლოგარითმის $(\log_a N)$ სახით.

ნამუშაო 2.

$$\log_5 6 + \log_5 10 - \log_5 2 = \log_5 \frac{6 \cdot 10}{2} = \log_5 30$$

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } \log_2 3 + \log_2 5 & \text{ბ) } \log_3 16 - \log_3 2 & \text{გ) } 3 \cdot \log_5 4 \\ \text{დ) } 2 \lg 3 - 3 \lg 2 & \text{ე) } \lg 216 - \lg 36 & \text{ვ) } \lg 16 + \lg 4 \\ \text{ზ) } 5 \log_3 2 + 2 \log_3 5 & \text{თ) } \lg 12 - 2 \lg 2 + \lg 3 & \text{ი) } 3 \log_2 3 + 2 \log_2 5 - \log_2 6 \end{array}$$

- 4.** ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით ჩაწერეთ ერთი ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ, თუ ცნობილია, რომ ცვლადები იღებენ დადებით მნიშვნელობებს.

ნამუშაო 3. $5 + \log_2 x = \log_2 2^5 + \log_2 x = \log_2 32 + \log_2 x = \log_2 32x$

$$\begin{array}{ll} \text{ა) } \log_x x + \log_x 10 & \text{ბ) } \log_2 a + \log_2 b \\ \text{გ) } \log_2 x - 5 \log_2 y & \text{დ) } \frac{1}{2} \log_3 x + 3 \log_3 y \\ \text{ე) } \frac{1}{2} \lg x + 3 \lg y & \text{ვ) } \frac{2}{3} \log_5 x + 4 \log_5 y - 3 \log_5 z \\ \text{ზ) } 3 \log_3 x^3 - (\log_3 x^2 + 5 \log_3 x) & \text{თ) } \log_7 x^2 + \log_7 x - 5 \log_7 x \\ \text{ი) } \ln x + 2 \ln y - 2 \ln z & \text{კ) } \frac{1}{2} \log_3 x^{10} - \frac{2}{5} \log_3 x^5 \end{array}$$

- 5.** გაამარტივეთ ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობებში.

$$\text{ა) } \log_2 (x^2 - 9) - \log_2 (2x - 6) \quad \text{ბ) } \log_5 (x - 1) - \log_5 (x^2 + 2x - 3)$$

- 6.** გამოსახეთ a და b საშუალებით თუ ცნობილია, რომ $\log_5 2 = a$ და $\log_5 3 = b$.

$$\text{ა) } \log_5 6; \quad \text{ბ) } \log_5 12; \quad \text{გ) } \log_5 15; \quad \text{დ) } \log_5 30.$$

ლოგარიტმის თვისებები

7. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\lg \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{b}}{c}$, თუ $\lg a = 3$, $\lg b = 12$, $\lg c = 8$.
8. 1) იპოვეთ:
 ა) 3^k გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $k = \log_2 40 - \log_2 5$;
 ბ) 7^n გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $n = 3 \log_8 4$.
 2) გაამარტივეთ: ა) $e^{\ln 10x^3 - \ln 2x}$ ბ) $3^{2 \log_3 x - \log_3 2x}$
9. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა იმის გათვალისწინებით, რომ $\lg 5 \approx 0,699$ და $\lg 15 \approx 1,176$.
 ა) $\lg 3$ ბ) $\lg 75$ გ) $\lg 12$ დ) $\lg 45$

ერთი ფუძიდან მეორე ფუძეზე გადასვლა

ძირითადი ლოგარიტმული იგივეობისა და ხარისხის ლოგარიტმის თვისების თანახმად

$$\log_c b = \log_c (a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log_c a$$

$$\text{აქედან: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{კერძოდ, როდესაც } c = b, \text{ მაშინ } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

უმრავლეს კალკულატორში მხოლოდ ათობითი ($\lg$) და ნატურალური ლოგარიტმების ($\ln$) გამოთვლებისათვის არსებობს კლავიშები. ამ მიზეზით ლოგარიტმების უფრო მეტად ათობითი და ნატურალური ლოგარიტმის სახით ჩაწერის აუცილებლობა წარმოიშობა.

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

მაგალითი 1. ჩაწერეთ და გამოთვალეთ: ა) ათობითი ლოგარიტმით ბ) ნატურალური ლოგარიტმით.

$$\log_3 7 = \frac{\lg 7}{\lg 3} \approx \frac{0,845}{0,477} \approx 1,771 \quad \log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx \frac{1,946}{1,099} \approx 1,771$$

10. გამოთვალეთ ათობით ან ნატურალურ ლოგარიტმებზე დაყვანით.

$$\begin{array}{ccccc} \log_5 7 & \log_7 12 & \log_3 16 & \log_9 25 & \log_6 24 \\ \log_2 5 & \log_5 9 & \log_3 17 & \log_5 32 & \log_4 19 \end{array}$$

11. 1) ერთი ფუძიდან მეორე ფუძეზე გადასვლის ფორმულით უჩვენეთ, რომ:

$$\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$$

2) გამოთვალეთ.

$$\text{ა) } \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} \quad \text{ბ) } \log_{\sqrt{3}} 9^{-1} \quad \text{გ) } \log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4 \quad \text{დ) } \log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$$

$$\text{ე) } \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \quad \text{ვ) } \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8$$

$$\text{ზ) } \frac{1}{\log_{12} 6} + \frac{1}{\log_3 6} \quad \text{თ) } \frac{1}{\log_{36} 3} - \frac{2}{\log_{54} 3}$$

მაჩვენებლიანი განტოლებები

მაჩვენებლიანი განტოლებები

მაჩვენებლიანი ფუნქციების თვისება. $a \neq 1$ და $a > 0$ პირობით $a^x = a^y$ ტოლობა მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ არის მართებული, როცა $x = y$.

ამ თვისების თანახმად მივიღებთ:

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ მაჩვენებლიანი განტოლება $f(x) = g(x)$ განტოლების ტოლფასია.

2) $a^x = c$ განტოლებას, როცა $c > 0$, თუ დავწერთ $a^x = a^{\log_a c}$ სახით, მივიღებთ $x = \log_a c$. მოცემული მაჩვენებლიანი განტოლებები განსაზღვრული ხერხებით მარტივ მაჩვენებლიან განტოლებებზე დაიყვანება და ამოიხსნება.

1. ხარისხის თვისებების გამოყენება

ნიმუში 1. $4^{2x} = 8^{2x-1}$

მოცემული განტოლება

$$(2^2)^{2x} = (2^3)^{2x-1}$$

ერთსა და იმავე ფუძეზე დაიყვანება

$$2^{4x} = 2^{6x-3}$$

ხარისხის ახარისხების თვისება

$$4x = 6x - 3$$

ტოლფას განტოლებაზე დაიყვანება

$$2x = 3; \quad x = 1,5$$

განტოლების ამონახსენი

შეშოვნება: $4^{2 \cdot 1,5} = 8^{2 \cdot 1,5 - 1}$

$$4^3 = 8^2; \quad 64 = 64$$

ნიმუში 2. $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 45$

მოცემული განტოლება

$$2 \cdot 3^x \cdot 3 - 3^x = 45$$

ხარისხის თვისება

$$3^x(6 - 1) = 45$$

საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა

$$3^x = 9$$

გამარტივება

$$x = 2$$

განტოლების ამონახსენი

2. როცა ფუძეები სხვადასხვაა განტოლებების ამოხსნა შეიძლება ორივე მხარის ხარისხობრივი მაჩვენებლიდან ერთ-ერთზე გაყოფით ან განტოლების ორივე მხარის ერთი და იგივე ფუძით გალოგარიტმების გზით.

ნიმუში 3.

$$3^{2x} = 5^x$$

განტოლება

$$(3^2)^x = 5^x,$$

$$9^x = 5^x$$

სახით ჩაწეროთ,

ორივე მხარე გავყოთ 5^x -ზე:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^x = 1$$

აქედან

$$x = 0$$

ნიმუში 4.

$$2^{x-1} = 3^x$$

მოცემული განტოლება

$$\lg 2^{x-1} = \lg 3^x$$

ორივე მხარე ლოგარიტმდება ათის ფუძით

$$(x-1) \cdot \lg 2 = x \lg 3$$

ლოგარიტმის თვისება

$$x \cdot \lg 2 - \lg 2 = x \lg 3$$

გამრავლების განრიგებადობის თვისება

$$x \cdot \lg 2 - x \cdot \lg 3 = \lg 2$$

მსგავსი წევრების დაჯგუფება

$$x(\lg 2 - \lg 3) = \lg 2$$

საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$$

განტოლების ამონახსენი

$$x \approx -1,7095$$

განტოლების მიახლოებითი ფესვი

მაჩვენებლანი განტოლებები

3. ახალი ცვლადის შემოტანით

ნიმუში 5. $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$ მოცემული განტოლება

შემოწმება:

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3 - 27 = 0$$

$$9^2 - 2 \cdot 3^{2+1} - 27 = 0$$

$$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0 \quad \text{ხარისხის თვისება}$$

$$81 - 54 - 27 = 0$$

$$3^x = y \quad \text{შემოიტანება ახალი ცვლადი}$$

$$0 = 0$$

$$y^2 - 6y - 27 = 0 \quad \text{დაიყვანება კვადრატულ განტოლებაზე}$$

$$(y - 9)(y + 3) = 0 \quad \text{კვადრატული განტოლების ამოხსნა}$$

$$y = 9; y = -3$$

$$3^x = 9 \quad 3^x = -3 \quad \text{გაითვალისწინება ჩანაცვლება}$$

$$x = 2 \quad \emptyset$$

$$\text{პასუხი: } x = 2$$

როცა განტოლებაში შემავალი ხარისხების მაჩვენებელი ერთი და იგივეა, ფუძეები გეომეტრიული პროგრესიის მიმდევრობითი წევრებია, ორივე მხარის ერთ-ერთ ნაპირა წევრზე გაყოფის შემდეგ ახალი ცვლადი შემოიტანება.

ნიმუში 6. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x = 0$ ორივე მხარე გავყოთ 4^x -ზე

$$3 + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$$

$$3 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = y \quad \text{ჩანაცვლება ხდება}$$

$$2y^2 - 5y + 3 = 0 \quad \text{დაიყვანება კვადრატულ განტოლებაზე}$$

$$y = 1 \quad y = \frac{3}{2} \quad \text{კვადრატული განტოლების ამოხსნა}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \quad \text{გაითვალისწინება ჩანაცვლება}$$

$$x = 0 \quad x = 1 \quad \text{განტოლების ამონახსენი}$$

სასწავლო დაფალებები

1. ამოხსენით ხარისხის თვისებების გამოყენებით.

ა) $25^x = 125$

ბ) $9^{x+1} = 27$

გ) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8$

დ) $5^{x^2-2x-1} = 25$

ე) $0,5^{x^2} \cdot 2^{x-4} = 8^{-2}$

ვ) $3^{2x} \cdot 2^x = 324$

ზ) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 45$

თ) $4^{x+2} + 4^{x+1} = 320$

ი) $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 69$

2. ამოხსენით განტოლებები.

1) $4^{3x} = 8^{x-3}$

2) $27^x = 9^{x-2}$

3) $125^{2x-1} = 25^{x+4}$

4) $16^{2x-3} = 32^{x+3}$

5) $2^{4x} = 4^{x+3}$

6) $3^{x+1} = 9^{x-1}$

7) $25^{x-1} = 5^{3x}$

8) $36^{3x-1} = 6^{2x+5}$

9) $3^{x-2} = 27$

10) $2^{3x+5} = 128$

11) $5^{x-3} = \frac{1}{25}$

12) $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

13) $36^{2x} = 216^{x-1}$

14) $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$

15) $49^x = 7^{x^2-15}$

16) $81 \cdot 9^{-2x-2} \cdot 9^x = 27$

17) $9^{-3x} \cdot 9^x = 27$

18) $16^x \cdot 64^{3-3x} = 64$

მარჯვენა განტოლებები

3. ამოხსენით ახალი ცვლადის შემოტანით.

ა) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

ბ) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

გ) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$

დ) $4^x - 4^{2-x} = 15$

ე) $3^x + 3^{3-x} = 12$

ვ) $4^x - 7 \cdot 2^x + 12 = 0$

4. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $7^{x-3} = 4^{3-x}$

ბ) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$

გ) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 4^{x-0,5}$

5. ამოხსენით ორივე მხარის ხარისხებიდან ერთ-ერთზე გაყოფით.

ა) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

ბ) $4 \cdot 9^x + 12^x - 3 \cdot 16^x = 0$

გ) $2 \cdot 27^x = 3 \cdot 12^x + 18^x$

6. ამოხსენით განტოლება.

ა) $125^x = 5 \cdot 5^3 \cdot 5^5 \cdot \dots \cdot 5^{17}$

ბ) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot \dots \cdot 2^{2x} = 0,25^{-10}$

7. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $2^{x+3} = 4^{3x-5}$

ბ) $9^{4x-1} = 27^{3x+5}$

გ) $4^{3x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$

დ) $2^x = 7$

ე) $10^{x-4} + 4 = 11$

ვ) $10^x + 10^{x+1} = 11$

8. ამოხსენით განტოლებები.

1) $10^{x-3} = 100^{4x-5}$

2) $25^{x-1} = 125^{4x}$

3) $3^{x-7} = 27^{2x}$

4) $36^{x-9} = 6^{2x}$

5) $8^{5x} = 16^{3x+4}$

6) $e^{-x} = 6$

7) $2^x = 15$

8) $1,2e^{-5x} + 2,6 = 3$

9) $4^x - 5 = 3$

10) $5e^{-x} + 9 = 6$

11) $10^{2x} + 3 = 8$

12) $0,25^x - 0,5 = 2$

13) $\frac{1}{4} \cdot 4^{2x} + 1 = 5$

14) $\frac{2}{3} \cdot e^{4x} + \frac{1}{3} = 4$

15) $10^{-12x} + 6 = 100$

9. ნივთიერების გაციების დროის ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულების ნიუტონის ფორმულა $T = (T_0 - T_r)e^{-rt} + T_r$ სახისაა. სადაც T ნივთიერების შემოწმების მომენტში, T_0 კი საწყის მომენტში არსებული ტემპერატურა, T_r გარემოს ტემპერატურა (ოთახის ტემპერატურა), r გაციების სიჩქარეს (დროის ერთეულში ტემპერატურის ცვლილება), t დროს გვიჩვენებს.

80° C ტემპერატურაზე მყოფი ჩაი 22° C ტემპერატურაზე ოთახში 10 წუთის შემდეგ 60° C გახდა.

ა) ნივთიერების გაციების ნიუტონის ფორმულის მიხედვით იპოვეთ r კოეფიციენტი.

ბ) რამდენი წუთის შემდეგ იქნება ჩაის ტემპერატურა 35° C ?

10. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $9 \sin^2 x - 27 \cos x = 0$

ბ) $2^{\sin x} - 2^{\cos x} + 1 = 0$

გ) $|x - 4|^{\frac{x^2 - 11x + 28}{x - 3}} = 1$

დ) $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$

ლოგარიტმული განტოლებები

ლოგარიტმული ფუნქციის თვისება

როცა $a > 0, a \neq 1, x > 0$ და $y > 0$, ტოლობა $\log_a x = \log_a y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მართებული თუ $x = y$.

1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ განტოლება, იმ პირობით რომ $f(x) > 0$ და $g(x) > 0$ არის $f(x) = g(x)$ განტოლების ტოლფასი. $f(x) = g(x)$ განტოლების ამოხსნის შემდეგ მოძებნილი ფესვები მოწმდება, აკმაყოფილებენ თუ არა $f(x) > 0$ და $g(x) > 0$ პირობას.

2) $\log_a f(x) = c$ განტოლების ეკვივალენტური ექსპონენციალური ჩანაწერით შეცვლით მივიღებთ: $f(x) = a^c$.

ლოგარიტმული განტოლებები განსაზღვრული ხერხებით მარტივ ლოგარიტმულ განტოლებებზე დაიყვანება და იხსნება.

1) განტოლებები, რომლებიც ლოგარიტმის თვისებების გამოყენებით მარტივ ლოგარიტმულ განტოლებაზე დაიყვანება.

ნამუშაო. $\log_3 x = 2 - \log_3 2$

$$\log_3 x + \log_3 2 = 2$$

$$\log_3 (2x) = 2$$

$$2x = 3^2$$

$$x = 4,5$$

მოცემული განტოლება

ორივე მხარეს მივმატება $\log_3 2$

ლოგარიტმის თვისების თანახმად

ეკვივალენტური ექსპონენციალური ჩანაწერი

განტოლების ამონახსენი

2) განტოლებების ამოხსნა ახალი ცვლადის შემოტანით.

ნამუშაო. $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$

$$\log_5 x = a$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a - 2)(a + 1) = 0$$

$$a = 2 \quad a = -1$$

$$\log_5 x = 2 \quad \log_5 x = -1$$

$$x = 5^2 \quad x = 5^{-1}$$

$$x = 25 \quad x = \frac{1}{5}$$

მოცემული განტოლება

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

დაიყვანება კვადრატულ განტოლებაზე

კვადრატული განტოლების ამოხსნა

ჩანაცვლების გათვალისწინებით

3) განტოლებების ამოხსნა ერთსა და იმავე ფუძეზე დაყვანით.

ნამუშაო. $\log_4 x + \log_2 x = 6$

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2 x = 6$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 6$$

$$\frac{3}{2} \log_2 x = 6$$

$$\log_2 x = 4$$

$$x = 2^4$$

$$x = 16$$

მოცემული განტოლება

ლოგარიტმები ერთსა და იმავე ფუძეზე დაიყვანება

მსგავსი წევრების შეერთება

ექსპონენციალური ჩანაწერი

განტოლების ამონახსენი

ლოგარიტმული განტოლებები

განვიხილოთ ლოგარიტმის თვისებების გამოყენებით ამოხსნილი კიდევ ერთი მაგალითი.

ნამუშაო. $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$ *მოცემული განტოლება*
 $\lg(x+4) \cdot (2x+3) = \lg(1-2x)$ *ლოგარიტმის თვისება*
 $(x+4) \cdot (2x+3) = (1-2x)$ *დაიყვანება ალგებრულ განტოლებაზე*
 $x_1 = -1; x_2 = -5,5$

შემოწმება.

ლოგარიტმულში გამოსახულებამ უნდა დააკმაყოფილოს დადებითობის პირობა, ანუ

$$x+4 > 0, \quad 2x+3 > 0, \quad 1-2x > 0 \quad \text{უნდა იყოს.}$$

$-5,5$ ამ პირობებს არ აკმაყოფილებს, მოცემული განტოლებისათვის გარეშე ფესვია. -1 კი ამ პირობებს აკმაყოფილებს.

პასუხი: -1

სასწავლო დავალებები

1. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\log_2 2^3 + \log_2 2^2 = \log_2 x$

ბ) $\log_2 16 + \log_2 2 = \log_2 x$

გ) $\log_3 x - \log_3 9 = \log_3 3$

დ) $\log_5 x + \log_5 x = \log_5 625$

ე) $\log_x 64 - \log_x 16 = \log_x 16$

ვ) $\log_2 8 + \log_3 9 = \log_x 32$

2. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\log_2 (3-x) = 3$

ბ) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) = -1$

გ) $\log_{\sqrt{3}}(2x-5) = 2$

დ) $\log_2 (x^2 + 4x + 3) = 3$

ე) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 1) = -2$

ვ) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 5x - 3) = 2$

ზ) $\log_4 (\log_3 (\log_2 (x-1))) = 0$

თ) $\log_3 (1 + \log_3 (2^x - 7)) = 1$

ი) $\log_7 (4x - 6) = \log_7 (2x - 4)$

კ) $\ln(x^2 - 2x - 4) = \ln 11$

ლ) $\log_2 (2x^2 - 2) = \log_2 (5x - 4)$

3. ამოხსენით ლოგარიტმის თვისებების გამოყენებით.

ა) $\log_3 x + \log_3 (x-2) = \log_3 8$ ბ) $\log_6 (2x^2 - 7x + 6) - \log_6 (x-2) = \log_6 x$

4. ამოხსენით განტოლებები ახალი ცვლადის შემოტანით.

ა) $\log_3^2 x = 4 + 3 \log_3 x$ ბ) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$ გ) $\lg(10x) \cdot \lg(0,1x) = 3$

5. განტოლებების ამოხსნა ორივე მხარის ერთი და იგივე ფუძის გალოგარიტმებით.

ა) $x^{\log_2 x - 2} = 8$

ბ) $x^{\log_5 x} = 125x^2$

გ) $x^{\lg x} = 100x$

6. ამოხსენით განტოლებები გრაფიკული ხერხით.

ა) $\log_3 (x+2) = 2-x$

ბ) $\log_{\frac{1}{2}} x = x-3$

ლოგარიტმული განტოლებები

7. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\log_2 x + \log_2 3 = 1$	დ) $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$	ზ) $\log_2 x = \log_x 16$
ბ) $\log_3 x - \log_3 2 = 2$	ე) $\log_6 x + \log_6(x - 1) = 1$	თ) $\log_3 x - \log_x 9 = 1$
გ) $\log_3 x + \log_3 2 = 2$	ვ) $\log_4(x - 2) - \log_4(x + 1) = 1$	ი) $\log_2 x + \log_x 8 = 4$

8. ამოხსენით განტოლებები.

1) $\log_5(x - 18) - \log_5 x = \log_5 7$	4) $7^{2x} = 2^{x+3}$
2) $\log_2(x - 6) + \log_2(x - 8) = 3$	5) $1,6^{x-4} = 5^{3x}$
3) $\log_3(2x - 1) = 2 - \log_3(x + 1)$	6) $9^{2x-1} = 71^{x+2}$

9. a -ს რა მნიშვნელობისთვისაა $1 - \log_2 a + \log_2 5 = \log_2(a + 3)$ ტოლობა მართებული?

10. ჯერ გამოიკვლიეთ განტოლებაში შემავალ ლოგარიტმულ გამოსახულებას ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის აქვს აზრი, შემდეგ ამოხსენით განტოლება:

ა) $\log_2 x^2 = 6$	ბ) $2 \log_2 x = 6$
---------------------	---------------------

11. შემადგენლობაში წყალბადის იონისებრ კონცენტრაციის მიხედვით იპოვეთ ხსნარის pH.

$[H^+] = 7,9 \cdot 10^{-3}$	$[H^+] = 8,1 \cdot 10^{-5}$	$[H^+] = 2,3 \cdot 10^{-4}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

12. იპოვეთ მოცემული pH-ის მქონე ნარევეში წყალბადის იონების კონცენტრაცია.

pH = 3,1	pH = 6,8	pH = 1,8
----------	----------	----------

13. იპოვეთ x -ისა და y -ის მნიშვნელობები, თუ $\log_3 81 = x - y$ და $\log_2 32 = x + y$.

14. **ფიზიკა.** ალთიმეტრი არის მოწყობილობა, რომელიც ატმოსფერული წნევის გაზომვით ზღვის დონიდან სიმაღლის განსაზღვრის შესაძლებლობას იძლევა. სიმაღლესა (მეტრობით) და ჰაერის წნევას (პასკალობით) შორის დამოკიდებულება $h = -8005 \ln \frac{P}{101300}$ სახისაა. რამდენი პასკალია ჰაერის წნევა ზღვის დონიდან 3500 მ-ზე?

15. **მიწისძვრა.** მიწისძვრის ამპლიტუდა გამოითვლება $A = A_0 \times 10^M$ ფორმულით. A_0 არის შესაძლო ყველაზე დაბალი მიწისძვრის ამპლიტუდა, M კი არის მიწისძვრის სიმძლავრე რიხტერის სკალით. 5,3 ბალის სიმძლავრის მომხდარი მიწისძვრის ამპლიტუდა მის შემდეგ მომხდარ მიწისძვრაზე (მომდევნო ბიძგები) 125-ჯერ მეტი იყო. განსაზღვრეთ მომდევნო ბიძგის სიმძლავრე.

16. **ქიმია.** მმარმეავას pH 2,9-ის ტოლია. ჰიანჭველამეავაში კი წყალბადის იონების კონცენტრაცია მმარმეავასთან შედარებით 1,8-ჯერ მეტია. იპოვეთ ჰიანჭველამეავაში არსებული წყალბადის იონების კონცენტრაცია.

17. **ფინანსები.** თუ 1° ფული 6% მატებით ბანკში ჩაიდება, t წლის შემდეგ ბანკში არსებული თანხის $S = 1,06^t$ ფორმულით გამოთვლა შეიძლება. ამ ფორმულაში მოცემული t ცვლადი გამოსახეთ S ცვლადით 6% წლიური მატების პროცენტით ბანკში შეტანილი 1000° რამდენი წლის შემდეგ იქნება 1500° ?

ლოგარიტმული განტოლებები

ნახშირბადის 14 იზოტოპის რადიოაქტიური დაშლის გამოყენებით მეცნიერები სხვადასხვა მცენარეების, ცხოველების ნაშთების ასაკს განსაზღვრავენ. დედამიწაზე უფრო ხშირად შემხვედრი ნახშირბად 12 იზოტოპი რადიოაქტიური არ არის და არ იშლება. თუმცა ნახშირბად 14 რადიოაქტიურია და იშლება. ნახშირბად 14 იზოტოპი ატმოსფეროში მოხვედრილი მზის სხივებით წარმოიქმნება, ფოტოსინთეზის საშუალებით მცენარეებში შედის. ნახშირბად 14-ის ნივთიერება მცენარეებთან ერთად, მცენარეებით გამოკვების შედეგად შედის ცხოველების ორგანიზმში. მცენარეებში და ცხოველებში ნახშირბად 14-ის ოდენობა ნახშირბადის ატომის 10^{-10} პროცენტის ოდენობითაა.

მცენარისა და ცხოველის დაღუპვის დროს ახალი ნახშირბად 14 იზოტოპის მიღების შესაძლებლობები წყდება. სხეულში არსებული კი იწყებენ დაშლას. ამ იზოტოპის ნახევრადდაშლის ხანგრძლივობა 5730 წელიწადია. იმის გამოთვლით, თუ მცენარისა და ცხოველის ნარჩენებში არსებული ნახშირბად 14-ის ოდენობა ნახშირბადის ატომების მიმართ რამდენ პროცენტს შეადგენს, შესაძლებელი ხდება მათი სიკვდილის თარიღის განსაზღვრა.

18. $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ ამოხსენით ამოცანა ფორმულის მიხედვით. (სადაც m_0 ნივთიერების საწყის მასას, T ნახევრადდაშლის ხანგრძლივობას, t დროს გვჩვენებს).

ა) სპილოს ძვლის ნარჩენებში ნახშირბად 14-ის 36% მოსპობილია. რამდენი წლის წინათ ცოცხლობდა ეს სპილო?

ბ) რადიოაქტიური ნივთიერების ნახევრადდაშლის ხანგრძლივობა 3 წელია. რამდენი წლის შემდეგ დარჩება ამ ნივთიერებებიდან 7 გრამი, თუ მისი საწყისი წონა იყო 67 გრამი?

გ) განსაზღვრული ოდენობის ურანის ნივთიერების ორი მესამედი ნაწილის დაშლის ხანგრძლივობა 0,26 მილიარდი წელია. იპოვეთ ურანის ელემენტის ნახევრადდაშლის დრო.

19. ბანკში შეტანილი 2000 მანეთი. 8% რთული მატების პროცენტით რამდენი წლის შემდეგ გახდება 10000 მანეთი?

20. ქალაქის მოსახლეობა ყოველწლიურად 3%-ით მცირდება. t წლის შემდეგ ამ ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობა $N = N_0 \cdot 0,97^t$ ფორმულით გამოითვლება. სადაც N_0 მოსახლეობის არსებული რაოდენობაა. გამოსახეთ t სიდიდე N -ით.

21. ერთ ქვეყანაში მოსახლეობის რაოდენობამ 1990 წლიდან 2000 წლამდე 151 მილიონიდან 173 მილიონს მიაღწია.

ა) განსაზღვრეთ მოსახლეობის წლიური მატების პროცენტი, თუ ცნობილია, რომ მოსახლეობის რაოდენობა იცვლება $N = N_0 \cdot (1 + r)^t$ კანონით.

ბ) რამდენი წლის შემდეგ იქნება ქვეყნის მოსახლეობა 220 მილიონი, თუ მოსახლეობის მატების ეს ტემპი შენარჩუნებული იქნება?

22. გამაგრებული კოლას ტიპის სასმელის pH 2,6, რძის pH კი 6,6-ია. რამდენჯერ მეტია კოლას შემადგენლობაში წყალბადის იონების რაოდენობა რძესთან შედარებით?

მაჩვენებლიანი უტოლებები

მაჩვენებლიანი უტოლობების ამოხსნა, როგორც წესი $a^x > a^b$ და $a^x < a^b$ უტოლობების ამოხსნაზე დაიყვანება, სადაც $a > 0$, $a \neq 1$.

ამ უტოლობების ამოხსნა კი $y = a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის ზრდადობის ან კლებადობის თვისების დახმარებით იხსნება:

როცა $a > 1$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ უტოლობა $f(x) > g(x)$ -ის,

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ უტოლობა $f(x) < g(x)$ -ის ტოლფასია.

როცა $0 < a < 1$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ უტოლობა $f(x) < g(x)$ -ის,

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ უტოლობა $f(x) > g(x)$ -ის ტოლფასია.

ნამუშაო.

$$2^{x+1} > 8 \quad \text{მოცემული უტოლობა}$$

$$2^{x+1} > 2^3 \quad \text{ხარისხის თვისება}$$

$$x+1 > 3 \quad \text{ტოლფასი უტოლობა}$$

$$x > 2 \quad \text{უტოლობის ამოხსნა}$$

ნამუშაო.

$$0,2^{x-1} > 0,04 \quad \text{მოცემული უტოლობა}$$

$$0,2^{x-1} > 0,2^2 \quad \text{ხარისხის თვისება}$$

$$x-1 < 2 \quad \text{ტოლფასი უტოლობა}$$

$$x < 3 \quad \text{უტოლობის ამოხსნა}$$

$c = a^{\log_a c}$ იგივეობის თანახმად $a^x > c$ (ან $a^x < c$) უტოლობა

$a^x > a^{\log_a c}$ (ან $a^x < a^{\log_a c}$) უტოლობის ამოხსნაზე დაიყვანება.

მაჩვენებლიანი უტოლობები გარკვეული ხერხებით მარტივ მაჩვენებლიან უტოლობებზე დაიყვანება და ამოიხსნება.

1) ხარისხის თვისებების გამოყენება

ნამუშაო. a) $8 \cdot 4^{x-1} > 2^x$

$$2^3 \cdot (2^2)^{x-1} > 2^x$$

$$2^{2x+1} > 2^x$$

$$2x+1 > x$$

$$x > -1$$

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} < 30$ მოცემული უტოლობა

$$3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} < 30 \quad \text{ხარისხის თვისება}$$

$$3^x(3 + \frac{1}{3}) < 30 \quad \text{დაჯგუფება}$$

$$3^x < 30 \cdot \frac{3}{10} \quad \text{გამარტივება}$$

$$3^x < 9$$

$$3^x < 3^2$$

$$x < 2$$

თუ ხარისხის მაჩვენებლები ერთი და იგივეა ხელსაყრელია ხარისხებიდან ერთ-ერთზე გაყოფა.

ნამუშაო. $2^x > 3^{2x}$ მოცემული უტოლობა

$$2^x > 9^x : 2^x \quad \text{ორივე მხარე გავყოთ } 2^x\text{-ზე}$$

$$1 > (\frac{9}{2})^x$$

$$(\frac{9}{2})^x < (\frac{9}{2})^0 \quad \text{რადგან } a^0 = 1$$

$$x < 0$$

2) ახალი ცვლადის შემოტანა

ნამუშაო. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 < 0$

მოცემული უტოლობა

$$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$$

$2^x = a$ ახალი ცვლადის შემოტანა

$$a^2 - 6a + 8 < 0$$

კვადრატული უტოლობა

$$(a-2)(a-4) < 0$$

$$2 < a < 4$$

ჩანაცვლების გათვალისწინება

$$2 < 2^x < 2^2 \quad 1 < x < 2$$

მაჩვენებლიანი უტოლობები

სასწავლო დაფალებები

1. ამოხსენით მაჩვენებლიანი უტოლობები.

ა) $3^x \geq \frac{1}{9}$	ბ) $0,2^x \leq \frac{1}{25}$	გ) $1,5^x \leq 2,25$	დ) $0,3^x \leq 0,09$
ე) $2^x > 1$	ვ) $3^x < 1$	ზ) $4^{-x} < -1$	თ) $5^x > -5$
ი) $0,4^{x+1} > 0,16$	კ) $3^{2-x} < 27$	ლ) $3^{x^2} < 9^8$	მ) $4^{0,5x^2-3} > 8$
ნ) $4^x > 2^{x^2}$	ო) $9^x < 36^x$	პ) $5^x > 2^{3x}$	ჟ) $2^{ x-1 } < 8$

2. ამოხსენით უტოლობები ხარისხის თვისებების გამოყენებით.

ა) $3^{x+3} < 27$	ბ) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} < 448$	გ) $4^x + 4^{x-1} < 20$
დ) $(\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{2})^{x-2} > 5$	ე) $(\frac{1}{5})^{x-1} + (\frac{1}{5})^{x+1} \leq 26$	

3. ამოხსენით უტოლობები ახალი ცვლადის შემოტანით.

ა) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$	ბ) $4^x + 2^x > 20$	გ) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$
დ) $3^{x-1} + 3^{2-x} < 4$	ე) $5^x - 5^{1-x} > 6$	

4. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ა) $y = \sqrt{7\frac{1}{9} - (\frac{3}{8})^{2x}}$	ბ) $y = \sqrt{(\frac{3}{5})^{x+2} - (\frac{9}{25})^x}$
---	--

5. ამოხსენით უტოლობები.

ა) $x^2 \cdot 3^x - 3^{2+x} < 0$	ბ) $x^2 \cdot 3^x + 9 > x^2 + 9 \cdot 3^x$
გ) $0,4^{\frac{x^2-4}{x+1}} \leq 1$	დ) $2,6^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}} > 1$

6. ამოხსენით მაჩვენებლიანი უტოლობები.

$625 \geq 5^{a+8}$	$(\frac{1}{64})^{c-2} < 32^{2c}$	$(\frac{1}{9})^{3t+5} \geq (\frac{1}{243})^{t-6}$
$610^{5b+2} > 1000$	$(\frac{1}{27})^{2d-2} \leq 81^{d+4}$	$(\frac{1}{36})^{v+2} < (\frac{1}{216})^{4v}$

7. ამოხსენით უტოლობები ძირითადი ლოგარითმული იგივეობის გამოყენებით.

1) $8^x > 21$	2) $6^y < 39$	3) $e^x < 8,1254$	4) $e^x > 0,3151$
5) $10^x > 0,0138$	6) $10^y < 16,8125$	7) $e^{0,01x} > 15$	8) $e^{0,03y} \leq 4$

8. ამოხსენით მაჩვენებლიანი უტოლობები.

1) $2^{x^2-3x-6} - 16 \geq 0$	2) $\frac{e^x}{e^x-4} \leq 3$	3) $xe^{2x} < 4x$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------

ლოგარიტმული უტოლებები

პრაქტიკული მეცადინეობა. 1) ფერად უჯრებში ჩაწერეთ შესაბამისი შედარების ნიშანი.

ა) $\log_2 3$ $\log_2 7$

ბ) $\log_{0,5} 5$ $\log_{0,5} 7$

2) ფერად უჯრებში ჩაწერეთ ისეთი რიცხვები, რომ სწორი უტოლობა მიიღოთ.

ა) $\log_2$ $< \log_2 5$

გ) $\log_{0,5}$ $< \log_{0,5} 4$

ბ) $\log_2$ $> \log_2 5$

დ) $\log_{0,5}$ $> \log_{0,5} 4$

3) $\log_2 x \leq \log_2 5$ უტოლობას x -ის 5-ზე მეტი რომელიმე მნიშვნელობა აკმაყოფილებს? გამოთქვით მოსაზრება x -ის ამ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობების შესახებ.

4) განსაზღვრეთ x -ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებს $\log_{0,5} x \leq \log_{0,5} 4$ უტოლობას.

ლოგარიტმული უტოლობები

ლოგარიტმული უტოლობები იხსნება ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობების, ლოგარიტმული ფუნქციის ზრდადობის (ან კლებადობის) თვისების გათვალისწინებით.

ნიმუში. $\log_2(x+1) > \log_2 7$

ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა პირობის თანახმად $x+1 > 0$, ვინაიდან $\log_2 x$

ფუნქცია ზრდადია $x+1 > 7$ უნდა იყოს.

მაშასადამე $x+1 > 0$ და $x+1 > 7$

უტოლობების დამაკმაყოფილებელი x -ები უნდა მოვებზნოთ.

აქედან $x > 6$. პასუხი: $(6; +\infty)$

როცა $a > 1$

ლოგარიტმული უტოლობა	ტოლფასი უტოლობა
$\log_a f(x) > \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) > c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) < c$	$0 < f(x) < a^c$

ნიმუში. $\log_{0,2}(x-1) > \log_{0,2} 3$

ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა პირობის თანახმად $x-1 > 0$ ვინაიდან

$\log_{0,2} x$ ფუნქცია კლებადია $x-1 < 3$

უნდა იყოს. მაშასადამე, უნდა ამოვხსნათ ორმაგი უტოლობა $0 < x-1 < 3$.

აქედან $1 < x < 4$. პასუხი: $(1; 4)$

როცა $0 < a < 1$

ლოგარიტმული უტოლობა	ტოლფასი უტოლობა
$\log_a f(x) > \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$

ნიმუში. $\log_5(3x-4) < \log_5(2x-2)$ უტოლობა

$0 < 3x-4 < 2x-2$ ორმაგი უტოლობის

ან $\begin{cases} 3x-4 > 0 \\ 3x-4 < 2x-2 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემის ტოლფასია.

სადაც $x > \frac{4}{3}$ და $x < 2$ მიიღება. უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე: $\frac{4}{3} < x < 2$.

ლოგარითმული უტოლებები

ნიმუში. ამოვხსნათ უტოლობა $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$.

ლოგარითმულებს გამოსახულების დადებითობის გამო $x > 0$ უნდა იყოს. შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\log_2 x = t$ მივიღებთ უტოლობას, $t^2 - t - 2 < 0$ ამ უტოლობის ამონახსენია $-1 < t < 2$. ჩანაცვლების თანახმად $-1 < \log_2 x < 2$ მიიღება.

აქედან $\frac{1}{2} < x < 4$. პასუხი: $(\frac{1}{2}; 4)$.

სასწავლო დავალებები

1. ამოხსენით ლოგარითმული უტოლობები.

- | | | |
|---|---|-------------------------------------|
| ა) $\log_2(x+1) < \log_2 3$ | ბ) $\log_3(x-1) > \log_3 5$ | გ) $\log_{0,1}(x-2) > \log_{0,1} 4$ |
| დ) $\log_4(x-3) > 2$ | ე) $\log_5(3x-1) < 2$ | ვ) $\log_{0,2}(5-2x) > -1$ |
| ზ) $\log_7(2x-1) > \log_7(x+2)$ | თ) $\log_5(3x-4) \leq \log_5(x+2)$ | |
| ი) $\log_{0,5}(4x-11) < \log_{0,5}(x-11)$ | კ) $\log_{0,2}(2x-8) > \log_{0,2}(x-1)$ | |

2. ამოხსენით უტოლობები.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\log_5(x-9) > 3$ | 2) $\log_7(4x-3) > 0$ | 3) $\log_7(2x-1) < 2$ |
| 4) $\log_2(x+20) \geq 5$ | 5) $\log_4(x + \frac{1}{2}) \geq -1$ | 6) $\lg(5x+150) \leq 1$ |
| 7) $\log_7(2x-5) \geq 2$ | 8) $\log_8(x+5) \leq 1$ | 9) $\log_2(x - \frac{2}{3}) \leq -2$ |

3. ამოხსენით უტოლობები.

- | | |
|--|---|
| 1) $\log_5(3-2x) \geq \log_5(4x+1)$ | 2) $\log_{0,3}(10x+3) < \log_{0,3}(7x-21)$ |
| 3) $\lg x + \lg(x+1) > \lg 2x$ | 4) $\lg x + \lg(2-x) < 1$ |
| 5) $\lg x - \lg(2-x) > 0$ | 6) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > 0$ |
| 7) $\lg(x^2-x+8) \leq 1$ | 8) $\log_3(x^2-2x) < 1$ |
| 9) $\log_2(x^2-x-6) + \log_{0,5}(x-3) < 2\log_2 3$ | 10) $\log_{\sqrt{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 64$ |
| 11) $\log_2(x^2-3x-10) - \log_2(x+2) \leq 2$ | 12) $ 3 - \log_2 x < 2$ |

4. საზოგადოებრივი ორგანიზაციის წევრების ყოველწლიური 7%-იანი შემცირება აღინიშნება. თუ N არის არსებული წევრების რაოდენობა, მაშინ t წლის შემდეგ გაერთიანების წევრების რაოდენობის $P = N(1 - 0,07)^t$ ფორმულით გამოთვლა შეიძლება. თუ 2010 წელს ამ ორგანიზაციას 5000 წევრი ჰყავდა, რამდენი წლის შემდეგ იქნება მათი რაოდენობა 2500-ზე ნაკლები?

5. ნაპოვნ ნემტში ნახშირბად 14-ის t წლის შემდეგ დარჩენილი რაოდენობის (გრამებით) $C = 20 e^{-0,0001216t}$ ფორმულით გამოთვლა შეიძლება.

- ა) იპოვეთ ნაშთში ნახშირბად 14-ის წლიური რაოდენობა.
- ბ) რამდენი გრამი იქნება ნარჩენი ნახშირბად 14, 10.000 წლის შემდეგ?
- გ) დაახლოებით რამდენი წლის შემდეგ იქნება ამ ობიექტში არსებული ნახშირბად 14-ის ოდენობა იქნება 10 გრამზე ნაკლები?

ლოგარიტმული უტოლებები

6. ამოხსენით ლოგარიტმული განტოლებები და უტოლობები.

ა) $\log_2 (3x + 2) = \log_2 (12x + 3)$

ბ) $\log_6 (7x + 1) = \log_6 (4x - 4)$

გ) $\log_3 3x = \log_3 (2x + 2)$

დ) $\log_5 (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$

ე) $\log_4 (9x + 1) > \log_4 (18x - 1)$

ვ) $\log_3 (3x - 5) \geq \log_3 (x + 7)$

ზ) $\log_5 (2x + 1) < \log_5 (3x - 2)$

თ) $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$

7. ამოხსენით უტოლობები.

ა) $\log_\pi(x) + \log_\pi(x + 1) < \log_\pi 2$

ბ) $\log_{0,6}(4 - x) \geq \log_{0,6} 2 - \log_{0,6}(x - 1)$

გ) $\log_2^2 x - \log_2 x \leq 6$

დ) $\log_{0,1}^2 x + 3 \log_{0,1} x < 4$

ე) $\lg^2 x + 2 \lg x > 3$

ვ) $\log_{0,1}^2 x - 1 \geq 0$

ზ) $\log_3(\log_{0,5}(2x - 1)) > 0$

თ) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{5}}(x - 9)) > -1$

ი) $|1 - 2 \log_3 x| < 3$

კ) $|1 - \log_3 x^2| < 3$

8. წლიური 8% რთული პროცენტით მატებით ბანკის ანგარიშზე შეტანილი 1000 მანეთი რამდენი წლის შემდეგ იქნება არანაკლებ 1500 მანეთისა? (ანგარიშზე არსებული თანხა $S = S_0 e^{rt}$ კანონით იცვლება).

ამოხსნა: თანხა ანგარიშზე არანაკლებ $1500^{\text{რ}}$

$1000 e^{0,08t} \geq 1500$ ≥ 1500

მონაცემების თანახმად

$e^{0,08t} \geq 1,5$

უტოლობის ორივე მხარე იყოფა 1000-ზე

$\ln e^{0,08t} \geq \ln 1,5$

უტოლობის ორივე მხარე გალოგარიტმდება

$0,08t \geq \ln 1,5$

ლოგარიტმული თვისება

$t \geq \frac{\ln 1,5}{0,08}$

უტოლობის ორივე მხარე იყოფა 0,08-ზე

$t \geq \frac{0,4054}{0,08} \quad t \geq 5,068 \quad t \geq 5,1$ *გამოთვლები*

პასუხი: დაახლოებით 5,1 წლის შემდეგ ანგარიშზე არსებული თანხა გახდება 1500 მანეთზე მეტი.

9. მოსახლეობის რაოდენობის დროზე დამოკიდებულებით გამოთვლა $P = P_0 e^{kt}$ ფორმულით შეიძლება, სადაც P_0 - არის არსებული მოსახლეობის რაოდენობა, k - მატების ტემპი, t - წლების რაოდენობა, P კი - საძიებელ t წელს მოსახლეობის რაოდენობაა. 2000 წელს A ქალაქის მოსახლეობა 8,5 ათასი კაცი იყო. 2010 წლამდე იგი გაიზარდა და 9,4 ათასი გახდა.

ა) იპოვეთ მოსახლეობის მატების სიჩქარე (k კოეფიციენტი).

ბ) რომელ წელს გახდება ამ ქალაქში მოსახლეობის რაოდენობა 10 ათასი კაცი?

გ) თუ 2000 წელს B ქალაქში არსებული მოსახლეობის რაოდენობის $y = 9,5 e^{0,00278t}$ ფორმულით მოდელირება შეიძლება, A ქალაქში რამდენი წლის შემდეგ იქნება B ქალაქში მყოფზე მეტი მოსახლეობა?

10. დედამიწის მოსახლეობის რაოდენობა 1980 წელს დაახლოებით 4,8 მილიარდი, 1994 წელს კი 5,5 მილიარდი კაცი იყო. ამ მატებით რომელ წლამდე არ იყო დედამიწის მოსახლეობა 6 მილიარდ კაცზე მეტი?

განმაზოგადებელი დავალებები

1. მოცემული ფორმულების მიხედვით იპოვეთ n .
 ა) $M = 3e^{-2n} + 5$ ბ) $a^{2n} = b^2$ გ) $y = ae^{4n}$
2. მია მეჰმანი სახლის გაყიდვიდან მიღებული ფულის – 90 000 მანეთის ერთი წლით ბანკში შენახვას გეგმავს, ბანკი ორი სახის დეპოზიტს სთავაზობს: ერთი, წლიური 9 % რთული პროცენტული მატებით ნახევარწლიური გაანგარიშებებით, მეორე კი ყოველდღიური გამოთვლებით. ამ ორი პირობას შორის შემოსავლებში განსხვავება იქნება?
3. წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ 500 მილიგრამი ასპირინი გაქვთ მიღებული. ასპირინის t საათში სისხლში არსებული რაოდენობის $y = 500 (0,8)^t$ სახით მოდელირება შეიძლება. რამდენი საათის შემდეგ დარჩება სისხლში 50 მილიგრამზე ნაკლები ასპირინი?
4. წყალბადის იონების კონცენტრატის მიხედვით განსაზღვრეთ pH.
 ა) ლიმონის წვენი: $[H^+] = 7,9 \times 10^{-3}$ მოლ/ლ ბ) ამონიაკი: $[H^+] = 10^{-11}$ მოლ/ლ
 გ) ძმარი: $[H^+] = 6,5 \times 10^{-3}$ მოლ/ლ; დ) ფორთოხლის წვენი: $[H^+] = 3,2 \times 10^{-4}$ მოლ/ლ
5. ამოხსენით განტოლებები და უტოლობები.
 1) $6^x \geq 42$ 2) $5^x = 52$ 3) $8^{2a} < 124$ 4) $4^{3p} = 10$
 5) $20^{x^2} = 70$ 6) $2^{x^2-3} = 15$ 7) $8^{2n} > 52^{4n+3}$ 8) $2^{2x+3} = 3^{3x}$
 9) $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+1}) = 2$ 10) $(x-2) \cdot \log_5(x+1) = 0$ 11) $(x^2-4) \cdot \log_3 x = 0$
 12) $\log_x 3 > 0$ 13) $\log_{\sqrt{2}}(2x-4) < 4$ 14) $(x+1) \cdot \log_2(x+1) > 0$
6. ჯემილმა გამზადებულ წარდგენაში ჩაბაზა ცხრილი აღნიშვნით, რომ ქალაქის მოსახლეობა 11450 კაციდან 95600 კაცამდე გაიზარდა და მატების ტემპი იყო 4,32%. თუმცა დაავიწყდა იმის აღნიშვნა, თუ რამდენ წელში მოხდა ეს მატება. იპოვეთ წლების რაოდენობა.
7. გაამარტივეთ.
 ა) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ბ) $\log_3 \frac{x^3}{27}$ გ) $5 \ln x + \ln y + \frac{1}{3} \ln z$
8. იპოვეთ, $\log_b x \sqrt[3]{x}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $\log_b x = 0,2$.
9. $y = \log_2 8x^3$ ფუნქციის გრაფიკი $y = \log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკის რომელი გარდაქმნებით მიღება შეიძლება?
10. ცნობილია, რომ $\log_t M = 1,28$ და $\log_t N^2 = 1,74$ გამოთვალეთ:
 ა) $\log_t N$ ბ) $\log_t (MN)$ გ) $\log_t \frac{N^2}{\sqrt{M}}$
11. დაწერეთ $y = ab^x$ ექსპონენციალური ფუნქციის ფორმულა რომლის გრაფიკი გადის $(1;1)$ $(3; \frac{1}{9})$ წერტილებზე.

განმაზოგადებელი დავალებები

12. ჯანმრთელობა და ფიზიკა. სპეციალისტები იძლევიან რეკომენდაციას, რომ 85 დბ ზე მაღალი ხმის შემთხვევაში გამოვიყენოთ სპეციალური ხმისაგან დამცავი მოწყობილობა.

ა) შეშის საჭრელი აპარატის ხმის ძალა 80 დბ. მუსიკალური ხმის გამაძლიერებლისა კი (პლაიერი) 110 დბ-ია. რამდენჯერ აღემატება ხმის გამაძლიერებლის ხმის ინტენსივობა შეშის საჭრელის ხმის ინტენსივობას?

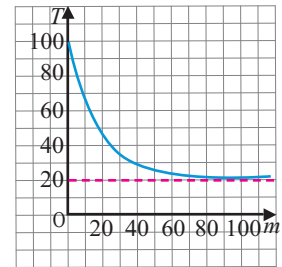
ბ) ჩურჩულის ინტენსივობაზე 100 000 ჯერ ძლიერი ხმა ადამიანის ჯანმრთელობისათვის არავითარ საფრთხეს არ ქმნის. გამოთვალეთ უსაფრთხოდ ჩათვლილი ხმის სიმძლავრე, თუ ჩურჩულის სიმძლავრე 20 დბ-ია.

13. სოციოლოგების კვლევის თანახმად ახალი ამბავი ადამიანებს შორის ექსპონენციალური სიჩქარით ვრცელდება. $y = 2000(1 - e^{-0,03t})$ ფუნქცია ახალი სავაჭრო ცენტრის გახსნის ინფორმაციის t საათში 2000 ადამიანს შორის გავრცელებას გამოსახავს.

ა) რამდენ ადამიანს ექნება ინფორმაცია ამის შესახებ სავაჭრო ცენტრის გახსნიდან 24 საათის შემდეგ?

ბ) ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი გრაფკალკულატორით და ივარაუდეთ რამდენი საათის შემდეგ ექნება მოსმენილი ეს ამბავი ამ ადამიანთა 90%-ს?

14. ერთი ფინჯანი წყალი 100°C -მდე ადუღებული და შემდეგ ოთახის ტემპერატურამდე 20°C -მდე გაციებული იქნა. წყლის ტემპერატურა ყოველ წუთში ერთხელ გაიზომა და საკოორდინატო სიბრტყეზე ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულების მაჩვენებელი წერტილები აღინიშნა. ეს წერტილები შეერთდა და სურათზე ნაჩვენები გრაფიკი იქნა მიღებული. ცნობილი გახდა, რომ წყლის ტემპერატურა ყოველ 5 წუთში 25%-ით ექსპონენციალური წესით მცირდება. წყლის ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულებით ცვლილების გამომსახველი ფუნქციის ფორმულის $f(x) = a \cdot b^{x-h} + k$ სახით დაწერა შეიძლება. გრაფიკის თანახმად იპოვეთ a , b , h , k ცვლადების შესაბამისი რიცხვითი ინფორმაციები და დაწერეთ ფუნქციის ფორმულა.



15. სეიმურმა 15 000 მანეთად ახალი ავტომობილი შეიძინა. ავტომობილის ფასი ყოველწლიურად 15%-ით მცირდება. რამდენი წლის შემდეგ შეიძენს სეიმური ავტომობილს 3000 მანეთზე იაფად?

16. ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულებები და იპოვეთ მნიშვნელობები.

ა) $9 \log_3 3 - \log_3 75 + 2 \log_3 5$

ბ) $\log_2 98 - 2 \log_2 7 - 2$

გ) $2 \log_3 6 - 3 \log_3 2 + \log_3 18$

დ) $\frac{1}{2} \log_2 36 + \log_2 12 - 2 \log_2 3$

17. ააგეთ $y = \lg x^2$ და $y = 2 \lg x$ ფუნქციების გრაფიკები. დაწერეთ ამ ფუნქციების მსგავსი და განმასხვავებელი ნიშნები. ცვლადის რა მნიშვნელობებისათვის არის მართებული $\lg x^2 = 2 \lg x$ ტოლობა?

კომპლექსური რიცხვები

მოქმედებები კომპლექსურ რიცხვებზე

კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული გამოსახვა

კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე

მოქმედებები ტრიგონომეტრიული სახით მოცემულ კომპლექსურ რიცხვებზე

n-ური ხარისხის ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან

ეს საინტერესოა!



ფრანგი მეცნიერი Abraham DeMoivre (მუავრი) (1667–1754) ალბათობის თეორიის შესახებ ნაშრომებითა და მუავრის ფორმულით არის ცნობილი. მისი ნაწარმოები “The Doctrine of Chances: A method of calculating the probabilities of events in play”. (შანსების დოქტრინა: თამაშში ხდომილობათა გამოთვლის მეთოდი) გახდა დიდი რეზონანსის მიზეზი და მრავალჯერ გამოიცა.

კომპლექსური რიცხვების შექმნის ქრონიკა

სავარაუდო თარიღი	პიროვნება	მოვლენა
50	ჰერონი, ალექსანდრია	უარყოფითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვის შესახებ პირველ ინფორმაციებს ვხვდებით
850	მაჰავირა. ინდოეთი	უარყოფითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვი არ არსებობს, რადგან კვადრატი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი
1545	კარდანო, იტალია	უარყოფითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვი კუბური განტოლების ფესვებში შედის
1637	დეკარტი, საფრანგეთი	ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს განასხვავებს
1748	ეილერი, შვეიცარია	$\sqrt{-1}$ რიცხვს i -თი აღნიშნავს
1832	კაუსი, გერმანია	იყენებს კომპლექსური რიცხვის ცნებას

გამოკვლევა

- 1) ნიმუშების ჩვენებით გამოიკვლიეთ ქვემოთ მოცემული მოსაზრებების სისწორე, თუ იგი მცდარია ისე შეცვალეთ, რომ მართალი გამოდგეს.
 - ა) როცა a და b ნატურალური რიცხვებია, $x + a = b$ განტოლების ფესვი ნატურალური რიცხვია.
 - ბ) როცა a და b მთელი რიცხვებია $ax = b$ განტოლების ფესვი მთელი რიცხვია.
 - გ) თუ a არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვია, $x^2 = a$ განტოლების ფესვი რაციონალური რიცხვია.
 - დ) თუ a არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვია, $x^2 = a$ განტოლების ფესვი ნამდვილი რიცხვია.
- 2) არსებობს ნამდვილი რიცხვი, რომლის კვადრატი -1 -ის ტოლია?
- 3) ა) როცა $a < 0$, $x^2 = a$ განტოლებას ნამდვილი ფესვი აქვს?
ბ) ნამდვილი რიცხვების განსაზღვრულ სიმრავლეზე გაფართოებით შესაძლებელია ამ ამოცანის ამოხსნა?
- 4) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და რიცხვითი ღერძის წერტილებს შორის ერთმანეთის მიმართ ერთმნიშვნელოვანი შესაბამისობა არსებობს. საკოორდინატო სიბრტყის წერტილებს რომელი რიცხვები შეიძლება შევუპირისპიროთ?

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში $x^2 = -1$ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს. მაშასადამე, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ისე უნდა გავაფართოვოთ, რომ ახალ სიმრავლეში ამ განტოლებას ფესვი ჰქონდეს. ამ მიზნით ახალი i რიცხვის შემოტანით, მიღებულია, რომ ის $x^2 + 1 = 0$ განტოლების ფესვია ანუ $i^2 + 1 = 0$ აქედან კი $i^2 = -1$. ასეთი დაშვების შემდეგ $x^2 + 1 = 0$ განტოლების ფესვები $x_{1,2} = \pm i$ იქნება. i რიცხვს წარმოსახვითი ერთეული ეწოდება. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ისე გავაფართოვოთ, რომ ყველა ნამდვილი რიცხვი და i რიცხვი ამ სიმრავლეში შევიდეს, თანაც ამ სიმრავლეში შეკრებისა და გამრავლების მოქმედებების თვისებები შენარჩუნებული იქნას. როცა a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია ახალ სიმრავლეში bi , „ნამრავლისა და $a + bi$ “ ჯამის“ შემოტანით $a + bi$ გამოსახულებას პირობითად კომპლექსური რიცხვი ვუწოდოთ.

$a + bi$ გამოსახულებას კომპლექსური რიცხვი ეწოდება, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, i კი წარმოსახვითი ერთეულია.

კომპლექსურ რიცხვებს z , w , a და სხვ. ასოებით აღვნიშნავთ. მაგალითად, $z = a + bi$. $a + bi$ ჩანაწერს კომპლექსური რიცხვის ალგებრული სახე ეწოდება. $z = a + bi$ კომპლექსურ რიცხვში a -ს z -ის ნამდვილი ნაწილი, b -ს კი წარმოსახვითი ნაწილი ეწოდება და ასე იწერება: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

როცა $a = 0$, bi სახის რიცხვები მიიღება. ასეთ რიცხვებს წმინდა წარმოსახვითი რიცხვები ეწოდება. როცა $a = 0$ და $b = 0$, კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლად ითვლება და პირიქით, თუ $a + bi = 0$, მაშინ $a = 0$ და $b = 0$

დასკვნა: $a + bi$ და $c + di$ კომპლექსური რიცხვებისათვის $a + bi = c + di$ ტოლობა მხოლოდ მაშინ არის მართებული, როცა $a = c$ და $b = d$.

ნიმუში. $x + 3i = 5 + (x + y)i$ ტოლობიდან იპოვეთ x და y .

ამოხსნა: ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 3 = x + y \end{cases}, \text{ ანუ } x = 5, y = -2.$$

$a + bi$ და $c + di$ კომპლექსური რიცხვების ჯამი $(a + c) + (b + d)i$ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება, ანუ $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

მოქმედებები კომპლექსურ რიცხვებზე

$a + bi$ და $c + di$ კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი ეწოდება $ac - bd + (ad + bc)i$ კომპლექსურ ანუ

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

მაშასადამე, ორი კომპლექსური რიცხვის გამრავლებისათვის ისინი ორწევრების გამრავლების მსგავსად უნდა გაგამრავლოთ, საჭიროა გავითვალისწინოთ, რომ $i^2 = -1$.

ნამუშაუ. $(3 + 2i) \cdot (2 - i) = 3 \cdot 2 - 3i + 4i - 2i^2 = 6 + i - 2(-1) = 8 + i$

განვიხილოთ წარმოსახვითი ერთეული ხარისხები:

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = -i & i^4 &= i^2 \cdot i^2 = 1 & i^5 &= i^4 \cdot i = i \\ i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1 & i^7 &= i^4 \cdot i^3 = -i & i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1 \end{aligned}$$

როგორც ხედავთ, i -ს ნატურალური ხარისხები მხოლოდ i , -1 , $-i$ და 1 შეიძლება იყოს და ისინი ყოველ 4 ნაბიჯზე ერთხელ მეორედებიან, მაშასადამე, მივიღებთ $i^{4m+k} = (i^4)^m \cdot i^k = i^k$.

ნამუშაუ. გამოთვალეთ: ა) i^{58} ბ) i^{63}

ამოხსნა: ა) $i^{58} = i^{4 \cdot 14 + 2} = i^2 = -1$ ბ) $i^{63} = i^{4 \cdot 15 + 3} = i^3 = -i$

$a - bi$ რიცხვს $a + bi$ რიცხვის შეუღლებული რიცხვი ეწოდება და $\bar{z} = a - bi$ სახით აღინიშნება. გასაგებია თუ $a - bi$ რიცხვი $a + bi$ რიცხვის შეუღლებულია, $a + bi$ რიცხვიც $a - bi$ რიცხვის შეუღლებულია. ამიტომაც $z = a + bi$ და $\bar{z} = a - bi$ რიცხვებს ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური რიცხვები ეწოდებათ. ურთიერთშეუღლებული რიცხვების ნამდვილი ნაწილები ტოლია, წარმოსახვითი ნაწილები კი მოპირდაპირეები.

მოპირდაპირე შეუღლებული რიცხვების ნამრავლი ნამდვილი რიცხვია:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

კერძო შემთხვევაში ნამდვილი რიცხვის შეუღლებული თვით ამ რიცხვის, წარმოსახვითი რიცხვის შეუღლებული კი მისი (-1) -ზე ნამრავლის ტოლია.

თითოეულ $z = a + bi$ კომპლექსურ რიცხვს $-z$ მოპირდაპირე რიცხვი გააჩნია და $-z = -a - bi$. ნებისმიერ 0-საგან განსხვავებულ $z = a + bi$ კომპლექსურ რიცხვს შებრუნებული რიცხვი აქვს.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

მრიცხველი და მნიშვნელი
მრავლდება $(a - bi)$ -ზე

კომპლექსური რიცხვების გამოკლება და გაყოფა ქვემოთ მოცემული ტოლობებით სრულდება.

$$\begin{aligned} z - w &= z + (-w) \\ \frac{z}{w} &= z \cdot \frac{1}{w} \quad (w \neq 0) \end{aligned}$$

კომპლექსური რიცხვების განაყოფის მოძებნისათვის ხელსაყრელია მრიცხველისა და მნიშვნელის გამრავლება მნიშვნელის შეუღლებულ რიცხვზე.

ნამუშაუ. იპოვეთ $z_1 = 3 + 2i$ და $z_2 = 2 - i$ რიცხვების სხვაობა და განაყოფი.

ამოხსნა: $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (2 - i) = 1 + 3i$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 2i}{2 - i} = \frac{(3 + 2i) \cdot (2 + i)}{(2 - i) \cdot (2 + i)} = \frac{6 + 3i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{6 + 7i - 2}{5} = \frac{4 + 7i}{5} = \\ &= \frac{4}{5} + \frac{7}{5} i = 0,8 + 1,4i \end{aligned}$$

მოქმედებები კომპლექსურ რიცხვებზე

ნამდვილ რიცხვებზე წარმოებული გამოთვლითი მოქმედებების ძირითადი თვისებები მართებულია კომპლექსური რიცხვებისათვისაც. შედეგად ვიღებთ, რომ ნებისმიერი ალგებრული იგივეობა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეშიც მართებულია. მაგალითად, როცა z და w კომპლექსური რიცხვებია:

$$(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2$$

$$(z + w)(z - w) = z^2 - w^2 \text{ და სხვ.}$$

სასწავლო დავალებები

1. იპოვეთ.

ა) i^{12} ბ) i^{15} გ) i^{21} დ) i^{82} ე) i^{101}

2. იპოვეთ მოცემული რიცხვების ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და განაყოფი.

ა) $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 1 + i$ ბ) $z_1 = 5 + 2i, z_2 = 3 + i$

3. x -ისა და y -ის რომელი ნამდვილი მნიშვნელობებისათვის მართებულია ტოლობა?

ა) $(x + y) + 2i = 3 - (x - y)i$ ბ) $4 + xyi = x + y + 3i$

4. x -ისა და y -ის რომელი მნიშვნელობებისათვის იქნება მოცემული რიცხვები შეუღლებული რიცხვები?

ა) $z_1 = 5 + xi, z_2 = y + 4i$ ბ) $z_1 = (x + y) + i, z_2 = 5 - (x - y)i$

5. შესრულეთ მოქმედებები.

ა) $(3 + 4i) + (4 - 3i)$	ბ) $(5 + 4i) - (3 + 2i)$
გ) $(2 + 3i) \cdot (3 + 2i)$	დ) $(4 - i) \cdot (4 + i)$
ე) $(i + 1)^2$	ვ) $(2 + i)^2$
ზ) $(1 + i)^2 \cdot (3 - i)$	თ) $(2 + i)^2 \cdot (2 - i)^2$
ი) $(i + 1)^8$	კ) $(i^8 + i^5) \cdot (i + 1)$

6. დაშალეთ მამრავლებად.

ა) $m^2 + 4$ ბ) $y^2 + 9$ გ) $4x^2 + 1$

ნიმუში. ა) $m^2 + 4 = m^2 - 4 \cdot i^2 = m^2 - (2i)^2 = (m - 2i) \cdot (m + 2i)$

7. გაამარტივეთ.

ა) $\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i}$ ბ) $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$

8. ამოხსენით განტოლება.

ა) $x^2 + 4 = 0$ ბ) $x^2 + 3 = 0$ გ) $x^2 + 16 = 0$

9. იპოვეთ მოცემული რიცხვების შეუღლებული რიცხვები.

ა) $z = 3 + 4i$ ბ) $z = \frac{2}{1-i}$ გ) $z = (2 + i)^2$

კომპლექსური რიცხვის კვადრატული ფესვები

რიცხვს, რომლის კვადრატიც z - ის ტოლია z კომპლექსური რიცხვიდან კვადრატული ფესვი ეწოდება და $\sqrt{z}$ სახით აღინიშნება.

ნიმუში. იპოვეთ კვადრატული ფესვი $3 - 4i$ კომპლექსური რიცხვიდან.

ამოხსნა: დავუშვათ $\sqrt{3 - 4i} = x + yi$.

ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში:

$$3 - 4i = (x + yi)^2$$

$$3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$$

საიდანაც $(2; -1)$ და $(-2; 1)$ ამონახსნებს მივიღებთ. მაშასადამე $\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$

შენიშვნა: ნამდვილი რიცხვებისაგან განსხვავებით, კომპლექსური რიცხვიდან კვადრატული ფესვის წარმოთქმისას ნიშნით განსხვავებული ორივე მნიშვნელობა მოიაზრება. კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) კვადრატული განტოლების ფესვები როგორც ნამდვილ რიცხვებში იგივე ფორმულით გამოითვლება:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ნიმუში. ამოხსენით განტოლება $x^2 + 4x + 5 = 0$.

ამოხსნა:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$$x_1 = -2 + i$$

$$x_2 = -2 - i$$

ადვილად შეიძლება იმის შემოწმება, რომ ვიეტის თეორემა ძალაში რჩება და კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვების მქონე კვადრატული განტოლების კომპლექსური ფესვები ურთიერთშეუღლებული რიცხვებია.

სასწავლო დავალებები

1. იპოვეთ.

ა) $\sqrt{-25}$

ბ) $\sqrt{3 + 4i}$

გ) $\sqrt{8 + 6i}$

დ) $\sqrt{4 - 3i}$

2. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $x^2 - 4x + 5 = 0$

ბ) $x^2 - 6x + 13 = 0$

გ) $x^2 + 8x + 41 = 0$

დ) $x^2 - 2x + 3 = 0$

3. იპოვეთ კომპლექსური რიცხვი, რომელიც შეუღლებულის კვადრატის ტოლია ($z \notin R$).

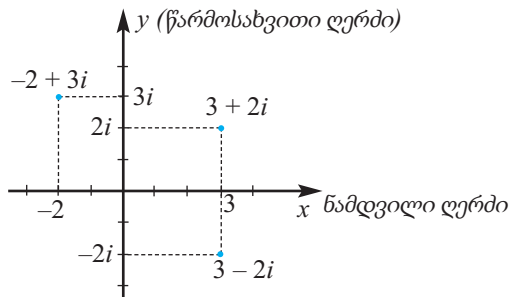
4. რომელი რიცხვის კვადრატია i -ს ტოლი?

კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული გამოსახვა

$z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვი (a ; b) ნამდვილი რიცხვების წყვილის საშუალებით მოიცემა და ეს რიცხვების წყვილი საკოორდინატო სიბრტყეზე განსაზღვრულ წერტილს შეესაბამება. $z = a + bi$ როცხვს $A(a; b)$ წერტილი შევესაბამოთ და $A(z)$ სახით აღვნიშნოთ. საკოორდინატო სიბრტყის თითოეული წერტილი ერთ კომპლექსურ რიცხვს გამოსახავს და პირიქით, თითოეული კომპლექსური რიცხვი საკოორდინატო სიბრტყეზე ერთ წერტილს შეესაბამება.

ნამდვილი რიცხვების შესაბამისი წერტილები აბსცისთა ღერძზე, წმინდა წარმოსახვითი რიცხვების შესაბამისი წერტილები ორდინატთა ღერძზე მდებარეობს, ამიტომაც აბსცისთა ღერძს ნამდვილი ღერძი, ორდინატთა ღერძს წარმოსახვითი ღერძი, საკოორდინატო სიბრტყეს კი კომპლექსური სიბრტყე ეწოდება.

ნიშეშე.



შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი წერტილები აბსცისთა ღერძის მიმართ სიმეტრიულად მდებარეობენ.

სასწავლო დაგვლებები

1. ააგეთ კომპლექსურ სიბრტყეზე მოცემული რიცხვის შესაბამისი წერტილი.
ა) $3 + 2i$ ბ) $-2 + i$ გ) $3i$ დ) -3 ე) $2 - i$
2. $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიულად ნაჩვენები $M(a; b)$ წერტილის სათავეს კოორდინატთა სათავეში მდებარე $\vec{OM} = \langle a; b \rangle$ ვექტორის ბოლოს სახითაც შეიძლება განვიხილოთ.

საკოორდინატო სიბრტყეზე აღვნიშნოთ $z_1 = 1 + 2i$ რიცხვის შესაბამისი A წერტილი და $z_2 = 3 + i$ რიცხვის შესაბამისი B წერტილი. იპოვეთ $z_1 + z_2$ ჯამი და $\vec{OA} + \vec{OB}$ ვექტორი. შედეგები შეადარეთ.
3. ასახეთ კომპლექსურ სიბრტყეზე მოცემული პირობის დამაკმაყოფილებელი წერტილების სიმრავლე.
ა) $\text{Im } z = 2$ ბ) $\text{Re } z = 3$ გ) $\text{Im } z \geq 0$
4. კომპლექსურ სიბრტყეზე აღვნიშნეთ $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$, $z_4 = 1 + 3i$ რიცხვების შესაბამისი A, B, D წერტილები. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის C წვეროს შესაბამისი z_3 რიცხვი.

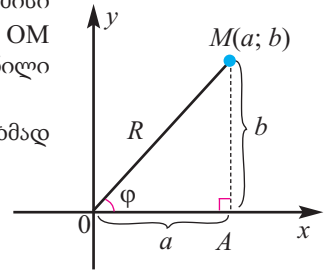
კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე

სიბრტყეზე $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი წერტილი არის $M(a; b)$. ავლნიშნოთ OM მანძილი R -ით, OM სხივით აბსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებასთან შექმნილი კუთხე φ -ით.

გასაგებია, რომ $\triangle OMA$ -დან პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ:

$$R^2 = a^2 + b^2$$

საიდანაც $R = \sqrt{a^2 + b^2}$



კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილს კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება და $|z|$ სახით აღინიშნება:

$$|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

φ მოზრუნების კუთხეს, რომლის დამამთავრებელი გვერდიც არის OM სხივი $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ეწოდება.

$\triangle OMA$ -დან: $\cos \varphi = \frac{a}{R}$ $\sin \varphi = \frac{b}{R}$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$

მოცემული $z = a + bi$ რიცხვის მოდული ერთმნიშვნელოვნად განისაზღვრება, φ არგუმენტი კი 2π სიზუსტით მოიძებნება. ანუ არგუმენტის მნიშვნელობებიდან თუ ერთი არის φ , დანარჩენი მნიშვნელობები $\varphi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) სახისაა.

კომპლექსური რიცხვის არგუმენტად, როგორც წესი $[0; 2\pi)$ შუალედში არსებულ კუთხეს ავიღებთ.

მაგალიტი 1. იპოვეთ $z = \sqrt{3} + i$ კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი.

ამოხსნა: რადგან $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ ამიტომ

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ და

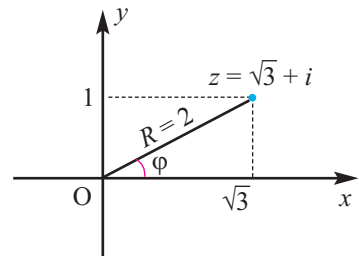
φ კუთხე I მეოთხედშია ვპოულობთ $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

$\cos \varphi = \frac{a}{R}$, $\sin \varphi = \frac{b}{R}$ ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$a = R \cos \varphi, \quad b = R \sin \varphi$$

მაშინ $z = a + bi = R \cos \varphi + i \cdot R \sin \varphi = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ გამოსახულებას მისი ტრიგონომეტრიული სახე ეწოდება.



კერძო შემთხვევებში, $z = a + bi$ რიცხვის მოდულისა და არგუმენტისათვის მივიღებთ:

თუ $b = 0$, $a > 0$, მაშინ $R = a$, $\varphi = 0$

თუ $b = 0$, $a < 0$, მაშინ $R = |a|$, $\varphi = \pi$

თუ $a = 0$, $b > 0$, მაშინ $R = b$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

თუ $a = 0$, $b < 0$, მაშინ $R = |b|$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე

მაგალიტი 2. $z = -1 + \sqrt{3}i$ კომპლექსური რიცხვი დაწერეთ ტრიგონომეტრიული სახით.

ამოხსნა:

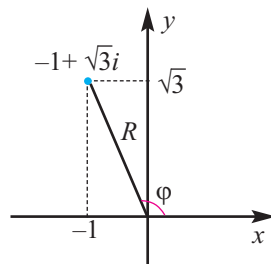
$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

ვინაიდან φ კუთხე II მეოთხედის კუთხეა:

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$



სასწავლო დაფალებები

1. მოცემული რიცხვები ასახეთ კომპლექსურ სიბრტყეზე. იპოვეთ მოდული და არგუმენტი.

ა) $6i$ ბ) $-2i$ გ) $-4i + 4$ დ) $3 + 6i$

2. უჩვენეთ მოცემული კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი.

ა) i ბ) $2i$ გ) $-3i$ დ) $-2i$
 ე) 1 ვ) -2 ზ) 5 თ) -3
 ი) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ კ) $-\sqrt{3} - i$

3. დაწერეთ მოცემული კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული სახით.

ა) $\sqrt{3} + i$ ბ) $1 + i$ გ) $1 - \sqrt{3}i$ დ) $-\sqrt{3} - i$

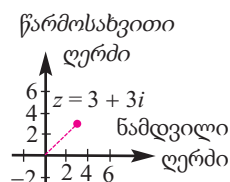
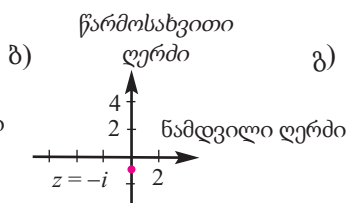
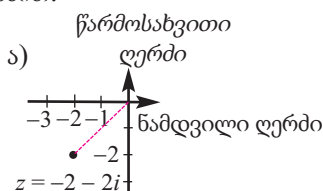
4. დაწერეთ ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვი ალგებრული სახით.

ა) $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ ბ) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

5. მოცემული რიცხვი დაწერეთ ტრიგონომეტრიული სახით.

ა) $\frac{1-i}{1+i}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ გ) $4\left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}\right)$

6. გეომეტრიული გამოსახულებების მიხედვით დაწერეთ რიცხვები ტრიგონომეტრიული სახით.



მოქმედებები ტრიგონომეტრიული სახით მოცემულ კომპლექსურ რიცხვებზე

ვიპოვოთ ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული $z_1 = R_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ და $z_2 = R_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი.

$$z_1 \cdot z_2 = R_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot R_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = R_1 \cdot R_2 (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)) = R_1 \cdot R_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის მოსაძებნად ამ რიცხვების მოდულები მრავლდება და არგუმენტები იკრებება.

ნამუშაუ. თუ $z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

$$z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}), \text{ მაშინ}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})) = 6(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 6 \cdot (0 + i \cdot 1) = 6i$$

ახლა კი ვიპოვოთ $\frac{z_1}{z_2}$ შეფარდება.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{R_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{R_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 - (i \sin \varphi_2)^2} = \\ &= \frac{R_1}{R_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned}$$

შეფარდების მოდული გასაყოფისა და გამყოფის მოდულების შეფარდების, არგუმენტი კი გამყოფისა და განყოფის არგუმენტების სხვაობის ტოლია.

ნამუშაუ. თუ $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

$$z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}), \text{ მაშინ}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2} (\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})) = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}) =$$

$$= \sqrt{3} + i$$

რადგან $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ რიცხვის n -ური ნატურალური ხარისხი თითოეული z -ის ტოლი n რადენობის მამრავლის ნამრავლია

$$z^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

კომპლექსური რიცხვის n -ური ხარისხიდან ნატურალურმაჩვენებლიანი მოდული ფუძის მოდულის n -ური ხარისხის, ამ ხარისხის არგუმენტი კი ფუძის არგუმენტის n -ის ჯერადის ტოლია.

ნამუშაუ. თუ $z = 2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$, მაშინ

$$z^4 = 2^4 \cdot (\cos \frac{4\pi}{12} + i \sin \frac{4\pi}{12}) = 16(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 16 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i) = 8 + 8\sqrt{3}i$$

მოქმედებები ტრიგონომეტრიული სახით მოცემულ კომპლექსურ რიცხვებზე

სასწავლო დაფალებები

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ და $z_2 = 1 + i$ რიცხვები წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული სახით. იპოვეთ:
ა) $z_1 \cdot z_2$ ნამრავლი ბ) $\frac{z_1}{z_2}$ განაყოფი.

2. გამოთვალეთ.

ა) $(1 + \sqrt{3}i)^{12}$ ბ) $(1 - i)^{38}$

3. იპოვეთ $(\frac{z_1}{z_2})^6$, თუ $z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ და $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

4. იპოვეთ $(z_1 \cdot z_2)^{12}$, თუ $z_1 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ და $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$

5. გამოთვალეთ.

ა) $\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$ ბ) $\frac{(1+\sqrt{3}i)^9}{(1-i)^8}$

6. $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ ფორმულას მუავრის ფორმულა ეწოდება. ამ ფორმულის დახმარებით n -მაგი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის ერთმაგი კუთხის სინუსითა და კოსინუსით გამოსახვა შეიძლება.

მაგალითად, როცა $n = 2$ მივიღებთ:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$$

საიდანაც

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$$

ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობის პირობის თანახმად მივიღებთ:

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

ანალოგიური წესით დაწერეთ ფორმულები $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$ -სათვის..

7. დაწერეთ ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვები ალგებრული სახით.

ა) $2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ ბ) $5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

გ) $3(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$

8. შეასრულეთ მოქმედებები. შედეგები წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული სახით.

ა) $[3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})][4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]$ ბ) $\frac{\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ}$

ბ) $[\frac{3}{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})][6(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]$ დ) $\frac{5(\cos 4,3 + i \sin 4,3)}{4(\cos 2,1 + i \sin 2,1)}$

n -ური ხარისხის ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან

იპოვეთ $\sqrt[n]{1}$ გამოსახულების მნიშვნელობები.

$1 = \cos 0 + i \sin 0$ სახით დაწეროთ და მოვმეზნოთ n -ური ხარისხიდან ფესვი $\sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \theta + i \sin \theta$ სახით.

ორივე მხარე ავიყვანოთ n -ურ ხარისხში:

$$\begin{aligned} \cos 0 + i \sin 0 &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n & \cos 0 + i \sin 0 &= \cos n\theta + i \sin n\theta \\ \text{აქედან} & & \cos n\theta &= \cos 0 & \sin n\theta &= \sin 0 \end{aligned}$$

თუ ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული ორი რიცხვი ტოლია, მათი მოდულები ტოლია, ხოლო არგუმენტები $2\pi k$ -ით განსხვავდება.

მაშასადამე,
$$n\theta = 0 + 2\pi k \quad \theta = \frac{2\pi k}{n}$$

ასე რომ,
$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$$

სადაც, როცა $k \geq n$ მიღებული გამოსახულებები k -ს პირველი n მნიშვნელობისას მიღებულ გამოსახულებებთან იგივეა. თუ ერთეულის n -ური ხარისხის ფესვებს ავნიშნავთ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ -ით მივიღებთ:

$$k = 0 \quad \varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1 \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

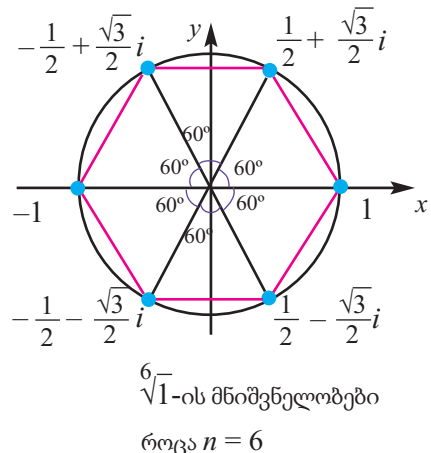
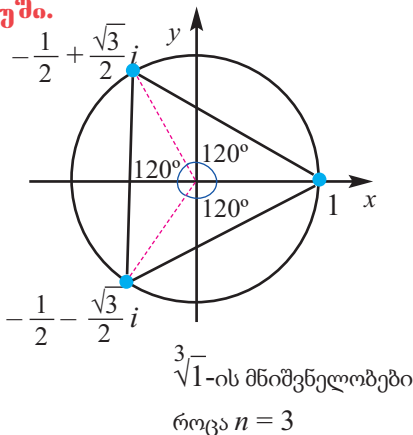
$$k = 2 \quad \varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}$$

.....

$$k = n - 1 \quad \varepsilon_{n-1} = \cos \frac{2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-1)}{n}$$

როგორც ხედავთ, ერთეულის n -ური ხარისხიდან ფესვების მოდულები 1-ის ტოლია, არგუმენტები ერთმანეთისაგან $\frac{2\pi}{n}$ -ის ჯერადობით განსხვავდება ანუ ეს რიცხვები ცენტრის კოორდინატა სათავეში მდებარე ერთეულრადიუსიან წრეწირში ჩახაზული წესიერი n -კუთხედის წვეროს წერტილების შესაბამისი კომპლექსური რიცხვებია.

ნამუშაუ.



***n*-ური ხარისხის ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან**

z კომპლექსური რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფესვი ეწოდება ისეთ w რიცხვს, რომ $w^n = z$.
თუ $z \neq 0$, n -ური ხარისხის ფესვი n რადენობის სხვადასხვა მნიშვნელობას იღებს.

$$z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ სახით ჩავწერთ.}$$

რადგან $w^n = z$ მივიღებთ:

$$z = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობის თანახმად მივიღებთ:

$$r^n = R, \quad r = \sqrt[n]{R}$$

$$n\theta = \varphi + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

როცა $k > n$, მიღებული მნიშვნელობები პირველი n მნიშვნელობებისაგან 2π -ით განსხვავდება.

$$\text{ამიტომაც} \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \text{ უნდა იყოს.}$$

კომპლექსური რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფესვის ფორმულა

თუ $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, მაშინ

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \text{ სადაც } (k = 0, 1, \dots, (n-1))$$

ნიმუში. იპოვეთ $\sqrt[3]{-8}$ -ის ყველა მნიშვნელობა.

ამოხსნა: $\sqrt[3]{-8} = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ ჩავწერთ. $-8 = R^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$

$$8(\cos \pi + i \sin \pi) = R^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$$\text{აქედან } R^3 = 8, \quad R = 2$$

$$3\theta = \pi + 2\pi k \quad \theta = \frac{\pi + 2\pi k}{3} \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$\text{როცა } k = 0, \text{ მაშინ } w_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{როცა } k = 1, \text{ მაშინ } w_1 = 2 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + 0 \cdot i) = -2$$

$$\text{როცა } k = 2, \text{ მაშინ } w_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 1 - \sqrt{3}i$$

სასწავლო დავალებები

1. იპოვეთ გამოსახულების ყველა მნიშვნელობა. ა) $\sqrt[4]{1}$ ბ) $\sqrt[4]{16}$ გ) $\sqrt[4]{81}$
2. ერთეულის n -ური ხარისხიდან ფესვების მიხედვით დაწერეთ ქვემოთ მოცემული გამოსახულებების ყველა მნიშვნელობა.
ა) $\sqrt[3]{64}$ ბ) $\sqrt[6]{64}$ გ) $\sqrt[3]{27}$ დ) $\sqrt[3]{-8}$
3. იპოვეთ გამოსახულების ყველა მნიშვნელობა.
ა) $\sqrt[3]{-1}$ ბ) $\sqrt[6]{-64}$ გ) $\sqrt[6]{-8i}$ დ) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$
4. ამოხსენით განტოლებები.
ა) $z^4 - 16 = 0$ ბ) $z^3 = 8$ გ) $z^4 + 1 = 0$
5. ამოხსენით განტოლებები.
ა) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$ ბ) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

განმაზოგადებელი დაგალებები

1. გაამარტივეთ. დაწერეთ შედეგი $a + bi$ სახით.

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline (5 - 6i) + (3 + 2i) & (4 - \frac{1}{2}i) - (9 + \frac{5}{2}i) & \frac{1 + 4i}{3 + 2i} & \frac{3 + 2i}{1 - 4i} \\ \hline (2 + 5i) \cdot (4 - i) & (1 - 2i) \cdot (8 - 3i) & & \\ \hline \end{array}$$

2. იპოვეთ კომპლექსური რიცხვების კვადრატული ფესვები.

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline 2i & -3i & 2 - 2i & 1 + \sqrt{3}i \\ \hline 5i & -6i & 2 + 2i & 1 - \sqrt{3}i \\ \hline \end{array}$$

3. დაწერეთ მოთხოვნილი ხარისხის ფესვები.

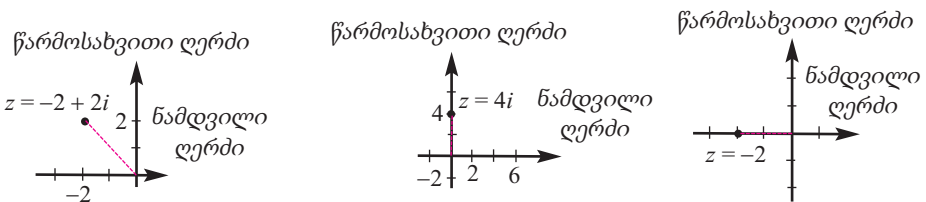
1) კუბური ფესვები:

ა) $-4\sqrt{2}(1 - i)$ ბ) $64i$ გ) -27 დ) 1000

2) მე-4 ხარისხის ფესვები:

ა) 1 ბ) i გ) $128(-1 + i)i$

4. დაწერეთ კომპლექსური რიცხვები ტრიგონომეტრიული სახით.



5. კომპლექსური რიცხვები გამოსახეთ გრაფიკულად და დაწერეთ ალგებრული სახით.

$$\begin{array}{|l|l|} \hline 3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) & 8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \\ \hline 5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) & 7(\cos 0 + i \sin 0) \\ \hline \frac{3}{2}(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) & \frac{1}{4}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) \\ \hline \end{array}$$

6. შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\begin{array}{|l|l|} \hline [2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})][6(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})] & \frac{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ} \\ \hline [\frac{3}{4}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})][4(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})] & \frac{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}{4(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)} \\ \hline \end{array}$$

7. $E = I \cdot Z$ ფორმულა ელექტრო-საინჟინრო მოწყობილობების მუშაობაში გამოიყენება. სადაც E ძაბვას, I სიმძლავრეს, Z კომპლექსურ კავშირს გამოსახავს. თითოეული ცვლადის მნიშვნელობა კომპლექსური რიცხვია. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადი.

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline I = 10 + 2i & I = 2 + 4i & E = 15 + 12i & E = 12 + 24i \\ \hline Z = 4 + 3i & E = 5 + 5i & Z = 25 + 24i & Z = 12 + 20i \\ \hline \end{array}$$

**ერთობლიობა და შერჩევა
შემთხვევითი შერჩევა და სახეები
ინფორმაციის წარდგენა
ბინომიალური დანაშალი
ბერნულის ცდები**

ეს საინტერესოა. ჟურნალ “The Literary Digest”- მა ამერიკის პრეზიდენტის არჩევნების შედეგების წინასწარ პროგნოზირებაში დიდი ავტორიტეტი მოიხვეჭა. მათ ბოლო ხუთი პრეზიდენტის არჩევნების შედეგების მცირე ცდომილებით არჩევნების წინ პროგნოზირება შეძლეს. თუმცა 1936 წელს რესპუბლიკელების კანდიდატის ალფ ლანდონის დემოკრატების კანდიდატ ფრანკლინ დ. რუზველტთან დიდი სხვაობით გამარჯვების პროგნოზირებაში დიდი შეცდომა დაუშვეს. მიზეზი კი ჟურნალის ჩატარებულ გამოკითხვაში რესპოდენტების არასწორი შერჩევა იყო. გამოკითხვა ჟურნალის მკითხველებს შორის იყო ჩატარებული. შემდგომში ცნობილი გახდა, რომ მკითხველებს შორის რესპუბლიკელთა პარტიის წევრები უმრავლესობას შეადგენენ.



ერთობლიობა და შერჩევა. შემთხვევითი შერჩევა და სახეები

სტატისტიკისა და ალბათობის შესახებ ძირითადი ცნებები თანამედროვე სამყაროში მიმდინარე პროცესების უფრო უკეთესად აღქმაში გვეხმარება. ორივე სფეროში გამოკვლევა ობიექტის მომცველ ერთობლიობასა და ერთობლიობაში შემავალ შერჩეულ ნიმუშს ან მოკლედ შერჩევად წოდებულ წვრილ ჯგუფებს ეფუძნება. სტატისტიკაში შერჩეულ ნიმუშზე ჩატარებული გამოკვლევის მიხედვით გამოითქმება მოსაზრება ერთობლიობის შესახებ.



სტატისტიკური გამოკითხვების ჩატარებისას ნიმუშები როგორც წესი შემთხვევითი შერჩევის წესით ფორმირდება. ამ შემთხვევაში ერთობლიობაში შემავალი თითოეული ნიმუშის შერჩევის შანსი ტოლია. შემთხვევითი შერჩევის ტექნიკაც სხვადასხვაა.

- მარტივი შემთხვევითი შერჩევა
- სისტემატიზირებული შემთხვევითი შერჩევა
- კლასტერული შემთხვევითი შერჩევა
- ფენოვანი შემთხვევითი შერჩევა

მარტივი შემთხვევითი შერჩევა. დავუშვათ, რომ კლასში 3-მოსწავლიანი ჯგუფის შექმნაა საჭირო. ამისათვის ყველა მოსწავლის სახელდაწერებული ბარათები ჩაიყრება ყუთში და შემთხვევით სამი მათგანის სახელი ამოდის. ამ შემთხვევაში ყველა სამეულის ჯგუფების შერჩევის შანსები ტოლია.

მარტივი შემთხვევითი შერჩევის დროს n ელემენტის შერჩევისას თითოეული ელემენტის შერჩევის შანსი ერთი და იგივეა.

სისტემატიზირებული შერჩევა. დავუშვათ მსხვილი სავაჭრო ცენტრის ხელმძღვანელობას სურს მოიპოვოს ინფორმაცია იმის შესახებ, თუ დაახლოებით რამდენ ხანს რჩება სავაჭროდ შემოსული მყიდველი სავაჭრო ცენტრში. გარკვეული იქნა, რომ დღის განმავლობაში ცენტრში შემოდის დაახლოებით 2000 მყიდველი და მათი 5% (100 კაცი) ნიმუშად შერჩევის შესახებ მიღებული იქნა გადაწყვეტილება. ამ პიროვნებების როგორი შერჩევა იქნება უფრო სამართლიანი? ამ პიროვნებების შერჩევა დღის განმავლობაში ცენტრში მოსულების ყოველი 20 პიროვნებიდან ერთის მოსაზრების გამოკითხვით შეიძლება ჩატარდეს. მაგალითად პირველი 20 მყიდველიდან მე-16 პიროვნების გამოკითხვა, შემდეგ 36-ე, 56-ე და ა.შ. პიროვნებები გამოიკითხება. ამნაირ შერჩევას სისტემატიზირებული შერჩევა ეწოდება.

სისტემატიზირებული შერჩევისას თუ $k\%$ -იანი შერჩევა არის გათვალისწინებული, ერთობლიობიდან ყოველი მე- $\left[\frac{100}{k}\right]$ ელემენტი გამოიყენება.

კლასტერული შერჩევა. დეტალების 1000 ყუთიდან თითოეულში 15 დეტალია. საჭიროა ინფორმაციის მიწოდება მათი ხარისხიანობის შესახებ. მიღებულ იქნა გადაწყვეტილება, რომ ამ მიზნით შემოწმდეს 300 დეტალი (5%). ყველა ყუთის გახსნა, ამ დეტალების არევა და შემთხვევითი 300 დეტალის შერჩევა დიდ დროსა და დანახარჯს მოითხოვს. შეიძლება 1000 ყუთიდან შემთხვევითი შერჩევით შეირჩეს 20, ამ ყუთებში არსებული დეტალები შემოწმდეს და გამოითქვას მოსაზრება ყველა დეტალის შესახებ. აქ თითოეული ყუთი ერთი კლასტერია. ასეთი სახის შერჩევას **კლასტერული შერჩევა** ეწოდება.

თითოეულ კლასტერში შემავალი ყველა ელემენტი უნდა შემოწმდეს.

კლასტერული შერჩევისას ერთობლიობა შედგება კლასტერებისაგან. კლასტერებიდან ხდება შემთხვევითი შერჩევა და შერჩეული კლასტერის ყველა ელემენტის გამოკვლევა.

ფენოგანი (შრეობრივი) შერჩევა. დავუშვათ, რომ სკოლაში მაღალი კლასის მოსწავლეებს შორის იგეგმება გამოკითხვა: “გაკვეთილების შემდეგ სკოლის ბიბლიოთეკაში დარჩენისა და მხატვრული ლიტერატურის წაკითხვის სურვილი გექნებოდათ?” ამ კითხვით სკოლის ეზოში შემთხვევით შერჩეული მოსწავლეებს შორის გამოკითხვის ჩატარება არ არის მიზანშეწონილი. ამ დროს ეს მოსწავლეები შეიძლება ერთი და იგივე კლასელები იყვნენ და ა.შ. გამოკითხვა თითოეული ასაკობრივი ჯგუფიდან შემთხვევით შერჩეულ მოსწავლეებს შორის უნდა ჩატარდეს. ამნაირი შემთხვევითი შერჩევა **ფენოგანი (ჯგუფური) შერჩევა** ეწოდება. თუ სკოლის ამ კლასებში 1265 მოსწავლეა, მათ შორის 385 მე-8 კლასელია, 350 მოსწავლე მე-9, 280 მოსწავლე, მე-10, 250 მოსწავლე მე-11 კლასელი და 10% შემთხვევით შერჩეული მოსწავლის მოსაზრება შეისწავლება, თითოეული კლასიდან შემთხვევითი შერჩევით 10%-ის მოსაზრება უნდა იქნას შესწავლილი. ამიტომ მიზან-შეწონილია 39 მე-8, 35 მე-9, 28 მე-10 და 25 მე-11 კლასის მოსწავლე შერჩეული იქნას შემთხვევითი შერჩევის წესით.

ფენოგანი შერჩევისას ჯერ ერთობლიობა იყოფა ფენებად, შემდეგ თითოეული ფენიდან ხდება შემთხვევითი შერჩევა.

ზოგჯერ გამოკვლევისათვის შეუძლებელია შემთხვევითი შერჩევა. მაგალითად, დიეტოლოგმა რაიმე დეტალისათვის მენიუ შემთხვევით არ უნდა შეარჩიოს. ისინი შერჩევას ახდენენ ნებაყოფლობით მსურველთა შორის.

სწორი შერჩევა და მცდარი შერჩევა

გამოკითხვის მწარმოებელ ორგანიზაციებს არ გააჩნიათ არც ფინანსური და არც ტექნიკური შესაძლებლობები იმისა, რომ გამოსაკვლევ თემასთან დაკავშირებით, ყველა ამ თემასთან დაკავშირებული პიროვნების მოსაზრება შეისწავლოს, ამიტომ ისინი მცირე ჯგუფების მოსაზრებების შესწავლით კმაყოფილდებიან. ჩატარებულ გამოკითხვაში ამ ჯგუფების სწორად განსაზღვრის მნიშვნელობა დიდია. მაგალითად, სპორტულ კომპლექსში მოსული პიროვნებების მიხედვით იმის განსაზღვრა, თუ მთელი ქალაქის მოსახლეობა კვირაში რამდენჯერ არის დაკავებული სპორტით შეუძლებელია ან კიდევ რომელიმე პიროვნების პარლამენტში დეპუტატად არჩევის შესახებ მის სამუშაო კოლექტივში ან საცხოვრებელ ტერიტორიაზე გამოკვლევის ჩატარებით მცდარ პროგნოზს მივიღებთ.

ერთობლიობა და შერჩევა. შემთხვევითი შერჩევა და სახეები

1. მოცემულ ინფორმაციებში განსაზღვრეთ ერთობლიობა და შერჩევა.
 - ა) იმის შესახებ თუ, ქალაქის მერის თანამდებობაზე არჩევნებში 3 კანდიდატიდან რომელს აირჩივენ შესწავლილი იქნა 2000 პირის მოსაზრება.
 - ბ) 300 კგ თეთრი ფქვილისა და 50 კგ შავი ფქვილის არევის შემდეგ პურს აცობენ. 1 კგ ფქვილისაგან 3 პური ცხება, 70 პურიდან ნიმუშია აღებული.
 - გ) ფერმერმა 4 აუზში მოთავსებული ქორჭილა თევზის მასის მატების შემოწმებისათვის, თითოეული აუზიდან 30 თევზის მასა შეამოწმა.
 - დ) გამყიდველმა მაღაზიაში შემოსული ყოველი 10 მყიდველიდან ერთზე გათვლით, 40 მყიდველს ახალი ყველის გემოს გასინჯვა შესთავაზა.
 - ე) ექიმი დიეტოლოგი 70 წელზე მეტი ასაკის 12 ქალბატონის ნებაყოფლობით ორი კვირის განმავლობაში ყოველ დილით მის კლინიკაში მოსვლასა და ბოჭკოებით მდიდარი ბუტერბროდების მირთმევას სთხოვს.
2. ქვემოთ მოცემულებიდან რომელია სწორი შერჩევა?
 - ა) კლასში მორიგის შერჩევისათვის მოსწავლეების სახელები ქაღალდზე დაიწერა, ყუთში ჩაიყარა და ხუთი სახელი ყუთიდან ამოღებულ იქნა.
 - ბ) მე-10^ა კლასის მოსწავლეების მშობლებს შორის ჩატარებული გამოკითხვის მიხედვით შეირჩა სკოლის ფორმის ფერი და მოდელი.
 - გ) ქალაქის სატელეფონო ნომრების წიგნაკში ყოველი თხუთმეტიდან ერთისათვის დარეკვით შესწავლილ იქნა, რომელი კანდიდატისათვის იქნება ხმა მიცემული.
3. სწორი და არასწორი შერჩევის სიტუაციების შესახებ ერთი ნიმუშიც თქვენ დაწერეთ.
4. განსაზღვრეთ თითოეულ სიტუაციაში რომელი შემთხვევითი შერჩევის ტექნიკა იქნა გამოყენებული.
 - ა) საჭაერო საგზაო კომპანია თვითმფრინავში ამოსული ყოველი 5 მგზავრიდან ერთს საჩუქარი გადასცა.
 - ბ) სკოლაში შემთხვევით შერჩეული 5 სხვადასხვა კლასიდან შემთხვევით შერჩეული 20 მოსწავლე სკოლაში მათემატიკის სწავლების დონის შემოწმებისათვის შეირჩა.
 - გ) ავიაკომპანია მომსახურების დონის შემოწმებისათვის შემთხვევით შერჩეული 5 რეისის მგზავრების მოსაზრება შეისწავლა.
 - დ) გამოკვლევის დროს შემთხვევით შერჩეული 5 მამაკაცისა და 5 ქალის გადაწყვეტილება გამოიკითხა.
 - ე) დიეტოლოგებმა აცნობეს, რომ 30-40, 40-50, 50-60 წლოვანთა თითოეული ჯგუფიდან არანაკლებ 15 პიროვნებაზე დაკვირვების წარმოების შემდეგ იქნება შესაძლებელი დაბალგლუკოზიანი შემადგენლობის ახალი დიეტების შესახებ მოსაზრების გამოთქმა.

ერთობლიობა და შერჩევა. შემთხვევითი შერჩევა და სახეები

5. სახლების გაყიდვების მენეჯერი ერთ ქუჩაზე 10 სახლის ახალი ფასდაკლების კამპანიის შესახებ ინფორმაციის გავრცელებას გეგმავს. ქუჩაზე 100 სახლია. მენეჯერმა ჯერ 1 და 10 ნომერი სახლები აღნიშნა და ერთ-ერთ მათგანში დარეკა. მაგალითად მე-8, შემდეგ ყოველ მე-10 სახლში დარეკა ანუ მე-18, 28-ე და ა.შ.

- ა) შერჩევის რომელ ტექნიკას მიეკუთვნება მენეჯერის ამგვარი შერჩევა?
 ბ) ყველა სახლის შერჩევის შანსი ერთნაირია?
 გ) რით განსხვავდება ეს ტექნიკა მარტივი შერჩევის ტექნიკისაგან?

6. სკოლის ხელმძღვანელობა მოსწავლეების მეთემატიკასა და საბუნებისმეტყველო საგნების ნიშნებს შორის კავშირის გამოკვლევას გეგმავს. სკოლის 800 მოსწავლიდან 350-მა მონაწილეობა მიიღო როგორც მათემატიკის, ისე საბუნებისმეტყველო საგნებში ჩატარებულ შეფასებებში. მათგან შემთხვევითი შერჩევით 70 პირის სპეციალურ შეფასებაზე მოწვევა იგეგმება.

კლასები	მოსწავლეების რაოდენობა
მე-8 კლასი	90
მე-9 კლასი	100
მე-10 კლასი	75
მე-11 კლასი	85

- ა) ცხრილში მოცემული ინფორმაციის მიხედვით განსაზღვრეთ შემთხვევითი შერჩევით რომელი კლასიდან რამდენი მოსწავლის შერჩევა არის მიზანშეწონილი?

- ბ) რომელი შერჩევის ტექნიკა არის აქ გამოყენებული?

მითითება. თითოეული კლასიდან შერჩევის რაოდენობა საერთო რაოდენობის პროპორციული უნდა იყოს. მე-8 კლასის წარმომადგენელთა რაოდენობა: $\frac{x}{70} = \frac{90}{350}$

7. ჯგუფების შექმნისათვის 1-დან 5-მდე ციფრებდაწერილი ბარათები ერთი პიროვნების მიერ სპორტსმენებზე იქნა გადაცემული. ერთი და იგივე ციფრების მიმღები სპორტსმენები ერთ ჯგუფში გაერთიანდნენ. ეს შერჩევა შემთხვევითი შერჩევაა? შერჩევის სამართლიანობაში დარწმუნება შეიძლება? უფრო გამჭვირვალე რომ ყოფილიყო, თქვენ როგორ მოახდენდით შერჩევის ორგანიზებას?

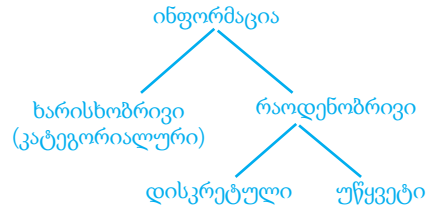
8. კომპანია “Micro Tik” ყოველთვიურად 14500 კომპიუტერის პროცესორს ამზადებს. ამ თვეში წარმოებული პროცესორებიდან შემთხვევითი შერჩეული 2000 ცალიდან 8-ში წუნი გამოვლინდა.

- ა) განსაზღვრეთ ამ შემთხვევაში ერთობლიობისა და შერჩევის საზომი.
 ბ) მოცემული ინფორმაციის თანახმად, ამ თვეში წარმოებული პროცესორებიდან რამდენზე შეიძლება ითქვას, რომ იყო წუნიანი?

9. იმისათვის, რომ ჩატარებულიყო გამოკითხვა თემაზე: “საიდან იღებთ ახალ ამბებს?” შემთხვევითი შერჩევით რესპუბლიკის 5 რაიონი, თითოეული რაიონიდან 5 სოფელი და თითოეული სოფლიდან 20 ოჯახი შეირჩა. განსაზღვრეთ ერთობლიობა და შერჩევა. რომელი შერჩევის ტექნიკას მიეკუთვნება ეს?

ინფორმაციის წარდგენა

სტატისტიკური ინფორმაციები რაოდენობრივი და ხარისხობრივი ხასიათის მიხედვით ორ ჯგუფად იყოფა. **რაოდენობრივი ტიპის ინფორმაციები** რიცხვითი მნიშვნელობებით გამოისახება. მაგალითად, “რამდენი საათია სპორტით დაკავებული”, “რისი ტოლია სიმაღლეები” და სხვა. ხარისხობრივი ტიპის ინფორმაციები კი კატეგორიულად იყოფა. ამ ინფორმაციებს **კატეგორიალური ინფორმაციებიც** ეწოდება. მაგალითად, “პარტიების დასახელება”, “თვალების ფერი”, “ავტომობილის მარკა” და ა.შ.



რაოდენობრივი ტიპის ინფორმაციები - რიცხვითი ინფორმაციები თავის მხრივ იყოფა ორ სახედ: ა) დისკრეტული, წყვეტილი რიცხვითი ინფორმაციები; ბ) უწყვეტი რიცხვითი ინფორმაციები.

დისკრეტულ რიცხვით ინფორმაციებს დათვლით განსაზღვრული ინფორმაციები მიეკუთვნება. მაგალითად, ავტობუსში მგზავრების რაოდენობა 1, 2, 3 და ა.შ. მნიშვნელობას იძენს.

უწყვეტი რიცხვითი ინფორმაციები განსაზღვრულ დიაპაზონში ცვლად მნიშვნელობებს იძენენ, როგორც წესი გაზომვის შედეგად წარმოიქმნებიან. მაგალითად, ახალშობილთა სიმაღლე, მასა და სხვა.

ინფორმაციების წარმოდგენისათვის მნიშვნელოვანია შესაბამისი გრაფიკული ფორმის შერჩევა. ამიტომაც კატეგორიალური და რიცხვითი ინფორმაციების წარმოდგენისათვის შესაბამისი გრაფიკული ფორმის შერჩევა უნდა მოხდეს.

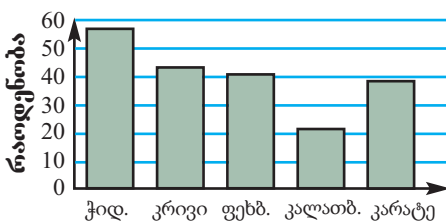
კატეგორიალური ინფორმაციისათვის მიზანშეწონილი წარდგენის ფორმები

ნიმუში 1. 200 მოსწავლეს შორის ჩატარდა გამოკითხვა იმის შესახებ, თუ სპორტის რომელი სახეობა უფრო მეტად უყვართ. ვინაიდან გამოკვლევა ეხება სპორტის სახეებს ინფორმაცია კატეგორიალურია. სკოლაში არსებობს ცნობილ სახელიანი სპორტული სექციები. კატეგორიალური ინფორმაციის წარდგენისათვის ხელსაყრელი ფორმა შეიძლება იყოს სიხშირის ცხრილი. ბარგრაფი, წრიული დიაგრამა.

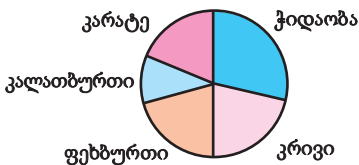
სიხშირის ცხრილი

სპორტის სახეობა	სიხშირე
ჭიდაობა	57
კრივი	43
ფეხბურთი	41
კალათბურთი	21
კარატე	38
ჯამი	200

ბარგრაფი



წრიული დიაგრამა



სეგმენტური ბარგრაფი



განსაზღვრება თითოეულ კატეგორიაში მყოფი საერთოს (ერთეულად მიჩნეულის) რა ნაწილს შეადგენს. ერთეული ამ ნაწილებად-სეგმენტებად იყოფა.

ინფორმაციის წარდგენა

1. 1) დაწერეთ კატეგორიალურად მიჩნეული ინფორმაციის შესაბამისი სამი კატეგორიის სახელი.
 2) ივარაუდეთ და დაწერეთ რიცხვითი ინფორმაციები რომელ ინტერვალში შეიძლება იყოს.
 ა) გაყიდული ავტომობილების რაოდენობა ფერების მიხედვით;
 ბ) დღის განმავლობაში მზიანი საათების რაოდენობა;
 გ) ავადმყოფობის გამო გაცდენილი სასწავლო დღეების რაოდენობა;
 დ) საშინაო დავალების შესრულებაზე დახარჯული დრო (საათებით);
 ე) ერთი ადამიანის მიერ დღის განმავლობაში მიღებული სითხის რაოდენობა.
2. რომელი ინფორმაციები არის დისკრეტული და რომელი უწყვეტი რიცხვითი ინფორმაციები?
 ა) ტემპერატურის ცვლილება ივლისის თვეში;
 ბ) ასანთის კოლოფში ასანთის ჩხირების რაოდენობა;
 გ) მგზავრების მიერ თვითმფრინავის სალონში ატანილი ტვირთის მასა;
 დ) მატარებლის ვაგონებში მგზავრების რაოდენობა;
 ე) ქუჩაში მდგომი შენობების სართულების რაოდენობა;
 ვ) კომპიუტერთან გატარებული დრო.
3. 24 ადამიანს შორის ჩატარდა გამოკითხვა შეკითხვით: “რომელი ფერი უფრო მეტად მოგწონთ?” 6-მა წითელი, 8-მა შავი, 4-მა თეთრი, დანარჩენებმა სხვა ფერები დაასახელეს. მოცემული ინფორმაცია რიცხვითი ინფორმაციაა თუ კატეგორიალური? წარმოადგინეთ ინფორმაცია სიხშირის ცხრილში (ფარდობითი სიხშირის ჩვენებით), წრიული დიაგრამით და ბარგრაფით.
4. საგანგებო შემთხვევათა სამინისტრომ გამოაქვეყნა ინფორმაცია იმის შესახებ, თუ ერთი წლის განმავლობაში რომელი მიზეზების გამო მოხდა ხანძარი. ინფორმაციები მარჯვნივ ცხრილშია ასახული. ცხრილის მიხედვით ააგეთ წრიული დიაგრამა და სეგმენტური ბარგრაფი.

მიზეზი	რაოდენობა
უმეტესლაცურეო მცირეწლოვანი ბავშვები	6
სიგარეტი	4
გაზექურა	10
ელექტროობა	12
გაურკვეველი მიზეზები	8
5. წარმოადგინეთ, რომ თქვენ სკოლაში მოსწავლეებს შორის ატარებთ გამოკითხვას შემდეგი კითხვით: “კომპანიის ლოგოსათვის მოცემული ფორმებიდან რომელს შეარჩევდით?”



 - ა) რომელი ხერხით ჩაატარებდით გამოკითხვას? დაწერეთ.
 - ბ) ერთობლიობად რომელ კლასებს შეარჩევდით?
 - გ) ერთობლიობიდან შერჩევას რომელი ხერხით განახორციელებდით?
 - დ) წინასწარ ივარაუდეთ, რომელი ფორმის ლოგოს შერჩევა მოხდება ემთხვევა თუ არა გამოკითხვის შედეგები თქვენს ვარაუდს?
 - ე) ინფორმაციის რომელი გრაფიკული ფორმით წარდგენა არის ხელსაყრელი? პირობა ინფორმაციებით გამოსახეთ და წარმოადგინეთ.

ინფორმაციის წარდგენა

რიცხვითი ინფორმაციის წარდგენის მიზანშეწონილი ფორმები

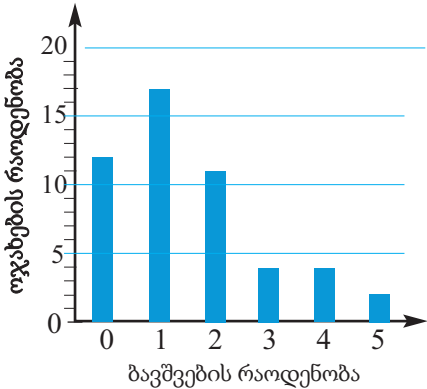
დისკრეტული რიცხვითი ინფორმაციები. შეზღუდული რაოდენობის დისკრეტული რიცხვითი ინფორმაციების წარდგენისათვის მიზანშეწონილია ისეთი წარდგენის ფორმების გამოყენება როგორიცაა **სიხშირის ცხრილი, ბარგრაფი, ჰისტოგრამა და ხისებრ-განტოტვითი.**

ნიმუში 2. 50 ახალგაზრდა ოჯახში ჩატარდა გამოკითხვა იმის შესახებ, თუ რამდენი ბავშვი ჰყავდათ. პასუხები ქვემოთ მოცემულის მსგავსი იყო.

0 1 2 1 0 3 1 4 2 0 1 2 1 0 5 1 2 1 0 0 1 2 1 2 1
0 1 4 1 0 1 2 5 0 4 1 2 3 0 0 1 2 1 3 4 2 3 2 1 0

ზემოთ აღნიშნული რიცხვები უჩვენებს თითოეულ ოჯახში ბავშვების რაოდენობას. გამოკითხვის შედეგები ქვემოთ მოცემული სახით სიხშირეთა ცხრილითა და ბარგრაფით შეიძლება იქნას წარმოდგენილი.

ბავშვების რაოდენობა	ოჯახების რაოდენობა (ჩხირებით)	სიხშირე (ოჯახების რაოდენობა)	ფარდობითი სიხშირე
0	III III II	12	$12 : 50 = 0,24$
1	III III III II	17	$17 : 50 = 0,34$
2	III III I	11	$11 : 50 = 0,22$
3	IIII	4	$4 : 50 = 0,08$
4	IIII	4	$4 : 50 = 0,08$
5	II	2	$2 : 50 = 0,04$



დაჯგუფებული დისკრეტული რიცხვითი ინფორმაციები. ჰისტოგრამა

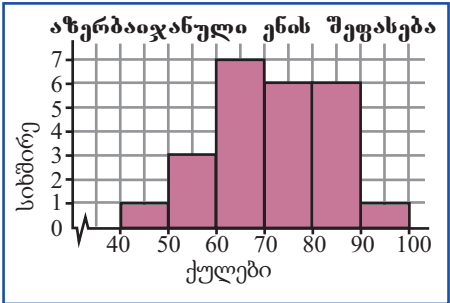
ნიმუში 3. ქვემოთ მოცემულია აზერბაიჯანული ენის საგნის შეფასებაში მოსწავლეების მიერ მოპოვებული ქულები (100 ქულიანი სისტემის მიხედვით).

52 66 75 80 52 48 95 85 84 68 86 82 63 78 75 64 79 81 66 53 76 75 69 65

რიცხვითი ინფორმაციის ცვლილების დიაპაზონია 48-95. ინფორმაცია თითოეული კლასის ზომის 10-ად მიჩნევით 6 კლასად დაჯგუფება შეიძლება: 40-50, 50-60, 60-70, 70-80, 80-90, 90-100. ინფორმაციის შესაბამისად სიხშირის ცხრილი და ჰისტოგრამა ქვემოთ მოცემული სახის იქნება:0

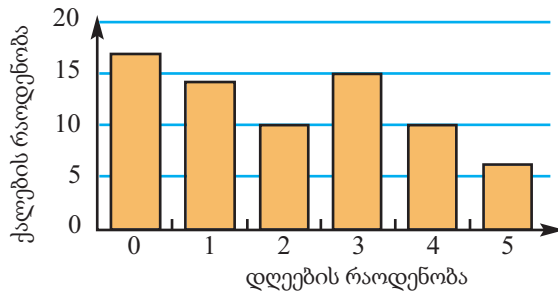
აზერბაიჯანული ენის შეფასება

კლასები	ჩხირი	სიხშირე
[40, 50)	I	1
[50, 60)	III	3
[60, 70)	III II	7
[70, 80)	III I	6
[80, 90)	III I	6
[90, 100)	I	1



ინფორმაციის წარდგენა

6. ქალაქში ქალებს შორის ჩატარდა გამოკითხვა „კვირის განმავლობაში რამდენჯერ მიდიხართ სპორტულ დარბაზში?“ შედეგი ბარგრაფშია მოცემული.
- ა) ეს ინფორმაცია უწყვეტი რიცხვითი ინფორმაციაა თუ დისკრეტული?
- ბ) ამ შემთხვევაში განსაზღვრეთ ერთობლიობა და შერჩევა. ბარგრაფის მიხედვით იპოვეთ შერჩევის ზომა.
- გ) თუ გამოკითხვაში მონაწილეობდა 92 პირი, მათი რამდენი პროცენტი მიდიოდა კვირაში სულ მცირე 2-ჯერ სპორტულ დარბაზში?
- დ) თუ ქალებს შორის ერთი პიროვნება შეირჩევა, რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ იგი კვირაში სპორტულ დარბაზში ერთზე მეტჯერ წამსვლელებიდან იქნება?



7. მაღაზიის მენეჯერმა იმის გასარკვევად თუ კვერცხის ყუთებიდან რამდენი დაზიანდა დაფასებისა და მიტანის დროს, 5 დღის განმავლობაში მაღაზიაში მიღებული ყოველი 1000 ყუთიდან ყოველი 50-ე ყუთი შეამოწმა.
- ა) ინფორმაციის მიხედვით განსაზღვრეთ ერთობლიობა და შერჩევა.
- ბ) რომელ სახეს მიეკუთვნება მენეჯერის შერჩევის ტექნიკა?
- გ) თუ შემოწმების შედეგად სულ მცირე 5 და მაქსიმუმ 20 ყუთის დაზიანება გამოვლინდება, მთლიანობაში სავარაუდოდ რამდენი ყუთი კვერცხის დაზიანებაზე ფიქრი იქნებოდა მართებული?
- დ) ამ ინფორმაციის წარდგენისათვის შეარჩიეთ ორი გრაფიკული ფორმა და წარადგინეთ.
8. კომპიუტერულ თამაშში იუსიფმა ქვემოთ ნაჩვენები ქულები მოაგროვა. დააჯგუფეთ ინფორმაცია კლასებად და ჰისტოგრამით წარმოადგინეთ.

580, 490, 520, 650, 540, 600, 630, 590, 390, 410, 670, 480, 400, 440, 560, 540, 430, 670, 490, 720, 580, 680, 590, 370, 470, 540, 490, 660, 500, 600, 390, 540, 300, 350, 600, 540, 510, 410, 480, 560, 330, 490, 540, 540, 580, 540, 270, 450

9. ცხრილში მოცემულია ინფორმაცია თანამშრომელთა სამუშაოზე გამოუცხადებელი დღეების რაოდენობის შესახებ. ამ ინფორმაციის შესაბამისად ააგეთ ჰისტოგრამა.

1-ზე მეტი 3-ზე ნაკლები ($1 < x < 3$)	24
3-ზე მეტი 6-ზე ნაკლები ($3 < x < 6$)	16
6-ზე მეტი 9-ზე ნაკლები ($6 < x < 9$)	12
9-ზე მეტი 12-ზე ნაკლები ($9 < x < 12$)	6
12-ზე მეტი 15-ზე ნაკლები ($12 < x < 15$)	2
ჯამი	60

ინფორმაციის წარდგენა

ხისებრ-განტოტვითი სქემა. ამ ფორმის გამოყენება ხელსაყრელია, როცა ინფორმაცია მცირე მოცულობისაა. რიცხვითი ინფორმაციის ხისებრ-განტოტვითი სქემით წარდგენა მცირე დროს მოითხოვს და ინფორმაციის განაწილების ფორმის აშკარად დანახვის შესაძლებლობას იძლევა. განაწილების ფორმა გარკვეული სტატისტიკური მაჩვენებლების (მოდა, მედიანა, არითმეტიკული საშუალო, უდიდესი სხვაობა და სხვა) ადვილად მოძებნის საშუალებას იძლევა.

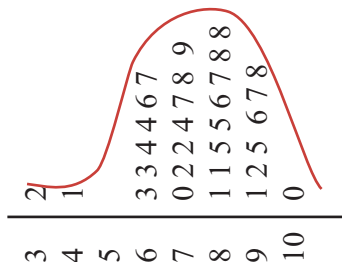
ნიმუში 4. ქვემოთ მოცემული ინფორმაცია ასახავს მოსწავლეების შეფასების შედეგებს.

32, 67, 81, 92, 87, 72, 63, 88, 96, 91, 72, 63, 85, 79, 70,
85, 64, 86, 98, 100, 77, 88, 81, 64, 41, 78, 95, 74, 97, 66

ხისებრ-განტოტვითი სქემა ქვემოთ მოცემული ნაბიჯებით აიგება.

1. ხე (ტანი) და ტოტი ერთმანეთისაგან ვერტიკალური და ჰორიზონტალური წრფით გამოიყოფა.
2. რიცხვითი ინფორმაციის ძირითადი ნაწილი - მაღალ თანრიგში (ან თანრიგებში) ციფრებით ნაჩვენები ინფორმაცია მიიღება, როგორც ხე (ტანი). ამ ნიმუშში ხე ათეულების რაოდენობის მაჩვენებელი რიცხვებია: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 და 10 ტანს შეადგენს და მისთვის განკუთვნილ ნაწილში იწერება.
3. მორიგი ციფრი “ფოთლებს” შეადგენს. ეს რიცხვის ერთეულების თანრიგში მოცემული ციფრებია თითოეული ციფრის გასწვრივ მისი “ფოთლები” მიმდევრობით იწერება.

ხე	ტოტი $3 2 = 32$
3	2
4	1
5	
6	3 3 4 4 6 7
7	0 2 2 4 7 8 9
8	1 1 5 5 6 7 8 8
9	1 2 5 6 7 8
10	0



- 10.** სატელევიზიო კონკურსის პირობების თანახმად დას-
მულ კითხვაზე პირველი ერთი წუთის განმავლობაში
ყველაზე ადრე პასუხის გამცემი მოსწავლე წამყვანთან
პირისპირ ერთვება პაექრობაში. მონაწილეთა კითხვების
პასუხის გაცემაზე დათმობილი დრო (წამობით) მარ-
ჯენივანა მოცემული. წარმოადგინეთ ინფორმაცია ხე-
ტოტი სქემით.

37, 33, 33, 32, 29, 28,
28, 23, 22, 22, 22, 21,
21, 21, 20, 20, 19, 19,
18, 18, 18, 18, 16, 15,
14, 14, 14, 12, 12, 9, 6

- 11.** ხისებრ-განტოტვითი სქემით კომპანიაში თა-
ნამშრომელთა ასაკია ნაჩვენები
- ა) ინფორმაციის მიხედვით იპოვეთ არით-
მეტიკული საშუალო, მოდა და მედიანა;
- ბ) წარმოადგინეთ ინფორმაცია სიხშირის
ცხრილით.

ხე	ტოტი
2	1 3 5 8 8
3	1 2 2 3 3 5 9
4	3 5 7
5	0 2 2
6	1

$2|1 = 21$ წელი

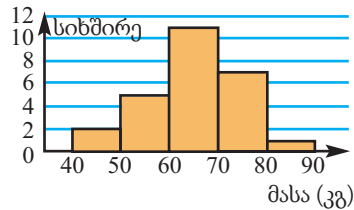
ინფორმაციის წარდგენა

უწყვეტი რიცხვითი ინფორმაციების წარდგენა

უწყვეტი რიცხვითი ინფორმაციების წარდგენის ფორმები დაჯგუფებული დისკრეტული ინფორმაციების წარდგენის ფორმების მსგავსია. ზოგჯერ უწყვეტი რიცხვითი ინფორმაციები დისკრეტულ რიცხვით ინფორმაციად (ან პირიქით) მიიღება. მაშასადამე, მათ შორის ძნელია ზუსტი საზღვრის დადგენა.

ნიმუში 5. ჩატარებული გამოკვლევის შედეგად ცნობილი გახდა, რომ სპორტულ კლუბში დაკავებული ახალგაზრდების მასა 40 კგ-დან 90 კგ-მდე მერყეობს. დაწვრილებითი ინფორმაცია ცხრილითა და ჰისტოგრამითაა მოცემული.

მასის ინტერვალი	სიხშირე
40 – < 50	2
50 – < 60	5
60 – < 70	11
70 – < 80	7
80 – < 90	1



12. კომპანიაში თანამშრომლებს ტელეფონით სასაუბროდ ეძლევათ უფლება არაუმეტეს 3 წუთისა. კომპანიაში ერთი დღის განმავლობაში აღნიშნული საუბრების ხანგრძლივობა ქვემოთაა მოცემული.

2,4; 0,2; 3,0; 2,8; 1,5; 1,9; 0,7; 1,0; 2,5; 1,3;
 0,8; 2,1; 3,0; 0,4; 1,2; 3,0; 1,1; 0,3; 0,7; 1,8;
 0,3; 1,0; 2,1; 3,0; 2,9; 0,5; 1,4; 3,0; 2,8; 1,2;
 0,5; 1,0; 1,5; 0,9; 1,8; 0,6; 0,6; 0,7; 0,8; 0,8

ა) წარმოადგინეთ ინფორმაცია ხისებრ-განტოტვითი სქემით.

ბ) წარმოადგინეთ ინფორმაცია ოთხ კლასად შეერთებით სიხშირის ცხრილითა და ჰისტოგრამით.

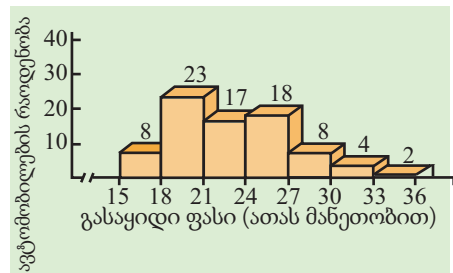
გ) მთელი საუბრების რა ნაწილს შეადგენს ერთ წუთზე ნაკლებ ხანს გაგრძელებული საუბრები?

13. სიხშირის ცხრილი ავტომობილების გაჩერებაზე დარჩენის ხანგრძლივობას უჩვენებს. ცხრილის მიხედვით ააგეთ ჰისტოგრამა.

დგომის ხანგრძლივობა (წუთი)	6-25	26-45	46-65	66-85	86-105	106-125	126-145
სიხშირე	60	70	90	120	80	50	40

14. ჰისტოგრამა ასახავს ინფორმაციას გაყიდული ავტომობილების რაოდენობისა და ფასების შესახებ. ინფორმაციის მიხედვით ააგეთ სიხშირის ცხრილი. აღნიშნეთ კლასები 15 - < 18 სახით.

გაყიდული ავტომობილების საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ ავტომობილები, რომელთა ფასი მეტია 18 ათასზე და ნაკლებია 27 ათასზე?



15. მეორე საპროექტო სამუშაო

ბაქოში 2016 წლის ივნისში ჩატარდა შეჯიბრი ევროპის გრან პრი ფორმულა 1. შეჯიბრის ტრეკი (ერთი ბრუნის სიგრძე) დაახლოებით 6 კმ იყო და ქალაქის როგორც ძველ, ისე თანამედროვე ნაწილებზე გადიოდა. ეს შეჯიბრი 5 წელი ბაქოში ჩატარდება.



ცხრილში ბაქოში ფორმულა-1 გრან პრის ევროპული შეჯიბრის პირველ სამ ადგილზე გასული სპორტსმენის შედეგებია მოცემული.

პოზიცია	№	პილოტი	გუნდი	პერიოდები	დრო	ქულა
1	6	ნიკო როსბერგი	მერსედესი	51	1:32:52.366	25
2	5	სებასტიან ფეტელი	ფერარი	51	+16,696 წმ.	18
3	11	სერხიო პერუსა ფორჯე	ინდოეთი	51	+25,241 წმ.	15

ა) რამდენი კილომეტრი გაიარა თითოეულმა პილოტმა?

ბ) ცხრილში ნაჩვენებია შეჯიბრის გამარჯვებულის მთლიან გზაზე დათმობილი დრო, ასევე მე-2 და მე-3 ადგილებზე გასული პილოტების მიერ ჩემპიონთან შედარებით რამდენი წამით მეტი დროა დახარჯული. გამოთვალეთ თითოეული პილოტის მიერ შეჯიბრის გზაზე დახარჯული დრო და ცხრილი ხელახლა ჩაიხაზეთ რვეულში.



გ) კალკულატორის დახმარებით გამოთვალეთ თითოეული პილოტის საშუალო სიჩქარე.

დ) ბაქოში ფორმულა 1-ის შეჯიბრი მეორედ ჩატარდა 2017 წელს. შეადგინეთ პირველი სამი ადგილის დამკავებელი პილოტების შედეგების ამსახველი ცხრილი.

ე) ააგეთ ბარგრაფი 2016 და 2017 წლების შედეგების შესაბამისად პილოტების მოპოვებული ქულების მიხედვით.

ვ) მოამზადეთ ბაქოში ჩატარებული გრან პრი ფორმულა 1-ის შესახებ ინფორმაციის წარდგენა. შეეცადეთ შეაგროვოთ უფრო მეტი ინფორმაცია გუნდების, შეჯიბრის ავტომობილებისა და პილოტების შესახებ.

ბინომიალური დანაშალი

ბინომი ორწევრს ნიშნავს. განვიხილოთ ბინომის სხვადასხვა ხარისხები. ორი რიცხვის ჯამის კვადრატისა და კუბის შლილებში განსაზღვრული კანონზომიერება არსებობს.

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

ასე რომ პირველი წევრის ხარისხის მაჩვენებელი ბინომის ხარისხის ტოლია, ყოველ მომდევნო წევრში a -ს მაჩვენებელი ერთი ერთეულით მცირდება, მეორე წევრის b -ს მაჩვენებელი ერთი ერთეულით იზრდება. პირველი და ბოლო წევრის კოეფიციენტი 1-ია.

a და b ჯამის ხარისხების მიმდევრობის ბინომიალური შლილების მიმდევრობასავით გაგრძელება შეიძლება. განვიხილოთ როგორი მიმდევრობით შეიქმნა ეს ვარიანტები.

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) \text{ სახით ჩაწერა შეიძლება.}$$

ეს ნამრავლი. თითოეული a და b ხუთი მამრავლის ყველა შესაძლო ნამრავლის ჯამის ტოლია. განვიხილოთ ეს ვარიანტები მიმდევრობით.

- თუ ავიღებთ b წევრის 0 მამრავლს და a წევრის 4 მამრავლს, მიიღება a^4 წევრი და ამნაირი 4C_0 ანუ 1 შემთხვევაა შესაძლებელი და ამ წევრის კოეფიციენტი 1-ია.
- თუ ავიღებთ b წევრის 1 მამრავლსა და a წევრის 3 მამრავლს, მიიღება a^3b წევრი და ამნაირი 4C_1 ანუ 4 შემთხვევაა შესაძლებელი და ამ წევრის კოეფიციენტი 4-ია.
- თუ ავიღებთ b წევრის 2 მამრავლსა და a წევრის ორ მამრავლს, მიიღება a^2b^2 წევრი და ამნაირი 4C_2 ანუ 6 შემთხვევაა შესაძლებელი და ამ წევრის კოეფიციენტი 6-ია.
- თუ ავიღებთ b წევრის 3 მამრავლსა და a წევრის 1 მამრავლს, მიიღება ab^3 წევრი და ამნაირი 4C_3 ანუ 4 შემთხვევაა შესაძლებელი ამ წევრის კოეფიციენტი 4-ია.
- თუ ავიღებთ b წევრის 4 მამრავლსა და a წევრის 0 მამრავლს, მიიღება b^4 წევრი და ამნაირი 4C_4 ანუ 1 შემთხვევაა შესაძლებელი და ამ წევრის კოეფიციენტი 1-ია.

ბინომის ხარისხები, ბინომიალური შლილები და წევრების კოეფიციენტები მოვათავსოთ ცხრილში.

ბინომი	ბინომიალური გამოსახულების შლილი	პასკალის სამკუთხედი
$(a + b)^0$	1	1
$(a + b)^1$	$1a + 1b$	1 1
$(a + b)^2$	$1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1 4 6 4 1

როგორც ხედავთ კოეფიციენტების წყობა საინტერესო მათემატიკური თვისებების მქონე პასკალის სამკუთხედს ქმნის.

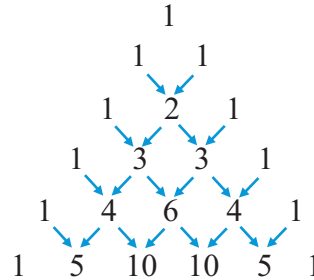


პასკალის სამკუთხედი. პასკალის სამკუთხედი მისი შემოქმედის XVI საუკუნეში მცხოვრები დიდი ფრანგი მათემატიკოსის, ფიზიკოსისა და ფილოსოფოსის ბლეზ პასკალის პატივსაცემად ეწოდა. პასკალის სამკუთხედის წვეროს წერტილებში 1-იანი ჩაწერილი. სამკუთხედის შემადგენელი ყველა სტრიქონი ერთით იწყება და ერთით მთავრდება. ყოველ მომდევნო სტრიქონში თითოეული რიცხვი წინა სტრიქონში ორი მეზობელი რიცხვის ჯამის ტოლია.

ყოველ მომდევნო სტრიქონში რიცხვების რაოდენობა მის წინამდებარე ერთით მეტია.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & & 1 & & \\
 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 &
 \end{array}$$

$n = 0$
 $n = 1$
 $n = 2$
 $n = 3$
 $n = 4$
 $n = 5$



პასკალის სამკუთხედი	პასკალის სამკუთხედი კომბინიზონებით
$ \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \\ & 1 & 2 & & 1 & & \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array} $	$ \begin{array}{cccccccc} & & & & {}_0C_0 & & & \\ & & & {}_1C_0 & {}_1C_1 & & & \\ & & {}_2C_0 & {}_2C_1 & {}_2C_2 & & & \\ & {}_3C_0 & {}_3C_1 & {}_3C_2 & {}_3C_3 & & & \\ & {}_4C_0 & {}_4C_1 & {}_4C_2 & {}_4C_3 & {}_4C_4 & & \\ {}_5C_0 & {}_5C_1 & {}_5C_2 & {}_5C_3 & {}_5C_4 & {}_5C_5 & & \end{array} $

შეგამოწმეთ, რომ ${}_5C_2$ ნამდვილად პასკალის სამკუთხედის მე-5 სტრიქონის შესაბამისი ელემენტია.

$${}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 10$$

ბინომის ხარისხი	შლილი	პასკალის სამკუთხედი
$(a + b)^0$	1	1
$(a + b)^1$	${}_1C_0a + {}_1C_1b$	1 1
$(a + b)^2$	${}_2C_0a^2 + {}_2C_1ab + {}_2C_2b^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	${}_3C_0a^3 + {}_3C_1a^2b + {}_3C_2ab^2 + {}_3C_3b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	${}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	${}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$	1 5 10 10 5 1

ბინომის შლილში წევრების კოეფიციენტები მიმდევრობით პასკალის სამკუთხედის შესაბამის სტრიქონში არსებული რიცხვებია. მარცხნიდან მარჯვნივ 1-ლი წევრის ხარისხი (a -ს) ბინომის ხარისხის ტოლია. ყოველ მომდევნო წევრში ერთი ერთეულით მცირდება, მეორე წევრის (b -ს) ხარისხი კი იზრდება.

ბინომიალური დანაშალი

პასკალის სამკუთხედის მორიგი მე-6 სტრიქონი იქმნება ქვემოთ მოცემული სახით.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 {}_6C_0 & {}_6C_1 & {}_6C_2 & {}_6C_3 & {}_6C_4 & {}_6C_5 & {}_6C_6
 \end{array}$$

ბინომიალური შლილისათვის შეგვიძლია დავწეროთ განზოგადებული ფორმულა.

ბინომიალური შლილი

ნებისმიერი a , b რიცხვებისა და $n \geq 0$ რიცხვისათვის მართებულია ქვემოთ მოცემული ტოლობა:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^n = & {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots \\
 & \dots + {}_nC_{n-1} a^1 b^{n-1} + {}_nC_n a^0 b^n
 \end{aligned}$$

“Σ” **სიგმა** ნიშნის გამოყენებით ეს ფორმულა მოკლედ ქვემოთ მოცემული სახით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

$(a + b)^n$ ბინომის შლილში $n + 1$ წევრია, ბინომის ნებისმიერი რიგით $(k+1)$ წევრი $T_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$ სახისაა, $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$

- n -ური ხარისხის ბინომიალური შლილში $n + 1$ ელემენტია;
- ბინომის ნებისმიერი წევრის $T_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$ ფორმულით მოძებნა შეიძლება;
- ბინომის ნებისმიერი წევრის ხარისხის მაჩვენებლების ჯამი n -ის ტოლია;
- ბინომიალური კოეფიციენტების ჯამი 2^n -ის ტოლია:

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_1 + \dots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$$

ბინომის ფორმულაში $a = b = 1$ პირობით შეამოწმეთ ზოლო ტოლობა.

ბინომის ხარისხის შლილში შესაკრების კოეფიციენტი და ბინომიალური კოეფიციენტი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

ნამუშაო. $(x + 2)^5 = {}_5C_0 x^5 + {}_5C_1 x^4 \cdot 2 + {}_5C_2 x^3 \cdot 2^2 + {}_5C_3 x^2 \cdot 2^3 + {}_5C_4 x \cdot 2^4 + {}_5C_5 2^5 =$
 $= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

ამ დანაშალში მაგალითად, მესამე შესაკრების კოეფიციენტი არის 40, ხოლო მისი ბინომიალური კოეფიციენტი კი ${}_5C_2 = 10$ -ია.

ნამუშაო. $(2p - 1)^6$ ბინომის დანაშალში დაწერეთ მე-4 წევრი.

ამოხსნა: სადაც $a = 2p$, $b = -1$, $n = 6$

$$T_4 = T_{3+1} = {}_6C_3 a^{6-3} b^3 = 20 \cdot (2p)^3 \cdot (-1)^3 = -160p^3$$

ბინომიალური დანაშალი

სასწავლო დაგეგმვები

1. რამდენი წევრია ბინომის ხარისხის შლილში?

ა) $(x - 3y)^5$ ბ) $(2z + 3z^2)^7$ გ) $(c + 6)^4$ დ) $(c + 6)^{k-2}$
2. დაწერეთ შლილები.

ა) $(x - 3)^4$ ბ) $(x + 2)^5$ გ) $(1 + 2c)^6$ დ) $(1 - i)^5$
3. იპოვეთ ბინომის მოთხოვნილი წევრები.

ა) $(x + y)^8$ -ის მე-5 წევრი; ბ) $(a - 2b)^6$ -ის მე-4 წევრი;
 გ) $(1 - 2z)^{12}$ -ის მე-7 წევრი; დ) $(2x + y)^5$ -ის შუა წევრი;
 ე) $(u^2 + 1)^8$ -ის ბოლოდან მე-2 წევრი; ვ) $(x - y)^{10}$ -ის ბოლო 3 წევრი.
4. $(x + y)^{10}$ ბინომის დაშლის გარეშე შეასრულეთ დავალებები.

ა) დაწერეთ ბინომის შლილში წევრების რაოდენობა
 ბ) დაწერეთ ბინომის შლილის მე-6 წევრი
 გ) ${}_{10}C_r$ ბინომიალური კოეფიციენტის უდიდესი მნიშვნელობა ბინომის რომელ წევრს მიეკუთვნება?
5. დაწერეთ ბინომიალური შლილები $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ სახით.

ა) $4C_0z^4 + 4C_1z^3t + 4C_2z^2t^2 + 4C_3zt^3 + 4C_4t^4$
 ბ) ${}_5C_0m^5 + {}_5C_1m^4y + {}_5C_2m^3y^2 + {}_5C_3m^2y^3 + {}_5C_4my^4 + {}_5C_5y^5$
6. დაწერეთ $(x + y)^3$ და $(x - y)^3$ ბინომიალური შლილების მსგავსი და განსხვავებული ნიშნები. განაზოგადეთ თქვენი მოსაზრებები $(x - y)^n$ ბინომიალური შლილისათვის.
7. პასკალის სამკუთხედის მოცემული სტრიქონები გამოსახეთ კომბინეზონებით.

ა) 1 5 10 10 5 1 ბ) 1 7 21 35 35 21 7 1
 გ) 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
8. ილკარი ამბობს, რომ პასკალის სამკუთხედის თითოეული სტრიქონი 11^n სახით შეიძლება გამოისახოს. შეამოწმეთ ეს მოსაზრება.
9. შეასრულეთ პასკალის სამკუთხედის მიხედვით:

ა) იპოვეთ პასკალის სამკუთხედის მოცემულ თითოეულ სტრიქონში წევრების ჯამი.
 ბ) იპოვეთ პასკალის სამკუთხედის მე-9 სტრიქონში წევრების ჯამი.
 გ) იპოვეთ პასკალის სამკუთხედის წევრების ჯამი n -ურ სტრიქონში.
 დ) ეს თვისება გამოიყენეთ ბინომიალური შლილის კოეფიციენტებში.
10. ა) $(x + 2)^n$ ბინომის დანაშალში ბინომიალური კოეფიციენტების ჯამი 16-ია. იპოვეთ მეორე წევრის კოეფიციენტი.
 ბ) $(x + \frac{1}{x})^8$ -ის დანაშალში იპოვეთ წევრი, რომელიც x -ზე არ არის დამოკიდებული.

				1			
				1	1		
			1	2	1		
		1	3	3	1		
	1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1		
						1	1

ბერნულის ცდები

ბერნულის სქემაში გარკვევისათვის განვიხილოთ ქვემოთ მოცემული ამოცანა.

თამაშში მოგების ალბათობა $\frac{3}{4}$ (მწვანე ბურთულის ამოსვლის), წაგების (წითელი ბურთულის ამოსვლის) ალბათობა $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ იქნება. 4 თამაშში



მოგებისა და წაგების რაოდენობის ცვლილების მიხედვით გამოვთვალოთ ალბათობები.

$$1) P(4 \text{ თამაშიდან ყველაში მოგების ალბათობა}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$$

$$2) P(4 \text{ თამაშიდან ყველაში წაგების ალბათობა}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$$

3) 4 თამაშიდან 3-ში მოგების ვარიანტები და თითოეულის ალბათობა:

$$(მ,მ,მ,წ) \quad P(\text{მე-4-ის გარდა ყველაში მოგება}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256}$$

$$(მ,მ,წ,მ) \quad P(\text{მე-3-ის გარდა ყველაში მოგება}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{256}$$

$$(მ,წ,მ,მ) \quad P(\text{მე-2-ის გარდა ყველაში მოგება}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{256}$$

$$(წ,მ,მ,მ) \quad P(1\text{-ლის გარდა ყველაში მოგება}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{256}$$

მოთამაშის 4 თამაშიდან 3-ში მოგების შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის კომბინეზონით გამოთვლაც შეიძლება. ${}_4C_3 = \frac{4!}{3!} = 4$ იქნება. ვარიანტების ალბათობა ერთი და იგივეა და $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1$ -ის ტოლია. ამ ხდომილობის ალბათობა შეიძლება ქვემოთ მოცემულივით გამოითვალოს.

$$P(4 \text{ თამაშიდან 3-ში მოგება}) = {}_4C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{108}{256}$$

ანალოგიური წესით გამოვიკვლიოთ სხვა სიტუაციებიც.

4) 4 თამაშიდან 2-ში მოგების ალბათობა

$$P(მ,მ,წ,წ) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{256}$$

4 თამაშიდან 2-ში მოგების შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა იქნება: ${}_4C_2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

ანუ 6 შემთხვევიდან თითოეულში მოგების ალბათობა $\frac{9}{256}$ -ია.

$$P(4 \text{ თამაშიდან 2-ში მოგება}) = {}_4C_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{16} = \frac{54}{256}$$

5) 4 თამაშიდან 1-ში მოგების ალბათობა.

$$P(მ,წ,წ,წ) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{256}$$

$$P(4 \text{ თამაშიდან 1 მოგება}) = {}_4C_1 \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{64} = \frac{12}{256}$$

ჩვენ ვიპოვეთ გუნდის 4, 3, 2, 1, 0 თამაშში მოგების ალბათობები. თუ ეს გამოთვლები სწორად არის წარმოდგენილი, მათი ჯამი 1-ის ტოლი უნდა იყოს.

$$P(4 \text{ მოგება}) + P(3 \text{ მოგება}) + P(2 \text{ მოგება}) + P(1 \text{ მოგება}) + P(0 \text{ მოგება}) = 1$$

$$\text{შევამოწმოთ: } \frac{81}{256} + \frac{108}{256} + \frac{54}{256} + \frac{12}{256} + \frac{1}{256} = 1$$

ბერნულის ცდები

ზემოთ ასახულ ამოცანას ბინომიალური ცდები ეწოდება. იმიტომ რომ ამნაირ ამოცანებში სიტუაციების შესაბამისი ბინომიალური შლილის წევრებით გამოსახვა არის შესაძლებელი. მაგალითად, განხილული ამოცანა

$(a + b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$ ბინომიალურ შლილს შეესაბამება. ბინომიალურ ცდას ბერნულის ცდასაც უწოდებენ.

თუ ამ დანაშაღს ამოცანაში მოცემული სიტუაციის შესაბამისად p (მოგება) და q (წაგება) ცვლადებით გამოვსახავთ, ბინომიალურ შლილში თითოეული წევრის რეალურ სიტუაციასთან შესაბამისობის დანახვა შესაძლებელი იქნება.

$$(p + q)^4 = {}_4C_0p^4 + {}_4C_1p^3q + {}_4C_2p^2q^2 + {}_4C_3pq^3 + {}_4C_4q^4$$

სადაც p წარმატებული ხდომილობის ალბათობაა და $p = \frac{3}{4}$, q წარუმატებელი ხდომილობის ალბათობაა და $q = \frac{1}{4}$.

ბერნულის ცდა და ალბათობა

თუ n რაოდენობის დამოუკიდებელ ცდაში წარმატებული ხდომილობის ალბათობა p -ს ტოლია, მაშინ m წარმატებული $n - m$ წარუმატებელი ხდომილობის ალბათობა

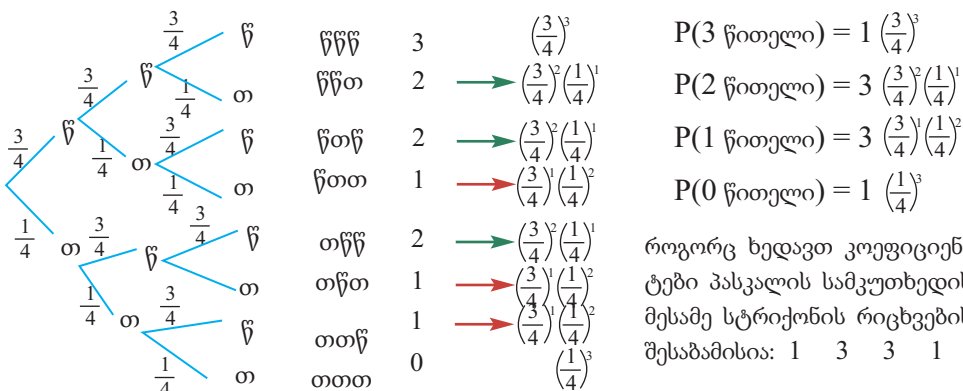
$$P(n \text{ ცდაში, } m \text{ წარმატებული}) = {}_nC_m p^m q^{n-m} \text{ იქნება.}$$

ბინომიალური ცდა ანუ ბერნულის ცდა მართებულია მხოლოდ ქვემოთ მოცემული პირობების დაკმაყოფილებისას.

- თითოეულ ცდას მხოლოდ ორი შედეგი აქვს.
- ცდების რაოდენობა ცნობილია.
- ცდები დამოუკიდებელია.
- ყველა ცდა ტოლალბათობიანია.

ბერნულის ცდა სქემატურად განვიხილოთ ქვემოთ მოცემულ ნიმუშზე.

ნიმუში 1. ჩარხი 4 ტოლ ნაწილისაგან შედგება. 3 ნაწილი წითელი, 1 ნაწილი კი თეთრია. ჩარხი დატრიალების შემდეგ ან წითელ ნაწილზე დგება ან თეთრზე. 3-ჯერ დატრიალების შესაძლო ვარიანტები სქემითაა წარმოდგენილი.

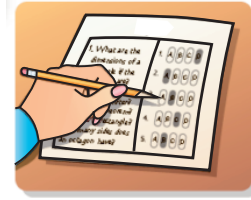


ამასთან შესაძლებელია ბინომიალურ დანაშაღთან კავშირის დანახვა.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. სადაც $a = \frac{3}{4}$ და $b = \frac{1}{4}$ ამ ხდომილობისათვის ბერნულის ფორმულა $P(m \text{ წითელი}) = {}_3C_m \left(\frac{3}{4}\right)^m \left(\frac{1}{4}\right)^{3-m}$ $m = 0, 1, 2, 3$. შეამოწმეთ ფორმულა m -ის მნიშვნელობების ადგილებში შეტანით.

ბერნულის ცდები

ნამუში 2. 5 შეკითხვიდან თითოეულზე პასუხის 4 ვარიანტი მოცემული. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ნარგიზი 5 შეკითხვიდან 4-ზე სწორ პასუხს გასცემს. გამოიკვლიეთ კავშირი ბინომიალურ შლილსა და ალბათობის პოვნას შორის.



ამოხსნა: ვიპოვოთ ნარგიზის მიერ 5 შეკითხვაზე სწორი ან მცდარი პასუხის გაცემის რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს.

$$(d + s)^5 = {}_5C_0 d^5 + {}_5C_1 d^4 s + {}_5C_2 d^3 s^2 + {}_5C_3 d^2 s^3 + {}_5C_4 d s^4 + {}_5C_5 s^5$$

სქემიდან ჩანს, რომ ნარგიზის მიერ 5 კითხვიდან

4-ზე სწორი პასუხის გაცემის 5 ვარიანტი

არსებობს. მაშასადამე ამ ხდომილების ალბათობა

${}_5C_1 d^4 s$ იქნება. ანალოგიურად სხვა სიტუაციებსა

და ბინომიალურ წევრებს შორის არსებული

კავშირის დანახვა შეიძლება. ეს კავშირი ცხრილში

განვაზოგადოთ.

s	d	d	d	d
d	s	d	d	d
d	d	s	d	d
d	d	d	s	d
d	d	d	d	s

კოეფიციენტი	წევრი	სიტუაციის აზრი
${}_5C_0 = 1$	d^5	5 სწორი პასუხის 1 ვარიანტი
${}_5C_1 = 5$	$d^4 s$	4 სწორი 1 მცდარი პასუხის 5 ვარიანტი
${}_5C_2 = 10$	$d^3 s^2$	3 სწორი 2 მცდარი პასუხის 10 ვარიანტი
${}_5C_3 = 10$	$d^2 s^3$	2 სწორი 3 მცდარი პასუხის 10 ვარიანტი
${}_5C_4 = 5$	$d s^4$	1 სწორი 4 მცდარი პასუხის 5 ვარიანტი
${}_5C_5 = 1$	s^5	5 მცდარი პასუხის 1 ვარიანტი

შემთხვევითი შერჩევით ვიპოვოთ 4 კითხვაზე სწორი, 1 კითხვაზე მცდარი პასუხის გაცემის ალბათობა. ყოველი სწორი პასუხის ალბათობა $\frac{1}{4}$ -ია მცდარი პასუხის ალბათობა $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$P(4d, 1s) = 5d^4s = 5 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{1024} \text{ ანუ } \approx 1,5\%$$

ამ წესით გამოთვალეთ შესაძლო სიტუაციების ალბათობები და მათი შეკრებით შეამოწმეთ, არის თუ არა ჯამი 1-ის (ანუ 100%-ის) ტოლი.

ნამუში 3. ოთხ ბავშვიან ოჯახში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 3 იქნება ბიჭი და 1 გოგონა.

თითოეული ბავშვისათვის არსებობს ორი შესაძლო შემთხვევა: ან ბიჭია ან გოგონა. ორივეს ალბათობა $\frac{1}{2}$ -ია. $P(n \text{ ცდაში, } m \text{ წარმატებული}) = {}_n C_m p^m q^{n-m}$

$$n = 4, m = 3, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}; \quad P(4 \text{ ბავშვიდან, } 3 \text{ ბიჭი}) = {}_4 C_3 p^3 q^{4-3} = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

მაშასადამე, ალბათობა იმისა, რომ 4 ბავშვიდან 3 ბიჭი იქნება $\frac{1}{4}$ ანუ 25%.

შესაბამის ბინომიალურ დანაშაღში სიტუაციის გამომსახველი წევრი წითელი ფერითაა ნაჩვენები.

$$(o + q)^4 = o^4 + 4o^3q + 6o^2q^2 + 4oq^3 + q^4 \quad P(4 \text{ ბავშვიდან, } 3 \text{ ბიჭი})$$

ნიმუში 4. კომპანიამ სავაჭრო კამპანიის დროს ბავშვის საჭმლის ყუთებში კუპონები მოათავსა. ყოველი 20 ყუთიდან 3-ში მომგებიანი კუპონი იდება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 5 ყუთის შემძენი მყიდველის 2 ყუთი იქნება მომგებიანი? გამოიყენეთ კალკულატორი.

ამოხსნა: წარმატებული ხდომილობა ყუთში მომგებიანი კუპონის არსებობაა:

$$P(\text{მომგებიანი კუპონი}) = \frac{3}{20} \text{ წარმატებული ხდომილობა ყუთში მომგებიანი კუპონის}$$

$$\text{არ არსებობა: } P(\text{მომგებიანი კუპონი არ არის}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

$$P(5 \text{ ყუთიდან } 2\text{-ში მოგება}) = {}_5C_2 p^2 q^3 = 10 \left(\frac{3}{20}\right)^2 \left(\frac{17}{20}\right)^3 \approx 0,138$$

ნიმუში 5. მონეტა 10-ჯერ იქნა აგდებული. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სულ მცირე 8-ჯერ რუკიან მხარეს დაეცემა იგი?

ამოხსნა: თუ სულ მცირე 8-ჯერ რუკიან მხარეს დაცემის ხდომილობა წარმატებული ხდომილობაა, მაშინ 9-ჯერ და 10-ჯერ რუკიან მხარეს დაცემა წარმატებული ხდომილობაა, ამ ხდომილობათა ალბათობები ცალ-ცალკე უნდა მოიძებნოს და მოხდეს მათი შეკრება. მონეტის ერთხელ აგდებისას რუკის მოსვლის ალბათობა $\frac{1}{2}$ -ია.

$$P(\text{არანაკლებ 8 რუკისა}) = P(8 \text{ რუკა}) + P(9 \text{ რუკა}) + P(10 \text{ რუკა})$$

$$P(\text{არანაკლებ 8 რუკისა}) = {}_{10}C_8 p^8 q^2 + {}_{10}C_9 p^9 q^1 + {}_{10}C_{10} p^{10} q^0 =$$

$$= 45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{56}{1024} \approx 0,55$$

1. ამ მონაცემებიდან რომელს შეიძლება ეწოდოს ბინომიალური ცდა?

ა) ქამალი ქიმიის საგნის 20 ტესტური შეკითხვის თითოეულზე მოცემული 4 პასუხიდან ერთს შემთხვევითი წესით აღნიშნავს.

ა) პლასტიკური ჭიქა 50-ჯერ აიგდება. დაითვლება ჭიქა რამდენჯერ ფუძეზე და რამდენჯერ პირქვეშ დაეცემა.

გ) სათამაშო კამათელი 100-ჯერ გააგორეს. მოწმდება თითოეული წახნაგის მოსვლის ალბათობა ტოლია თუ არა.

დ) სათამაშო კამათელი 100-ჯერ გააგორეს. მოწმდება რამდენჯერ მოდის 4 ქულიანი წახნაგი.

2. მონეტა 5-ჯერ ააგდეს. რას უდრის რუკიანი მხარის მოსვლის ალბათობა?

ა) $P(\text{ერთხელ})$; ბ) $P(3\text{-ჯერ})$; გ) $P(4\text{-ჯერ})$; დ) $P(0\text{-ჯერ})$; ე) $P(2\text{-ჯერ})$

3. კალათბურთის გუნდის თამაშში გამარჯვების ალბათობა $\frac{2}{3}$ -ია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს გუნდი მომავალი 5 თამაშიდან 3-ში გაიმარჯვებს?

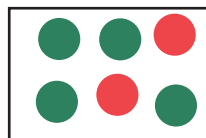
4. უკანასკნელი გამოკვლევები უჩვენებს, რომ ახალი ავტომობილების ყოველი 3-დან ერთი კრედიტით იყიდება. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული 7 ახალი ავტომობილიდან 3 კრედიტით იქნება შეძენილი.

ბერნულის ცდები

5. გამოვლინდა, რომ კონვეიერზე ერთ ბრუნში წარმოებული დეტალების 2% გამოუსადეგარია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული 5 დეტალიდან მოცემული რაოდენობის დეტალი იქნება გამოუსადეგარი.

ა) P (მხოლოდ ორის გამოუსადეგრობა); ბ) P (არაუმეტეს ერთის გამოუსადეგრობა);
გ) P (არაუმეტეს ორის გამოუსადეგრობა)

6. ყუთში 6 ბურთულაა. შესაბამისი ბინომიალური შლილების ჩაწერით უჩვენეთ 6-ჯერ ბურთულის ამოღების შესაბამისი სიტუაციების ალბათობა. წარმატებული ხდომილობა მწვანე ბურთულის ამოსვლაა. ცხრილი რვეულში დაასრულეთ იმის ჩვენებით, რომ ყველა ხდომილობის ალბათობების ჯამი 1-ის ტოლია, შეამოწმეთ თქვენი ამონახსენი.



სიტუაცია	ბინომიალური წევრი
6 მწვანე	${}^6C_0 p^6$
5 მწვანე 1 წითელი	${}^6C_1 p^5 q^1$
4 მწვანე 2 წითელი	${}^6C_2 p^4 q^2$
...	...
ბინომიალური დანაშალი: $(p + q)^x = \dots$	

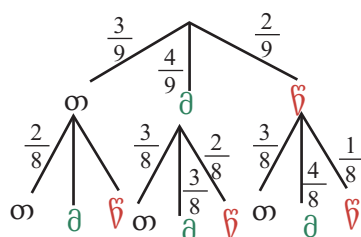
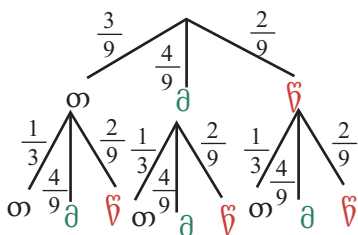
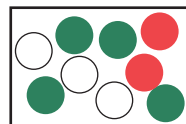
7. შემოწმებამ გამოავლინა, რომ 1000 CD დისკიდან 50 იყო გამოუსადეგარი.

ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ერთი დისკი იქნება გამოუსადეგარი?

ბ) თუ ხარისხის კონტროლიორი შემთხვევით 6 დისკს აიღებს, სიტუაციების მიხედვით გამოთვალეთ ალბათობები.

- მხოლოდ 2 დისკია გამოუსადეგარი;
- არაუმეტეს 2 დისკია გამოუსადეგარი;
- სულ მცირე 3 დისკია გამოუსადეგარი.

8. ყუთში 3 თეთრი, 4 მწვანე, 2 წითელი ბურთულაა. თუ შემთხვევით ორ ბურთულას ამოიღებენ ორივე სქემის მიხედვით გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე იქნება თეთრი. რომელ ხდომილობებს ასახავენ სქემები? შესაბამისი ხდომილობების ნიმუშის ჩვენებით წერილობით განმარტეთ ამ ხდომილობების განსხვავებული და მსგავსი ნიმუშები.



განმაზოგადებელი დავალებები

- 1.** ყუთში 2 წითელი და 3 თეთრი ბურთულაა. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთულას და ისევ ყუთში აბრუნებენ. ეს ცდა სამჯერ მეორდება.
ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 1-ელ და მე-2 ცდაზე ამოღებული ბურთულა იქნება თეთრი, ხოლო მე-3 ცდაზე ამოღებული ბურთულა კი წითელი.
ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული 3 ბურთულიდან 2 იქნება თეთრი.
- 2.** მონეტა 4-ჯერ აავდეს . იპოვეთ თითოეული ხდომილობის ალბათობა.
ა) p (4-ჯერ სურათიანი მხარე); ბ) P (არანაკლებ 3-ჯერ რუკიანი მხარე),
გ) P (არაუმეტეს 2-ჯერ სურათიანი მხარე); დ) p (0 რუკიანი მხარე).
- 3.** დაწერეთ მონეტის ავდეების ხდომილობის ამსახველი $(x + y)^n$ ბინომიალური დანაშალი. განმარტეთ ბინომის თითოეული წევრის სიტუაციის შესაბამისი აზრი. გამოთვალეთ შესაბამისი ხდომილობების ალბათობები.
- 4.** დაამტკიცეთ , რომ $nC_k = nC_{n-k}$ შეამოწმეთ იგივეობა $n=7, k=5$ მნიშვნელობისათვის.

6. ყუთში 4 თეთრი და 2 მწვანე ბურთულაა. აქედან 3-ს იღებენ შემთხვევითი წესით.
- ა) ფერების მიხედვით რომელი შემადგენლობით ბურთულების ამოსვლის აბათობა არის უფრო მეტი?
- ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულებიდან სულ მცირე 2 იქნება თეთრი.
7. მოცემული სიტყვის ასოების წაკითხვა რამდენ სხვადასხვა ვარიანტად შეიძლება დალაგდეს?

ბ) კეპელე

8. მსროლელის მიერ ერთი სროლით მიზანში მორტყმის ალბათობაა 0,8. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი 4 სროლიდან 2-ჯერ მოარტყამს მიზანში.
9. მეგობრისათვის დარეკვის მსურველ მუსტაფას ნომრის ბოლო 2 ციფრი დაავიწყდა, მაგრამ ახსოვდა, რომ ეს ციფრები განსხვავებული იყო. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მის მიერ პირველ ჯერზე შემთხვევით აკრეფილი ნომერი იქნება სწორი.
10. ხუთი პიროვნება (A, B, C, D და E) რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება გამჭვრიდეს?
 - ა) E-ს შუაში ყოფნის პირობით.
 - ბ) A და B-ს აუცილებლად გვერდიგვერდ ყოფნის პირობით.
 - გ) A და B-ს აუცილებლად გვერდიგვერდ არყოფნის პირობით.

განმაზოგადებელი დავალებები

12. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $4 \cos^2 x - 3 \sin x = 3$

ბ) $2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x - 1 = 0$

გ) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

დ) $\cos 3x - \cos 4x = 1 - \cos x$

13. იპოვეთ განტოლების ფესვები მოცემულ შუალედში.

ა) $\sin x = -1, x \in [0; 4\pi]$

ბ) $\cos x = 1, x \in [-\pi; 3\pi]$

14. ამოხსენით უტოლობა.

ა) $\cos^2 x + \frac{1}{2} > \sin^2 x$

ბ) $\operatorname{tg} 2x < \sqrt{3}$

15. ა) იპოვეთ $y = 3 + \sqrt{x-4}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

ბ) იპოვეთ $y = \sqrt{2 \sin x - \sqrt{3}}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

გ) იპოვეთ $y = \log_{\frac{1}{2}}(5 + 3 \cos x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

16. x -ის რა მნიშვნელობებისათვის არის $\ln(x-9)$, $\ln(x-7)$, $\ln(x-3)$ რიცხვები არითმეტიკული პროგრესიის მიმდევრობითი წევრები?

17. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. უჩვენეთ მოცემული ფუნქციისა და შექცეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა) $y = 2^{x-1} + 3$

ბ) $y = 1 + \log_2(x+3)$

18. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $0,5^x \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$

ბ) $0,2^{x-1} - 0,2^{x+1} = 4,8$

გ) $5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26$

დ) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

ე) $\log_{x-1} 2 = -0,5$

ვ) $\log_5(2 + \log_3(3+x)) = 0$

ზ) $\log_2(2^{2x} + 16^x) = 2 \log_4 12$

თ) $\log_5 3 = -\frac{\log_2(1+x)}{\log_2 5}$

ი) $\lg^2 x - 3 \lg x = \lg x^2 - 4$

კ) $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$

19. ამოხსენით უტოლობები.

ა) $(\frac{3}{7})^{2x} < 5 \frac{4}{9}$

ბ) $0,9^x \geq 1 \frac{19}{81}$

გ) $(x^2 - 2x - 3) \cdot (2^x - 8) \leq 0$

დ) $2^{\lg x} > \sin \frac{5\pi}{6}$

ე) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{9}} 27$

ვ) $\frac{\log_3(6-2x)}{\log_{0,3} 5} > 0$

ზ) $\log_3(2x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0$

თ) $\log_{\frac{1}{2}}|3-x| > -1$

20. გამოთვალეთ.

ა) $(\cos \frac{\pi}{15} - i \sin \frac{\pi}{15})^{10}$

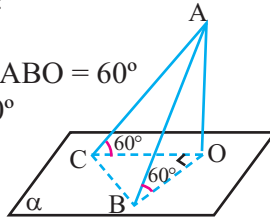
ბ) $(\sin \frac{4\pi}{9} - i \cos \frac{5\pi}{9})^{27}$

განმაზოგადებელი დაგვლებები

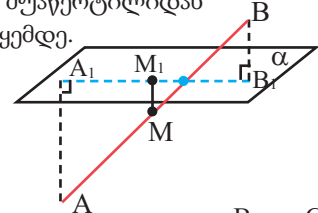
- 21.** დაშალეთ მრავალწევრი წრფივ მამრავლებად $x^4 + 4x^2 - 5$.
- 22.** წრეწირზე 10 წერტილია აღნიშნული. წვეროების ამ წერტილებზე განთავსებით რამდენი სამკუთხედის აგება შესაძლებელი?
- 23.** ყუთში 30 შავი და x თეთრი ბურთულაა. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ერთი ბურთულა იქნება თეთრი $\frac{2}{5}$ -ია. იპოვეთ x .
- 24.** გამოთვალეთ ჯამი.
 $2^0 \cdot {}_6C_0 + 2^1 \cdot {}_6C_1 + 2^2 \cdot {}_6C_2 + 2^3 \cdot {}_6C_3 + 2^4 \cdot {}_6C_4 + 2^5 \cdot {}_6C_5 + 2^6 \cdot {}_6C_6$
- 25.** მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოები 3 სმ, 4 სმ და 7 სმ-ია. იპოვეთ ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს წვეროებზე გამავალი მკვეთის ფართობი.

- 26.** ა) მოცემულია:

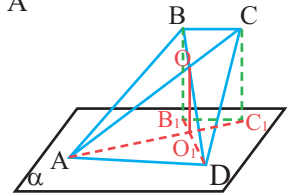
$AO \perp \alpha$
 $\angle ACO = \angle ABO = 60^\circ$
 $\angle COB = 90^\circ$
 $AO = 3$
 იპოვეთ: BC



- ბ) სიბრტყის მკვეთი AB მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან 16 სმ და 4 სმ მანძილზეა. იპოვეთ მანძილი მონაკვეთის M შუაწერტილიდან სიბრტყემდე.

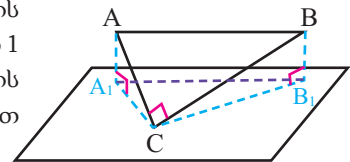


- 27.** ა) $ABCD$ ტრაპეციის AD ფუძე α სიბრტყეზეა, ხოლო BC ფუძე კი სიბრტყიდან 5 სმ მანძილზეა. $AD:BC = 7:3$. იპოვეთ მანძილი ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილიდან α სიბრტყემდე.



- ბ) წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი 9 სმ, სრული ზედაპირის ფართობი 144 სმ^2 -ია. იპოვეთ ფუძის გვერდი და გვერდითი წიბო.

- 28.** მართკუთხა ABC სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზის პარალელური და მისგან 1 სმ მანძილზე სიბრტყეა გავლებული. კათეტების გეგმილები ამ სიბრტყეზე 3 სმ და 5 სმ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზის გეგმილი ამ სიბრტყეზე.



- 29.** მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობი 4 სმ^2 , გვერდითი წახნაგების ფართობები 9 სმ^2 , 10 სმ^2 და 17 სმ^2 -ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

- 30.** იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

a) $y = \frac{x+5}{x^2-3x+4}$

b) $y = \sqrt{\frac{2}{3}x-4}$

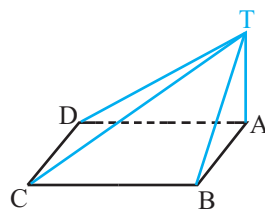
- 31.** სამკუთხედის გვერდები 4 სმ, 5 სმ და 6 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის უმცირესი კუთხის კოსინუსი.

განმაზოგადებელი დავალებები

- 32.** ABCD მართკუთხედის A წვეროდან მართკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AT მართობი.

TB = 6 სმ, TD = 7 სმ TC = 9 სმ.

იპოვეთ AT-ს სიგრძე.



- 33.** m პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x^2 + (2 + m)x + m - 3 = 0$ განტოლების ფესვების კვადრატების ჯამი უმცირესი?

- 34.** A პუნქტიდან B პუნქტამდე გასავლელი მანძილის 12 კმ აღმართი, ხოლო 24 კმ დაღმართია. ცხენოსანი A-დან B-ში 7 საათში ჩავიდა, უკან კი 8 საათში მობრუნდა. იპოვეთ ცხენოსნის სიჩქარე აღმართზე და დაღმართზე.

- 35.** გრაფიკების გამოსახვით გამოიკვლიეთ

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{განტოლებათა სისტემა.} \\ \text{ა) } a\text{-ს რომელი დადებითი მნიშვნელობისათვის ექნება ორი ამონახსენი.} \end{array}$$

ბ) a -ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება სამი ამონახსენი.

გ) არსებობს a -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ სისტემას ოთხი ამონახსენი ჰქონდეს?

- 36.** სამ საწყობში 920 ტონა ხორბალია, პირველ საწყობში ხორბალი 30 ტ-ით ნაკლებია ვიდრე მეორეში. მეორე და მესამე საწყობში ხორბლის მასები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 8 : 9. რამდენი ტონა ხორბალია თითოეულ საწყობში?

- 37.** სამკუთხედის გვერდები 10 სმ და 12 სმ-ია, მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსი 0,6-ის ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი. რამდენი ამონახსენი აქვს ამ ამოცანას?

- 38.** იპოვეთ სამკუთხედის ბისექტრისები, თუ მისი გვერდები 5 დმ, 6 დმ და 7 დმ-ია.

- 39.** იპოვეთ სამკუთხედის მედიანები, თუ მისი გვერდებია 5 სმ, 6 სმ და 7 სმ.

- 40.** იპოვეთ $y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ ფორმულით მოცემული ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდა, სიხშირე და ძირითადი პერიოდი.

- 41.** მოცემულია: წესიერი ოთხკუთხა პრიზმა.

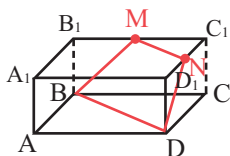
$$B_1M = MC_1$$

$$C_1N = ND_1$$

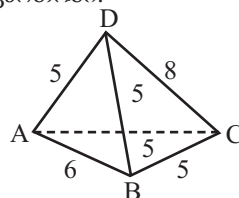
$$AB = BC = 8$$

$$AA_1 = 4$$

იპოვეთ: BMND ოთხკუთხედის ფართობი.



- 42.** იპოვეთ მოცემულზომებიანი ტეტრაედრის სრული ზედაპირის ფართობი.

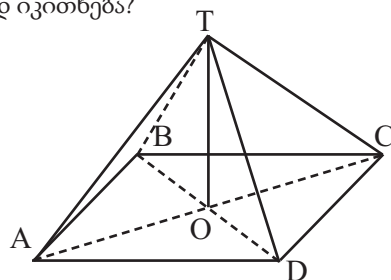


- 43.** იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი, თუ მისი გვერდითი წიბო 5 სმ და სრული ზედაპირი 84 სმ²-ია.

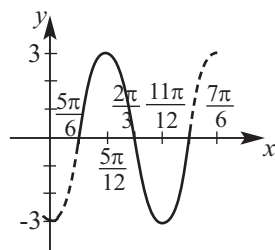
განმაზოგადებელი დაგალებები

44. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირი 36 სმ^2 , დიაგონალი კი 6 სმ -ია.
45. იპოვეთ $x^2 + y^2 = 25$ განტოლებით მოცემულ წრეწირზე მდებარე იმ წერტილის კოორდინატები, რომლის ორდინატი 1 ერთეულით მეტია აბსცისაზე. რამდენი ასეთი წერტილი არსებობს?
46. არითმეტიკულ პროგრესიაში ცნობილია, რომ $a_1 + a_2 + a_3 = 30$ და $a_1^2 + a_2^2 = 16$. იპოვეთ a_1 , თუ a_5 წევრი 13-ზე სრულად იყოფა.
47. რამდენი ხუთნიშნა რიცხვი არსებობს (მაგალითად, 67876), რომელიც მარცხნიდან მარჯვნივ და მარჯვნიდან მარცხნივ ერთნაირად იკითხება?

48. პირამიდაში TO სიმაღლეა. ABCD მართკუთხედი. იპოვეთ $\angle TAO$, თუ $AB = 12$, $AD = 16$, $TO = 5\sqrt{2}$.



49. სურათზე მოცემული გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ ფორმულა სინუსისათვის და კოსინუსისათვის.

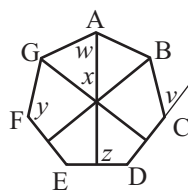
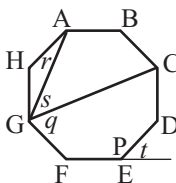
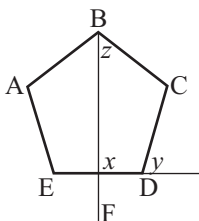


50. ააგეთ $y = 2 \sin 3x + 3$ ფუნქციის გრაფიკი 5 წერტილის მიხედვით. ამ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით ააგეთ $y = 2 \sin 3(x - \frac{\pi}{3}) + 3$ ფუნქციის გრაფიკი.
51. იპოვეთ წესიერი მრავალკუთხედების ცვლადებით აღნიშნული კუთხეები.

ა) წესიერ ხუთკუთხედში BF სიმეტრიის ღერძია.

ბ) წესიერ რვაკუთხედში GC სიმეტრიის ღერძია.

გ) წესიერ შვიდკუთხედში სამი სიმეტრიის ღერძია ნაჩვენები.



52. ავტომობილის საბურავის ბრუნის სიგრძე 50 სმ-ია. იპოვეთ ავტომობილის მიერ გავლილი მანძილი საბურავის.
- ა) 5-ჯერ ბ) 500-ჯერ სრული ბრუნის გაკეთების დროს.

განმაზოგადებელი დავალებები

53. ერთი ფინჯანი ადუღებული წყლის (100°) ოთახის ტემპერატურამდე (20°) გაციებას უცდიან. დაკვირვებები უჩვენებს, რომ ტემპერატურა დროზე ექსპონენციალური დამოკიდებულებით ყოველ 5 წუთში 25% -ით ქვევით იწევს.
ა) ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულებით ცვლილება დაამოდელორეთ $y = ab^x + c$ სახით. ბ) რამდენი წუთის შემდეგ იქნება წყლის ტემპერატურა ოთახის ტემპერატურის დონეზე?

54. ვულკანური ამოფრქვევის დროს დამწვარი ხის ნახშირში დარჩენილი ნახშირბად 14 ნითიერების 45% -ია დარჩენილი. რამდენი წლის წინათ მოხდა ვულკანის ამოფრქვევა?

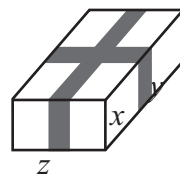
55. განსაზღვრეთ ახალი კოორდინატები.

ა) $(5;3)$ წერტილის კოორდინატთა სათავის გარშემო 90° -ით საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით მობრუნებისას.

ბ) $(4;2)$ წერტილის კოორდინატთა სათავის გარშემო 180° -ით საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მობრუნებისას.

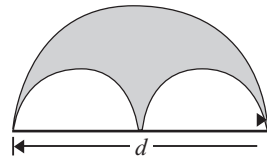
გ) $(3;2)$ წერტილის y ღერძის მიმართ ასახვის შემდეგ სრული (360°) მობრუნების $\frac{3}{4}$ -ით მობრუნებისას.

დ) $(2;3)$ წერტილის 3 ნახევრით მარჯვნივ მოცურებისა და 90° -ით საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით მობრუნებისას.



56. ყუთის მოცემული $x = 5$ სმ, $y = 8$ სმ, $z = 5$ სმ ზომების მიხედვით იპოვეთ მასზე გადაჭერილი წებოვანი ლენტის (სკოჩი) ზომა.

57. ჰასანი ბეგიას ეკითხება, თუ რამდენი წლისაა იგი. ბეგია მას ასე პასუხობს: “მე 5 წლისა სკოლაში წავედი, სიცოცხლის ერთი მეოთხედი ნაწილი განათლებით ვიყავი დაკავებული, შემდეგ მუშაობა დავიწყე და აქაც სიცოცხლის ნახევარი გავატარე. ეხლა კი 15 წელია შვილიშვილებს ვზრდი. შენ გამოთვალე, რამდენი წლისა ვარ მე?” თქვენც გამოთვალეთ ჰასანის ბეგიის ასაკი.



58. სურათზე სამი ნახევარწერეა გამოსახული. გამოთვალეთ გაფერადებული ნაწილის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ $d = 18$ სმ.

59. ქვემოთ მოცემული ინფორმაცია უჩვენებს ერთი თვის განმავლობაში მოსული ნალექების რაოდენობას (0,1 მმ სიზუსტით). ინფორმაცია ხისებრ-განტოტვითი დიაგრამით ორნაირად წარმოადგინეთ.

1,3; 2,0; 2,3; 3,2; 3,4; 1,8; 3,1; 2,3; 1,9; 2,6;
1,6; 0,0; 2,4; 3,1; 0,6; 0,7; 0,3; 0,0; 2,2; 1,5;
3,6; 2,3; 1,8; 2,7; 3,0; 2,9; 1,2; 2,2; 1,4; 3,3

60. შეასრულეთ გარდაქმნები.

1) $2\text{სმ}^3 \rightarrow \text{მმ}^3$

2) $0.003\text{სმ}^3 \rightarrow \text{მმ}^3$

3) $3.4\text{მ}^3 \rightarrow \text{სმ}^3$

4) $0.015\text{მ}^3 \rightarrow \text{სმ}^3$

5) $550,000 \text{მმ}^3 \rightarrow \text{სმ}^3$

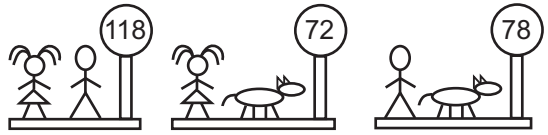
6) $1,200,000 \text{სმ}^3 \rightarrow \text{მ}^3$

7) $0.5\text{მ}^3 \rightarrow \text{litres}$

8) $53,000 \text{მლ} \rightarrow \text{ლიტრი}$

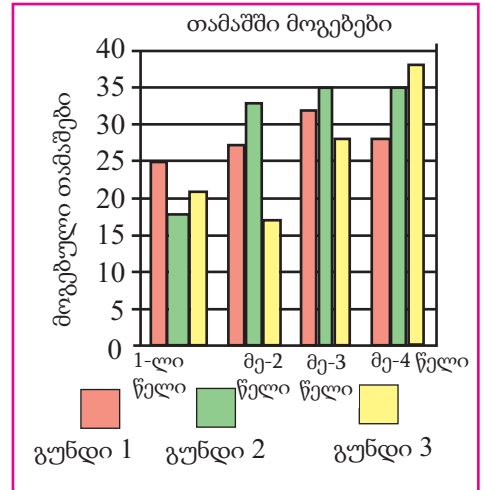
განმაზოგადებელი დაგალებები

61. სასწორები ბიჭის, გოგონასა და ცხვრის მასებიდან ორს ერთად უჩვენებს. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ რამდენი კილოგრამია თითოეულის მასა?



62. ბარგრაფი ასახავს ინფორმაციას 5 წლის განმავლობაში გუნდის მიერ მოგებული თამაშების შესახებ. ამ ინფორმაციების მიხედვით, ქვემოთ მოცემული მოსაზრებებიდან რომელია მართებული?

- ა) გუნდი 3 ყოველთვის მეორეა.
ბ) გუნდი 1-ის შედეგები ყველა გუნდზე უკეთესია.
გ) გუნდი 1 ყოველთვის მეტ თამაშს იგებდა, ვიდრე გუნდი 3.
დ) გუნდი 2 ყოველ წელს იგებდა უფრო მეტ თამაშს, ვიდრე წინა წელს.



63. რეზადი მიზანში მსროლელთა კლუბის წევრია. მისი შედეგები უჩვენებს, რომ ნასროლის 80%-ს მიზანში არტყამს.

- ა) იპოვეთ რეზადის მორიგი სროლის დროის მიზანში მორტყმის ალბათობა.
ბ) იპოვეთ რეზადის მიერ 3-ჯერ ზედიზედ მიზანში მორტყმის ალბათობა.
გ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ რეზადი სამი ნასროლიდან პირველს მოარტყამს, დანარჩენ ორს კი ვერ მოარტყამს მიზანს.

64. სიხშირის ცხრილში მოცემულია ინფორმაცია ავტომობილების სადგომზე მდგომი 600 ავტომობილის ექსპლუატაციის წლებისა და ძრავის მოცულობის (სმ. კუბი) შესახებ.

ექსპლუ- ატაციის წლები	ძრავის მოცულობა				
		0 – 1000	1001 – 1500	1501 – 2000	2001 +
	3 წელზე ნაკლები	50	80	160	20
	3 წელზე მეტი	60	100	120	10

- ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ერთი ავტომობილის ექსპლუატაციის ვადა იქნება 3 წელიწადზე ნაკლები?
ბ) თუ ეს შედეგები 5400 ავტომობილის წარმოდგენილი შერჩევა, მათ შორის რამდენის ძრავის მოცულობა იქნება 2000-ზე მეტი ხოლო ექსპლუატაციის ვადა 3 წელზე მეტი. პროგნოზირება მართებული იქნებოდა?

65. მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის ავზის ფუძის ზომები 50 სმ და 80 სმ-ია. ავზის ტევადობა 400 ლ-ია. იპოვეთ ავზის სიმაღლე.

ფუნქციები

პპ. 9-11 №9 0 №10 ა) 1; ბ) -1 №11 0 №12 ბ) 0; -0,75; -2 №13 დ) $D(f) = (-3; 2]$,
 $E(f) = (-5; 5]$ №14 $b = -3$ №15 $c = 2$ №16 4 №17 ა) A(2;0), B(0;-1)
 №19 ა) $E(f) = [2; 7]$ №20 $f(-2) = 3; f(6) = -1$ №21 ა) $f(-1) = 5, f(0) = 4, f(1) = 3$

პპ. 13 №2 ბ) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$; გ) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$,
 $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; ე) $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$
 №3 გ) $D(f) = (-\infty; 3]$; ე) $D(f) = [0; 2) \cup (2; +\infty)$; ზ) $D(f) = [-1; 1]$;
 თ) $D(f) = [1; 3) \cup (3; +\infty)$; ი) $D(f) = [-4; 4) \cup (4; +\infty)$

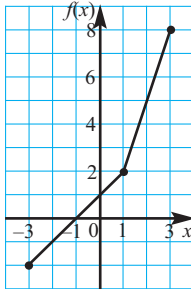
№4 ბ) $D(g) = (-\infty; +\infty)$, $E(g) = (-\infty; 6]$; დ) $D(\varphi) = (-\infty; +\infty)$, $E(\varphi) = [3; +\infty)$;
 ე) $D(u) = [-3; 3]$, $E(u) = [0; 3]$; ვ) $D(v) = [-1; 3]$, $E(v) = [0; 2]$
 №5 ა) $D(f) = [0; 1) \cup (1; 2]$; ბ) $D(f) = (-\infty; 0] \cup (1; 2]$; გ) $D(f) = (1; 2]$
 №6 უმმ = 2, $E(f) = [2; +\infty)$ №7 ბ) $y = 6 - x, 0 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 6$

პპ. 16-17 №1 ბ) $x_1 = 0, x_2 = 3$; გ) $x = 4$; დ) $x = 2$ №5 2) ა) $[-2; 3]$; ბ) -2 და 2;
 გ) $(-2; 2)$; დ) $(2; 3]$; ე) $[-2; 0]$ ა, $[0; 3]$ ბ; ვ) $x_{\max} = 0, y_{\max} = 4$; ზ) $[-5; 4]$
 №6 ა) $f(2) < f(0) < f(-4)$; ბ) $f(\sqrt{2}) < f(-\sqrt{3}) < f(-2)$ №11 ა) უმმ = 2

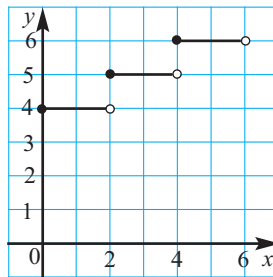
პპ. 19 №1 ა) კენტი; ბ) ლუწი დ) არც კენტი, არც ლუწი №4 ა) 6; დ) 4 №7 ბ) $f(5) < f(7)$ №8 $(-4; 4)$

პპ. 21 №1 ა) 0; ბ) 5; გ) -7; დ) 41 №2 ა) 4; გ) 0; ე) 2

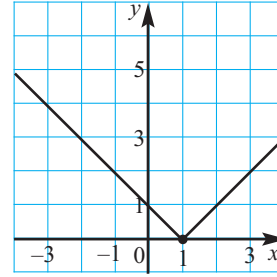
№3 ა)



ბ)



გ)



პპ. 22 №2 ა) დიახ; ბ) არა №4 ა) $f(0,1) > g(0,1)$; ბ) $f(\frac{1}{2}) > g(\frac{1}{2})$; გ) $f(2) < g(2)$

პპ. 24 №2 გ) $y = x^3$ №4 $y = \frac{4}{x}$ №5 ა) $h = \sqrt{9 - a^2}$; ბ) $D = [0; 3]$, $E = [0; 3]$

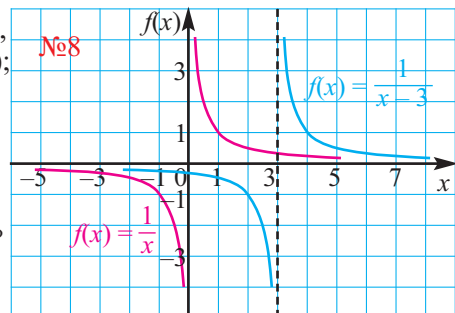
პპ. 25-31 №1 ა) $m = 0, n = 4$ დ) $m = 7; n = -3$

№2 ბ) $g(x) = (x - 2)^2 - 1, y = x^2$ პარაბოლა 2 ერთეულით მარჯვნივ, 1 ერთეულით ქვევით მოცურდება. №5 1) ბ) $g(x) = (x + 3)^2 - 3$; 2) ბ) $g(x) = f(x - 4) - 8$

№7 ა) $y = |x + 4| - 2, m = -4, n = -2$,
 $D(y) = (-\infty; +\infty), E(y) = [-2; +\infty)$;
 ბ) $y = (x - 6)^2 + 4, m = 6, n = 4$,
 $D(y) = (-\infty; +\infty), E(y) = [4; +\infty)$

№10 ა) 2 ერთეულით მარჯვნივ მოცურდება №13 ბ) $y = \sqrt{x}$ -ის გრაფიკი x ღერძის მიმართ აისახება და 1 ერთეულით ზევით აცურდება.

№26 ა) $y = 2\sqrt{x}$; ბ) $y = 2\sqrt{x}$



პპ. 33 №1 $(f+g)(1)=1, (f-g)(2)=3, (f \cdot g)(6)=-20$ **№2** ბ) $(f+g)(x)=(x+1)^2, D=(-\infty; +\infty), E=[0; +\infty); (f-g)(x)=x^2-1, D=(-\infty; +\infty), E=[-1; +\infty)$
 $(f \cdot g)(x)=x \cdot (x+1)^2, D=(-\infty; +\infty), E=[-\infty; +\infty)$
 $(\frac{f}{g})(x)=x, D=(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty), E=(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

პპ. 35-36 №3 ა) 1; გ) 2; დ) 0 **№4** ა) 4; ბ) 50; გ) -48

№7 ა) $(-2; 2)$; ბ) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$;

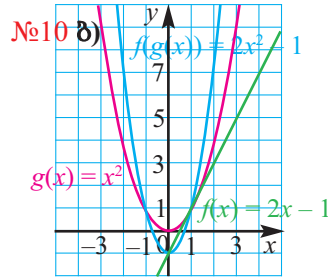
№12 ბ) $f(x)=x^2-1$; დ) x^2+x+1

№13 ბ) $f(-1)=-1, f(2)=5, f(3)=7, f(0)=1, f(x)=2x+1$ **№15** ბ) $[-2; 6]$; გ) $[-3; 1]$

პპ. 39-40 №5 ა) $f^{-1}(9)=-3, f^{-1}(7)=1, f^{-1}(2)=6$

№6 ა) $y=\frac{1}{4}x$; გ) $y=\frac{x+14}{3}$; ე) $y=\frac{4x-24}{3}$

№12 ა) $f^{-1}(x)=-\frac{\sqrt[4]{x}}{2}$; დ) $f^{-1}(x)=-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$ **№14** ≈ 45 სმ



პპ. 41-42 №3 ა) $y=\sqrt[3]{x+1}$ **№6** 1) ა) ლუწი; ბ) კენტი **№7** $f(2)=10$ **№10** ბ) -1 და 7
№11 ა) 3; გ) 11; ე) 3; ზ) 7 **№13** ა) $D(f)=(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; ბ) $(2; 5)$

წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში

პპ. 45-47 №5 ა) 1; 4 ან უსასრულო რაოდენობის **№10** ა) 8 სმ; ბ) $\frac{a+b}{2}$ **№11** 6 სმ **№12** 6 სმ

პპ. 48 №3 ა) 6 სმ; ბ) 4,5 სმ; გ) $\frac{bc}{a+c}$

პპ. 51 №3 $x=6$ **№4** ა) $8\sqrt{3}$; ბ) 4 **№5** 6 სმ **№7** $d=5\sqrt{2}$, $\varphi=45^\circ$ **№9** $a\sqrt{6}$ **№10** 45°

პპ. 53 №2 5 სმ **№3** 12 სმ **№4** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ სმ **№5** 3 სმ

პპ. 55-58 №2 ა) დიახ; ბ) არა **№3** $a\sqrt{2}$ **№4** 2,4 სმ **№5** 90° **№6** 8 სმ **№8** $\sqrt{a^2+b^2}$
№16 17 სმ **№18** ა) 17 სმ; ბ) 9 სმ; გ) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

პპ. 61-62 №7 6 სმ **№8** 15 სმ, 6 სმ, 8 სმ **№9** 12 სმ **№10** 2 მ **№12** 18 სმ ან 22 სმ

პპ. 64 №2 $9\sqrt{3}$ სმ² **№3** $4\sqrt{2}$ სმ **№4** $48\sqrt{3}$ სმ² **№5** ა) $\frac{3}{8}a^2$; ბ) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$ გ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

პპ. 65 №2 7,2 მ **№4** $2\sqrt{3}$ სმ **№5** 13 სმ ან 15 სმ **№6** ბ) $\frac{a}{2}$; გ) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

პპ. 68-71 №1 გ) III მეოთხედი **№5** ა) 4 რად. **№7** ბ) $\frac{2\pi}{3} \approx 2,09$ რად. **№8** გ) $-67,5^\circ$ **№12** 2) $\frac{5\pi}{4}$

პპ. 72-75 №3 1,2 რად. **№6** ა) 250 რად. **№8** ა) 192π მ²; ბ) $16\pi = 2880^\circ$

№9 ა) 3π რად/წთ; ბ) 45π მ/წთ. **№10** ≈ 153 მ **№14** $0,5$ რად. $\approx 28,5^\circ$

№16 ≈ 245 ბრუნ **№18** $0,75$ ბრუნ **№20** $\approx 86^\circ$

პპ. 82 №5 ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; თ) $\sqrt{3}$ **№6** ა) 0,42; ბ) -0,91 **№7** ა) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$ **№8** ა) 0; ბ) 1; გ) 1 **№9** B(-1,53; 1,29)

პპ. 85 №5 ა) 1,5; ბ) 1; დ) 0,5 **№6** ა) 2 **№7** ა) $2\sqrt{3}$ **№9** ბ) უღმ=2, უმმ=0

№10 ბ) უღმ=2, უმმ=1 **№13** 2წერტილი; $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ **№15** და $\frac{2\pi}{3}$

პპ. 88-89 №3 ბ) $-\sin \alpha$; გ) $-\cos \alpha$ №6 ბ) $-\frac{1}{2}$; დ) $-\sqrt{3}$ №9 ა) $-\sin \alpha$ №10 ბ) $\cos^2 \alpha$
 №11 ა) $-\sin 10^\circ$ №14 ბ) 1; დ) 0 №15 ა) $2 \cdot \cos \alpha$; ბ) 0

პპ. 91-92 №1 გ) $\operatorname{cosec}^2 \alpha$; თ) 1 №2 $\cos \alpha = -0,8$; $\operatorname{tg} \alpha = -0,75$ №5 ა) $\operatorname{tg}^2 \alpha$; ბ) 2
 დ) $\frac{2}{\sin \alpha}$; ე) $\frac{1}{2}$ №6 ა) 5; ბ) $\frac{1}{9}$ №7 ა) $2 \cos \alpha$; ბ) $-2 \cos \alpha$ №10 1 $\frac{9}{16}$
 №11 ა) 20; ბ) -16 №12 -0,32 №15 ა) $\cos^2 \alpha$ №17 ა) $\varphi = 3$, $\vartheta = -4$

პპ. 95-96 №2 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ №4 ბ) $\frac{1}{2}$ №5 ბ) 1 №6 ა) 1 №7 ა) $\frac{1}{2}$; ბ) -1 №8 ა) 0 №11 ა) $\sqrt{3}$;
 ბ) 1 №12 5 №13 ა) 1 №14 ა) $2 - \sqrt{3}$ №15 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ №16 ა) 1 №17 ა) 1
 №18 ა) -3; ბ) 3 №19 $\sin \varphi = \frac{16}{65}$, $\varphi \approx 14,3^\circ$ №20 ა) $\operatorname{tg} \theta = 0,75$ $\theta \approx 37^\circ$

პპ. 97-101 №2 ა) 0 №4 ა) $\operatorname{tg} 5\alpha$; ბ) $-\operatorname{tg} 4\alpha$ №7 ა) $\frac{1}{4}$ №10 ა) $\frac{1}{2}$ №11 ბ) 0
 №12 ა) $-\sin 4x \cdot \cos 10x$; ბ) $-\sin 3x \cdot \sin x$ №13 ა) $2 \operatorname{ctg} \alpha$; გ) 2 №14 ბ) 0,28
 №16 ა) 2 №17 ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ №23 ა) $-\frac{240}{289}$ №29 $\approx 0,46$ პპ. ერთ.

პპ. 102-103 №1 1) $-\cos 2x$; 3) 1 №3 5) $\frac{1 + \sin \alpha}{2}$ №5 ბ) $\frac{\sqrt{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$ №6 ბ) 1
 №8 გ) $\varphi = \sqrt{2}$, $\vartheta = -\sqrt{2}$ №9 $\frac{2}{\cos \alpha}$ №10 ა) -1; ბ) 1 №11 $\frac{1}{4}$

პპ. 104-105 №5 ა) a ბ) $-a$ №6 ა) 1 №11 1 №14 3 №17 ა) 1 №20 ა) 3 ბ) 0,5

სინუსებისა და კოსინუსების თეორემა

პპ. 109-113 №1 ა) $b=12$; ბ) $a \approx 8,92$; გ) $\angle B = 45^\circ$; დ) $\angle A \approx 44^\circ$ №3 ა) $\theta = 30^\circ$; ბ) $\theta = 60^\circ$
 №4 ა) $\angle A \approx 36^\circ$, $a \approx 14,72$, $c \approx 23,5$ №5 2) 1 ამონახსენი; 6) ამონახსენი არა აქვს;
 9) 2 ამონახსენი №7 გ) $\approx 34,71$ №8 ა) $\approx 41,6^\circ$ ან $\approx 138,4^\circ$ №11 ა) $20,26^\circ$
 №12 1) $\approx 16,06$ მ² №14 ა) $30\sqrt{3}$ №16 ა) $25 < BC < 50$ №17 ≈ 4139 მ
 №18 $\theta \approx 38,5^\circ$ ან $\theta \approx 21,5^\circ$ №19 $\approx 47,9$ მ №21 $\varphi \approx 92^\circ$ №22 $\approx 41,5^\circ$

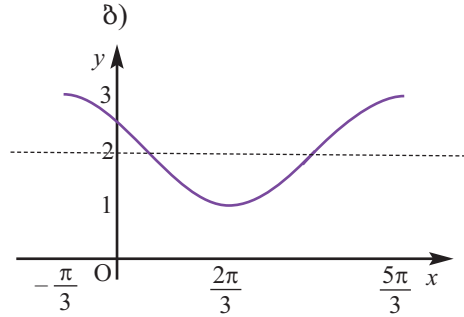
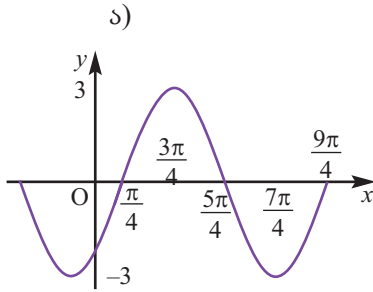
პპ. 116-118 №2 $BC = 7$; $\angle B \approx 81,6^\circ$; $\angle C \approx 38,4^\circ$ №4 1) $\approx 17,4$ №5 ა) $\frac{12}{5} \sqrt{6}$ მ;
 ბ) 11,2 სმ; გ) $4\sqrt{7}$; $\sqrt{73}$; $\sqrt{145}$ №7 ა) $d_1 = 2\sqrt{13}$, $d_2 = 2\sqrt{37}$ №8 გ) $\approx 68^\circ$
 №11 ბ) $\approx 42,5$ კმ №13 ≈ 111 მ

პპ. 119-120 №2 ა) ≈ 3 კმ; ბ) $\approx 8,3$ კმ და $\approx 8,9$ კმ №3 $\approx 12,2$ მ №6 ≈ 191 მ
 №7 $\approx 15,5$ კმ და $\approx 42,4$ კმ №9 $\approx 85,5^\circ$ №11 ბ) $\approx 1,5$ წუთი

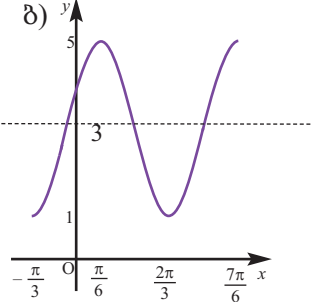
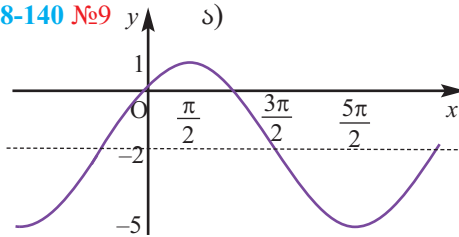
ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

პპ. 129-135 №1 ა) $y = 4 \sin x$; ბ) $y = \frac{1}{3} \sin x$; გ) $y = \sin \frac{1}{2} x$ №6 ა) $A = 4$, $T = 6\pi$;
 დ) $A = \frac{1}{2}$, $T = 2$ №7 1) ა) $y = \frac{1}{2} \sin \frac{2x}{3}$; ბ) $y = 4 \cdot \sin 2x$; გ) $y = 2 \sin x$
 №8 ა) $y = 12 \sin \frac{1}{4} x$; გ) $y = -0,8 \sin \pi x$ №9 ა) $y = 9 \cos \frac{1}{4} x$ №10 ა) $T = 12 \pi$;
 გ) $T = 30\pi$ №11 $A = 0,5$; $T = \frac{2}{5}$ №14 ბ) 75 №17 ა) $y_{\max} = 8$, $y_{\min} = 2$,
 $E(y) = [2; 8]$ №19 ა) $y = 4 \sin 2(x - \frac{\pi}{4}) - 6$; ბ) $y = 0,5 \sin \frac{2}{3}(x + \frac{\pi}{3}) + 2$

№20



პპ. 138-140 №9



№10 ა) $y = 3 \sin 2x$; ბ) $y = 5 \sin \frac{1}{2} x$; გ) $y = -4 \cos x$ №12 ა) $y = 2 \cos(x - \frac{2\pi}{3})$

პპ. 142-143 №1 ა) $y = 1,2 - 16 \cos \frac{\pi}{6}(t-1)$ №2 ა) $T = 0,8$ წმ. ბ) 75 №3 ა) $y = 10 - 8 \cos \frac{\pi t}{30}$;

ბ) 18 მ №5 ბ) $H = 36 - 18 \cos \frac{10\pi t}{3}$; გ) 72 სმ; დ) 170 მ/წთ

პპ. 145-149 №1 ა) -1 ბ) 1 №4 ბ) $\tan \theta = -\sqrt{3}$, $\theta = 120^\circ$ გ) $\tan \theta = -\sqrt{3}$, $\theta = 300^\circ$

№15 ა) $h = 3 \cdot \tan \alpha$ №16 ა) $d = 5 \cdot \tan \frac{\pi t}{30}$ ბ) $d \approx 8,7$ მ

პპ. 152-154 №1 ბ) $-\frac{\pi}{3}$ გ) $\frac{3\pi}{4}$ დ) $\frac{3\pi}{4}$ №7 ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ბ) $-\sqrt{3}$ გ) -1 №10 ა) $\frac{4}{5}$ ბ) $\frac{24}{25}$

გ) $\frac{63}{65}$ №11 ა) $x = 4 \operatorname{cosec} \theta$; ბ) $\approx 9^\circ$ №12 ბ) $\approx 41^\circ$ №15 ა) $-\frac{\pi}{6}$ ბ) $\frac{2\pi}{3}$

პპ. 155-156 №1 ა) $B(\frac{\pi}{6}; 2)$, $C(\frac{\pi}{3}; 2)$, $D(\frac{\pi}{2}; 2)$, $E(\frac{2\pi}{3}; 2)$, $F(\frac{5\pi}{6}; 2)$ №3 1) $A=6$, $T=3\pi$

№5 გ) $y = 5 + 2 \cos 2x$ №7 ა) $y = 12 - 10 \cos \frac{\pi t}{50}$ №8 ა) $y = 6,1 - 5,8 \sin \frac{\pi}{6}(t-1)$

მრავალწახნაგები

პპ. 161-162 №5 C წახნაგი №6 $AC = 5$, $AC' = 13$ №7 9 სმ

პპ. 163-165 №12 ა) 26; ბ) 29 №13 $d_1 = 13$ სმ, $d_2 = 9$ სმ №14 $d_1 = a\sqrt{2}$, $d_2 = 2a$

პპ. 168-170 №2 ა) 160 მ² №5 188 სმ² №7 224 სმ², $18\sqrt{3} + 180 \approx 211,2$ სმ²

№11 ა) $S_0 = 22$ მ²; ბ) $S_{88} = 90$ მ²; გ) $S_{66} = 134$ მ² №12 დ) $S_{88} = 480$, $S_{66} = 536$

პპ. 172-173 №5 200 სმ² №6 ა) $S_{88} = 6$ სმ² №7 140 სმ² №8 36 სმ² №10 5 სმ

პპ. 176-179 №1 12 სმ №2 9 სმ №3 1680 სმ², 96 სმ², 728 სმ² №7 ა) 13 სმ და 15 სმ

№9 52 სმ² №10 180 სმ² №11 $\approx 182,6$ მ² №15 ბ) 288 სმ² №16 36 სმ²

№17 ა) 4 №19 $72\sqrt{3}$ სმ² №21 $h_a = 6$ სმ, $h = 3\sqrt{3}$ სმ

გვ. 180-182 №4 ა) 14 სმ² №6 $S_1 = 25 \text{ მ}^2$, $S_2 = 100 \text{ მ}^2$, $S_3 = 225 \text{ მ}^2$ №7 11 სმ
 №11 360 სმ² №12 330 სმ² №13 12544 სმ² №14 ა) 3440 სმ²; ბ) ≈ 407 სმ

გვ. 183 №1 88; 85; $360 + 64\sqrt{3}$; 22 №2 დ) $a=8$ სმ, $h=3$ სმ, $h_a=5$ სმ

ტრიგონომეტრიული განტოლებები და უტოლობები

გვ. 186-192 №2 ა) 2) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) №3 ა) $2\pi n$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; ბ) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$
 №5 ბ) 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) №6 2) ა) $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$

№8 დ) 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) №9 ბ) 1) $\frac{3\pi}{4}$ 2) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

№10 ა) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ №13 ბ) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{19\pi}{6}$

№15 გ) $-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) №16 ბ) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$); დ) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ №17 ბ) 240°

№18 ა) 0° ; 90° ; 180° №21 ბ) 60° ; 120° ; 240° ; 300° №22 ექვსი ფესვი აქვს

გვ. 196-199 №2 ბ) πk ($k \in \mathbb{Z}$) გ) $-\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ №3 გ) $\pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) №4 ა) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

№5 ა) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$); №6 ბ) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$ №7 ბ) $\frac{\pi k}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

გ) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$); 1) πk , ($k \in \mathbb{Z}$) №9 14) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

№10 1) ა) $\frac{2\pi}{3}$; ბ) $-\frac{\pi}{3}$ გ) $-\frac{\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, π №15 ბ) 75° №16 $\theta \approx 26^\circ$ №20 $t \approx 0,4$ წმ

№21 ა) $h(t) = 1,5 + 2\cos \frac{\pi t}{12}$ ბ) $\approx 0,1$ მ ც) $t = 6$ წმ

გვ. 204-206 №1 ა) $(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ ბ) $(0; \pi)$ №2 ა) $(-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6})$ №3 ა) $(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3})$

№4 ბ) $(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$ №5 ბ) $(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$ №6 ბ) $(0; \frac{\pi}{6})$ №8 გ) $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

№12 ბ) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; ($k \in \mathbb{Z}$); №13 ბ) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$; ($k \in \mathbb{Z}$);

№14 ა) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$; ($k \in \mathbb{Z}$); №15 ბ) $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

გვ. 208-209 №4 დ) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$) №5 ბ) 20მ, 24მ დ) ≈ 44 წმ №8 ბ) როცა $60 < x < 300$

სივრცითი ფიგურების მოცულობა

გვ. 213-218 №5 225 სმ³; 120 მ³ №8 ა) 99 ტ; №10 ბ) $V = 144$ №11 875 სმ³ №12 432,3 კგ

№15 ა) 2 სმ; ბ) $8\sqrt{3}$ სმ³ №17 60 სმ³ №18 ა) $V = 6$ სმ³ ბ) 60 სმ³-ით მოიმატა

№19 840 მ³ №20 576 სმ³ №21 ა) $V = 12$ დმ³ №22 24 მ³ №24 ა) $160\sqrt{3}$

№25 375 მ³ №27 48 სმ³ №28 1680 სმ³ №33 ბ) 18 სმ³

გვ. 219-22 №1 ბ) 4,4 მ³; 159,3 მ³ №3 15:7 №4 2880 მმ³ №5 96 სმ³ №15 32 დმ³

გვ. 224-225 №2 ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{6}{7}$ №4 ა) 25:9 ბ) 125:27 №6 ა) $V_1 = 43$ სმ³

№7 ა) $S_2 = 175$ სმ² №9 63 სმ³ №17 12 მ²

გვ. 227 №1 $S_{\text{გ}} = 468$ მ²; $S_{\text{სრ}} = 680$ სმ²; $V = 1072$ სმ³ №4 234 კუბური ერთეული

№5 ბ) $V_{\text{პირამიდა}} = 12$; $V_{\text{პარალელეპიპედი}} = 72$; $V_1 : V_2 = 1 : 6$

გვ. 232 №2 ა) 5 სმ ბ) 420 სმ³ №3 1: 125 №4 272 სმ² №9 90 სმ³, 141 სმ²

მაჩვენებლიანი და ლოგარიტმული ფუნქციები

გვ. 235-236 №5 ე) 2; ვ) 5; ი) 256 №10 ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{3}{5}$; გ) 2 №11 დ) $a^{0,75}$ №14 ბ) 8; თ) 8

გვ. 239-240 №7 ა) $y = -2$ ($\frac{1}{4}$)^x ბ) $y = 3 \cdot 5^x$ №12 გ) 3 №13 ბ) 3-ზე ნაკლები მნიშვნელობებისათვის.

- გვ. 244-245 №6 ბ) $y = \frac{5}{3} \cdot 3^x$ №10 ბ) ≈ 1587 მანეთი
 №11 ა) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = (2; +\infty)$; გ) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = (-1; +\infty)$
- გვ. 249 №7 გ) 6; დ) 25; ვ) 9 №8 ა) 2; ბ) $\frac{49}{3}$ გ) 36 №9 ა) $\frac{1}{2}$; ბ) 16 №10 $\approx 7,84$ მილიარდი
- გვ. 251 №5 ა) ზრდადი; ბ) კლებადი №6 ბ) $\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 3$ გ) $\log_2 3 > \log_2 4$ №7 $k=16$
- გვ. 252-253 №2 ა) ≈ 36 ფბ ბ) მცდარი №3 ა) 7,1 ბ) 5-ჯერ №6 4,6 წწ., 11,7 წწ.
- გვ. 255-257 №3 ა) $\log_2 15$ ბ) $\log_3 8$ ზ) $\log_3 800$ №5 ა) $\log_2 \frac{x+3}{2}$; ($x>3$)
 №6 ა) $a+b$; დ) $a+b+1$ №8 1) ა) 27; ბ) 49 2) ა) $5x^2$ №11 2) გ) 4; დ) 4 თ) -4
- გვ. 259-260 №1 დ) -1; 3 თ) 2 №2 14) 10; 15) -3; 5 №3 ა) 0; 2 ე) 1; 2 №4 ბ) 1; გ) 1,5;
 №6 ა) 27 №7 ე) $4+lg7$; №8 3) -1,4; 9) 1,5 №9 ა) $r \approx 0,042$ ბ) $\approx 35,4$ წთ.
 №10 ბ) πk , ($k \in \mathbb{Z}$), გ) 5; 7 დ) -2; 2
- გვ. 262-264 №1 ბ) 32 ე) 2 №2 ბ) 6; ზ) 9; ი) $=\emptyset$ თ) 4 №3 ა) 4; ბ) 3 №4 ა) 81; $\frac{1}{3}$
 №5 ა) $\frac{1}{2}$; 8 №7 დ) 3; ე) $\emptyset$; თ) $\frac{1}{3}$; 9 №8 2) 10 №9 2 №15 3,2 ქულა №18 ბ) 9,8 წწ.
- გვ. 266 №1 ბ) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; ე) $(-2; 4)$ №2 ბ) $x < 9$; გ) $x < 2$ №3 ბ) $x > 2$
 №4 ა) $x \geq -1$ №5 ა) $(-3; 3)$ გ) $[-2; -1) \cup [2; +\infty)$ დ) $(2; 3) \cup (7; +\infty)$
 №7 1) $x > \log_8 21$ №8 1) $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$ 3) $(0; \ln 2)$
- გვ. 268-269 №1 ა) $(-1; 2)$ ბ) $(6; +\infty)$ ზ) $(3; +\infty)$ №2 5) $[-\frac{1}{4}; +\infty)$; 8) $(-5; 3]$
 №3 4) $(0; 2)$ 8) $(-1; 0) \cup (2; 3)$ 12) $(2; 32)$ №5 ბ) $\approx 5,9$ გრ №6 გ) 2; თ) 1
 №7 გ) $[\frac{1}{4}; 8]$ ი) $(\frac{1}{3}; 9)$ ე) $(-9; -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}; 9)$ №9 გ) $\approx 15,4$ წლის შემდეგ
- გვ. 270-271 №3 $\approx 10,3$ სთ. №6 ≈ 50 წწ. №8 $\frac{4}{15}$ №11 $y=3^{1-x}$ №12 ა) 100-ჯერ №16 დ) 3
- კომპლექსური რიცხვები**
- გვ. 275 №1 ა) 1 გ) i №3 ა) $x=0,5$; $y=2,5$ №5 ზ) $2+6i$ თ) 25
 №6 ბ) $(y+3i)(y-3i)$; გ) $(2x+i)(2x-i)$ №7 ა) $\frac{6}{5}$ №8 ა) $\pm 2i$ გ) $\pm 4i$ №9 ბ) $1-i$
- გვ. 279 №3 ა) $2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$; გ) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$ №4 ბ) $1+i$
 №5 ა) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$; ბ) $\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$
- გვ. 281 №2 ა) 2^{12} ; ბ) $2^{19} \cdot i$ №5 ა) $-\frac{i}{2}$; ბ) -32 №8 ა) 12 i
- გვ. 283 №1 ბ) ± 2 ; $\pm 2i$ №4 ბ) 2; $-1 + \sqrt{3}i$; $-1 - \sqrt{3}i$;
- ინფორმაციები და პროგნოზები**
- გვ. 300 №1 ა) 6 ბ) 8 დ) $k-1$ №7 ა) sC_0 sC_1 sC_2 sC_3 sC_4 sC_5 №10 ა) 8; ბ) მე-5 წვერი: 70
- გვ. 304 №2 ა) $\frac{5}{32}$; ბ) $\frac{5}{16}$; გ) $\frac{5}{32}$; დ) $\frac{1}{32}$; ე) $\frac{5}{16}$ №3 $\frac{80}{243}$ №8 $\frac{8}{81}$
- გვ. 307-313 №5 $b_n=3^n+1$ №9 ბ) 4 №11 ა) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ ბ) $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$
 №15 გ) $[-3; -1]$ №22 20 №24 $(2+1)^6=3^6=729$ №28 6 №29 12 სმ²
 №30 ა) $(-\infty; +\infty)$ ბ) $[6; +\infty)$ №31 $\frac{3}{4}$ №33 $m=-1$ №42 48

ლიტერატურა

1. ალგებრა. სახელმძღვანელო. მე-9 კლასი. მერდანოვი მ., იაკუბოვი მ. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2014. (აზერბაიჯანულ ენაზე).
 2. ალგებრა და ანალიზის საწყისები. სახელმძღვანელო. მე-10 კლასი. მერდანოვი მ., იაკუბოვი მ. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2011. (აზერბაიჯანულ ენაზე).
 3. გეომეტრია. სახელმძღვანელო. მე-9 კლასი. მერდანოვი მ., მირზაევი ს. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2011. (აზერბაიჯანულ ენაზე).
 4. გეომეტრია. სახელმძღვანელო. მე-10 კლასი. მერდანოვი მ., იაკუბოვი მ. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2011. (აზერბაიჯანულ ენაზე).
 5. გეომეტრია. სახელმძღვანელო. მე-11 კლასი. მერდანოვი მ., იაკუბოვი მ. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2011. (აზერბაიჯანულ ენაზე).
 6. A problem solving approach to Mathematics. Rick Billstein,... Pearson, 2013.
 7. Algebra 1. Edward B. Burger,... Harcourt Publishing Company, 2010.
 8. Algebra 2. James E. Schulltz,... Harcourt Education Company, 2004.
 9. Pre-Algebra, McDougal Littell. Houghton Mifflin Company, 2005.
 10. Discovering Advanced Algebra An Investigative Approach. Grades 10–12. Jerald Murdock,... Key Curriculum Press. 2010.
 11. College and Apprenticeship mathematics. Pearson Education Canada Inc., 2003.
 12. Геометрия. Учебник для 7-11 классов. А.В.Погорелов, Просвещение, 1999.
- <http://www.classzone.com>
<http://www.nctm.org>
<https://www.engageny.org/content/prec calculus-and-advanced-topics>
<https://www.edonline.sk.ca/webapps/moe-curriculum-BBLEARN/index.jsp>
<http://math.kendallhunt.com/x5273.html>
<https://www.khanacademy.org/math>

Buraxılış məlumatı
RİYAZİYYAT 10

Ümumtəhsil məktəblərinin 10-cu sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə dərslik
(Gürcü dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:

Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
İlham Heydər oğlu Hüseynov

Elmi məsləhətçi

Çingiz Qacar

Elmi redaktor

İbrahim Məhərov

Tərcüməçi

Çalabi Abdurahmanov

Korrektor

Tərlan Qəhrəmanova

Bədii tərtibat

Leyla Bəşirova

Kompüter tərtibatı

Mustafa Qəhrəmanov

Rəşad Musayev

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi: 2017-092

© Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi –2017

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

Kağız formatı: 70×100_{1\16}, Fiziki ç.v. 20.

Ofset kağızı. Times New Roman şrifti

Səhifə sayı 320. Tiraj 200 .Pulsuz.

Bakı 2017

Radius nəşriyyatı

Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

PULSUZ

Əziz məktəbli !

Bu dərslik sənə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sənə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, sən də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsan ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşın ondan sənin kimi rahat istifadə edə bilsin. Sənə təhsildə uğurlar arzulayırıq!