

მათემატიკა

7

სახელმძღვანელო





Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

*Musiqisi Üzeyir Hacıbəylinin,
sözləri Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadırız!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



ზვიად აგვაშვი

აზერბაიჯანელი ხალხის სპორტო პრეზენტი ლიდერი

Çap için değil

სეგდა ისმაილოვა

მათემატიკა

7

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების
მე-7 კლასისათვის მათემატიკის საგნის
სახელმძღვანელო

გთხოვთ სახელმძღვანელოსთან დაკავშირებული თქვენი
გამონმკაურება, შენიშვნები და წინადადებები გამოაგზავნოთ
info@eastwest.az და derslik@edu.gov.az ელექტრონულ მისამართებზე.
წინასწარ მადლობას მოგახსენებთ ჩვენთან თანამშრომლობისათვის!



ŞƏRQ-QƏRB
BAKİ 2017



სარჩევი

შესავალი	7
----------------	---

I განყოფილება. რაციონალური რიცხვები. სამკუთხედის ელემენტები

1.1. რაციონალური რიცხვების ჩაწერა და წაკითხვა.....	8
1.2. რიცხვითი ღერძი. ორ წერტილს შორის მანძილი.....	11
1.3. უსასრულო პერიოდული ათწილადი	14
1.4. პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევა.....	17
1.5. რაციონალური რიცხვების შედარება	20
1.6. უტოლობა	23
1.7. მოქმედებები რაციონალურ რიცხვებზე	25
1.8. სიმრავლეები	27
1.9. აქსიომები.....	30
1.10. თეორემა. პირდაპირი და შებრუნებული თეორემები	33
1.11. კუთხის ბისექტრისის აგება	36
1.12. სამკუთხედის ბისექტრისები	38
1.13. სამკუთხედის მედიანები.....	39
1.14. სამკუთხედის სიმაღლეები.....	40
თვითშემოწმება	43

II განყოფილება. ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხი. სამკუთხედების კონგრუენტულობა

2.1. ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხი	44
2.2. ტოლფუძიანი ხარისხების გამრავლება	48
2.3. ტოლფუძიანი ხარისხების გაყოფა.....	50
2.4. ხარისხის ახარისხება	53
2.5. ნამრავლის ახარისხება	55
2.6. ერთწევრი და მისი სტანდარტული სახე.....	57
2.7. წილადის ახარისხება.....	61
2.8. ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის შემცველი გამოსახულება	63
2.9. მარტივი პროცენტით ზრდის ფორმულა	64
2.10. რთული პროცენტით ზრდის ფორმულა	67

2.11. კონგრუენტული სამკუთხედები.....	70
2.12. სამკუთხედების კონგრუენტულობის პირველი ნიშანი	72
2.13. სამკუთხედების კონგრუენტულობის მეორე ნიშანი	75
2.14. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები	78
2.15. სამკუთხედის აგება სამი გვერდის მიხედვით	82
2.16. სამკუთხედების კონგრუენტულობის მესამე ნიშანი	84
თვითშემოწმება	88

III განყოფილება. მრავალწევრი. შუამართობი

3.1. მრავალწევრი და მისი სტანდარტული სახე.....	89
3.2. მრავალწევრების შეკრება.....	92
3.3. მრავალწევრების გამოკლება.....	93
3.4. ერთწევრის მრავალწევრზე გამრავლება.....	95
3.5. მრავალწევრის მრავალწევრზე გამრავლება.....	97
3.6. მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა	99
3.7. მონაკვეთის შუაზე გაყოფა	102
3.8. მონაკვეთის შუამართობი	104
3.9. მართობი და დახრილი	105
3.10. ცენტრალური სიმეტრია	106
3.11. იგივეობა. იგივეური გარდაქმნა	109
3.12. ერთცვლადიანი წრფის განტოლება	111
3.13. აბსოლუტური ცდომილება.....	113
3.14. ფარდობითი ცდომილება	116
თვითშემოწმება	118

IV განყოფილება. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები. პარალელურობის ნიშნები

4.1. ორი გამოსახულების ჯამისა და სხვაობის კვადრატი	119
4.2. ორი გამოსახულების ჯამის კვადრატისა და სხვაობის კვადრატის ფორმულების გამოყენებით მამრავლებად დაშლა	123
4.3. ორი გამოსახულების კვადრატების სხვაობა	126
4.4. ორი გამოსახულების ჯამის კუბი და სხვაობის კუბი	131
4.5. ორი გამოსახულები კუბების ჯამის მამრავლებად დაშლა.....	134
4.6. ორი გამოსახულები კუბების სხვაობის მამრავლებად დაშლა.....	137

4.7. გამოსახულებათა გარდაქმნა.....	139
4.8. ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეები	144
4.9. წრფეთა პარალელურობის ნიშნები	146
4.10. პარალელურობის აქსიომა. პარალელურ წრფეთა თვისებები	149
4.11. კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები პარალელურია.....	153
4.12. კუთხეების, რომელთა შესაბამისი გვერდები მართობულია.....	155
თვითშემოწმება	157

V განყოფილება. განტოლებათა სისტემები. სამკუთხედის გვერდები და კუთხეები. სტატისტიკა და ალბათობა

5.1. ფუნქციის მოცემის ხერხები.....	158
5.2. წრფივი ფუნქცია და მისი გრაფიკი.....	162
5.3. პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი	166
5.4. წრფივი ფუნქციების გრაფიკების ურთიერთმდგომარეობა	168
5.5. მანძილი, დრო და სიჩქარე	170
5.6. ტემპერატურის გაზომვა	172
5.7. ორცვლადიანი წრფივი განტოლება და მისი გრაფიკი	174
5.8. ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემა და მისი ამოხსნა გრაფიკული ხერხით	177
5.9. ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჩასმის ხერხით	181
5.10. ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შეკრების ხერხით	184
5.11. ამოცანების ამოხსნა ორცვლადიანი წრფივი განტოლებების სისტემის შედგენით.....	187
5.12. სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი.....	190
5.13. მართკუთხა სამკუთხედი	192
5.14. სამკუთხედის გარე კუთხე და მისი თვისება.....	195
5.15. დამოკიდებულებები სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის	197
5.16. სამკუთხედის უტოლობა	199
5.17. ინფორმაციის შეგროვების ხერხები	201
5.18. ინფორმაციის წარდგენა. დიაგრამა, ჰისტოგრამა, გრაფიკი.....	203
5.19. პროგნოზირება.....	208
5.20. შედარებით რთული ხდომილებისათვის ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი	209
5.21. ხდომილების ალბათობა.....	212
5.22. ალბათობათა ჯამი.....	215
თვითშემოწმება	217
პასუხები.....	218

ძვირფასო მეზვიდეკლასელებო!

თქვენთვის წარმოდგენილი მე-7 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელო შედგება 5 განყოფილებისაგან. ყოველ განყოფილებაში გაეცნობით ახალ თემებს, მიიღებთ ახალ ცოდნას. სახელმძღვანელოში შესული თემები დაგეხმარებათ, დამოუკიდებლად დაეუფლოთ ახალ ცოდნას. ყოველი თემა იწყება ქვესათაურით-“საქმიანობა“, სადაც მოიცემა დავალება, რომელიც შესრულებული უნდა იქნეს გარკვეული მოქმედებებით. თქვენ ამ ნაწილში მოცემული დავალებების შესრულებით შეძლებთ უკეთ ჩასწვდეთ ახალ თემას. ამ დროს მოპოვებული შედეგები სახელმძღვანელოში მოცემული წესებით დამტკიცდება, ნიმუშების საფუძველზე მოპოვებული ცოდნის გამოყენებასთან ერთად, შეძლებთ მოცემული სავარჯიშოების დამოუკიდებლად შესრულებას. ყოველი თავის ბოლოს სათაურით-“თვითშემოწმებისათვის“ მოცემული სავარჯიშოების შესრულებით, შეძლებთ შეაფასოთ საკუთარი თავი.

VII კლასის მათემატიკის კურსში თქვენ შეისწავლით:

- ✓ რაციონალური რიცხვების წაკითხვას, ჩაწერას, შედარებას, სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთის თვისებების ამოცანების ამოხსნაში გამოყენებას;
- ✓ ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის შემცველ გამოსახულებათა გამარტივებას, შემოკლებული გამრავლების ფორმულებს;
- ✓ მარტივი პროცენტული ზრდისა და რთული პროცენტული ზრდის ფორმულების მარტივი ამოცანების ამოხსნაში გამოყენებას, ცხოვრებისეული სიტუაციების შესაბამისად წრფივი განტოლების ან ორცვლადიანი ორ წრფივ განტოლებათა სისტემის აგებას;
- ✓ მრავალწევრებზე შეკრების, გამოკლების და გამრავლების მოქმედებების შესრულებას;
- ✓ ერთცვლადიანი წრფივი განტოლების, მოდულის ნიშნის ქვეშ ცვლადის შემცველი განტოლებისა და ორცვლადიანი წრფივ განტოლების სისტემის ამოხსნას, შერჩევის ხერხით ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი უტოლობების ამოხსნის განსაზღვრას;
- ✓ სამკუთხედის ძირითადი ელემენტებისა და მათ შორის დამოკიდებულების გეომეტრიულ ასახვას, სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის შესახებ თეორემისა და გარე კუთხის თვისების გამოყენებას;
- ✓ მონაკვეთის შუამართობის, კუთხის ბისექტრისა და გვერდების მიხედვით სამკუთხედის აგებას, მოცემული წერტილების მიმართ მოცემული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურის აგებას, $y = kx + b$ განტოლებით მოცემული წრფივი გრაფიკის აგებას;
- ✓ გაზომვის შედეგების აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილების მოძებნას;
- ✓ ინფორმაციების დიაგრამის, ჰისტოგრამის ან გრაფიკის სახით წარდგენას;
- ✓ ჩატარებულ ცდამი ელემენტარული ხდომილების რაოდენობის პოვნას და ალბათობების შეკრების ფორმულის გამოყენებას.

გისურვებთ წარმატებებს ახალ სასწავლო წელს!

სახელმძღვანელოში გამოყენებული პირობითი ნიშნები	
საქმიანობა	მოსწავლეების დამოუკიდებლად შესასრულებელი დავალება
ნიმუში	ნიმუში თემასთან დაკავშირებით.
სავარჯიშოები	თემის განმარტება, წესები, განსაზღვრებები.
	თემის შესწავლისას მოცემული სავარჯიშოები.
	მოსწავლეების დასახმარებლად მოცემული შენიშვნები.
პასუხები	სახელმძღვანელოში არსებული დავალებების პასუხები.

I განყოფილება. რაციონალური რიცხვები. სამკუთხედის ელემენტები

1.1. რაციონალური რიცხვების ჩაწერა და წაკითხვა

საქმიანობა

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე-Q

1. რომელია -3-ზე 1-ით მეტი და 1-ით ნაკლები მთელი რიცხვი?
2. რომელ რიცხვთა სიმრავლეში შედიან ეს რიცხვები?
3. რომელ მიმდევრობით მოცემულ მთელ რიცხვებს შორის მდებარეობს 2,7?
4. განსაზღვრეთ -2,7-ზე მეტი უახლოესი მთელი რიცხვი.
5. განსაზღვრეთ -2,7-ზე ნაკლები უახლოესი მთელი რიცხვი.
6. 1,5 ჩაწერეთ წილადის სახით, რომლის მნიშვნელიც არის 2. რა რიცხვი უნდა ჩაიწეროს მრიცხველში, -1,5-ის მნიშვნელში 2-ის მქონე წილადის სახით წარმოსადგენად?
7. რა რიცხვი უნდა ჩაიწეროს წილადის მრიცხველში $11 = \frac{\square}{3}$ ტოლობაში?
8. რა რიცხვი უნდა ჩაიწეროს წილადი მნიშვნელში $6 = \frac{36}{\square}$ ტოლობაში?

თქვენი აზრით, შესაძლებელია ყველა რიცხვის წილადის სახით წარმოდგენა? დაასაბუთეთ მოსაზრებები.

$$\frac{a}{n}$$

სახით წარმოდგენილ რიცხვს **რაციონალური რიცხვი** ეწოდება.

სადაც a -მთელი რიცხვია, n კი ნატურალური რიცხვი. $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

ნიმუში

მაგალითად: მოცემული რიცხვები წარმოადგინე წილადის სახით, რომლის მნიშვნელიც ნატურალური რიცხვია:
0,5; 1,3; -0,25.

ამოხსნა: $0,5 = \frac{1}{2}$; $1,3 = \frac{13}{10}$; $-0,25 = \frac{-25}{100} = \frac{-1}{4}$.

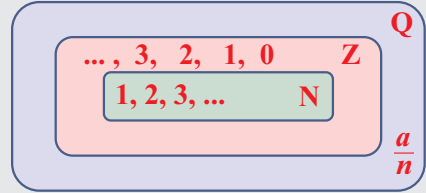
შენიშვნა. მრიცხველში მდგომი მინუსი ნიშანი საჭიროების შემთხვევაში წილადის ზახის, ან კიდევ მნიშვნელში მყოფი რიცხვის წინ შეიძლება ჩაიწეროს: $\frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{-4}$.

ნებისმიერი მთელი რიცხვი ასევე რაციონალური რიცხვია, რადგან ნებისმიერი მთელი რიცხვი შეიძლება ჩაეწეროს მნიშვნელში ნატურალური რიცხვის მქონე

წილადის სახით: $7 = \frac{7}{1}$; $-5 = \frac{-15}{3}$.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{Q}$ ასოთი აღინიშნება. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე მთელრიცხვთა სიმრავლის, ხოლო მთელრიცხვთა სიმრავლე-რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლე: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. რაციონალური რიცხვთა სიმრავლე ნატურალური რიცხვთა და მთელ რიცხვთა სიმრავლის მსგავსად, უსასრულოა.

რაციონალურ რიცხვებზე შეკრების, გამოკლების, გამრავლების, გაყოფისა და ახარისხების მოქმედებების შესრულება შესაძლებელია ისევე, როგორც მთელ და ნატურალურ რიცხვებზე.



საგარჯიშოები

1. რომელია სწორი ქვემოთ ჩამოთვლილი მოსაზრებებიდან? პასუხები განმარტეთ ნიმუშებით.

- ა) თითოეული რაციონალური რიცხვი ასევე ნატურალური რიცხვია;
- ბ) თითოეული მთელი რიცხვი ასევე რაციონალური რიცხვია;
- გ) თითოეული მთელი რიცხვი ასევე ნატურალური რიცხვია;
- დ) თითოეული ნატურალური რიცხვი ასევე მთელი რიცხვია;
- ე) 0 რაციონალური რიცხვია, 1 არ არის რაციონალური რიცხვი;
- ვ) თითოეული ნატურალური რიცხვი ასევე რაციონალური რიცხვია.

2. -27 შეიძლება მნიშვნელში რომელიმე ნატურალური რიცხვის მქონე, მაგალითად, $-\frac{27}{1}$ ან კიდევ $-\frac{54}{2}$ წილადის სახით ჩაიწეროს. როგორ წარმოადგენთ $-1,2$; $-0,33$; $-3\frac{8}{15}$; 6 ; 0 ; 12 ; $4,1$; $53,2$ რიცხვებს მნიშვნელში რომელიმე ნატურალური რიცხვის მქონე წილადის სახით?

3. მოცემული რიცხვები -7 ; $-3,2$; $-0,8$; 9 ; 0 ; 21 ; 7 . ჩაწერეთ მნიშვნელში

- ა) 1; ბ) 3; გ) 10; დ) 1000-ის მქონე წილადის სახით.

4. დაწერეთ ისეთი რიცხვი, რომ:

- ა) იყოს მთელი და თან რაციონალური რიცხვი;
- ბ) არ იყოს წილადი და იყოს რაციონალური რიცხვი;
- გ) იყოს მთელი რიცხვი და არ იყოს ნატურალური რიცხვი.

5. დაწერეთ მოცემული A და B სიმრავლეების ელემენტებიდან მთელი რიცხვებისაგან შემდგარი ქვესიმრავლეები.

$$A = \{14; 3,5; -5; 0; -8,2; \frac{4}{9}; -82\}, \quad B = \{-\frac{11}{15}; -22,3; -11; 1,7; 17; 22,1; 0,93\}$$

6. შეასრულეთ მოქმედებები, განსაზღვრეთ, თუ რომელ რიცხვთა სიმრავლეს ეკუთვნის მიღებული შედეგები.

- ა) $7,3 + (-22,8)$; ბ) $\frac{3}{4} - (-0,25)$; გ) $-\frac{21}{44} + \frac{7}{22}$;
- დ) $-12,4 \cdot 0,2$; ე) $\frac{5}{6} : (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$; ვ) $-4,6 + (-9,2 - 4\frac{2}{3})$;

ზ) $1\frac{3}{11} : \frac{-1}{11}$;

თ) $1,5 \cdot \frac{8}{9} : \frac{-5}{12}$;

ი) $-3\frac{1}{2} + 4\frac{4}{5} - 6,7$; კ) $8 - 15\frac{6}{7} + 0 \cdot \left(-\frac{55}{201}\right)$.

$$1,5 \cdot \frac{8}{9} : \frac{-5}{12} = -\frac{8 \cdot 8 \cdot 12^{6^2}}{2 \cdot 9 \cdot 5} = -\frac{8 \cdot 2}{5} = -\frac{16}{5} = -3\frac{1}{5} = -3,2.$$

7. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\frac{0,15 - 0,15 \cdot 6,4}{-\frac{3}{8} + 0,175}$;

ბ) $\frac{0,45 - 0,45 \cdot 3,4}{1\frac{1}{2} - 1,1}$;

გ) $\frac{0,47 \cdot 3,5 - 3,5}{\frac{1}{8} - 1,125}$.

განმარტეთ მოღებული შედეგების ჩაწერის ფორმა და დაასაბუთეთ თუ რომელ რიცხვთა სიმრავლეს ეკუთვნის ისინი.

8. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

	A	B	C
ა)	-9		$8 \cdot A + 121$
ბ)	$\frac{15}{16}$		$\frac{15}{16} - \left(A - \frac{3}{4}\right)$
გ)	1,45	-0,32	$2A - 3B$
დ)	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$(2A + 5B) : (4A - 2B)$
ე)	0,12	-0,2	$(5A - 3B) : (3A + 2B)$

$$\begin{aligned} &= \frac{5 \cdot 0,12 - 3 \cdot (-0,2)}{3 \cdot 0,12 + 2 \cdot (-0,2)} = \\ &= \frac{0,6 + 0,6}{0,36 - 0,4} = \frac{1,2}{-0,04} = \\ &= -30. \end{aligned}$$

9. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\frac{0,7m - 1,3}{0,29 - 0,18n}$; თუ $m = 2,1$; $n = 3,5$,

ბ) $\frac{x^2 + 1,37}{3,1y - 0,17}$. თუ $x = 5,3$; $y = 0,7$

10. შეადგინეთ ცვლადის შემცველი გამოსახულება და ცვლადის რომელიმე რაციონალური მნიშვნელობისათვის იპოვეთ თითოეული გამოსახულების მნიშვნელობა.

11. ცხრილის სტრიქონებსა და სვეტებში მოცემული რიცხვების ჯამი ჩაწერეთ მათემატიკური გამოსახულებების სახით და იპოვეთ მათი მნიშვნელობები. მიღებული რიცხვების ცხრიელ უჯრებში ჩაწერით შეავსეთ ცხრილი. გამოთქვით მოსაზრება, თუ რომელ რიცხვთა სიმრავლეს ეკუთვნის მიღებული შედეგები.

12. შეადგინეთ 6 სტრიქონისა და 6 სვეტისაგან

შემდგარი გამრავლების ცხრილი: პირველ სტრიქონში $\times$ (გამრავლება); $-\frac{7}{12}$; $0,25$; 2 ; $3\frac{5}{11}$; $0,7$ რიცხვებზე, ხოლო პირველ სვეტში: $\times$ (გამრავლება); $\frac{11}{7}$; $-3\frac{1}{2}$; $0,2$; -3 ; $-\frac{5}{9}$ რიცხვებზე ჩაწერეთ, შეავსეთ ცხრილი.

+	$2\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{9}{10}$	0	$\frac{1}{5}$	1	5
-2					$-\frac{4}{5}$		
$\frac{5}{9}$							
0,5				0,5			
0							
$-\frac{7}{3}$		$-3\frac{1}{3}$					
1							
$-\frac{2}{5}$							$4\frac{3}{5}$

1.2. რიცხვითი ღერძი. ორ წერტილს შორის მანძილი

საქმიანობა

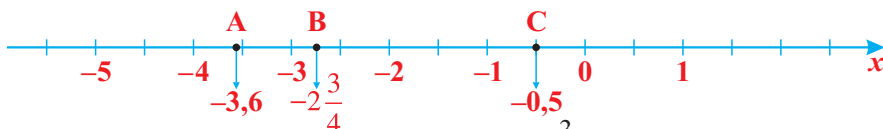
რიცხვითი ღერძი

- ჩახაზეთ რვეულში რიცხვითი ღერძი.
- 3-ს და 3-ს შორის მდებარე მთელი რიცხვები განათავსეთ რიცხვით ღერძზე.
- აჩვენეთ რიცხვით ღერძზე რიცხვი 2-ის ადგილი. სად მდებარეობს რიცხვი -2? გამოთქვით მოსაზრებები.
- აჩვენეთ რიცხვით ღერძზე წილადი $\frac{1}{2}$. განსაზღვრეთ სად მდებარეობს რიცხვით ღერძზე წილადი $-\frac{1}{2}$.
- აჩვენეთ რიცხვით ღერძზე $2\frac{1}{2}$. სად მდებარეობს რიცხვით ღერძზე $-2\frac{1}{2}$? გამოთქვით მოსაზრებები.

ნიმუში

მაგალითად: აღნიშნეთ რიცხვით ღერძზე -3,6; $-2\frac{3}{4}$; -0,5 რიცხვების შესაბამისი წერტილები.

ამოხსნა: მოცემული რიცხვების შესაბამისი წერტილები A, B და C ასოებით ავღნიშნოთ:



როგორც ხედავთ, რიცხვი -3,6 -4-სა და -3-ს შორის, $-2\frac{3}{4}$ -3-სა და -2-ს შორის, -0,5 კი -1-სა და 0-ს შორის მდებარეობს.

განვსაზღვროთ რიცხვით ღერძზე მოცემულ რომელიმე A და B წერტილს შორის მანძილი.

საქმიანობა

მანძილი

იპოვეთ A(-3) და B($2\frac{1}{5}$) წერტილებს შორის მანძილი.

- ჩახაზეთ რვეულში რიცხვითი ღერძი, რომლის ათვლის სათავეა O წერტილი.
- აღნიშნეთ ამ რიცხვით ღერძზე A(-3) და B($2\frac{1}{5}$) წერტილები.
- გაიხსენეთ რიცხვის მოდულის განსაზღვრება. იპოვეთ OA და OB მანძილები.
- განსაზღვრეთ AB მანძილი. გამოთქვით მოსაზრებები.
- იპოვეთ სხვაობა $2\frac{1}{5} - (-3)$. რა დასკვნამდე მიხვედით?

რა კავშირია AB მანძილსა და $2\frac{1}{5} - (-3)$ სხვაობას შორის?

ნიმუში

მაგალითი: განსაზღვრეთ წერტილებს შორის მანძილი:

ა) $A(-2,8)$ და $B(3,1)$;

ბ) $C(1,3)$ და $D(6,7)$

ამოხსნა:

ა) აღნიშნეთ რიცხვით ღერძზე A და B წერტილები:

A და B წერტილებს შორის მანძილი AB მონაკვეთის სიგრძის ტოლია.

სურათის მიხედვით შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

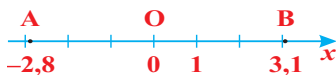
$AB = OA + OB$. ვიცი, რომ, $OA = |-2,8| = 2,8$ და $OB = |3,1| = 3,1$.

მაშინ $AB = 2,8 + 3,1 = 5,9$.

მეორე მხრივ ვიცი, რომ, $3,1 - (-2,8) = 5,9$ -ს. მაშასადამე, A და B წერტილებს შორის მანძილის მოსაძებნად ვიპოვეთ B და A წერტილების კოორდინატებს შორის სხვაობა.

ბ) ავღნიშნოთ რიცხვით ღერძზე C და D წერტილები. სურათის მიხედვით:

$CD = OD - OC = 6,7 - 1,3 = 5,4$.



პასუხი: ა) 5,9; ბ) 5,4.

რიცხვით ღერძზე ორ წერილს შორის მანძილი ამ წერტილების კოორდინატების სხვაობის მოდულის ტოლია:

$A(x)$ და $B(y)$ წერტილებისათვის $AB = |x - y|$

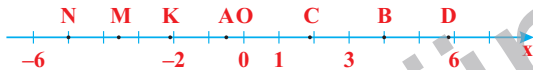
საგარჯიშოები

1. აღნიშნეთ რიცხვით ღერძზე მოცემული რიცხვების შესაბამისი წერტილები:

$-4\frac{1}{2}$; $-3,5$; $-1,2$; $-0,8$; $1\frac{3}{5}$; $4,5$; $0,5$.

რამოდენიმე რიცხვის შესაბამისი წერტილი თქვენ თვითონ აღნიშნეთ.

2. რიცხვით ღერძზე (სურათი 1) დაახლოებით განსაზღვრეთ მოცემული წერტილების კოორდინატები:



სურათი 1

ამ რიცხვით ღერძზე შეარჩიეთ რომელიმე წერტილი და მოძებნეთ მისი კოორდინატები.

3. განსაზღვრეთ AB მანძილი, თუ ა) $A(-3)$ და $B(2,5)$; ბ) $A(-\frac{3}{4})$ და $B(-2\frac{1}{4})$; გ) $A(10,5)$ და $B(22,7)$, დ) დაწერეთ რომელიმე ორი წერტილის კოორდინატები და დაადგინეთ მათ შორის მანძილი.

4. ა) იპოვეთ N წერტილის კოორდინატები, თუ $MN = 3,54$ და $M(-2,9)$

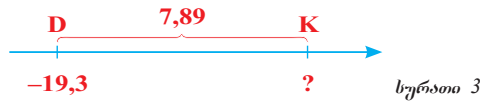
ბ) განსაზღვრეთ M წერტილის კოორდინატები, თუ $MN = 6,8$ და $N(4,35)$

5. რიცხვით ღერძზე აღნიშნეთ ორი წერტილი, რომელთა კოორდინატებიც მოპირდაპირე რიცხვებია. სწორია თუ არა მოსაზრება, რომ მათ შორის მანძილი ნულის ტოლია?
6. როგორ შეიძლება განვსაზღვროთ AB მანძილი სურათი 2-ის მიხედვით?



აღნიშნეთ ამ რიცხვით ღერძზე რაიმე C წერტილი, რომლის კოორდინატიც მთელი რიცხვია. იპოვეთ AC და BC მონაკვეთების სიგრძეები.

7. რომელი მოქმედება უნდა გამოვიყენოთ K წერტილის კოორდინატის მოსაძებნად სურათი 3-ის მიხედვით? იპოვეთ K წერტილის კოორდინატი.



8. რიცხვით ღერძზე, რომლის ათვლის სათავე არის O, მოცემულია წერტილები A, B, M და N

ა) თუ $AB = OA - OB$, მაშინ რა მიმდევრობით განლაგდება A და B წერტილები რიცხვით ღერძზე?

ბ) თუ $MN = OM + ON$, მაშინ ათვლის სათავისთან მიმართ რომელ მხარეს მდებარეობენ M და N წერტილები?

პასუხი დაასაბუთეთ.

9. თუ $OB = 3,5$ სმ, $OA = 4 \cdot OB$ განსაზღვრეთ AB მანძილი. განიხილეთ ყველა შესაძლო შემთხვევა. თითოეული შემთხვევისათვის განსაზღვრეთ A და B წერტილების O სათავის მიმართ მდგომარეობა და იპოვეთ კოორდინატები.

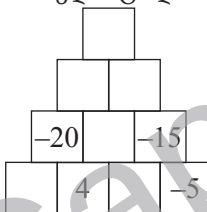
10. რიცხვით ღერძზე აღნიშნეთ ნებისმიერი ორი წერტილი და იპოვეთ მათ შორის მანძილი.

11. რომელი რიცხვების ნამრავლს ასახავს ქვემოთ მოცემული მოდელი?

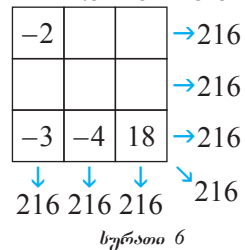


$-3 \cdot 2$; $-5 \cdot 2$; $-2 \cdot 2$ მოახდინეთ ნამრავლების მოდელირება.

12. თითოეულ უჯრაში ჩაწერილი რიცხვი მის ქვემოთა ორ უჯრაში მდებარე რიცხვის ნამრავლის ტოლია. იპოვეთ ცარიელ უჯრებში ჩასაწერი რიცხვები (სურათი 5).



13. ცარიელ უჯრაში (სურათი 6) ჩაწერეთ ისეთი რიცხვები, რომ სტრიქონსა და სვეტში მყოფი რიცხვების ნამრავლი 216 იყოს.



ყველა ჩვეულებრივი წილადის სასრული ათწილადის სახით ჩაწერა შეუძლებელია.

საქმიანობა

0,(6); 5,2(7)

წილადი $\frac{2}{3}$ გადააქციეთ ათწილადად.

1. რიგში 2 გაყავით 3-ზე. მიღებული მთელი მძიმით გამოყავით.
2. მთელის შემდეგ განსაზღვრეთ მეათედის თანრიგის ციფრი.
3. შემდეგ მეასედების თანრიგის ციფრი განისაზღვრება.
4. გაყოფის გაგრძელებით იპოვეთ მეათასედის თანრიგის ციფრი. რა შედეგამდე მიხვედით? გამოთქვით მოსაზრებები.
5. სადამდე შეიძლება გაყოფის გაგრძელება? გამოთქვით მოსაზრება.

თუ ათწილადის ჩაწერისას, ერთი ციფრი ან კიდევ რამდენიმე ციფრისგან შემდგარი ჯგუფი ერთი და იგივე მიმდევრობით უსასრულოდ მეორდება, ასეთ ათწილადს **პერიოდული ათწილადი** ეწოდება.

პერიოდული ათწილადის შემოკლებული სახით ჩასაწერად მძიმის შემდეგ ციფრი ან ციფრთა ჯგუფი, რომელიც მეორდება, ფრჩხილებში იწერება: $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6)$.

იკითხება: *ნული მთელი ექვსი პერიოდში.*

ნამუშო

მაგალითად: 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $6\frac{2}{99}$ წილადები გადააქციეთ პერიოდულ ათწილადად.

ამოხსნა:

$$1) \begin{array}{r} 7 \overline{) 9} \\ \underline{0} \\ 70 \\ \underline{63} \\ 70 \\ \underline{63} \\ 7 \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad \begin{array}{r} \underline{5} \\ 0 \end{array} \overline{) 12} \\ \underline{0} \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{12} \\ 80 \\ \underline{72} \\ 80 \\ \underline{72} \\ 8 \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad \begin{array}{r} \underline{2} \\ \underline{0} \\ 20 \\ \underline{0} \\ 200 \\ \underline{198} \\ 20 \\ \underline{0} \\ 200 \\ \underline{198} \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$1) \frac{7}{9} = 0,777... = 0,(7)$$

$$2) \frac{5}{12} = 0,41666... = 0,41(6)$$

$$3) 6\frac{2}{99} = 6,0202... = 6,(02)$$

$$6\frac{2}{99} = 6,020202... = 6,(02)$$

მთელი ნაწილი	განმეორებადი ციფრების ჯგუფი	პერიოდი
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36
37	38	39
40	41	42
43	44	45
46	47	48
49	50	51
52	53	54
55	56	57
58	59	60
61	62	63
64	65	66
67	68	69
70	71	72
73	74	75
76	77	78
79	80	81
82	83	84
85	86	87
88	89	90
91	92	93
94	95	96
97	98	99
100	101	102
103	104	105
106	107	108
109	110	111
112	113	114
115	116	117
118	119	120
121	122	123
124	125	126
127	128	129
130	131	132
133	134	135
136	137	138
139	140	141
142	143	144
145	146	147
148	149	150
151	152	153
154	155	156
157	158	159
160	161	162
163	164	165
166	167	168
169	170	171
172	173	174
175	176	177
178	179	180
181	182	183
184	185	186
187	188	189
190	191	192
193	194	195
196	197	198
199	200	201
202	203	204
205	206	207
208	209	210
211	212	213
214	215	216
217	218	219
220	221	222
223	224	225
226	227	228
229	230	231
232	233	234
235	236	237
238	239	240
241	242	243
244	245	246
247	248	249
250	251	252
253	254	255
256	257	258
259	260	261
262	263	264
265	266	267
268	269	270
271	272	273
274	275	276
277	278	279
280	281	282
283	284	285
286	287	288
289	290	291
292	293	294
295	296	297
298	299	300

პერიოდული ათწილადების ორი სახე არსებობს:

1) **წმინდა პერიოდული** ათწილადები, 2) **შერეული პერიოდული** ათწილადები.
ათწილადს, რომლის მძიმის შემდეგ პირდაპირ პერიოდი იწყება, წმინდა პერიოდული ათწილადი ეწოდება. მაგალითად: $2,(5)$; $0,(37)$; $12,(524)$ და ა.შ.
ათწილადს, რომლის მძიმის შემდეგ ერთი ან რამდენიმე ციფრის შემდეგ იწყება პერიოდი, **შერეული პერიოდული ათწილადი** ეწოდება. მაგალითად, $8,7(5)$; $0,02(63)$; $4,0(172)$ და ა.შ. **3,25(7) – იკითხება: სამი მთელი ოცდახუთი მეასედი შვიდი პერიოდში.**

თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელში მყოფი რიცხვის მარტივი მამრავლები მხოლოდ 2-ის, მხოლოდ 5-ის ან ორივე, 2-ისა და თან 5-საგან შედგება, ასეთი წილადის ათწილადად გადაქცევით სასრული ათწილადი მიიღება.

თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელში მყოფი რიცხვის მარტივ მამრავლებში 2-ისა და 5-საგან განსხვავებული მარტივი მამრავლი გვაქვს, არის მაშინ ამ წილადის ათწილადად გადაქცევისას პერიოდული ათწილადი მიიღება.

სასრული ათწილადები: $\frac{72}{25} = 2,88$; $\frac{19}{50} = 0,38$; $\frac{13}{20} = 0,65$.

პერიოდული ათწილადები: $\frac{5}{12} = 0,41(6)$; $\frac{9}{26} = 0,3(461538)$.

საგარჯიშოები

1. მოცემული წილადები ჩაწერეთ ათწილადების სახით. წინასწარ ივარაუდეთ, თუ მათგან რომელი იქნება სასრული ათწილადი და რომელი პერიოდული ათწილადი.

$\frac{1}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{17}{28}$; $\frac{30}{32}$; $\frac{10}{48}$; $\frac{21}{50}$; $\frac{16}{72}$; $\frac{10}{75}$; $\frac{20}{99}$; $\frac{84}{200}$; $\frac{465}{555}$; $\frac{999}{1000}$.

2. $A = \{3,4; 0,(7); 2,003; 5,333...; 32,(56); 0,444; 6,98(3); 0,(345); 11,43(12); 0,5; 8,111; 2,0(7)\}$ სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე გამოყავით, რომ მისი ელემენტები იყოს: ა) პერიოდული ათწილადები; ბ) წმინდა პერიოდული ათწილადები; გ) შერეული პერიოდული ათწილადები.

3. 0, 1, 2, 4, 8. ციფრების გამოყენებით ჩაწერეთ რამდენიმე პერიოდული ათწილადი. განასხვავეთ წმინდა და შერეული პერიოდული ათწილადები.

4. მოცემული პერიოდული ათწილადები გამოიკვლიეთ ისე, როგორც ცხრილშია ნაჩვენები: $0,777...; 0,54222...; 9,8101010...; 3023,555...; 29,00787878...; 8,0020202...; 0,191919...; 3,678678678...; 0,73827382...$

რიცხვი	მოკლე ჩანაწერი	მთელი ნაწილი	პერიოდში მყოფი ციფრების რაოდენობა	პერიოდამდელი ციფრები	პერიოდში მყოფი ციფრების რაოდენობა	პერიოდში არ მყოფი ციფრების რაოდენობა
1,090909...	1,(09)	1	09	–	2	0
78,12666...	78,12(6)	78	6	12	1	2

► I განყოფილება

5. გამოიკვლიეთ შერეული რიცხვის პერიოდულ ათწილადად გადაქცევის ალგორითმი:
- 1) შერეული რიცხვი მთელი ნაწილისა და წილადის ჯამის სახით ჩაწერეთ და წილადის ნაწილის მრიცხველი მნიშვნელზე გაყავით. მაგალითად: $5\frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = 5 + 0,(3)$.
 - 2) უსასრულო პერიოდული ათწილადი შეკრიბეთ მთელ ნაწილთან.
 - 3) მიღებული რიცხვი საძიებელი რიცხვია.
- ამ ალგორითმის მიხედვით $1\frac{11}{15}$; $3\frac{7}{12}$; $\frac{45}{11}$; $2\frac{41}{99}$ რიცხვები ჩაწერეთ პერიოდული ათწილადის სახით. განსაზღვრეთ მათი სახე.
6. ეკმედმა წილადი $\frac{11}{12}$ -ის ათწილადად გადაქცევით მიიღო 0,916(6). სწორია ეკმედის შედეგი?
7. დაწერეთ მნიშვნელში 9, 99, 999, 9999 რიცხვების მქონე რამდენიმე წილადი და გადააქციეთ ისინი პერიოდულ ათწილადად. რომელ თვისებებს ფლობენ ეს წილადები? განმარტეთ მოსაზრებები.
8. აინურა ვარაუდობს, რომ $\frac{3}{12}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{49}{14}$; $\frac{18}{36}$; $\frac{121}{55}$ წილადების სასრულო პერიოდულ ათწილადად გადაქცევა შესაძლებელია: ანარი კი დაჟინებით ამბობს, რომ მისი მოსაზრება არასწორია და ამას წილადების მნიშვნელში მყოფი რიცხვების მარტივ მამრავლებს შორის 3, 7, 11 რიცხვების ყოფნით ხსნის, თქვენის აზრით, რომელი ამბობს მართალს? დაასაბუთეთ მოსაზრებები.
9. ატმოსფერო დედამიწის ზედაპირიდან დაახლოებით 3000 კმ სიმაღლემდე ვრცელდება. სურათზე ასახულია ზოგიერთი მოვლენის მოხდენის სიმაღლეები (ნაწილებად). სურათის გამოყენებით გაეცით კითხვებზე პასუხები:
- ა) რა სიმაღლეზე შეიძლება ავიდეს საჰაერო ბუშტი?
 - ბ) რამდენად მეტია მეტეორობთან დაკავშირებული მოვლენების მოხდენის სიმაღლე მეტეოროლოგიური მოვლენების მოხდენის სიმაღლესთან შედარებით?
- პოლარული ნათების დაწყების სიმაღლე

მეტეორობთან დაკავშირებული მოვლენების სიმაღლე

საჰაერო ბუშტის ასვლის სიმაღლე

სამგზავრო თვითმფრინავის ასვლის სიმაღლე

მეტეოროლოგიური მოვლენების მოხდენის სიმაღლე
- გ) რა მოვლენები შეიძლება მოხდეს 275 კმ, $\frac{1000}{70}$ კმ, $\frac{501}{9}$ კმ სიმაღლეზე? ჩაწერეთ ეს რიცხვები პერიოდული ათწილადის სახით.
- დ) რამდენად დაბალია სამგზავრო თვითმფრინავის ასვლის სიმაღლე საჰაერო ბუშტის ასვლის სიმაღლესთან შედარებით? სურათის მიხედვით შეადგინეთ სხვა კითხვები და გაეცით პასუხები.

1.4. პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევა

საქმიანობა

23,(45) წმინდა პერიოდული ათწილადი გადააქციეთ ჩვეულებრივ წილადად.

ამოხსნა: წმინდა პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადასაქცევად განახორციელეთ ქვემოთ მოცემული ალგორითმი.

1. მოცემული რიცხვი აღნიშნეთ: $X = 23,4545\dots$
2. განსაზღვრეთ პერიოდული ათწილადის პერიოდში მყოფი ციფრების რაოდენობა.
 $23,4545\dots = 23,(45)$ რიცხვის პერიოდში მყოფი ციფრების რაოდენობა 2-ია.
3. პერიოდული ათწილადის წილების რაოდენობა პერიოდში მყოფი ციფრების რაოდენობის (ორი ცალი 0) ტოლი წილების მქონე თანრიგის ერთეულზე (100-ზე) გაამრავლოთ.
 $23,4545\dots \cdot 100 = 2345,45\dots$
4. იპოვეთ მიღებული რიცხვისა და პირველად მოცემული რიცხვის სხვაობა:
 $100X - X = 2345,45\dots - 23,4545\dots = 2322.$

$$5. 99X = 2322 \text{ ტოლობიდან იპოვეთ } X: X = \frac{2322}{99}$$

ამრიგად, $23,(45) = \frac{2322}{99} = 23\frac{45}{99} = 23\frac{5}{11}.$

$$0,(8) = \frac{8}{9}$$

$$0,(23) = \frac{23}{99}$$

$$1,(034) = 1\frac{34}{999}$$

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, წმინდა პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევისათვის, მთელი ნაწილი რჩება ისევე ისე, წილადი ნაწილის მნიშვნელში იწერება იმდენი 9-იანი, რამდენი ციფრიც არის პერიოდში, მრიცხველში კი-პერიოდში მყოფი რიცხვი იწერება.

საქმიანობა

0,12(3) გადააქციეთ შერეული პერიოდული ათწილადი ჩვეულებრივ წილადად.

ამოხსნა: შერეული პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევისათვის შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული ალგორითმი:

1. $X = 0,12(3)$ ავლნიშნოთ. პერიოდში მყოფი ციფრების რაოდენობა 1-ია.
2. ეს რიცხვი პერიოდში მყოფი ციფრების რაოდენობის ტოლი 0-ების შემცველ თანრიგის ერთეულზე (10-ზე) გაავამრავლოთ. $0,12333\dots \cdot 10 = 1,2333\dots$
3. $10X - X = 1,2333\dots - 0,12333\dots$ უტოლობიდან ვიპოვოთ X :

$$9X = 1,11; \quad X = \frac{111}{100} : 9; \quad X = \frac{111}{900}$$

ამრიგად, $0,12(3) = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}.$

▶ I განყოფილება

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შერეული პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევისათვის მთელი ნაწილი რჩება ისევ ისე, წილადი ნაწილის მნიშვნელში ჯერ პერიოდში მყოფი ციფრების რაოდენობის 9-იანი, შემდეგ კი, მძიმის შემდეგ პერიოდამდე მდგომი ციფრების რაოდენობის 0-ები იწერება. მძიმის შემდეგ, არსებულ რიცხვს პერიოდამდე არსებული რიცხვი გამოაკლდება და მიღებული სხვაობა წილადის მრიცხველში ჩაიწერება.

12, 214(17) შერეული პერიოდული ათწილადის მთელი ნაწილი **12**-ია, მძიმის შემდგომი რიცხვი **21417**, მძიმიდან პერიოდამდე რიცხვი **214**, პერიოდში მყოფი რიცხვი **17**-ია.

$$0, \overline{12(3)} = \frac{123 - 12}{900} = \frac{111}{900} = \frac{37}{300} \quad 5, \overline{2(37)} = 5 \frac{237 - 2}{990} = 5 \frac{235}{990} = 5 \frac{47}{198}$$

საგარჯიშოები

1. მოცემულ ტოლობებში * ნიშნის ადგილას ჩაწერეთ საჭირო რიცხვი.

$$\begin{aligned} 0, (8) &= \frac{8}{*}; & 1, (7) &= * \frac{*}{9}; & 10, (45) &= 10 \frac{*}{11}; \\ 0, 1(6) &= \frac{*}{90}; & 8, 7(5) &= 8 \frac{*}{90}; & 15, 1(34) &= * \frac{133}{*}. \end{aligned}$$

2. $10X - X = 4,333... - 0,4333...$ ტოლობის მიხედვით ჩაწერეთ X ჩვეულებრივი წილადის სახით.

3.ა) მოცემული წმინდა პერიოდული ათწილადი გადააქციეთ ჩვეულებრივ წილადად:

$$0, (2); 1, (3); 3, (54); 21, (23); 0, (673); 7, (256); 16, (002); 0, (0001); 5, (01).$$

ბ) მოცემული შერეული პერიოდული ათწილადი გადააქციეთ ჩვეულებრივ წილადად:

$$0, 1(3); 1, 2(5); 7, 0(4); 2, 23(7); 10, 1(45); 0, 25(83); 16, 5(02); 0, 000(1).$$

4. შეასრულეთ მოქმედებები პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევით:

$$\begin{aligned} \text{ა) } 9, (4) + 1, (2); & \quad \text{ბ) } 2, (34) + 0, (21); & \quad \text{გ) } 19, (27) - 3, (73); \\ \text{დ) } 6, (5) \cdot 18; & \quad \text{ე) } 8, 1(6) : 2 \frac{11}{19}; & \quad \text{ვ) } 1, (645) - 4, (001). \end{aligned}$$

5. შეავსეთ ცხრილი:

№	პერიოდული ათწილადი	ჩვეულებრივი წილადი	მრიცხველი	მნიშვნელი	მთელი ნაწილი
ა)	0, (28)				
ბ)		$\frac{6}{11}$			
გ)			17	51	
დ)	6, 2(46)				
ე)		$\frac{101}{90}$			
ვ)			35	45	1

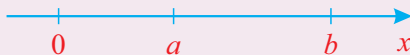
1.5. რაციონალური რიცხვების შედარება

მთელი რიცხვებისა და დადებითი წილადების შედარება წინა კლასებში შეისწავლეთ.

საქმიანობა

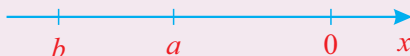
განიხილეთ a და b რაციონალური რიცხვების რიცხვით ღერძზე მდებარეობის სამი შემთხვევა:

1. a და b რაციონალური რიცხვები კოორდინატა სათავიდან მარჯვენა მხარეს მდებარეობენ.



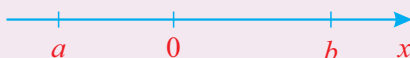
ამ შემთხვევაში a და b რაციონალური რიცხვების შედარების შესახებ მოსაზრებები გამოთქვით.

2. a და b რაციონალური რიცხვები კოორდინატა სათავიდან მარცხენა მხარეს მდებარეობენ.



ამ შემთხვევაში a და b რაციონალური რიცხვების შედარების შესახებ მოსაზრებები გამოთქვით.

3. a და b რაციონალური რიცხვები კოორდინატა სათავიდან სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ.



ამ შემთხვევაში a და b რაციონალური რიცხვების შედარების შესახებ მოსაზრებები გამოთქვით.

ნიმუში

მაგალითად: შეადარეთ წილადები $-\frac{2}{15}$ და $-\frac{5}{21}$

ამოხსნა: როგორც მე-6 კლასის მათემატიკის კურსიდან იცით, ორი უარყოფითი რიცხვიდან მოდულით მეტი რიცხვი მოდულით ნაკლებ რიცხვზე ნაკლებია.

$$\left| \frac{-2}{15} \right| = \frac{2}{15} = \frac{14}{105} \quad \text{და} \quad \left| \frac{-5}{21} \right| = \frac{5}{21} = \frac{25}{105}.$$

$$\frac{14}{105} < \frac{25}{105}, \text{ ანუ, რადგან } \frac{2}{15} < \frac{5}{21}, \text{ ამიტომ } -\frac{2}{15} > -\frac{5}{21}.$$

პასუხი: $-\frac{2}{15} > -\frac{5}{21}$.

ნიმუში

მაგალითად: შეადარეთ რიცხვები $2,(34)$ და $2,34$.

ამოხსნა: $2,(34)$ პერიოდული ათწილადია. ჩაწეროთ ის გაშლილი სახით: $2,(34) = 2,343434\dots$

რიცხვი $2,34$ კი სასრული ათწილადია. მას ბოლოში შეგვიძლია მივუწეროთ

უსასრულო რაოდენობის ნულები: $2,34 = 2,34000\dots$

როგორც ვხედავთ, ორივე რიცხვის მთელ ნაწილში, მათედიისა და მესამედის თანრიგში ერთი და იგივე ციფრი დგას. თუმცა პირველი რიცხვის მეათასედის თანრიგში 3-ია, ხოლო მეორე რიცხვის მეათასედის თანრიგში-0. მაშასადამე, $2,(34) > 2,34$.

პასუხი: $2,(34) > 2,34$

საგარჯიშოები

1. ნუბარმა მოცემული რიცხვების მოპირდაპირე და შებრუნებული რიცხვების პოვნით ქვემოთ მოცემული ცხრილი შეავსო. გამოიკვლიეთ, რომელია მის შედეგებში არასწორი:

№	რიცხვი	მოპირდაპირე	შებრუნებული	№	რიცხვი	მოპირდაპირე	შებრუნებული
ა)	-0,8	$\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{4}$	დ)	7,(35)	$-7\frac{7}{20}$	$\frac{147}{20}$
ბ)	4,2	$-4\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{21}$	ე)	$-1\frac{11}{13}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{13}{24}$
ვ)	$\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$1\frac{2}{9}$	ვ)	21,0(3)	$\frac{631}{30}$	$-21\frac{1}{30}$

2. დალაგეთ რიცხვები ზრდის მიხედვით: $-\frac{2}{5}$; $-\frac{15}{7}$; $-\frac{4}{15}$; $-3\frac{1}{32}$; 0,3; $\frac{2}{25}$; $\frac{20}{7}$; $-3,(5)$.
3. დალაგეთ რიცხვები კლების მიხედვით: $-\frac{1}{12}$; $-\frac{5}{9}$; $-\frac{4}{3}$; $-7\frac{1}{2}$; 0,07; $-2,(6)$; $\frac{9}{4}$; $\frac{5}{24}$.
4. იპოვეთ, თუ რომელ მეზობელ მთელ რიცხვებს შორის მდებარეობენ მოცემული წილადები:

ა) -4,009; ბ) -0,999; გ) 4,(3); დ) -91,(72); ე) $-\frac{7}{85}$; ვ) $\frac{67}{7}$.

5. დაწერეთ მოცემულ რიცხვებს შორის მდებარე რამდენიმე რაციონალური რიცხვი.

ა) -4 და -3; ბ) -18 და -17; გ) -100 და -99; დ) -1 და 0; ე) 4 და 5

6. შედარების წესების გახსენებით შეადარეთ რიცხვები:

ა) $-\frac{12}{25}$ და $-\frac{34}{71}$; ბ) -2,(42) და -2,42; გ) $-\frac{7}{90}$ და 0;
 დ) 0,0(56) და 0,0(1); ე) $\frac{17}{99}$ და $-\frac{1}{2}$; ვ) 0 და -19,(9888).

7. მოცემული რიცხვების შესაბამისი წერტილები დაახლოებით აღნიშნეთ რიცხვით ღერძზე და შეადარეთ.

-1,(21); -4,00(9); -3,5; $-\frac{39}{19}$; 0; -1; $\frac{7}{99}$; 5,8(37).

8. რიცხვით ღერძზე აღნიშნულია m და n რიცხვები (სურათი 1).



ა) აღნიშნეთ იმავე რიცხვით ღერძზე $-m$, $-n$; $2m$; $3n$; $0,5m$; $1\frac{1}{2}n$ რიცხვები.

ბ) რომელი რიცხვია მეტი: $3n$ თუ $\frac{1}{3}n$?

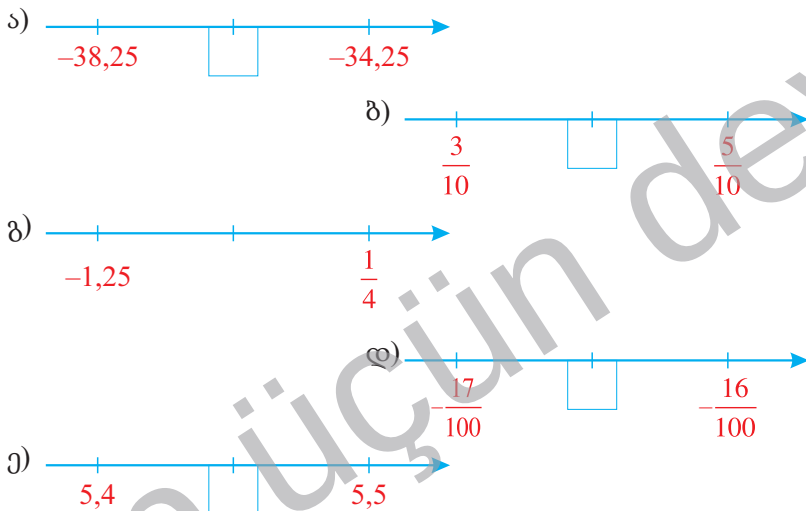
გ) რომელი რიცხვის მოდულია ნაკლები: m თუ $0,5m$?

9. რიცხვით ღერძზე გამოსახულია a და b კოორდინატების მქონე წერტილები (სურათი 2).



▶ I განყოფილება

- ა) აღნიშნეთ ამ რიცხვით ღერძზე $b + a$ და $b - a$ კოორდინატების მქონე წერტილები.
 ბ) რომელი რიცხვია მეტი: $b + a$ თუ $b - a$?
 გ) რომლის მოდულია ნაკლები $b + a$ და $b - a$ რიცხვებს შორის?
10. ა) თუ ერთი რიცხვის მოდული მეტია მეორე რიცხვის მოდულზე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პირველი რიცხვი მეტია მეორეზე?
 ბ) თუ რომელიმე ორი უარყოფითი რიცხვიდან ერთის მოდული მეტია მეორის მოდულზე, მაშინ რა შეგვიძლია ვთქვათ ამ რიცხვების შედარების შესახებ?
11. უპასუხეთ ქვემოთ მოცემულ კითხვებს. პასუხები დაასაბუთეთ ნიმუშებით.
 ა) შეიძლება თუ არა, რომ ორი რიცხვის ჯამი შესაკრებებიდან ერთ-ერთზე მეტი და მეორეზე ნაკლები იყოს?
 ბ) შეიძლება თუ არა, რომ ორი რიცხვის ჯამი ორივე შესაკრებზე ნაკლები იყოს?
 გ) შეიძლება თუ არა, რომ ორი რიცხვის ჯამი ორივე შესაკრებზე მეტი იყოს?
 დ) შეიძლება თუ არა, რომ ორი რიცხვის ნამრავლი თითოეულ მამრავალზე მეტი იყოს?
 ე) შეიძლება თუ არა, რომ ორი რიცხვის ჯამი მათი ნამრავლის ტოლი იყოს?
 ვ) შეიძლება თუ არა, რომ ორი რიცხვის ჯამი მათ ნამრავალზე მეტი იყოს?
12. დაწერეთ მოცემული უტოლობების დამაკმაყოფილებელი a რიცხვის რამდენიმე მნიშვნელობა: ა) $|a| > |a + 5|$; ბ) $|a| < |a - 5|$;
13. 1) რიცხვი 18 გაზარდეთ: ა) 20%-ით; ბ) 45%; გ) 130%-ით.
 2) რიცხვი 30,(8) შეამცირეთ : ა) 10%-ით; ბ) 62%; გ) 90%-ით.
14. შეკვეცეთ და შეადარეთ წილადები: $\frac{7 \cdot 15 \cdot 48}{25 \cdot 49 \cdot 24}$ და $\frac{16 \cdot 81 \cdot 118}{59 \cdot 90 \cdot 32}$.
15. ქვემოთ მოცემულ მოდელებში, კვადრატების შიგნით ჩაწერეთ შესაბამისი რიცხვები (სურათი 3). გამოიყენეთ არითმეტიკული საშუალოს მოძებნის წესი.



სურათი 3

1.6. უტოლობა

საქმიანობა

$>, <, \geq, \leq$

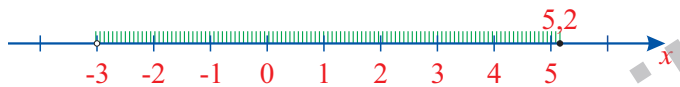
1. იპოვეთ $x - 4 < 5$ უტოლობის ნატურალური ამონახსნი. რომელია ამ უტოლობის მთელი ამონახსნების სიმრავლე? $-10\frac{1}{4}$ და $10\frac{1}{4}$ ამ უტოლობის ამონახსნებია?
2. რომელია უდიდესი რიცხვი $x + 3 < 0$ უტოლობის ამონახსნების სიმრავლეში? აქვს თუ არა ამ უტოლობას უმცირესი მთელი ამონახსენი?
3. როგორ შეიძლება ჩავეწროთ უტოლობის სახით - 8-ზე მეტი და 11-ზე ნაკლები რიცხვები? იპოვეთ ამ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი უმცირესი და უდიდესი მთელი რიცხვების ჯამი.

$a < x < b, a \leq x < b, a < x \leq b, a \leq x \leq b$ სახით მოცემულ უტოლობებს ორმაგი უტოლობები ეწოდებათ. (აქ a და b რაციონალური რიცხვებია, $a, b \in \mathbb{Q}$). ცვლადის მნიშვნელობებს, რომლებიც უტოლობას სწორ რიცხვით უტოლობად აქცევს, უტოლობის ამონახსენი ეწოდება. უტოლობას შეიძლება ჰქონდეს ერთი ამონახსენი, რამდენიმე ამონახსენი, უსასრულო რაოდენობის ამონახსენი ან კიდევ საერთოდ არ ჰქონდეს ამონახსენი.

ნიმუში

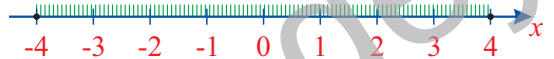
მაგალითი 1: დაწერეთ $-3 < x \leq 5,2$ უტოლობის დამაკმაყოფილებელ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.

ამოხსნა: x რიცხვი -3 -ზე მეტი და $5,2$ -ზე ნაკლებ ან ტოლ რიცხვთა სიმრავლეს ეკუთვნის. გამოვსახოთ ეს რიცხვთა სიმრავლე რიცხვით ღერძზე შტრიხებით. უტოლობის დამაკმაყოფილებელი ნატურალური რიცხვებია: კი 1,2,3,4,5.



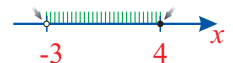
მაგალითი 2: დაწერეთ $|x| \leq 4$ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი მთელ რიცხვთა სიმრავლე.

ამოხსნა: 4-ზე ნაკლები ან 4-ის ტოლი მოდულის მქონე რიცხვები 4-ზე ნაკლები ან ტოლი და -4 -ზე მეტი ან ტოლი რიცხვებია. გამოვსახოთ ეს რიცხვები შტრიხებით რიცხვით ღერძზე. მაშასადამე, უტოლობის დამაკმაყოფილებელი მთელი რიცხვებია: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.



პასუხი: $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

შენიშვნა. $-3 < x \leq 4$ ორმაგი უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლის რიცხვით ღერძზე ასახვისას, რიცხვ -3 -ის ამონახსენთა სიმრავლისათვის არ მიკუთვნება ნახაზზე-○ ნიშნით, ხოლო 4-ის ამონახსენთა სიმრავლისათვის მიკუთვნება-● ნიშნით აღინიშნება.

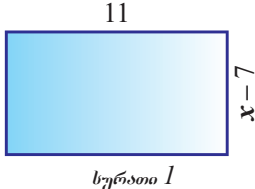


მაგალითი 3: გამოსახეთ რიცხვით ღერძზე $|x| > 4$ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი რიცხვები.

ამოხსნა: -4 -ზე მეტი მოდულის მქონე რიცხვები რიცხვით ღერძზე 4-საგან მარჯვნივ და -4 -საგან მარცხნივ მდებარეობენ, რადგან ამ არეებში ნებისმიერი რიცხვის მოდული 4-ზე მეტია.



საგარჯიშოები

1. $-3; -1,3; -0,9; 0; 2,8; 7$ რიცხვებიდან რომელია ქვემოთ მოცემული უტოლობების ამონახსენი?
 - ა) $-2,5 \leq x < 9$;
 - ბ) $|x| < 19$;
 - გ) $|x| \geq 0$;
 - დ) $|x+6| \leq -3$.
2. წარმოადგინეთ უტოლობის სახით მოცემული გამოსახულებები და დაწერეთ რომელიმეს ამონახსენი:
 - ა) x -ისა და 2,5-ის ჯამი ნაკლებია 7,(2)-ზე;
 - ბ) რიცხვი a -3-ზე მეტი, 2-ზე ნაკლებია;
 - გ) b რიცხვისა და 0,5-ის სხვაობა 4,8-ისა და 3,(5)-ის ჯამზე მეტია;
 - დ) a რიცხვისა და 8-ის ჯამის მოდული -4-ზე მეტია.
3. წაიკითხეთ მოცემული უტოლობები და ჩაწერეთ რამდენიმე ამონახსენი:
 - ა) $-12 \leq a < 0$;
 - ბ) $0 \leq x \leq 17,5$;
 - გ) $|y| \geq -8$;
 - დ) $|x| \leq -11$;
 - ე) $|b| \leq 0$;
 - ვ) $|x| < 0$;
 - ზ) $|x - 2,9| \leq 1$;
 - თ) $|5 - m| > 1$.
4. ა) მართკუთხედის სიგანე სიგრძეზე ნაკლებია. სურათის საფუძველზე (სურათი 1) დაწერეთ უტოლობა მართკუთხედის სიგანის დასადგენად და იპოვეთ მართკუთხედის სიგანის შესაძლო მნიშვნელობები.
 
 - ბ) მართკუთხედის სიგანე არ არის მეტი სიგრძეზე, პერიმეტრი (სურათი 1) კი 28 სმ-ია. რა უდიდესი ნატურალური მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს მართკუთხედის სიგანემ?
 - გ) სამკუთხედის პერიმეტრი 36 მმ-ზე მეტი და 38 მმ-ზე ნაკლებია. თუ გვერდებიდან ერთი 11 მმ და მეორე 9 მმ-ია, მაშინ რომელ ორ ნატურალურ რიცხვს შორის მდებარეობს მესამე გვერდი?
5. დაწერეთ რაიმე უტოლობა, რომლის მთელ ამონახსენთა სიმრავლეა:
 - ა) $x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$;
 - ბ) $x = -1; 0; 1$;
 - გ) $x = -20; -19; \dots; -1$;
 - დ) $x = 2; 3; 4; \dots$;
 - ე) $x = \dots; -10; -9$;
 - ვ) $x = \emptyset$
6. დაწერეთ რამდენიმე ამონახსენი მოცემული უტოლობებისათვის:
 - ა) $|x + 4,2| < 1,4$;
 - ბ) $|x - 8,3| \geq 4$;
 - გ) $|10 - x| > 7$;
 - დ) $|x| + 2,5 < 0$;
 - ე) $18 + |x| \leq 25$;
 - ვ) $|x| + 2|x| \geq 42$.
7. იპოვეთ უდიდესი და უმცირესი მთელი ამონახსენები მოცემული უტოლობებისათვის:
 - ა) $|x| < 10$;
 - ბ) $|a| < 7,8$;
 - გ) $|x| \leq 27$;
 - დ) $-2 < x < 10$.
8. დაწერეთ $2 - x \geq 0$ და $|2 - x| \geq 0$ ორივე უტოლობის დამაკმაყოფილებელი რამდენიმე რიცხვი. დაწერეთ მეორე უტოლობის ისეთი ამონახსენი, რომელიც არ იქნება პირველი უტოლობის ამონახსენი.
9. დაწერეთ მოდულის ნიშნის ქვეშ ცვლადის შემცველი ისეთი უტოლობა, რომ მას:
 - ა) ჰქონდეს ერთი ამონახსენი;
 - ბ) არ ჰქონდეს ამონახსენი;
 - გ) უსასრულო რაოდენობის ამონახსენი ჰქონდეს.

1.7. მოქმედებები რაციონალურ რიცხვებზე

რაციონალურ რიცხვებზე შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის მოქმედებების შესრულების პრინციპები მთელ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულების პრინციპების ანალოგიურია. მე-6 კლასის მათემატიკის კურსიდან იცით, რომ ჩანაწერში მხოლოდ რიცხვებისა და მოქმედებების მქონე გამოსახულებები რიცხვითი გამოსახულებებია. გამოსახულებას რომლის ჩანაწერშიც რიცხვებთან ერთად ასოც მონაწილეობს, **ასოითი გამოსახულება** ეწოდება. რაციონალური გამოსახულებების ნულზე გაყოფა შეუძლებელია. გამოსახულებას, რომლის გამყოფიც ნულია, აზრი არ აქვს.

საქმიანობა

მოქმედებების მიმდევრობა, კალკულატორი

იპოვეთ $\frac{3}{1+\frac{1}{2}} - \frac{4}{2+\frac{2}{3}}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

1. პირველად რომელი მოქმედება უნდა შესრულდეს ამ გამოსახულების მნიშვნელობის საპოვნელად? როგორ მიიღეთ ეს გადაწყვეტილება?
2. რომელი მოქმედებები უნდა შესრულოთ შემდგომ?
3. ჩაწერეთ ეს გამოსახულება წილადის ხაზის მაგივრად გაყოფის მოქმედებით. იპოვეთ მიღებული გამოსახულების მნიშვნელობა და პასუხი შეადარეთ წინა შედეგთან.

ნამუში

მაგალითად: იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\frac{\left(1-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)}{\left(2-\frac{2}{3}\right)+3}$.

ამოხსნა: პირველ რიგში იპოვეთ წილადის მრიცხველში მყოფი გამოსახულების მნიშვნელობა: $\left(1-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{6}$.

იპოვეთ მნიშვნელში მყოფი გამოსახულების მნიშვნელობა: $\left(2-\frac{2}{3}\right)+3 = \left(1\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\right)+3 = 1\frac{1}{3}+3 = 4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$.

მრიცხველში მიღებული გამოსახულება გავყოთ მნიშვნელში მიღებულ გამოსახულებას: $-\frac{7}{6} : \frac{13}{3} = -\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{13} = -\frac{7}{26}$.

ეს გამოსახულება მთავარი წილადის ხაზის გაყოფის ნიშნით ჩანაცვლებით ქვემოთ მოცემული სახით შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\frac{\left(1-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)}{\left(2-\frac{2}{3}\right)+3} = \left(\left(1-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)\right) : \left(\left(2-\frac{2}{3}\right)+3\right) = -\frac{7}{26} \quad \text{პასუხი: } -\frac{7}{26}.$$

ნამუში

მაგალითად: იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა: $-5\frac{7}{9}+3,(5)-2,0(23)$

▶ I განყოფილება

შეკითხვა: ეს რიცხვითი გამოსახულებაა და მისი მნიშვნელობის პოვნა შესაძლებელია:

$$\begin{aligned} -5\frac{7}{9} + 3, (5) - 2, 0(23) &= -5\frac{7}{9} + 3\frac{5}{9} - 2\frac{23}{990} = -2\frac{2}{9} - 2\frac{23}{990} = \\ &= -2\frac{220}{990} - 2\frac{23}{990} = -4\frac{243}{990} = -4\frac{27}{110}. \end{aligned}$$

პასუხი: $-4\frac{27}{110}$.

საგარჯიშოები

1. დაწერეთ ისეთი რიცხვითი გამოსახულება, რომ მისი მნიშვნელობის საპოვნელად ქვემოთ მოცემული მოქმედებები თანმიმდევრობით იქნას შესრულებული:

- ა) გაყოფა, შეკრება და გამრავლება; ბ) გამრავლება, გამოკლება და გაყოფა;
გ) შეკრება, კუბში ახარისხება; დ) გამრავლება, კვადრატში ახარისხება და შეკრება.

2. გამოთვალეთ გამოსახულებების მნიშვნელობა:

- ა) $-6,965 + 23,3$; ბ) $6,2 \cdot (-1,33)$; გ) $53,4 : (-15)$;
დ) $60,9 - 88,89$; ე) $0,78 \cdot (-2,5)$; ვ) $-16,94 : 2,8$;
ზ) $99 - 9,904$; თ) $-0,016 \cdot 0,25$; ი) $75 : 1,25$.

3. გამოთვალეთ:

- ა) $6\frac{1}{3} - 9$; ბ) $\frac{3}{8} : \left(-\frac{6}{32}\right)$; გ) $\frac{9}{14} \cdot (-4, (2))$; დ) $-0,9 \cdot (-0,1)$;
ე) $-12\frac{5}{7} + 5\frac{3}{5}$; ვ) $\frac{7}{12} \cdot (-36)$; ზ) $-64 : \left(-\frac{16}{9}\right)$; თ) $38 : (-0,019)$;
ი) $5\frac{1}{3} - 7, 0(3)$; კ) $-6\frac{2}{9} : 18$; ლ) $-3\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$; მ) $-45,5 : 0,005$.

4. რომელს არ აქვს აზრი მოცემული გამოსახულებებიდან? განმარტეთ, თუ როგორ მიხვედით ამ დასკვნამდე.

- ა) $126 : (36 \cdot 2 - 5 \cdot 8)$; ბ) $(1,7 \cdot 2 - 3,4) : 11$; გ) $\frac{2,6 - 13 \cdot 0,2}{8}$;
დ) $\frac{0,57}{0,08 - 0,02 \cdot 4}$; ე) $\frac{2,7 + 1,3}{-7,2 + 3,6 \cdot 2}$; ვ) $\frac{-12,3 + 4,1 \cdot 3}{7,26 - 2 \cdot 3,13}$.

5. იპოვეთ მოდულიანი გამოსახულებების მნიშვნელობა:

- ა) $\left| -\frac{19}{25} \right| + \left| 2\frac{3}{15} \right|$; ბ) $\left| -\frac{19}{25} + 2\frac{3}{15} \right|$; გ) $\frac{|-2,3| + |-4,1| \cdot 3}{-2 \cdot |-3,13|}$.

6. იპოვეთ გამოსახულებების მნიშვნელობა:

- ა) $\left| -3, (6) + 2\frac{1}{4} \right| - \left| -5,3 + 2, (3) \right|$; ბ) $\left| -7, (5) \right| + \left| -4,8 - 3\frac{1}{5} + 3,9 \right|$;
გ) $12,7(3) + \left| -6,5(21) - 0,2(54) \right|$; დ) $\left| 9, (1) + (-3, (7)) \right| - \left| 6, (5) \right| : \left| -1, (8) \right|$;

$$9) \frac{\frac{3}{4} + \left| -16\frac{1}{4} \right| - |20,5|}{-1\frac{7}{8} \cdot 0,5(3)};$$

$$3) \frac{0, (27) \cdot 3\frac{2}{3}}{\left| 2\frac{5}{16} - 4,31(25) \right|} + \left| -\frac{1}{2} \right|.$$

7. შეადგინეთ ალგორითმი გამოსახულებების მნიშვნელობის საპოვნელად. რას ეყრდნობით მოქმედებების რიგითობის განსაზღვრისას?

$$a) \frac{8}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}};$$

$$b) 2 - \frac{1}{-2 + \frac{1}{3}} + \frac{9}{-\frac{7}{4} : \frac{1}{2} - \frac{3}{2}};$$

$$8) \frac{\left(\frac{5}{6} + 1\frac{1}{2} \right) : \frac{7}{12}}{-\frac{5}{9} + \left(11 - 7\frac{5}{18} \right)};$$

$$d) \frac{(2,73 + 4,81 + 3,27 - 2,81) : \left(\frac{2}{5} - \frac{14}{15} \right)}{25 \cdot 37 \cdot 0,4};$$

$$9) 3 : \frac{1}{3} + \frac{7}{2} \left(\left(-\frac{7}{6} \right) \cdot \frac{3}{14} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right).$$

8. იპოვეთ მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობები და ჩაწერეთ ცარიელ უჯრებში ">, <, =" ნიშნებიდან შესაბამისი:

$$a) \frac{7}{4} : \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \right) \square \left(\frac{7}{4} : \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{2}{5};$$

$$b) \frac{2}{-3 + \frac{1}{5}} \square 1\frac{4}{7}.$$

9. ზოგჯერ მიკროკალკულატორით მოქმედებების შესრულებისას საჭირო ხდება რომელიმე მოქმედების შედეგის დამახსოვრება. მიკროკალკულატორში ამ მიზნით გამოიყენება **MS** და **MR** ღილაკები.

მაგალითად: $\frac{34 \cdot 3 - 48}{25 - 12}$ გამოსახულების მნიშვნელობის კალკულატორის საშუალებით გამოსათვლელად საჭიროა ქვემოთ მოცემული გამოანგარიშების პროგრამის შესრულება:

"25 - 12 = MS, 34 * 3 - 48 / MR = "

ჩაწერეთ ალგორითმი ქვემოთ მოცემული გამოსახულებების კალკულატორის საშუალებით გამოსათვლელად:

$$a) 1) (96,5 \cdot 2 + 43,5) : (5,9 - 5,5);$$

$$2) \frac{23 \cdot 8 - 44}{16 \cdot 0,5 + 25};$$

$$3) 35 - (1,2)^2;$$

$$4) \frac{3x - 9}{1,5 \cdot 2 + 5};$$

$$5) 204 : 21 + (2,4)^2;$$

$$6) \frac{230 : 5 + 24}{6 \cdot 2,5 - 45};$$

$$7) (4^3 + 103) - 468 : 18;$$

$$8) (2 \cdot 3,81 + 3)(4 \cdot 3,81 - 2);$$

$$9) \frac{3,2x - 1,7}{7 + 2,6 \cdot 3}.$$

ბ) ჩაწერეთ გამოსახულება, რომლის მნიშვნელობის პოვნაც ქვემოთ მოცემული პროგრამით ხდება:

$$1) 2 * 14 + 6 = MS \ 3 * 12 - 4 / MR = ;$$

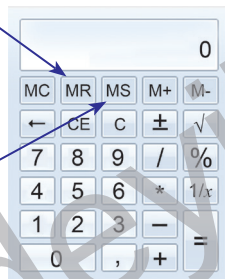
$$2) x * = MS \ 5 / 6 - 2 + MR = ;$$

$$3) 204 / 3 = MS \ 3 * = -63 + MR = ;$$

$$4) a + 6 = MS \ 78 * a - 7 * MR = .$$

MR
"Memory Recall"
იძახებს ინფორმაციას
მეხსიერებიდან

MS
"Memory Store"
აგზავნის ინფორმაციას
მეხსიერებაში



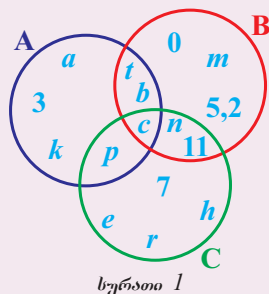
1.8. სიმრავლეები

საქმიანობა

გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისებები

ეილერ-ვენის დიაგრამების (სურათი 1) საფუძველზე:

1. დაწერეთ $A \cup B$ და $B \cup A$; $A \cap B$ და $B \cap A$ სიმრავლეების ელემენტები. რა შეგიძლიათ თქვათ ამ სიმრავლეების შესახებ?
2. დაწერეთ ორი სასრული სიმრავლის გაერთიანების ელემენტების რაოდენობის მოსაძებნი ფორმულა. განსაზღვრეთ $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$.
3. დაწერეთ $A \cup (B \cap C)$ და $(A \cup B) \cap C$; $A \cap (B \cap C)$ და $(A \cap B) \cap C$ სიმრავლეების ელემენტები. გამოთქვით მოსაზრებები ამ გამოსახულებების შესახებ.
4. დაწერეთ $A \setminus B$, $A \setminus (B \cap C)$, $B \setminus (A \cap C)$ სიმრავლეების ელემენტები. ასახეთ ეს სიმრავლეები ეილერ-ვენის დიაგრამებზე.



სიმრავლეების გაერთიანებისა და თანაკვეთის თვისებები:

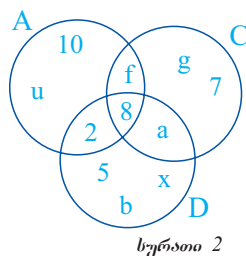
A , B და C სიმრავლეებისათვის მართებულია ქვემოთ მოცემული თვისებები:

1. $A \cup B = B \cup A$ და $A \cap B = B \cap A$ (გადანაცვლებადობის თვისება);
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ და $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ჯუფთებადობის თვისება);
3. თუ $B \subset A$ (ანუ B სიმრავლე A -სიმრავლის ქვესიმრავლეა), მაშინ $A \cup B = A$, $A \cap B = B$;
4. თუ $B \subset A$, მაშინ $A \setminus B$ სიმრავლე B სიმრავლის A სიმრავლემდე შემავსებელია.
5. $A \cap \emptyset = A$. A სიმრავლისა და ცარიელი სიმრავლის გაერთიანება A სიმრავლეა.
 $A \cap \emptyset = \emptyset$. A სიმრავლისა და ცარიელი სიმრავლის თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

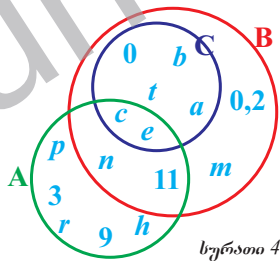
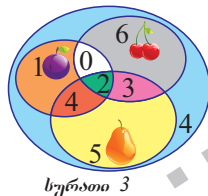
საგარჯიშოები

1. იპოვეთ $A = \{m, n, l, k, p\}$ და $B = \{n, p, g, j\}$ სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობა. განსაზღვრეთ ამ სიმრავლეების გაერთიანებისა და თანაკვეთის ელემენტების რაოდენობა. უჩვენეთ გადანაცვლებადობის თვისების დაკმაყოფილება.
2. რა შეგიძლიათ თქვათ ნატურალურ მთელ და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობის შესახებ? ამ სიმრავლეებიდან რომელია მეორის ქვესიმრავლე? გამოსახეთ ისინი ეილერ-ვენის დიაგრამებით.
3. სურათი 2-ზე მოცემული A , C , D სიმრავლეებისათვის იპოვეთ და გამოიკვლიეთ ქვემოთ მოცემული სიმრავლეები:

- | | |
|--|------------------------|
| ა) $A \cap C$; | ე) $A \cap D$; |
| ბ) $C \cap D$; | ვ) $A \cap C \cap D$; |
| გ) $n(A)$, $n(C)$, $n(D)$; | ზ) $A \cup C$; |
| დ) $A \cup D$; | თ) $A \cup C \cup D$; |
| ი) მხოლოდ A სიმრავლეში შემავალი ელემენტები; | |
| კ) მხოლოდ C სიმრავლეში შემავალი ელემენტები; | |
| ლ) $A \setminus D$, $A \setminus C$ და $D \setminus C$ სიმრავლეების ელემენტები. | |



4. ა) წარმოადგინეთ სამ ელემენტური ისეთი ორი სიმრავლე, რომელთა გაერთიანებაშიც 4 ელემენტი იქნება.
 ბ) წარმოადგინეთ ისეთი A, B და C სამი სიმრავლე, რომ $n(A) = 4$, $n(B) = 6$, $n(A \cap B) = 2$ იყოს. $n(A \cup B)$ გამოსახეთ ეს სიმრავლეები ეილერ-ვენის დიაგრამებით.
5. ჩვენს შენობაში მცხოვრები თითოეული ოჯახი ან გაზეთის, ან ჟურნალის ან კიდეც ორივეს გამოქვეყნებდა. 75 ოჯახი გაზეთს, 26 ოჯახი ჟურნალს, 18 ოჯახი კი გაზეთსაც და ჟურნალსაც იღებს. რამდენი ოჯახი ცხოვრობს ჩვენს ბინაში?
6. სკოლის სპორტულ შეჯიბრებებში მე-7 კლასის მოსწავლეებიდან 25-მა მონაწილეობა სირბილსა და სიმაღლეში ხტომაში ნორმატივები შეასრულა. 7-მა ორივე, 11-მა კი მხოლოდ სირბილის ნორმატივი დააკმაყოფილა. რამდენმა მოსწავლემ შეასრულა?
 ა) სირბილის; ბ) სიმაღლეზე ხტომის;
 გ) მხოლოდ სიმაღლეზე ხტომის ნორმატივი.
7. 61 მოსწავლიდან 27 მედლების, 35-კი მარკების კოლექციით არის დაკავებული. 6 მოსწავლე კი თან მედლებს და თან მარკებს აგროვებს. რამდენი მოსწავლე არ აგროვებს არცერთის კოლექციას?
8. ზაფხულის არდადეგების მანძილზე მე-7 კლასის მოსწავლეებიდან თითოეული ორჯერ A, B ან C დადგმებს ესწრებოდა. მათ A დადგმა 25-ჯერ, B დადგმა 23-ჯერ და C დადგმა 12-ჯერ ნახეს. რამდენი მოსწავლეა მე-7 კლასში?
9. შეადგინეთ და ამოხსენით ამოცანა ეილერ-ვენის დიაგრამების საფუძველზე (სურათი 3). დაასაბუთეთ ჯუფების თვისებების დაკმაყოფილება.
10. კლასის მოსწავლეებიდან 15 ინგლისურს, 11 რუსულს, 9 კი ორივე ენას სწავლობს. რამდენი მოსწავლეა კლასში?
11. ჯგუფში 20 ბავშვია, მათგან 14-ს ცხოველები, 10-ს ფრინველები მოსწონს. 2 ბავშვს არც ცხოველები და არც ფრინველები არ მოსწონს. რამდენ ბავშვს მოსწონს როგორც ცხოველები ასევე ფრინველებიც?
12. ა) თუ $n(A) = 18$, $n(B) = 23$ და $n(A \cap B) = 9$, მაშინ $n(A \cup B) = ?$
 ბ) თუ $n(M \cup K) = 42$, $n(M) = 35$, $n(K) = 28$, მაშინ $n(M \cap K) = ?$
 გ) თუ $n(C \cap D) = 7$, $n(C) = 19$, $n(C \cup D) = 22$, მაშინ $n(D) = ?$
13. იპოვეთ მონაცემების მიხედვით მოთხოვნილი სიმრავლეების ელემენტები.
- 1) $B \setminus (A \cup C)$;
 - 2) $(A \cup C) \setminus B$;
 - 3) $(A \cup C) \setminus (B \cap C)$;
 - 4) $(B \setminus C) \cup A$;
 - 5) $C \setminus (B \cap A)$;
 - 6) $(A \setminus C) \cap B$;
 - 7) $(A \cap C) \setminus (B \cap C)$.



1.9. აქსიომები

საქმიანობა

აქსიომა

1. შეახეთ კალმის წვერი რვეულის ფურცელს. რა ფიგურა მიიღეთ? დაასახელეთ.
2. დასვით ფურცელზე ორი სხვადასხვა წერტილი. შეაერთეთ ისინი სახაზავის საშუალებით. რა ფიგურა მიიღეთ? დაასახელეთ იგი..
3. დააკვირდით რვეულის ფურცელს. თქვენ ყოველთვის მასზე წერთ. დაფიქრებულხართ ოდესმე თუ რა ფიგურის ფორმა აქვს ამ ფურცელს? ფურცელი შეიძლება იყოს სიბრტყის ერთი ნაწილი? გამოთქვით მოსაზრება.

გეომეტრიის მეცნიერება ძველ ეგვიპტეში მიწის ნაკვეთების გაზომვის აუცილებლობის საფუძველზე გაჩნდა. ძველ ბერძნებს ეს მეცნიერება ეგვიპტელებისაგან შეუსწავლიათ და "გეომეტრია" დაურქმევიათ (ბერძნულ ენაზე "გეო"- მიწას, "მეტრო"- გაზომვას ნიშნავს). "ჰენდესე" სიტყვა აზებაიჯანულ ენაში არაბული ენიდან შემოვიდა და ნიშნავს, ჰენდესე, ჰენდესე, ჰენდესე მნიშვნელობის მქონე სიტყვა "ენდესე"-დან სიტყვიდან არის აღებული.

გეომეტრია ფიგურების და სხეულების ელემენტებს შორის დამოკიდებულების შემსწავლელი მეცნიერებაა. ამ ფიგურებისა და სხეულების თვისებები განსაზღვრების, აქსიომების, თეორემების სახით გამოისახება. განსაზღვრება რაიმე ახალი ცნების შინაარსს ცნობილი ცნებების დახმარებით განმარტავს. თუმცა ზოგიერთი ცნების, როგორც საწყისი ცნების განსაზღვრება არ მოიცემა. წერტილი, წრფე, სიბრტყე გეომეტრიის საწყისი ცნებებია. საწყისი ცნებების თვისებები აქსიომებით გამოისახება.

აქსიომა-მათემატიკური მოსაზრებაა, რომლის სისწორე დამტკიცების გარეშე მიიღება.

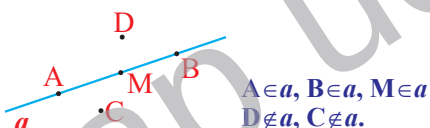
სიტყვა „აქსიომა“ დამტკიცების მნიშვნელობის მატარებელი ბერძნული წარმოშობის "aksios" სიტყვიდანაა აღებული. აქსიომები პირველად ძველმა ბერძენმა მეცნიერმა ევკლიდემ ჩ. წ. აღ-მდე 300 წლის წინათ დაწერილ წიგნში "საწყისები" გამოიყენა.

გეომეტრია ორი ნაწილისაგან შედგება: პლანიმეტრია და სტერეომეტრია. პლანიმეტრია სიბრტყით ფიგურებსა და მათ თვისებებს, ხოლო სტერეომეტრია სივრცით ფიგურებსა და მათ თვისებებს შეისწავლის.

განვიხილოთ პლანიმეტრიის ზოგიერთი აქსიომები.

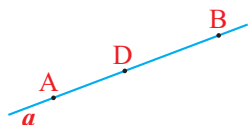
- ნებისმიერი წრფისათვის არსებობენ წერტილები, რომლებიც ამ წრფეზე მდებარეობენ და წერტილები რომლებიც მასზე არ მდებარეობენ. (მიკუთვნების აქსიომა).
- ნებისმიერ ორ წერტილზე მხოლოდ და მხოლოდ ერთი წრფის გავლებაა შესაძლებელი (წრფის აქსიომა).

ნიმუში



- წრფეზე მდებარე ნებისმიერი სამი წერტილიდან მხოლოდ და მხოლოდ ერთი მდებარეობს დანარჩენ ორ წერტილს შორის (**წერტილების წრფეზე განლაგების აქსიომა**).

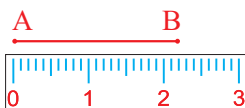
ნამუშაო



D წერტილი A და B წერტილებს შორის მდებარეობს.

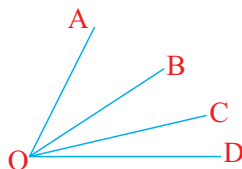
- თითოეულ მონაკვეთს ნულზე მეტი განსაზღვრული სიგრძე აქვს და დადგენილი სიგრძის საზომი ერთეულებით იზომება (**მონაკვეთის გაზომვის აქსიომა**).
- მონაკვეთის სიგრძე მისი ნებისმიერი შიდა წერტილით გაყოფილი მონაკვეთების სიგრძეების ჯამის ტოლია (**მონაკვეთის შეკრების აქსიომა**).
- თითოეულ კუთხეს ნულზე მეტი განსაზღვრული გრადუსული ზომა აქვს. გაშლილი კუთხე 180° -ის ტოლია (**კუთხის გაზომვის აქსიომა**).
- კუთხის გრადუსული ზომა მისი შიდა სხივით გაყოფით მიღებული კუთხეების ჯამის ტოლია (**კუთხეების შეკრების აქსიომა**).

ნამუშაო



$$AB = 2,2 \text{ სმ}$$

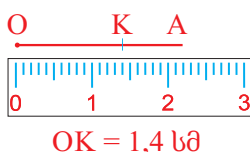
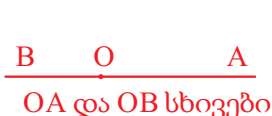
$$\begin{array}{c} M \quad O \quad N \\ \hline MN = MO + ON \end{array}$$



$$\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$$

- წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი ამ წრფეს, სათავედ ამ წერტილის მქონე ორ სხივად ყოფს (**წრფის გაყოფის აქსიომა**).
- სხივზე მისი სათავიდან მოცემული სიგრძის მხოლოდ და მხოლოდ ერთი მონაკვეთის გადადება შესაძლებელია (**მონაკვეთის გადაადგმის აქსიომა**).
- სიბრტყეზე მდებარე a წრფისაგან და მის ერთ მხარეს მდებარე ყველა წერტილებისაგან შემდგარ ფიგურას a საზღვრის მქონე **ნახევარსიბრტყე** ეწოდება.
- წრფე სიბრტყეს ისეთ ნახევარსიბრტყეებად ყოფს, რომ ერთი ნახევარსიბრტყის წერტილები ამ წრფის ერთ მხარეს ხოლო სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეების წერტილები კი ამ წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ (**სიბრტყის გაყოფის აქსიომა**).
- ნებისმიერი სხივიდან დაწყებული მოცემულ ნახევარსიბრტყეში 180° -ზე ნაკლები გრადუსული ზომის მოცემული კუთხის ტოლი მხოლოდ ერთი კუთხის გადადება შეიძლება (**კუთხის გადაადგმის აქსიომა**).

ნომუმი



შემდგომ გაკვეთილებში რამდენიმე აქსიომასაც გაცნობით.

საგარჯიშოები

1. აღნიშნეთ წრფეზე მდებარე და მასზე არამდებარე წერტილები.
2. აღნიშნეთ რომელიმე ორი წერტილი და ისინი წრფის საშუალებით შეაერთეთ. დაასახელეთ ეს წრფე.
3. M, N და K წერტილები ისე აღნიშნეთ, რომ მათი ერთი წრფის საშუალებით შეერთება ა) იყოს შესაძლებელი; ბ) არ იყოს შესაძლებელი. აჩვენეთ სხვადასხვა შემთხვევაში, თუ რომელი წერტილი მდებარეობს დანარჩენ ორ წერტილს შორის.
4. რიცხვით ღერძზე აღნიშნეთ N და K წერტილები, რომელთა შორის მანძილიც 4,5 სმ-ია. აღნიშნეთ A წერტილი NK მონაკვეთზე. გაზომეთ მიღებული მონაკვეთების სიგრძეები. რა დასკვნა გამოიტანეთ?
5. ააგეთ 150° -იანი $\angle AOB$. მასში გაავლეთ OM სხივი. მიღებული კუთხეები გაზომეთ ტრანსპორტირით. რა დასკვნა გამოიტანეთ?
6. გაავლეთ სიბრტყეზე ნებისმიერი OM სხივი. ააგეთ ამ წრფის მიერ გაყოფილ თითოეულ ნახევარსიბრტყეში O სათავის მქონე 45° -იანი კუთხე. რამდენი გრადუსი იქნება მიღებული ახალი კუთხე?
7. გამოყავით მონაკვეთები OA სხივზე $OB = 2,5$ სმ, $OM = 4,2$ სმ, $OK = 3,8$ სმ, $OP = 5,1$ სმ. განმარტეთ მიღებული წერტილების მდგომარეობა. განსაზღვრეთ BM, PM, BP მონაკვეთების სიგრძეები.
8. A, B და C წერტილები ისე აღნიშნეთ, რომ A და B წერტილები C წერტილიდან ერთ მხარეს, A და C წერტილები კი B წერტილიდან ერთ მხარეს მდებარეობდნენ. რომელი წერტილი მდებარეობს ასეთ შემთხვევაში დანარჩენ ორ წერტილს შორის?
9. a და b წრფეები M წერტილზე იკვეთებიან. დაასახელეთ სათავის M წერტილის მქონე სხივები. განსაზღვრეთ მიღებული მოპირდაპირე სხივები.
10. რვეულში ჩახაზეთ მკვეთი a და b წრფეები. რამდენ ნაწილად ყოფენ ეს წრფეები რვეულის ფურცელს? აღნიშნეთ ერთი წერტილი თითოეულ ნაწილში და ისინი მონაკვეთებით მიმდევრობით შეაერთეთ. რა ფიგურა მიიღეთ? შეიძლება თუ არა ამ წერტილებიდან სამი ერთ წრფეზე მდებარეობდეს? ოთხი?
11. . თქვენი აზრით სჭირდება დამტკიცება " $2 + 2 = 4$ " დებულებას? შეიძლება ვუწოდოთ ამ დებულებას აქსიომა? დაასახელეთ ისეთი დებულება, რომ მას დამტკიცება ა) სჭირდება; ბ) არ სჭირდება.

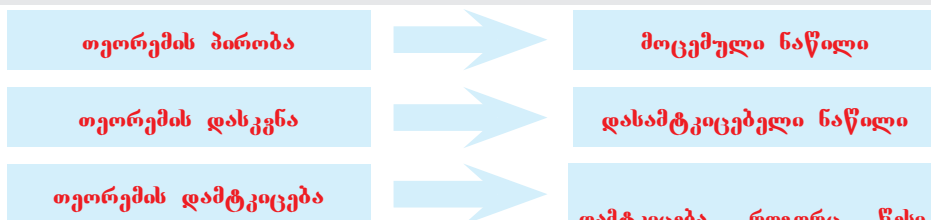
1.10. თეორემა. პირდაპირი და შებრუნებული თეორემები

საქმიანობა

პირობა, დასკვნა, დამტკიცება

- ჩახაზეთ AOB გაშლილი კუთხე.
- გაავლეთ მასში OC სხივი. დაასახელეთ მიღებული კუთხეები. გამოთქვიეთ მოსაზრებები მათი ჯამის შესახებ.
- რა შეგიძლიათ თქვით AOC კუთხის შესახებ, თუ, BOC კუთხე 25° იქნება? დაასახელეთ მოსაზრებები.

თეორემა არის ისეთი მათემატიკური მოსაზრება, რომლის სისწორე წინასწარ ცნობილი სხვა თვისებებიდან ლოგიკური მსჯელობის საშუალებით მიიღება. ამ მსჯელობას დამტკიცება ეწოდება. თეორემა ძველი ბერძნული სიტყვაა და **დამტკიცებას, ხედვას, პოზიციას** ნიშნავს. თეორემა შედგება ორი ნაწილისაგან: **“პირობა”** და **“დასკვნა”**. თეორემის მონაცემების ამსახველ ნაწილს **პირობა**, ხოლო დასამტკიცებელ ნაწილს **დასკვნა** ეწოდება.



თეორემა

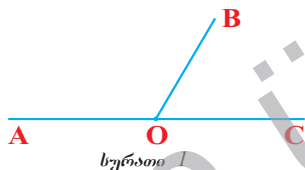
მოსაზღვრე კუთხეების თვისებები

მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია.

თეორემის პირობა: $\angle AOB$ და $\angle BOC$ მოსაზღვრე კუთხეებია.

თეორემის დასკვნა: $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$.

დამტკიცება: პირობის თანახმად $\angle AOB$ და $\angle BOC$ მოსაზღვრე კუთხეებია (სურათი 1).



დამტკიცება.

გამოიყენეთ გაშლილი კუთხის თვისება და კუთხის გაყოფის აქსიომა.

დამტკიცება, როგორც წესი ორი გზით ხდება:

- თეორემის დასკვნა პირობიდან ლოგიკური მსჯელობის გზით მიიღება.
- დასკვნის საწინააღმდეგოს დაშვებით ხდება დამტკიცება. ამ შემთხვევაში დაუშვებენ, რომ თეორემის დასკვნა მცდარია და როცა მისი საწინააღმდეგო მოსაზრების მათემატიკურ კანონებთან შეუსაბამობა გამოვლინდება, ამით თეორემა მტკიცდება.

საქმიანობა

შებრუნებული თეორემა

1. განსაზღვრეთ პირობა და დასკვნა წინადადებაში: “დღეს კვირის დღეებიდან შაბათია, ხვალ კვირაა”. შეუცვალეთ მათ ადგილები. გამოიკვლიეთ, სწორია თუ არა მიღებული დებულება.
2. ჩამოაყალიბეთ მოსაზღვრე კუთხეების ჯამის შესახებ თეორემა პირობისა და დასკვნის ადგილების შეცვლით. დაამტკიცეთ, არის თუ არა ის სწორი.
3. დაწერეთ “ბოლო ლუწი ციფრის მქონე რიცხვები 2-ზე უნაშთოდ იყოფა” დებულების შებრუნებული დებულება და დაასაბუთეთ მისი სისწორე.

თუ თეორემის პირობისა და დასკვნის ადგილების გადანაცვლებით სწორ დებულებას ვღებულობთ, მაშინ ამ დებულებას მოცემული თეორემის **შებრუნებული თეორემა** ეწოდება.

საქმიანობა

1. დახაზეთ AOB მახვილი კუთხე.
2. გაავლეთ OA და OB სხივების მოპირდაპირე სხივები. მიღებული კუთხე აღნიშნეთ COD-ით. გამოთქვით მოსაზრებები ამ კუთხეების შესახებ.
3. რა შეგიძლიათ თქვათ COD კუთხის შესახებ, თუ AOB კუთხე 25° -ია? მოსაზრებები დაასაბუთეთ.
4. თუ $\angle AOB = 120^\circ$, მაშინ $\angle COD$ რამდენი გრადუსი იქნება? მოსაზრებები დაასაბუთეთ.
5. თუ $\angle AOB = 90^\circ$, მაშინ $\angle COD$ რამდენი გრადუსი იქნება? მოსაზრებები დაასაბუთეთ.

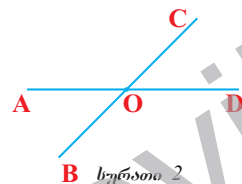
თეორემა

ვერტიკალური კუთხეების თვისება

ვერტიკალური კუთხეები ერთმანეთის ტოლია.

თეორემის პირობა: $\angle AOB$ და $\angle DOC$ ვერტიკალური კუთხეებია.

თეორემის დასკვნა: $\angle AOB = \angle DOC$ (სურათი 2).



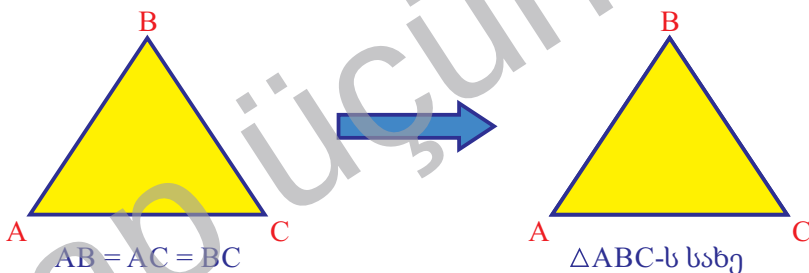
დაამტკიცეთ.

გამოიყენეთ მოსაზღვრე კუთხეების თვისებები.

საგარჯიშოები

1. ჩამოთვალეთ თქვენთვის ცნობილი განსაზღვრებები და საწყისი ცნებები, დაასახელეთ განსაზღვრებები.
2. დაამტკიცეთ, რომ გაშლილი კუთხისა და შიდა არისაგან შემდგარი ფიგურა ნახევარ-სიბრტყეა.
3. წრფე, რომელიც სამკუთხედის წვერებზე არ გადის, მის ერთ გვერდს ჰკვეთს. ეს წრფე სამკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდიდან რამდენს გადაკვეთს? დაასაბუთეთ თქვენი პასუხი.
4. დაწერეთ ვერტიკალური კუთხეების შესახებ თეორემის შებრუნებული თეორემა და გამოიკვლიეთ, სწორია თუ არა ეს თეორემა.

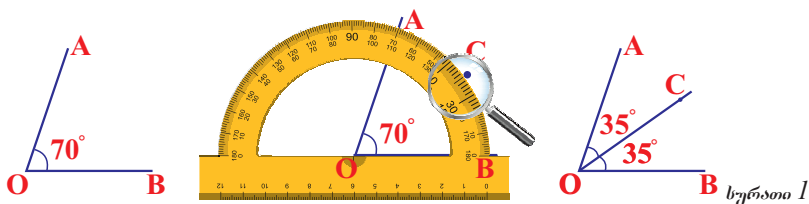
5. განსაზღვრეთ პირობა და დასკვნა დებულებაში: “თუ შესაკრებები არის 16 და 9, მაშინ ჯამი 25-ის ტოლია“. ჩამოაყალიბეთ მათი ადგილების გადანაცვლებით მიღებული ამ დებულების შებრუნებული დებულება. სწორია მიღებული შებრუნებული დებულება? რატომ?
6. დაწერეთ “თითოეული რიცხვი, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს ორი მთელი რიცხვის თანაფარდობის სახით, რაციონალური რიცხვია“ დებულების შებრუნებული დებულება. გამოიკვლიეთ სწორია თუ არა ეს დებულება.
7. დახაზეთ ერთმანეთის მკვეთი AB და CD წრფეები, მათი გადაკვეთის წერტილი აღნიშნეთ O ასოთი. მიღებული კუთხეები გაზომეთ ტრანსპორტირის საშუალებით. განსაზღვრეთ აკმაყოფილებენ თუ არა, ისინი მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეების შესახებ თეორემებს. დაამტკიცეთ ამ ხერხით მოცემული თეორემების სისწორე.
8. ჩამოაყალიბეთ თეორემის სახით ტოლგვერდა სამკუთხედის პერიმეტრის მოძებნის წესი. განსაზღვრეთ და გადანაცვლეთ პირობა და დასკვნა. სწორია მიღებული შებრუნებული დებულება?
9. ჩამოაყალიბეთ თეორემის სახით აქამდე შეხვედრილი საკითხები (რომლებიც შესაძლებელია). განსაზღვრეთ, სწორია თუ არა მათი შებრუნებული დებულებები.
10. განსაზღვრეთ პირობა და დასკვნა მოცემულ დებულებებში. გადმოეცით ამ დებულებების შებრუნებული დებულებები და დაასაბუთეთ სწორია თუ არა ისინი:
 - ა) თუ რიცხვის ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე, მაშინ თვით ეს რიცხვიც იყოფა 3-ზე.
 - ბ) რიცხვი, რომლის ბოლო ორი ციფრიც ნულია, იყოფა 4-ზე.
 - გ) ავტომობილი, რომლის საშუალო სიჩქარეც 60 კმ/საათია 4 საათში 240 კმ მანძილს გაივლის.
 - დ) თუ სამკუთხედის ორი კუთხის მნიშვნელობა შესაბამისად 60° და 35° -ია, მაშინ მესამე კუთხი მნიშვნელობა 85° -ია.
 - ე) თუ შესაკრებები არიან 6793 და 9384, მაშინ ჯამი 16177-ის ტოლი იქნება.
 - ვ) გადანაცვლეთ პირობა და დასკვნა 5-ზე, 9-ზე, 6-ზე და 15-ზე გაყოფის ნიშნებში და შეამოწმეთ მიღებული შებრუნებული დებულების სისწორე.
11. განსაზღვრეთ მოდელში მოცემული დებულება, მისი პირობა და დასკვნა. გამოთქვით შებრუნებული დებულება პირობისა და დასკვნის გადანაცვლებით და დაასაბუთეთ მისი სისწორე.



1.11. კუთხის ბისექტრისის აგება

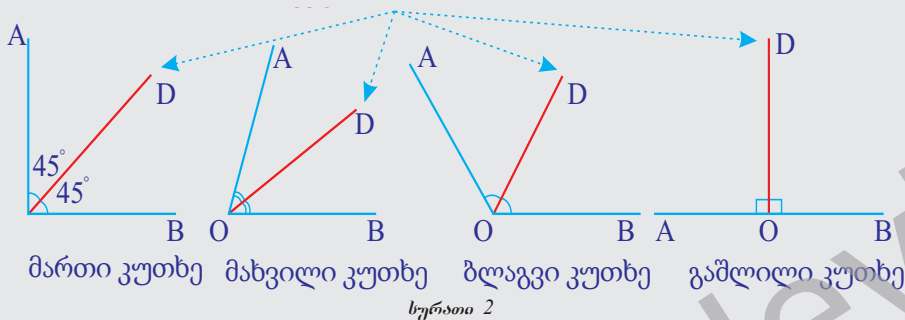
საქმიანობა

1. ტრანსპორტირისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ 70° -იანი AOB კუთხე.
2. გადაზომეთ OB სხივიდან დაწყებული 35° -იანი კუთხე და C წერტილი მონიშნეთ.
3. დახაზეთ OC სხივი.
4. გამოთქვით მოსაზრებები AOC და BOC კუთხეების შესახებ.
5. რა შეგიძლიათ თქვათ OC სხივის შესახებ?



მიდა სხივს, რომელიც კუთხის წვეროდან გამოდის და მას შუაზე ყოფს, **კუთხის ბისექტრისა** ეწოდება (სურათი 2).

OD ბისექტრისაა: $\angle AOD = \angle BOD$



კუთხის ბისექტრისის უფრო ზუსტად აგება, ტრანსპორტირის გარდა, ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით არის შესაძლებელი. შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული საქმიანობა ფარგლითა და სახაზავით კუთხის ბისექტრისის ასაგებად.

საქმიანობა

ფარგალი

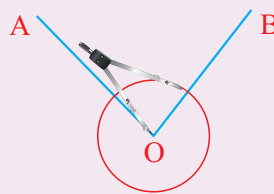
კუთხის ბისექტრისის

ფარგლითა და სახაზავით აგება.

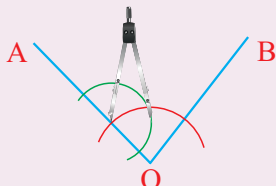
1. დახაზეთ ნებისმიერი AOB კუთხე.



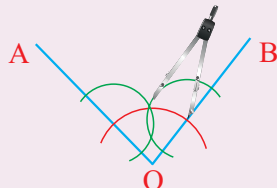
2. ფარგლის საშუალებით დახაზეთ O ცენტრის მქონე წრეწირი.



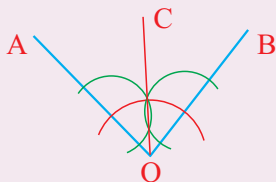
3. ფარგლის გაშლის კუთხე ცოტათი შეამცირეთ. ფარგლის წვერო მოათავსეთ პირველი წრეწირის OA გვერდთან გადაკვეთის წერტილში და დახაზეთ კუთხის გვერდების გადამკვეთი რკალი.



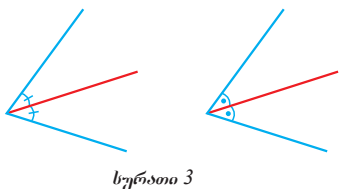
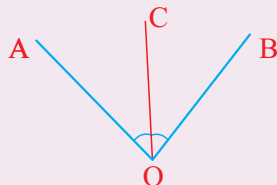
4. რადიუსის შეუცვლელად ფარგლის წვერო პირველი წრეწირის OB გვერდთან გადაკვეთის წერტილში მოათავსეთ და მოხაზეთ კუთხის გვერდების გადამკვეთი რკალი.



5. სახაზავის დახმარებით გაავლეთ წრფე მწვანე წრეწირების გადაკვეთის წერტილები. ეს წრფე O წერტილზეც გაივლის.



6. წრეწირები წაშალეთ საშლელის საშუალებით. მიღებული OC სხივი AOB კუთხის ბისექტრისაა.



სურათი 3

კუთხის ბისექტრისა სურათი 3-ზე მოცემული ფორმით გამოიხატება.

საფარჯიშოები

- ფარგლისა და სახაზავის დახმარებით ააგეთ 30° , 60° , 90° , 120° , 160° -იანი კუთხეების ბისექტრისები. განმარტეთ, თუ როგორ ააგეთ ისინი. ბისექტრისებით მიღებული კუთხეები გაზომეთ ტრანსპორტირის საშუალებით. გამოიკვლიეთ რამდენად ზუსტად მოხდა აგება.
- ფარგლისა და სახაზავის დახმარებით ააგეთ 58° , 75° , 96° , 145° -იანი კუთხეების ბისექტრისები. გამოიკვლიეთ აგების შედეგები.
- დახაზეთ ნებისმიერი კუთხე და ააგეთ მისი ბისექტრისა ფარგლისა და სახაზავის დახმარებით, ასევე ტრანსპორტირითაც. რომელ შემთხვევაში უფრო ზუსტად ხდება ბისექტრისის აგება?

1.12. სამკუთხედის ბისექტრისები

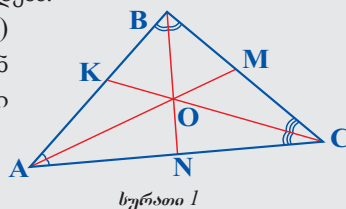
საქმიანობა

ბისექტრისა

1. დახაზეთ ნებისმიერი ABC სამკუთხედი.
2. ტრანსპორტირის ან ფარგლის დახმარებით ააგეთ $\angle A$, $\angle B$ და $\angle C$ -კუთხეების ბისექტრისები.
3. მიღებული ბისექტრისების მოპირდაპირე გვერდთან გადაკვეთის წერტილები აღნიშნეთ M , N და K -თი.
4. გამოთქვით მოსაზრებები AM , BN და CK მონაკვეთების შესახებ. აღნიშნეთ O ასოთი მათი გადაკვეთის წერტილი.
5. გამოთქვით მოსაზრებები სამკუთხედის წვეროებში მიღებული კუთხეების შესახებ.

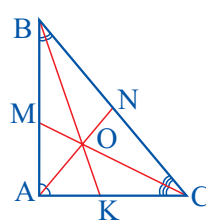
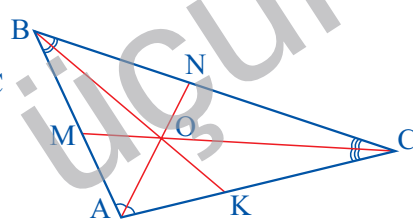
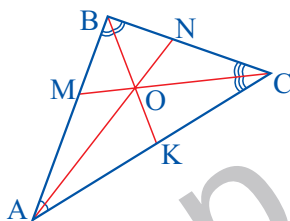
სამკუთხედის ნებისმიერი კუთხის ბისექტრისის მისი წვეროდან მოპირდაპირე გვერდამდე მონაკვეთს სამკუთხედის ბისექტრისა ეწოდება.

სამკუთხედს სამი ბისექტრისა აქვს (AM , BN , CK) და ისინი ერთ წერტილში (O წერტილი) იკვეთებიან (სურათი 1). იმის დასამტკიცებლად, რომ მოცემული მონაკვეთები ბისექტრისებია, $\angle BAM = \angle CAM$, $\angle ABN = \angle CBN$, $\angle BCK = \angle ACK$ ტოლობების ჩვენება საკმარისია.



საგარჯიშოები

1. ფარგლისა და სახაზავის დახმარებით ააგეთ მახვილკუთხა, ზღაგვეკუთხა და მართკუთხა სამკუთხედების კუთხეების ბისექტრისები. განსაზღვრეთ სად მდებარეობს ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი.
2. გავლებულია ABC სამკუთხედის BK ბისექტრისა. $\angle B = 140^\circ$. იპოვეთ რამდენი გრადუსია ABK და CBK კუთხეები.
3. მოცემულია MON მახვილი კუთხე და მისი OP ბისექტრისა. განსაზღვრეთ MON და NOP კუთხეების გრადუსული ზომები, თუ $\angle MOP = 25^\circ$.
4. სურათი 2-ის საფუძველზე განსაზღვრეთ ABK , BCM , CAN კუთხეები ტრანსპორტირის საშუალებით. აჩვენეთ ტოლი გვერდები. ჩაწერეთ ბისექტრისები.



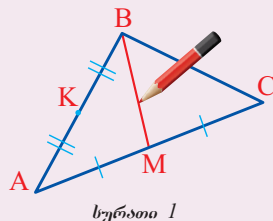
სურათი 2

1.13. სამკუთხედის მედიანები

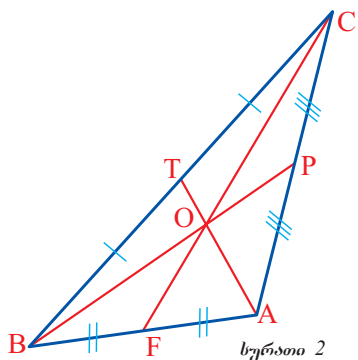
საქმიანობა

მედიანა

1. დახაზეთ ABC სამკუთხედი.
2. სახაზავის დახმარებით გაზომეთ AB გვერდის სიგრძე. აღნიშნეთ მისი შუაწერტილი. აღნიშნეთ ეს წერტილი K ასოთი.
3. შეაერთეთ მონაკვეთით C წვერო და K წერტილი.
4. გაზომეთ AC გვერდის სიგრძე და აღნიშნეთ შუაწერტილი. აღნიშნეთ ეს წერტილი M ასოთი. B და M წერტილები შეაერთეთ მონაკვეთით (სურათი 1).
5. გაზომეთ BC გვერდის სიგრძე და მონიშნეთ შუაწერტილი. აღნიშნეთ ეს წერტილი N ასოთი. შეაერთეთ მონაკვეთით A და N წერტილები.
6. გამოთქვით მოსაზრებები AN , BM და CK მონაკვეთების შესახებ.



სამკუთხედის ნებისმიერი წვეროსა და ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს სამკუთხედის მედიანა ეწოდება (სურათი 1). სამკუთხედს სამი მედიანა აქვს და ისინი ერთ წერტილში (O წერტილი) იკვეთებიან (სურათი 2).



სამკუთხედის მედიანის გამოსახვისათვის გაყოფილი გვერდის ტოლ მონაკვეთებზე ერთი და იგივე რაოდენობის ხაზები უნდა დაისვას (სურათი 2).

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ AT , BP , CF მონაკვეთები არის მედიანა, საკმარისია იმის ჩვენება, რომ

$$BT = TC, AP = CP \text{ და } AF = BF$$

საგარჯიშოები

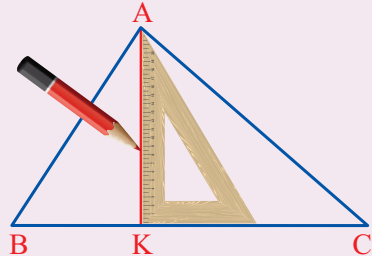
1. ააგეთ ნებისმიერი მახვილკუთხა, ბლაგვკუთხა, მართკუთხა სამკუთხედები. სახაზავის გამოყენებით დახაზეთ თითოეული კუთხის მედიანები.
2. ABC სამკუთხედში AK , CM , BN მედიანებია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $AN = 3$ სმ, $BK = 2,5$ სმ, $BM = 3,2$ სმ.
3. ABC სამკუთხედში AK , CM , BN მედიანებია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $AM + CK + NC = 34,5$ სმ.
4. MNK ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 56 დმ-ია. თუ MN ფუძის სიგრძე 18,4 დმ-ია, რამდენ სანტიმეტრიან მონაკვეთებად გაყოფენ ფერდებზე გავლებული მედიანები ამავე გვერდებს?

1.14. სამკუთხედის სიმაღლეები

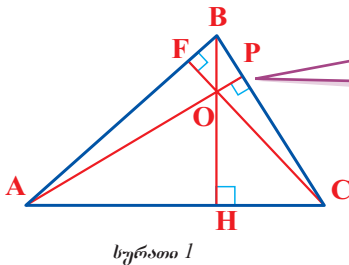
საქმიანობა

სიმაღლე

1. დახაზეთ ABC მახვილკუთხა სამკუთხედი.
2. სურათზე ნაჩვენებების მსგავსად, კუთხედის დახმარებით გაავლეთ A წვეროდან BC გვერდისადმი AK მონაკვეთი.
3. განსაზღვრეთ AK და BC მონაკვეთების ურთიერთმდებარეობა.
4. რამდენი გრადუსია კუთხედის პატარა გვერდებს შორის კუთხე?
5. როგორი კუთხეებია $\angle AKB$ და $\angle AKC$?



სამკუთხედის მოცემული წვეროდან დაშვებული სიმაღლე ეწოდება მართობს, რომელიც ამ წვეროდან მოპირდაპირე გვერდის ან მისი გაგრძელებით მიღებული წრფისადმი არის გაკლებული. (სურათი 1).



სურათი 1

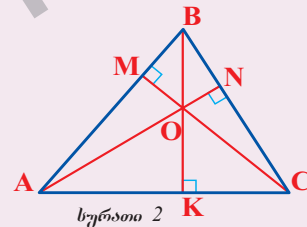
მოცემული მონაკვეთის, როგორც სამკუთხედის სიმაღლის ასახვისას, სიმაღლისა და გვერდის გადაკვეთის ადგილას მართკუთხედის ნიშანი უნდა ჩაიხაზოს (სურათი 1). იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ $AP \perp BC$, $BH \perp AC$ და $CF \perp AB$.

სამკუთხედს სამი სიმაღლე აქვს და ისინი ერთ წერტილში იკვეთებიან (სურათი 1). სამკუთხედის სიმაღლეების ან გაგრძელებების კვეთის წერტილი შეიძლება მდებარეობდეს ამ სამკუთხედის შიგნით, ზედ ან კიდეც მის გარეთ.

საქმიანობა

სად იკვეთებიან მახვილკუთხა სამკუთხედის სიმაღლეები?

1. დახაზეთ ABC მახვილკუთხა სამკუთხედი (სურათი 2);
2. კუთხედის საშუალებით გაავლეთ მართობი A წვეროდან BC გვერდზე;
3. კუთხედის საშუალებით გაავლეთ მართობი B წვეროდან AC გვერდზე;
4. კუთხედის საშუალებით გაავლეთ მართობი C წვეროდან AB გვერდზე;
5. განსაზღვრეთ რომელ წერტილში იკვეთებიან სიმაღლეები.

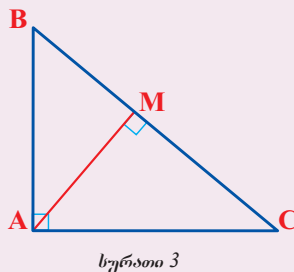


სურათი 2

საქმიანობა

სად იკვეთებიან მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლეები?

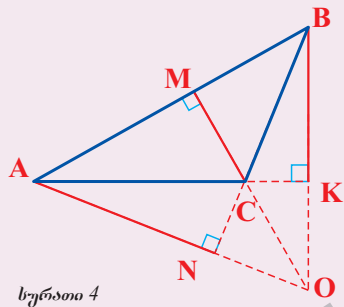
1. დახაზეთ ABC მართკუთხა სამკუთხედი (სურათი 3);
2. კუთხედის საშუალებით დაუშვით მართობი A წვეროდან BC გვერდზე;
3. კუთხედის საშუალებით დაუშვით მართობი B წვეროდან AC გვერდზე;
4. კუთხედის საშუალებით დაუშვით მართობი C წვეროდან AB გვერდზე;
5. დაადგინეთ სად იკვეთებიან სიმაღლეები?



საქმიანობა

სად იკვეთებიან ბლაგვკუთხა სამკუთხედის სიმაღლეები?

1. დახაზეთ ბლაგვკუთხა ABC სამკუთხედი (სურათი 4);
2. კუთხედის საშუალებით A წვეროდან გაავლეთ მართობი BC გვერდის შემცველი წრფის მიმართ.
3. კუთხედის საშუალებით გაავლეთ მართობი B წვეროდან AC გვერდის შემცველი წრფის მიმართ;
4. კუთხედის საშუალებით გაავლეთ მართობი C წვეროდან AB გვერდზე;
5. განსაზღვრეთ სად იკვეთებიან სიმაღლეები.



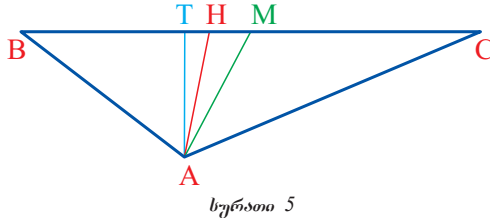
1. მახვილკუთხა სამკუთხედში სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი სამკუთხედის შიგნით (O წერტილზე) მდებარეობს (სურათი 2).
2. მართკუთხა სამკუთხედში სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროს (A წერტილი) ემთხვევა (სურათი 3).
3. ბლაგვკუთხა სამკუთხედში სიმაღლეების გაგრძელების გადაკვეთის წერტილი სამკუთხედის გარეთ (O წერტილზე) მდებარეობს (სურათი 4).

საგარჯიშოები

1. დახაზეთ მახვილკუთხა სამკუთხედები. გაავლეთ მისი ნებისმიერი ერთი წვეროდან:
 - ა) მედიანა;
 - ბ) ბისექტრისა;
 - გ) სიმაღლე.
 შეადარეთ მიღებული სიმაღლის, ბისექტრისისა და მედიანის სიგრძეები.
2. დახაზეთ მართკუთხა სამკუთხედი. მართი კუთხის წვეროდან გაავლეთ მედიანა, სიმაღლე და ბისექტრისა.

► I განყოფილება

3. სველია ბლაგვკუთხა სამკუთხედის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული მედიანა, ბისექტრისა და სიმაღლე ნახაზზე მოცემული სახით ასახა (სურათი 5). მან აღნიშნა, რომ AM მედიანა, AH სიმაღლე, ხოლო AT-ბისექტრისაა. იპოვეთ მისი შეცდომა. გამოსახეთ სწორი პასუხი ნახაზის საშუალებით.



4. დახაზეთ 150° -იანი კუთხის მქონე სამკუთხედი. გამოსახეთ მისი მახვილი კუთხეებიდან გავლებული სიმაღლეები.

5. ABC სამკუთხედში გავლებულია AT ბისექტრისა, BH სიმაღლე და CM მედიანა. დაასრულეთ წინადადებები:

ა) თუ AT ბისექტრისაა, მაშინ $\angle BAT = \dots$

ბ) თუ CM მედიანაა, მაშინ BM ...

გ) თუ BH სიმაღლეა, მაშინ ... პერპენდიკულარულია.

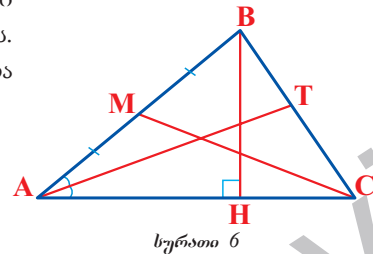
თითოეულ პუნქტში მიღებულ დებულებაში შეუცვალეთ ადგილი პირობასა და დასკვნას. განსაზღვრეთ, მიღებული დებულება არის თუ არა სწორი.

6. სურათი 6-ის საფუძველზე იპოვეთ:

ა) $\angle BAC$, თუ $\angle BAT = 15^\circ$.

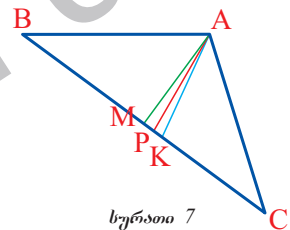
ბ) AB, თუ $BM = 2,45$ სმ.

გ) $\angle BHC$, თუ $BH \perp AC$.



7. ABC მართკუთხა სამკუთხედის მართი B კუთხის წვეროდან გაყვლით BK სიმაღლე, განსაზღვრეთ მიღებული ABK და CBK სამკუთხედების სახელები.

8. სურათი 7-ზე გავლებული AM, AP და AK მონაკვეთებიდან, ნახაზზე დახედვით ივარაუდეთ რომელია მედიანა, სიმაღლე და ბისექტრისა. თქვენი ვარაუდების სისწორე შემოწმეთ სახაზავით, კუთხედითა და ტრანსპორტირით საჭირო გაზომვების ჩატარებით. გამოთქვით მოსაზრება, თუ როგორ განლაგდებიან სამკუთხედის ერთი წვეროდან გავლებული მედიანა, სიმაღლე და ბისექტრისა.



თვითშეოწმება

1. იპოვეთ რიცხვების ჯამი: -3 ; $0,8$; $-2,3$; $4,7$; $-6,02$.
2. რიცხვით ღერძზე აღნიშნეთ $-3\frac{3}{4}$; $2,5$; $0,3$; $-2,3$; $7,8$ რიცხვების შესაბამისი წერტილები.
3. იპოვეთ მანძილი $A(-0,365)$ და $B(-2,99)$ წერტილებს შორის.
4. იპოვეთ M წერტილის კოორდინატები, თუ $MN = 14,3$ სმ.



5. a და b წრფეები O წერტილში იკვეთებიან. თუ მიღებული კუთხეებიდან ერთი 31° -ია, მაშინ განსაზღვრეთ დანარჩენი კუთხეები.
6. გამოთვალეთ მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობა:
 - ა) $3, (6) + 4, 12(3) - 0,5(7)$;
 - ბ) $-1, (72) \cdot 0,2(6) - 5, (123)$;
 - გ) $0,5(43) - 1,7(54) + 2,19(2)$.
7. $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$ წილადები ჩაწერეთ პერიოდული ათწილადის სახით და გამოთქვით მოსაზრებები პერიოდში მყოფი ციფრების ჯგუფის შესახებ.

8. b და a რიცხვები რიცხვით ღერძზე სურათზე ნაჩვენები სახით არის განთავსებული.



შეადარეთ ქვემოთ მოცემული გამოსახულებები:

- ა) a და b ; ბ) $-a$ და $-b$; გ) a და $-b$;
- დ) $\frac{1}{2}a$ და $2a$; ე) $\frac{1}{6}b$ და $5b$.

9. დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით:

ა) $0,3$; $4,(2)$; $-1,3$; $4,2$; $0,(3)$; 3 .

ბ) $\frac{-5}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{-1}{3}$; $\frac{-3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{12}$; 0 .

10. ააგეთ 50° , 124° , 66° -იანი კუთხეების ბისექტრისები.

11. იპოვეთ მოცემული უტოლობების მთელ ამონახსენთა სიმრავლე:

ა) $-3,5 < x \leq 4$; ბ) $0 \leq y < 8,3$;

გ) $-10 < m < -6,1$; დ) $-\frac{7}{2} < a < -3,1$.

12. აჩვენეთ მოდულის ნიშნის ქვეშ ცვლადის შემცველი უტოლობების უდიდესი მთელი ამონახსენი;

ა) $|x| < 7,2$; ბ) $|2a| \leq 1$.

13. თუ $n(A) = 16$; $n(B) = 3$; $n(A \cup B) = 25$, მაშინ $n(A \cap B) = ?$ გამოსახეთ ეს სიმრავლეები ეილერ-ვენის დიაგრამებით.

14. ABC სამკუთხედის A კუთხე 130° -ია. ააგეთ ამ კუთხის ბისექტრისა.

15. 3-ზე, 6-ზე, 15-ზე გაყოფადობის ნიშნებში პირობისა და დასკვნის გადანაცვლებით დაწერეთ შებრუნებული დებულება და განსაზღვრეთ მისი სიზუსტე.

16. ABC სამკუთხედში AM , BN , CK მედიანებია. თუ $CM = 38$ მმ, $CN = 3,5$ სმ, $BK = 0,24$ დმ მაშინ რამდენი მეტრი იქნება ABC სამკუთხედის პერიმეტრის ნახევარი?

17. გამოიკვლიეთ, რომელია 16 სმ, $1,7$ დმ, $0,18$ მ სიგრძეებიდან MNK სამკუთხედის ერთი წვეროდან გავლებული ბისექტრისა, მედიანა და სიმაღლე.

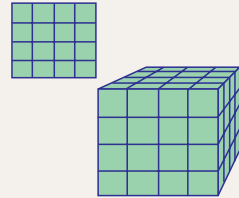
II განყოფილება. ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხი. სამკუთხედების კონგრუენტულობა

2.1. ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხი

საქმიანობა

ხარისხი, ფუძე $- a^n$

1. დახაზეთ 4 სიგრძის ერთეული გვერდის მქონე კვადრატები.
2. დაყავით ეს კვადრატები 1 სიგრძის ერთეული გვერდის მქონე კვადრატებად.
3. განსაზღვრეთ მიღებული კვადრატების რაოდენობა. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.
4. დახაზეთ 4 სიგრძის ერთეული წიბოს მქონე კუბი.
5. დაყავით ეს კუბი 1 სიგრძის ერთეული წიბოს მქონე კუბებად.
6. განსაზღვრეთ მიღებული კუბების რაოდენობა. იპოვეთ კუბის მოცულობა.
7. გამოთქვით მოსაზრებები შედეგის შესახებ.



საქმიანობა

მოცემულია რიცხვები 9, 16, 64, 81, 343.

1. მოცემული რიცხვები დაშალეთ მარტივ მამრავლებად ($9 = 3 \cdot 3$).
2. ერთნაირი მამრავლების რაოდენობა მამრავლის ზემოთ დაწერეთ ($9 = 3^2$).
3. გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული გამოსახულების შესახებ და გამოიტანეთ დასკვნა.

თითოეული a -ს ტოლი n რაოდენობის მამრავლების ნამრავლს a რიცხვის $n(n>1)$ ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხი ეწოდება: a^n , სადაც a ხარისხის ფუძე, n კი -ხარისხის მაჩვენებელია.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ a^n გამოსახულება ასე იკითხება: " a ხარისხად n ან a -ს n -ური ხარისხი".

1-ის ტოლი ხარისხის მაჩვენებლის მქონე a რიცხვის ხარისხი a -ს ტოლია: $a^1 = a$.

ხარისხის მნიშვნელობის გამოთვლას ხარისხში აყვანა ეწოდება.

ნიმუში

მაგალითი: გამოთვალეთ ხარისხების მნიშვნელობა: 3^5 ; $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; $(-1)^7$; 0^4 ; $(-7)^4$.

ამოხსნა: $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$;

$(-1)^7 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

$0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;

$(-7)^4 = -7 \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = 2401$.

ახარისხების მოქმედება მესამე საფეხურის მოქმედებაა. უფრჩხილებო გამო-
სახულებებში თავდაპირველად მესამე საფეხურის მოქმედებები (ახარისხება), შემდეგ
მეორე საფეხურის მოქმედებები (გამრავლება, გაყოფა), ბოლოს კი-პირველი საფეხურის
მოქმედებები (შეკრება, გამოკლება) სრულდება.

a^n ხარისხში თუ ფუძე (a) დადებითი რიცხვია, a^n ხარისხიც დადებითი რიცხვია.

a^n ხარისხში როდესაც ფუძე (a) უარყოფითი რიცხვია, მაშინ, თუ n ლუწი რიცხვია,
 a^n დადებითი რიცხვი იქნება, თუ n კენტი რიცხვია, a^n უარყოფითი რიცხვი იქნება,
ანუ ლუწი რაოდენობის უარყოფითი რიცხვების ნამრავლი დადებითი რიცხვი, კენტი
რაოდენობის უარყოფითი რიცხვების ნამრავლი უარყოფითი რიცხვია: $(-3)^4 = 81$;
 $(-3)^3 = -27$.

საქმიანობა

$$a \cdot 10^n$$

რიცხვის წარმოდგენა სტანდარტული სახით:

- 43672 ჩაწერეთ თანრიგი შესაკრებების ჯამის სახით:
 $43672 = 4 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2$.
- მიღებული თანრიგის ერთეულები ჩაწერეთ 10-ის ხარისხის სახით.
 $43672 = 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2$.
- წაიკითხეთ თითოეული შესაკრები და გამოთქვით მოსაზრებები მისი ჩაწერის
ფორმის შესახებ.

ნულზე არანაკლები თითოეული რაციონალური რიცხვის $a \cdot 10^n$ ($n \in \mathbb{N}$) სახის
ჩანაწერს რიცხვის **სტანდარტული სახე** ეწოდება. აქ $1 \leq a < 10$.

a -ს რიცხვის **ხარისხის ფუძე**, n -ს კი მისი **რიგი** ეწოდება. რიცხვის სტანდარტული
სახის ჩანაწერს, ძირითადად დიდი რიცხვების დასაწერად იყენებენ.

ნიმუში

მაგალითი: 2937000; 7364; 6253,64 რიცხვები ჩაწერეთ სტანდარტული სახით.

ამოხსნა: იმისათვის, რომ რიცხვი სტანდარტული სახით წარმოვადგინოთ, ის ორი
მამრავლის ნამრავლის სახით უნდა ჩავწეროთ. პირველი მამრავლი 1-სა და 10-ს
შორის მდებარეობს, მეორე მამრავლი, კი პირველი მამრავლის თავდაპირველ
რიცხვად გადამქცევი თანრიგის ერთეული უნდა იყოს:

$$1) 2937000 = 2,937 \cdot 1000000 = 2,937 \cdot 10^6;$$

$$2) 7364 = 7,364 \cdot 1000 = 7,364 \cdot 10^3.$$

$$5383 = 5,383 \cdot 10^3$$

ხარისხის ფუძე: 5,383

ხარისხის რიგი: 3

საგარჯიშოები

1. მოცემული გამოსახულებები წარმოადგინეთ ხარისხის სახით:

ა) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;

ბ) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$;

გ) $(-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5)$;

დ) $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$;

ე) $(-5x) \cdot (-5x) \cdot (-5x) \cdot (-5x)$; ვ) $(p+k) \cdot (p+k) \cdot (p+k) \cdot (p+k)$;

ზ) $(xy) \cdot (xy) \cdot (xy) \cdot (xy) \cdot (xy)$;

თ) $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4}_{12\text{-ჯერ}} \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{25\text{-ჯერ}}$.

II განყოფილება

2. დაწერეთ ხარისხები, რომელშიც:

ა) ფუძე 10, ხარისხი 5 -ია; ბ) ფუძე 7, ხარისხი 4 -ია;

გ) ფუძე x , ხარისხი 9 -აა; დ) ფუძე m , ხარისხი k -აა.

3. ა) $-4,5$ -ის კვადრატით; ბ) $\frac{13}{4}$ -ის კუბით; გ) m და n რიცხვების ნამრავლის მეოთხე ხარისხი ჩაწერეთ გამოსახულების სახით.

4. შეასრულეთ ახარისხების მოქმედება:

ა) 2^7 ; ბ) 5^3 ; გ) $(1,4)^2$; დ) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; ე) $\left(1\frac{1}{3}\right)^5$; ვ) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$;

ზ) $(1,(5))^2$; თ) 3^5 ; ი) $(-0,7)^3$; კ) $\left(-\frac{7}{12}\right)^2$; ლ) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^3$; მ) $(-0,(6))^2$.

5. ხარისხები გამოთვალეთ კალკულატორის დახმარებით:

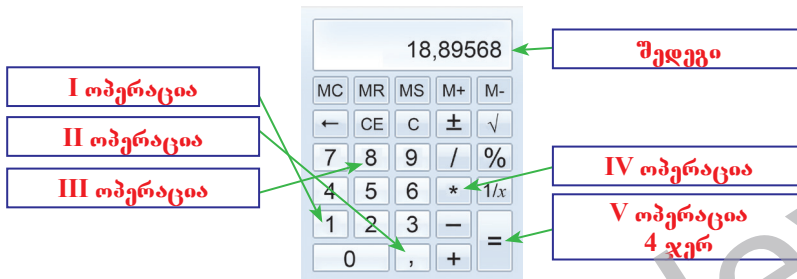
16^3 ; $(-4)^5$; 24^3 ; $2,5^6$; $0,124^3$; $(-7,8)^5$; $3,1^7$; 124^4 .

მითითება.

$1,8^5$ ხარისხის კალკულატორით გამოსათვლელად აკრიფეთ კალკულატორზე 1,8 და * (გამრავლების) დილაკს ერთხელ დააჭირეთ, ხოლო “=” დილაკს კი ოთხჯერ.

1 8 , * = = = = 18,89568

$1,8^5 = 18,89568$.



6. გამოთვალეთ კალკულატორის საშუალებით. მიღებული რიცხვები დაამრგვალეთ მეათე-დებამდე: ა) $4,12^3$; ბ) $(-0,78)^5$; გ) $2,21^6$; დ) $2,08^3 : 1,56$; ე) $1,67^3 \cdot 4,7$;

ვ) $7,39^4$; ზ) $(-1,053)^3$; თ) $2,73^5 \cdot 27,4$; ი) $(1,29 + 8,052)^3$.

7. შეავსეთ ცხრილი:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2									81	
n^3				64						
n^4							2401			

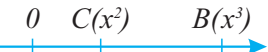
8. შეავსეთ ცხრილი:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

ცხრილის საფუძველზე განსაზღვრეთ ფუძედ 2 და 3-ის მქონე ხარისხების მნიშვნელობის ბოლო ციფრის პერიოდულობის (განმეორების) თვისება. რამდენ პერიოდს აკეთებს 1, 4, 5, 6, 7, 8 და 9 ფუძის მქონე ხარისხების მნიშვნელობის ბოლო ციფრი? ამ თვისების საფუძველზე განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული ხარისხების მნიშვნელობის ბოლო ციფრი:

$$21^8; 32^5; 4^{89}; 5^{100}; 10^{99}; 8^{54}.$$

მითითება: ხარისხის მაჩვენებელი გაყავით ფუძის ბოლო ციფრის პერიოდების რაოდენობაზე და ფუძე ნაშთში დარჩენილი რიცხვის მაჩვენებლით აახარისხეთ.

9. გამოთვალეთ x -ისა და ნატურალური n რიცხვების ქვემოთ მოცემული მნიშვნელობების მიხედვით x^n :
 - ა) $x = 1, (2); n = 3;$
 - ბ) $x = 0, (7); n = 2;$
 - გ) $x = 1, (2); n = 4.$
10. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.
 - ა) $3^n + 2^n$, თუ $n = 2;$
 - ბ) $a^4 - a^2$, თუ $a = -\frac{3}{4}$
11. ჩაწერეთ:
 - ა) რაიმე რიცხვის კვადრატის სახით: 0,49; 0,64; 169; $1\frac{11}{25}$; 1,44; $\frac{100}{121}$; 0,0004.
 - ბ) რაიმე რიცხვის კუბის სახით: 64; -216; 0,001; $\frac{-8}{125}$; $\frac{27}{64}$; $4\frac{17}{27}$; $-1\frac{127}{216}$.
 - გ) 5-ის ხარისხის სახით: 25; 125; 625; 15625.
12. წარმოადგინეთ სტანდარტული სახით მოცემული რიცხვები: 20000; 24363; 89,0736; 73553535; 356,4; 1000000; 857164; 12,554; 9827; 3747583; 63543,63.
13. ა) იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა: $8 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1$;
 - ბ) მოცემული რიცხვები წარმოადგინეთ თანრიგის შესაკრებების ჯამის სახით: 6354; 839400; 178005; 203004 (გამოიყენეთ 10-ის ხარისხი).
 - გ) $8,45 \cdot 10^8$ წარმოადგინეთ სამი სხვადასხვა სახით 10-ის ხარისხის გამოყენებით.
14. ა) თუ n კენტი რიცხვია, ბ) თუ n ლუწი რიცხვია, 7^n ; $(-5)^n$; $0,6^n$; $(-1,7)^n$; 0^n გამოსახულებების მნიშვნელობები დაალაგეთ ზრდის მიხედვით.
15. ქვემოთ მოცემულ უტოლობებზე დაყრდნობით განსაზღვრეთ (თუ შესაძლებელია) n ლუწი რიცხვია თუ კენტი:
 - ა) $(-7)^n > (-5)^n$;
 - ბ) $(-7)^n < (-5)^n$;
 - გ) $(-7)^n > 5^n$;
 - დ) $(-7)^n < 5^n$;
 - ე) $7^n > 5^n$;
 - ვ) $7^n > (-5)^n$.
16. ნახაზების საფუძველზე ივარაუდეთ $A(x)$ წერტილის ადგილი:
 - ა) 
 - ბ) 
 - გ) 
17. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით ხარისხების გამოთვლის გარეშე.
 - ა) $(-0,7)^9$; $(-0,7)^6$; $(-0,7)^2$;
 - ბ) $(-0,3)^4$; $(-0,3)^2$; $(-0,3)^6$;
 - გ) $\left(-\frac{1}{5}\right)^4$; $\left(-\frac{1}{5}\right)^5$; $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$;
 - დ) $(-0,(1))^2$; $(-0,(1))^5$; $(-0,(1))^7$.

2.2. ტოლფუძიანი ხარისხების გამრავლება

საქმიანობა	$a^m \cdot a^n$
1. იპოვეთ a^3 და a^2 ხარისხების ნამრავლი. 2. თითოეული ხარისხი ჩაწერეთ ერთნაირი მამრავლების ნამრავლის სახით. 3. განსაზღვრეთ ორივე ხარისხის ყველა მამრავლის რაოდენობა. 4. შედეგი ჩაწერეთ ერთი ხარისხის სახით. 5. გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული შედეგის შესახებ.	
ნიმუში	

მაგალითი: იპოვეთ 7^3 და 7^6 ხარისხების ნამრავლი.

ამოხსნა: $7^3 \cdot 7^6 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{3+6} = 7^9$.
 $7^3 \cdot 7^6 = 7^{3+6} = 7^9$.

თვისება 1: ნებისმიერი a რიცხვისა და ნატურალური m და n რიცხვებისათვის მართებულია ტოლობა: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, ე.ი. ტოლფუძიანი ხარისხების ნამრავლის საპოვნელად ფუძე იგივე უნდა დავტოვოთ, ხოლო ხარისხის მაჩვენებლები შევკრიბოთ და მიღებული ჯამი ხარისხში ჩავწეროთ.

ნიმუში	
მაგალითად: იპოვეთ ქვემოთ მოცემული ხარისხების ნამრავლი:	
ა) $2^8 \cdot 2^5$;	ბ) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^7$;
გ) $(-2)^{10} \cdot (-2)^3$;	დ) $25 \cdot 5^4$.
ამოხსნა: ა) $2^8 \cdot 2^5 = 2^{8+5} = 2^{13}$;	
ბ) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^7 = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{11}$;	
გ) $(-2)^{10} \cdot (-2)^3 = (-2)^{10+3} = (-2)^{13}$;	
დ) $25 \cdot 5^4 = 5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$.	
ხარისხის ძირითადი თვისება სამი და უფრო მეტი ხარისხების ნამრავლებისთვისაც მართებულია:	
$a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ მარჯვენა და მარცხენა მხარეების ადგილების შეცვლით მიიღება $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.	

ნიმუში	
მაგალითი: წარმოადგინეთ ხარისხები ნამრავლის სახით:	
ა) 8^{12+7} ;	ბ) $(-11)^{2+9}$;
გ) $\left(\frac{9}{17}\right)^{4+3}$;	დ) $(0,(56))^{7+2}$.
ამოხსნა: ა) $8^{12+7} = 8^{12} \cdot 8^7$;	
ბ) $(-11)^{2+9} = (-11)^2 \cdot (-11)^9$;	
გ) $\left(\frac{9}{17}\right)^{4+3} = \left(\frac{9}{17}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{17}\right)^3$;	
დ) $(0,(56))^{7+2} = (0,(56))^7 \cdot (0,(56))^2$.	

საგარჯიშოები

- მოცემულ საგარჯიშოებში შეასწორეთ შეცდომები, შედეგები ჩაწერეთ სწორი ფორმით და განმარტეთ:
 ა) $a^6 \cdot a^7 = a^{12}$; ბ) $x^{16} \cdot x^2 = x^{18}$; გ) $b^3 \cdot b^5 \cdot b = b^8$; დ) $m^{7+8} = m^7 + m^8$;
 ე) $a^3 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot a^5 = a^{13}$; ვ) $k \cdot k^2 = k^3$; ზ) $n^3 \cdot n^5 + n = n^9$; თ) $b^4 + b^2 + b^7 = b^{13}$.
- მოცემულია $a^k \cdot a^m \cdot a$ ნამრავლი. ჩაწერეთ ხარისხის სახით და გამოთვალეთ ხარისხის მნიშვნელობა, თუ $a = 3$, $k = 2$, $m = 4$.
- $m^5 \cdot m^2 \cdot m^3$ ნამრავლში: ა) $m = 2$; ბ) $m = 10$; გ) $m = (-3)$; დ) $m = \frac{2}{5}$
 გათვალისწინებით ჩაწერეთ ხარისხის სახით და გამოთვალეთ.
- ნამრავლი წარმოადგინეთ ხარისხის სახით და შეავსეთ ცხრილი:

$(-3, 2x)^2 \cdot (-3, 2x)^4 =$	$3^7 \cdot 3^5 \cdot 3^2 =$	$(-0, 6)^4 \cdot (-0, 6) =$
$(a - b)^5 \cdot (a - b)^8 =$	$7^2 \cdot 7^4 \cdot 7 \cdot 7^6 =$	$16^2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16^5 =$
$(x + 2y)^9 \cdot (x + 2y)^{10} =$	$12^4 \cdot 12 \cdot 12^9 =$	$2, 3 \cdot 2, 3^8 \cdot 2, 3^6 \cdot 2, 3 =$
$\left(\frac{3}{4}x\right)^{11} \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^9 =$	$x^{11} \cdot x^8 \cdot x \cdot x^3 =$	$(1, (5))^3 \cdot \left(\frac{14}{9}\right)^8 =$

- თითოეულ უჯრაში მოცემული რიცხვები წარმოადგინეთ ხარისხის სახით და ჩაწერეთ “?” ნიშნის ადგილას:

$2^4 \leftarrow 16$	$? \leftarrow 32$	$? \leftarrow 25$	$? \leftarrow 64$	$? \leftarrow 225$
$? \leftarrow 128$	$? \leftarrow 512$	$? \leftarrow 256$	$? \leftarrow 27$	$? \leftarrow 1024$
$? \leftarrow 81$	$? \leftarrow 243$	$? \leftarrow 361$	$? \leftarrow 729$	$? \leftarrow 2187$

- ა) $8 \cdot 32$; ბ) $4 \cdot 32$; გ) $16 \cdot 64$; დ) $128 \cdot 2$; ე) $256 \cdot 64$; ვ) $8 \cdot 1024$
 ნამრავლების გამოსათვლელად ფუძედ 2-ის მქონე ხარისხი გამოიყენეთ.
- ა) $9 \cdot 3$; ბ) $27 \cdot 81$; გ) $3^4 \cdot 9$; დ) $243 \cdot 3^2$; ე) $729 \cdot 27$; ვ) $81 \cdot 3^6$
 ნამრავლების გამოსათვლელად ფუძედ 3-ის მქონე ხარისხი გამოიყენეთ.
- ა) $3^n = 27$; ბ) $2^n = 64$; გ) $5^n = 125$; დ) $2^n = 32$; ე) $7^n = 343$; ვ) $3^{2n} = 729$
 $5^n = 625$; $5^4 = 625$;
 $n = 4$
 ტოლობებში განსაზღვრეთ n -ის მნიშვნელობა.

- გამარტივეთ გამოსახულებები:

- ა) $5^{n-2} \cdot 5^n$; ბ) $17^{m+1} \cdot 17^{m-1}$;
 გ) $6^{1-k} \cdot 6^{k+3}$; დ) $4^{n-3} \cdot 4^{m-1}$.

$$= 4^{n-3+(m-1)} = 4^{n-3+m-1} = 4^{n+m-4}$$

2.3. ტოლფუძიანი ხარისხების გაყოფა

საქმიანობა

$a^m : a^n$

1. a^3 და a^2 ხარისხების შეფარდება ჩაწერეთ წილადის სახით.
2. თითოეული ხარისხი გადააქციეთ ერთნაირი მამრავლების ნამრავლად.
3. შეკვეცით წილადი მრიცხველსა და მნიშვნელში მყოფ საერთო მამრავლებზე.
4. გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული შედეგის შესახებ.
5. კიდევ რომელი ხერხით შეიძლება ვიპოვოთ a^3 და a^2 ხარისხების შეფარდება?

ნიმუში

მაგალითი: იპოვეთ 11^9 და 11^6 ხარისხების შეფარდება.

ამოხსნა: $11^9 : 11^6 = \frac{11^9}{11^6} = \frac{11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11}{11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11} = \frac{11 \cdot 11 \cdot 11}{1} = 11^3.$

$$11^9 : 11^6 = 11^{9-6} = 11^3.$$

თვისება 2: ნებისმიერი a ($a \neq 0$) რიცხვისა და ნატურალური m და n რიცხვებისათვის მართებულია ტოლობა: $a^m : a^n = a^{m-n}$, ე.ი. ტოლფუძიანი ხარისხების შეფარდების საპოვნელად ფუძე იგივე უნდა დავტოვოთ, ხოლო გასაყოფის ხარისხის მაჩვენებელს გამოვაკლოთ გამყოფის ხარისხის მაჩვენებელი და სხვაობა ფუძეს ხარისხში ჩავუწეროთ.

ნიმუში

მაგალითი: იპოვეთ ხარისხების შეფარდება:

ა) $2^8 : 2^5$; ბ) $\left(\frac{7}{15}\right)^{15} : \left(\frac{7}{15}\right)^8$; გ) $(-7)^{10} : (-7)^3$; დ) $32 : 2^4$.

ამოხსნა: ა) $2^8 : 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$; ბ) $\left(\frac{7}{15}\right)^{15} : \left(\frac{7}{15}\right)^8 = \left(\frac{7}{15}\right)^{15-8} = \left(\frac{7}{15}\right)^7$;

გ) $(-7)^{10} : (-7)^3 = (-7)^{10-3} = (-7)^7$; დ) $32 : 2^4 = 2^5 : 2^4 = 2^{5-4} = 2^1 = 2$.

$a^m : a^n = a^{m-n}$ ტოლობაში მარჯვენა და მარცხენა მხარეების ადგილების შეცვლით მიიღება $a^{m-n} = a^m : a^n$

ნიმუში

მაგალითი: ხარისხები წარმოადგინეთ შეფარდების სახით:

ა) 13^{10-7} ; ბ) $(-10)^{9-5}$; გ) $\left(\frac{9}{7}\right)^{4-3}$; დ) $(0,(6))^{7-2}$.

ამოხსნა: ა) $13^{10-7} = 13^{10} : 13^7$;

ბ) $(-10)^{9-5} = (-10)^9 : (-10)^5$;

გ) $\left(\frac{9}{7}\right)^{4-3} = \left(\frac{9}{7}\right)^4 : \left(\frac{9}{7}\right)^3$;

დ) $(0,(6))^{7-2} = (0,(6))^7 : (0,(6))^2$.

საქმიანობა

$$a^0 = 1$$

a^3 და a^3 ხარისხების შეფარდება იპოვეთ ორი ხერხით:

- ა) ნულისაგან განსხვავებული ტოლი რიცხვების შეფარდების 1-თან ტოლობის თვისების მიხედვით.
ბ) ტოლფუძიანი ხარისხების გაყოფის თვისების მიხედვით.
- მიღებული შედეგები გაუტოლეთ ერთმანეთს.
- გამოთქვით მოსაზრებები შედეგთან დაკავშირებით.

ტოლი რიცხვების შეფარდება 1-ის ტოლია: $a : a = 1$; $a \neq 0$.

ე.ი. რადგან $1 = a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$, $a \neq 0$ -სათვის $a^0 = 1$.
სხვა სიტყვებით, ნულმაჩვენებლიანი ხარისხის მნიშვნელობა 1-ის ტოლია.

ნამუშაო

ა) $13^0 = 1$; ბ) $(-10)^0 = 1$; გ) $\left(\frac{9}{7}\right)^0 = 1$; დ) $(0,(6))^0 = 1$.

საგარჯიშოები

- მოცემულ მაგალითებში შეცდომები შეასწორეთ, შედეგები ჩაწერეთ სწორი სახით და განმარტეთ:
ა) $a^8 : a^7 = a^{15}$; ბ) $x^{16} : x^2 = a^8$; გ) $b^{30} : b^5 \cdot b = b^8$; დ) $m^{12-8} = m^{12} - m^8$;
ე) $a^3 \cdot a^3 : a^2 \cdot a^5 = a^3$; ვ) $k^{44} \cdot k^2 = k^{22}$; ზ) $n^{11} : n^5 = n^{10}$; თ) $b^{13} - b^8 - b^2 = b^3$.
- მოცემულია $a^k : a^m \cdot a$ გამოსახულება. ჩაწერეთ ეს გამოსახულება ერთი ხარისხის სახით და გამოთვალეთ ხარისხის მნიშვნელობა, როცა $a = 3$, $k = 2$, $m = 4$.
- $m^8 : m^2 : m^3$ გამოსახულება ჩაწერეთ ხარისხის სახით: ა) $m = 3$; ბ) $m = 10$; გ) $m = (-2)$; დ) $m = \frac{1}{7}$ გათვალისწინებით გამოთვალეთ.
- რიცხვები ჩაწერეთ ხარისხის სახით და შეავსეთ ცხრილი:

$(3,2)^{24} : (3,2)^4 =$	$5^7 : 5^5 : 5^2 =$	$(-0,16)^4 : (-0,16) =$
$(a-b)^{15} : (a-b)^8 =$	$7^{20} : 7^4 \cdot 7 =$	$21^2 : 21 \cdot 21^5 =$
$(x-2y)^{19} : (x-2y)^{10} =$	$11^4 : 11 \cdot 11^0 =$	$1,7 \cdot 1,7^8 : 1,7^6 \cdot 1,7 =$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{31} : \left(\frac{3}{4}\right)^8 : \left(\frac{3}{4}\right)^9 =$	$x^{15} : x^7 \cdot x : x^3 =$	$(1,(7))^{13} : (1,(7))^8 =$

- განაყოფი წარმოადგინეთ ხარისხის სახით.

ა) $\left(\frac{1}{4}x\right)^{20} : \left(\frac{1}{4}x\right)^{12}$; ბ) $(-3m)^9 : (-3m)^4$; გ) $(2a+b)^8 : (2a+b)^7$;
დ) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^{35} : \left(-1\frac{1}{5}\right)^{25}$; ე) $(1,(54))^{11} : (1,(54))^{11}$; ვ) $(a-b)^{55} : (a-b)^{54}$.

II განყოფილება

6. წილადის ხაზი გაყოფის მოქმედებით შეცვალეთ და იპოვეთ ხარისხების შეფარდება.

$$\begin{aligned} \text{ა) } \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^9}{\left(\frac{2}{7}\right)^7}; \quad \text{ბ) } \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^{18}}{\left(-\frac{1}{6}\right)^{11}}; \quad \text{გ) } \frac{(-0,7)^{29}}{(-0,7)^{27}}; \quad \text{დ) } \frac{3^9 \cdot 27}{3^5 \cdot 81}; \quad \text{ე) } \frac{16 \cdot 2^{19}}{2^{22}}; \\ \text{ვ) } \frac{7^{12}}{7^7 \cdot 49}; \quad \text{ზ) } \frac{5^{17} \cdot 125}{5^7 \cdot 625}; \quad \text{თ) } \frac{(0, (21))^{15}}{(0, (21))^{14}} \cdot \frac{\left(\frac{4}{7}\right)^8}{\left(\frac{4}{7}\right)^7}; \quad \text{ი) } \frac{(0,7)^9 \cdot \frac{7}{10}}{(0,7)^7 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2}. \end{aligned}$$

7. მოცემული ხარისხები ნიმუშის საფუძველზე წარმოადგინეთ რამდენიმე ხარისხის ნამრავლისა და გაყოფის სახით:

$$\begin{aligned} \text{ა) } x^{10}; \quad \text{ბ) } y^6; \quad \text{გ) } 11^7; \\ \text{დ) } 4^{13}; \quad \text{ე) } 9^{14}; \quad \text{ვ) } 5^{22}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^{22} &= 5^{10} \cdot 5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^4; \\ 5^{22} &= 5^{25} : 5^3. \end{aligned}$$

8. ვარსკვლავის ნიშნის ადგილას ფუძედ c -ს მქონე ისეთი ხარისხი დაწერეთ, რომ ტოლობები სწორი იყოს. პასუხები დაასაბუთეთ გაყოფის მოქმედებების საშუალებით:

$$\begin{aligned} \text{ა) } c^2 \cdot * &= c^8; & \text{ბ) } ccc \cdot * &= c^{10}; & \text{გ) } cc^7 \cdot * &= c^{18}; \\ \text{დ) } * \cdot c^{14} &= c^{21}; & \text{ე) } * \cdot cc^4 &= c^9; & \text{ვ) } * \cdot c^{15} \cdot c^3 &= c^{43}. \end{aligned}$$

9. ამოხსენით განტოლებები:

$$\begin{aligned} \text{ა) } x : 7^2 &= 7^8; & \text{ბ) } 11^6 : y &= 11^3; & \text{გ) } a : 45^9 &= 45^{12}. \end{aligned}$$

10. მოცემული ცხრილის მიხედვით გამოთვალეთ X -ის მნიშვნელობა:

№	A	B	C	X
1	4	-3	-1,2	$(A^3 + B^2) \cdot C^2$
2	5	7	-139	$2^A - B^2 + C^0$
3	$\frac{4}{5}$	$-1\frac{1}{4}$	0	$A^3(B^2 + 100^C)$

11. იპოვეთ გამოსახულებების მნიშვნელობა:

$$\begin{aligned} \text{ა) } 3x^0, \text{ თუ } x &= 2,6; & \text{ბ) } -8,5y^0, \text{ თუ } y &= -1\frac{2}{3}; \\ \text{გ) } 10a^2b^0, \text{ თუ } a &= -3, b = -12; & \text{დ) } 18a^0d^3, \text{ თუ } a &= -\frac{3}{5}, d = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

12. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

$$\begin{aligned} \text{ა) } x^4x^0; & \quad \text{ბ) } a^9 : a^0; & \text{გ) } \frac{m^0}{k^8}; & \quad \text{დ) } n^0 - m^0; & \text{ე) } p^0 + c^0. \end{aligned}$$

13. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

$$\begin{aligned} \text{ა) } 7^{n+1} : 7^n; & \quad \text{ბ) } a^k : a^{k-1}; & \text{გ) } 3^{m+4} : 3^{m-5} \cdot 3^{10}; & \quad \text{დ) } m^{a+1} : m^{a-2} = \\ & & & = m^{a+1-(a-2)} = \\ & & & = m^{a+1-a+2} = m^3. \end{aligned}$$

14. $a^{n+1} : a^m$ გამოსახულებაში m და n -ის ადგილას ჩაწერეთ ისეთი რიცხვები, რომ განაყოფის ხარისხის მაჩვენებელი იყოს:

$$\begin{aligned} \text{ა) } 8\text{-ის}; & \quad \text{ბ) } 11\text{-ის}; & \text{გ) } 7\text{-ის ტოლი}. \end{aligned}$$

2.4. ხარისხის ახარისხება

საქმიანობა

$(a^m)^n$

1. დაასახელეთ $(a^3)^2$ ხარისხის ფუძე და მაჩვენებელი, წარმოადგინეთ იგი ერთნაირი მამრავლების $(a^3-ების)$ ნამრავლის სახით.
2. განსაზღვრეთ ამ გამოსახულებაში მამრავლი a^3 რამდენჯერ მონაწილეობს.
3. თითოეული a^3 ჩაწერეთ ნამრავლის სახით.
4. განსაზღვრეთ ყველა a მამრავლის რაოდენობა.
5. მიღებული რიცხვი ჩაწერეთ a ფუძის ხარისხის მაჩვენებლის სახით.
6. გამოთქვით მოსაზრებები შედეგის შესახებ.

ნიმუში

მაგალითი: $(a^m)^n$ გამოსახულება ჩაწერეთ ხარისხის სახით.

ამოხსნა: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ რაოდენობის}} =$

$$= \underbrace{\left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \right) \cdot \dots \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \right)}_{n \text{ რაოდენობის}} = a^{mn}$$

მაშასადამე, $(a^m)^n = a^{mn}$.

გამოიკვლიეთ: $(a^n)^m = a^{nm}$

ხარისხის ხარისხი - ფუძედ ამ ხარისხის ფუძის, ხოლო ხარისხის მაჩვენებლად მაჩვენებლების ნამრავლის მქონე ხარისხია.

მაშასადამე, ხარისხის ახარისხება ნიშნავს ერთნაირფუძიანი ხარისხების გამრავლებას.

ნიმუში

მაგალითი: იპოვეთ ხარისხის მნიშვნელობა: $(2^4)^3$

ამოხსნა: $(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12}. \quad (2^4)^3 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}.$$

ნიმუში

მაგალითი: აახარისხეთ:

ა) $(3^7)^2$; ბ) $((-10)^9)^5$; გ) $\left(\left(\frac{7}{9}\right)^2\right)^2$; დ) $((0,(6))^7)^2$; ე) $((-5)^5)^3$; ვ) $(-(-4)^3)^7$.

ამოხსნა: ა) $(3^7)^2 = 3^{14}$; ბ) $((-10)^9)^5 = (-10)^{45}$; გ) $\left(\left(\frac{7}{9}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^4$;

დ) $((0,(6))^7)^2 = (0,(6))^{14}$; ე) $((-5)^5)^3 = -5^{15}$; ვ) $(-(-4)^3)^7 = 4^{21}$.

საგარჯიშოები

1. ტოლობებიდან არასწორები გასწორეთ და დაასაბუთეთ პასუხები:

ა) $(x^3)^2 = x^5$; ბ) $(a^9)^3 = x^{27}$; გ) $(m^7)^5 = x^2$; დ) $x^5 \cdot (x^{10})^0 = x^{15}$;
 ე) $(x^3)^3 : x^5 = x^1$; ვ) $(n^2)^4 \cdot (n^9)^2 = n^{25}$; ზ) $(m^5)^2 = m^{25}$; თ) $(a^{23})^2 = m^{46}$.

2. მოცემულ ტოლობებში x -ის ადგილას ჩაწერეთ ისეთი რიცხვი, რომ სწორი ტოლობა მიიღოთ. პასუხები დაასაბუთეთ:

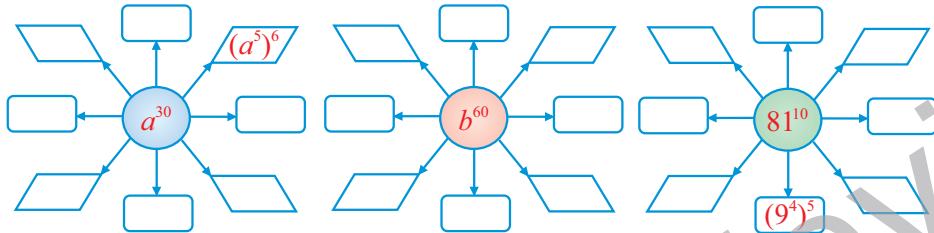
ა) $(3^4)^x = 3^{12}$; ბ) $(a^x)^{10} = a^{40}$; გ) $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^2\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^{18}$;
 დ) $(x^4)^{25} = 3^{100}$; ე) $(8^3)^x : 8^5 = 8^{10}$; ვ) $5^x \cdot 5^x = 5^{26}$.

3. 2^{20} ხარისხი ფუძედ: ა) 2^2 ; ბ) 2^4 ; გ) 2^5 ; დ) 2^{10} -ის მქონე ხარისხის სახით წარმოადგინეთ. ამისათვის რომელი თვისება გამოიყენეთ?

4. ცხრილის საფუძველზე განსაზღვრეთ 3^6 ; 3^{10} ; 3^{16} ხარისხების გამოთვლის ხელსაყრელი გზა.

3^1	3^2	3^3	...	3^7	3^9	?	...	3^{16}
3	9	...	...	6561	...	59049		

5. მოცემული ხარისხები რამდენიმე ხერხით წარმოადგინეთ სხვადასხვა ფუძის მქონე ხარისხის სახით:



6. წერტილების ადგილას ისეთი ჩაწერეთ გამოსახულება, რომ სწორი ტოლობა მიიღოთ:

ა) $(...)^2 \cdot (...)^3 = a^7$; ბ) $(...)^4 \cdot (...)^3 = k^{10}$; გ) $(...)^2 \cdot (...)^3 = e^{13}$;
 დ) $(...)^5 \cdot (...)^4 = a^{23}$; ე) $(...)^2 \cdot (...)^3 = k^7$; ვ) $(...)^2 \cdot (...)^3 = c^{11}$.

7. სამირმა 4^{10} და 8^7 გამოსახულებების მნიშვნელობების შედარებით განსაზღვრა, რომ 8^7 ნაკლებია. თქვენის აზრით, სწორია მისი დასკვნა? თუ არ არის სწორი, განმარტეთ მიზეზი. შეადარეთ ქვემოთ მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობები:

ა) 3^8 და 27^3 ; ბ) 8^9 და 2^{28} ; გ) 25^3 და 125^2 ; დ) 36^4 და 216^2 .

8. დაწერეთ მოცემული გამოსახულებების რამდენიმე გამყოფი:

ა) 2^6 ; ბ) 3^{11} ; გ) $2^5 \cdot 3^4$; დ) 10^{10} .

9. ამოხსენით გამოსახულებები:

ა) $x^5 = 32$; ბ) $x \cdot (7^2 \cdot 9) = 49 \cdot 3^6$; გ) $2^4 \cdot 2^x = 2^{17}$.

2.5. ნამრავლის ახარისხება

საქმიანობა

$(a \cdot b)^n$

1. $(a \cdot b)^3$ ხარისხი წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით.
2. განსაზღვრეთ ამ გამოსახულებაში $(a \cdot b)$ ნამრავლი რამდენჯერ მოწაწილებას.
3. ტოლი მამრავლების ნამრავლები დააჯგუფეთ.
4. ტოლი მამრავლების ნამრავლი ჩაწერეთ ხარისხის სახით.
5. გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული შედეგის შესახებ.

ნიმუში

მაგალითი: $(a \cdot b)^4$ გამოსახულება წარმოადგინეთ ხარისხების ნამრავლის სახით.

ამოხსნა: $(a \cdot b)^4 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ (გამრავლების ჯგუფებადობის თვისების მიხედვით) $(a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = a^4 \cdot b^4$. $(ab)^4 = a^4 \cdot b^4$.

გამოიკვლიეთ: $(abc)^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$

ნამრავლის ხარისხი მამრავლების ხარისხების ნამრავლის ტოლია.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

ნიმუში

მაგალითი: ნამრავლების ხარისხები ჩაწერეთ ხარისხების ნამრავლის სახით:

ა) $(abcd)^5$; ბ) $(4 \cdot 6)^2$; გ) $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2$; დ) $(-2 \cdot 5)^3$.

ამოხსნა: ა) $(abcd)^5 = a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot d^5$; ბ) $(4 \cdot 6)^2 = 4^2 \cdot 6^2 = 16 \cdot 36 = 576$;

გ) $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{25}{49} \cdot \frac{49}{25} = 1$; დ) $(-2 \cdot 5)^3 = (-2)^3 \cdot 5^3 = -1000$.

გამოიკვლიეთ: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

ტოლმაჩვენებლიანი ხარისხების გამრავლებისას, ხარისხების ფუძეები მრავლდება, ხარისხის მაჩვენებელი კი-იგივე რჩება.

ნიმუში

მაგალითი: ხარისხების ნამრავლი წარმოადგინეთ ნამრავლის ხარისხის სახით.

ა) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5$; ბ) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2$; გ) $(-1,2)^4 \cdot 5^4$; დ) $8^5 \cdot 2^3$.

ამოხსნა: ა) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 = (abc)^5$; გ) $(-1,2)^4 \cdot 5^4 = (-1,2 \cdot 5)^4 = (-6)^4 = 6^4$;

ბ) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2 = 1^2 = 1$; დ) $8^5 \cdot 2^3 = (2^5)^3 \cdot 2^3 = (2^5 \cdot 2)^3 = (2^6)^3 = 2^{18}$.

საგარჯიშოები

1. განსაზღვრეთ სწორია თუ არა მოცემული ტოლობები. პასუხები დაასაბუთეთ:
 ა) $(xy)^5 = xy^5$; ბ) $(2mn)^3 = 8m^3n$; გ) $(-p^3k)^2 = p^6k$.
2. $(2abc)^3$ გამოსახულების ხარისხების ნამრავლის სახით წარმოდგენისას მოსწავლეებმა რამდენიმე შედეგი მიიღეს. განსაზღვრეთ, მათგან რომელმა მიიღო სწორი პასუხი.

სამიერი	გუნაი	უსუფი	ფერიდი	მურადი	შელექი
2^3abc	2^3abc^3	$2abc^3$	$8a^3b^3c^3$	$2a^3b^3c^3$	$8a^3bc^3$

3. ნამრავლის ხარისხი წარმოადგინეთ ხარისხების ნამრავლის სახით:

ა) $(ab)^7$; ბ) $(-3m)^4$; გ) $(10xyz)^2$; დ) $(-ac)^9$;
 ე) $(mpk)^{12}$; ვ) $(-7ab)^5$; ზ) $(-0,5bd)^3$; თ) $(-xn)^8$.

4. დაასაბუთეთ ქვემოთ მოცემული დებულებები:

- ა) მოპირდაპირე რიცხვების კვადრატები ტოლია;
 ბ) მოპირდაპირე რიცხვების კუბები მოპირდაპირე რიცხვებია;
 გ) რა შეგიძლიათ თქვათ მოპირდაპირე რიცხვების ლუწმაჩვენებლიანი ხარისხისა და კენტმაჩვენებლიანი ხარისხის შესახებ?

5. შეავსეთ ცხრილი, გამოიკვლიეთ და გამოიტანეთ დასკვნა:

კვადრატის გვერდის სიგრძე	კვადრატის ფართობი	როგორ შეიცვალა ფართობი?	კუბის წიბოს სიგრძე	კუბის მოცულობა	როგორ შეიცვალა მოცულობა?
1) a			3) a		
$2a$			$2a$		
$3a$			$3a$		
2) 5 სმ			4) 2 სმ		
10 სმ			8 სმ		
20 სმ			12 სმ		

6. აახარისხეთ მოცემული გამოსახულებები:

ა) $(2x^2y^3)^2$; ბ) $(-3m^3np^4)^8$; გ) $\left(\frac{1}{2}a^9b^2\right)^3 \cdot (ab)^5$; დ) $(-4,5pk^2d)^2 \cdot (2pd)^2$.

7. წარმოადგინეთ ხარისხის სახით:

ა) $a^5 \cdot b^5 \cdot k^5$; ბ) $\left(\frac{7}{8}\right)^{12} \cdot (m)^{12} \cdot a^{12}$; გ) $25x^2y^4$;

დ) $-27b^6k^9$; ე) $\frac{64}{169}r^8$; ვ) $81a^4b^8$;

ზ) $(20 + 44)a^3$; თ) $\frac{-125}{216}x^{18}$; ი) $\frac{25}{64}x^{16} \cdot y^{12}$

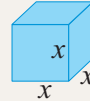
$$= \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot (x^8)^2 \cdot (y^6)^2 = \left(\frac{5}{8}x^8y^6\right)^2.$$

2.6. ერთწევრი და მისი სტანდარტული სახე

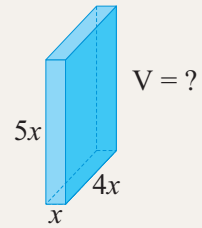
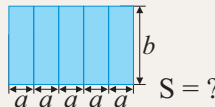
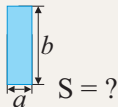
საქმიანობა

ერთწევრი, ხარისხი, კოეფიციენტი

1. რისი ტოლია: კვადრატის ფართობი, რომლის გვერდის სიგრძე 1 ერთეულის ტოლია, მართკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდების სიგრძეები 1 და x ერთეულის ტოლია, x გვერდის სიგრძის მქონე კვადრატის ფართობი, x წიბოს სიგრძის მქონე კუბის მოცულობა?



2. მოცემული ნახაზების საფუძველზე დაწერეთ მართკუთხედის ფართობისა და მართკუთხუთხა პარალელეპიპედის მოცულობის შესაბამისი გამოსახულებები:



3. მიღებულ გამოსახულებებში აღნიშნეთ რიცხვითი და ასოითი მამრავლები. თითოეულ გამოსახულებაში რამდენჯერ მოწაწიელობს რიცხვითი და ასოითი მამრავლი?

რიცხვისა და ნატურალურმაჩვენებლიანი ცვლადების ნამრავლისაგან შედგენილ გამოსახულებას ერთწევრი ეწოდება. ცალკე რიცხვიც და ნატურალურმაჩვენებლიანი ცვლადიც ერთწევრია.

მაგალითად: 3 ; $-2ab$; $0,5x^2y^3$; m^2 .

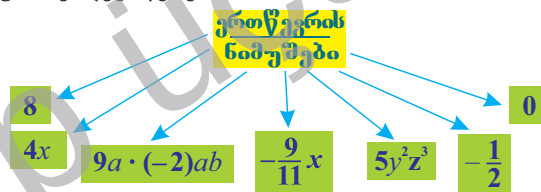
თუ ერთწევრში პირველ ადგილას რიცხვითი მამრავლი, შემდეგ კი სხვადასხვა ასოითი მამრავლი წერია, ასეთ ჩანაწერს ერთწევრის სტანდარტული სახე ეწოდება. სტანდარტული სახის ერთწევრში მიღებულია ასოითი მამრავლების ანბანის რიგის მიხედვით განლაგება: $a b c d \dots i j k l m n \dots x y z$

სტანდარტული სახის ერთწევრში რიცხვით მამრავლს **კოეფიციენტი** ეწოდება.

ნიმუში

მაგალითი: იპოვეთ ნამრავლი: $-3a \cdot 2ab$

ამოხსნა: ნამრავლი ორი გამოსახულებისაგან შედგება. პირველ გამოსახულებაში $(-3a)$ რიცხვითი მამრავლი -3 -ია, ასოითი მამრავლი კი a . მეორე გამოსახულებაში $(2ab)$ რიცხვითი მამრავლია 2 , ასოითი მამრავლები კი a და b . ნამრავლის პოვნისას კოეფიციენტების ნამრავლი პირველ ადგილას, ასოითი მამრავლები კი კოეფიციენტის შემდეგ იწერება: $-3a \cdot 2ab = -6a^2b$.



ერთმანეთის ტოლ ან ერთმანეთისაგან მხოლოდ კოეფიციენტებით განსხვავებულ ერთწევრებს მსგავსი ერთწევრები ეწოდებათ. **მსგავს ერთწევრებზე** შესაძლებელია შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის მოქმედებების შესრულება. შეკრებისა და გამოკლების დროს მსგავსი ერთწევრების კოეფიციენტები იკრიბება ან აკლდება, ცვლადები კი უცვლელი რჩება. ერთწევრების ნამრავლი და ნატურალურმაცვენებლიანი ხარისხიც ერთწევრია.

მხოლოდ ნიშნით განსხვავებულ ორ ერთწევრს **მოპირდაპირე ერთწევრები** ეწოდებათ.

ერთწევრის ცვლადების ხარისხების ჯამს **ერთწევრის ხარისხი** ეწოდება.

ნიმუში

1) a^2b , $3a^2b$, $-2a^2b$, $\frac{4}{7}a^2b$ ერთწევრები მსგავსებია.

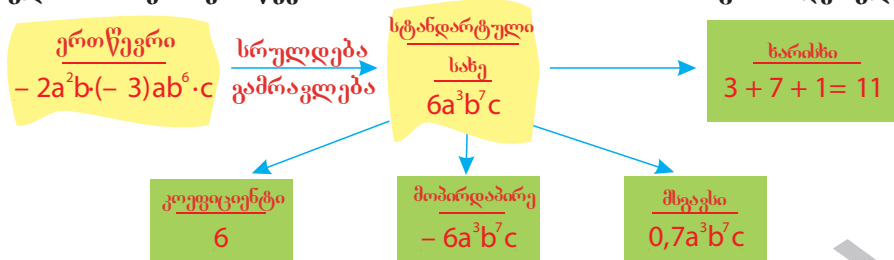
2) $12xy^5$ და $-12xy^5$ ერთწევრები მოპირდაპირე ერთწევრებია.

3) $\frac{3}{17}x^6y^7$ ერთწევრის ხარისხი: $6 + 7 = 13$ -ია.

4) $8a^4b^3c$ ერთწევრის ხარისხი: $4 + 3 + 1 = 8$ -ია.

თუ ერთწევრში ცვლადი (ასოითი გამოსახულება) არ მონაწილეობს, მისი ხარისხი 0-ის ტოლია. მაგალითად: 15-ის, -26-ის, 0,5-ის ხარისხი 0-ია.

ნული (0) ისეთი ერთწევრია, რომ მისი ხარისხი არ არის განსაზღვრული.



საგარჯიშოები

1. რომელია ერთწევრი ქვემოთ მოცემული გამოსახულებებიდან?

- | | | | | |
|----------------|-----------------|------------------------------|------------|---------------------|
| ა) $2,5x^3y$; | ბ) $a^2 + a$; | გ) $a^2 - b^4$; | დ) $-m$; | ე) c^{10} ; |
| ვ) $-7xy^4$; | ზ) a^8a ; | თ) $-2\frac{7}{13}m^3m^2m$; | ი) $0,6$; | კ) $\frac{10}{c}$; |
| ლ) $a(-0,5)$; | მ) $3(x+y)^2$; | ნ) -34 ; | ო) 1 ; | პ) $\frac{2c}{d}$. |

2. ა) დაწერეთ ერთწევრი, რომლის კოეფიციენტიც 14, ცვლადები a , b და c , ხარისხი კი 11-ია.

წარმოადგინეთ ის ორი ერთწევრის ნამრავლის სახით.

ბ) დაწერეთ არასტანდარტული სახის ერთწევრი, რომლის კოეფიციენტიც -15, ცვლადები x და y , ხარისხი კი 8-ის ტოლია. წარმოადგინეთ ის სტანდარტული სახით.

გ) წარმოადგინეთ სტანდარტული სახით მოცემული ნებისმიერი ერთწევრი და დაწერეთ მისი მოპირდაპირე გამოსახულება.

3. შეასრულეთ გამრავლება ერთწევრის სტანდარტულ სახეზე დაყვანის ალგორითმის საფუძველზე: $6a \cdot 3ab \cdot \left(-\frac{5}{6}a^2b\right)$

1. იპოვეთ ერთწევრში მონაწილე ყველა რიცხვითი მამრავლის (კოეფიციენტის) მამრავლი, ჩაწერეთ პირველ ადგილზე: $6 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -15$.

2. განსაზღვრეთ ერთწევრში შემავალი ცვლადები (ასოითი მამრავლები), დაწერეთ ანბანის რიგის მიხედვით: $a \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b$.

3. ცვლადების ნამრავლი ჩაწერეთ ხარისხის სახით: $a \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b = a^4b^2$.

ზოგადი ჩანაწერი: $6a \cdot 3ab \cdot \left(-\frac{5}{6}a^2b\right) = 6 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot a \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b = -15a^4b^2$

ქვემოთ მოცემული ერთწევრები დაიყვანეთ სტანდარტულ სახეზე:

ა) $4x^2 \cdot 3y^3$; ბ) $0,2a \cdot \frac{1}{2}c^2 \cdot (-7b)$; გ) $(-a)^2 \cdot (-a)^3$;
 დ) $-\frac{2}{3}ab^2 \cdot (6ac)^2$; ე) $-1,2m^2n \cdot 0,3m$; ვ) $-3bc^3 \cdot (-y^4) \cdot \frac{5}{9}b^2y$.

4. დაიყვანეთ ერთწევრები სტანდარტულ სახეზე, განსაზღვრეთ მისი კოეფიციენტი და ხარისხი.

ა) $3mmdm \cdot 7md^2$; ბ) $(-0,1ky^4)^2 \cdot 30y^2$; გ) $-1,8cab^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}ac\right)^2$;
 დ) $14yx^2yx \cdot \left(-\frac{5}{7}xy\right)$; ე) $(5ab)^3 \cdot (-0,2a^2b)^2$; ვ) $12,5(-n)b \cdot (0,2bn^2)^3$.

5. სევილმა $16a^4b^8$ ერთწევრი $(4a^2b^4)^2$ სახით, სამირმა კი $(2ab^2)^4$ სახით წარმოადგინა. მათგან რომლის დაწერილი გამოსახულებაა სწორი? განმარტეთ მოსაზრება.

6. მოცემული ერთწევრები წარმოადგინეთ ნებისმიერი ერთწევრის ხარისხის სახით.

ა) $64n^{12}d^{20} = (\dots)^2$; ბ) $6\frac{1}{4}a^{18}b^6 = \left(\frac{5}{2}\dots\right)^2$; გ) $-\frac{1}{125}m^3n^3k^6 = (\dots)^3$;
 დ) $-32x^{10}y^{15} = (\dots)^5$; ე) $0,0081a^4b^8c^{12} = (\dots)^4$; ვ) $0,008p^9k^{21} = (\dots)^3$.

7. m და n ცვლადების გამოყენებით ისეთი ერთწევრი შედგინეთ, რომ მათ:

ა) ერთნაირი კოეფიციენტები, ასოითი მამრავლები კი სხვადასხვა ჰქონდეთ,

ბ) ასოითი მამრავლები ერთნაირი, კოეფიციენტები კი სხვადასხვა ჰქონდეთ.

რომელ შემთხვევაში მიიღება მსგავსი ერთწევრები?

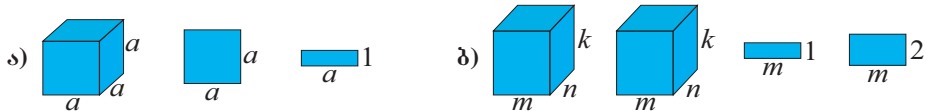
8. ნაილმა, ფერიდმა, უსუფმა და ანარმა $7ab^5c^2$ ერთწევრის მსგავსი ერთწევრები დაწერეს. განსაზღვრეთ მათი შედეგებიდან რომლისაა სწორი. განმარტეთ მცდარი პასუხები რატომდა არასწორი:

ერთწევრი	ნაილის პასუხი	ფერიდის პასუხი	უსუფის პასუხი	ანარის პასუხი.
$7ab^5c^2$	$13ab^5c$	$-9ab^5c^2$	$1\frac{8}{11}ab^5c^2$	$7a^5bc^2$

II განყოფილება

დაწერეთ ქვემოთ მოცემული ერთწევრების მსგავსი ნებისმიერი ერთწევრი:				
$\frac{2}{9}mn^2k^3$	$-42x^6y$	$2abc$	-56	$2,34t^7$

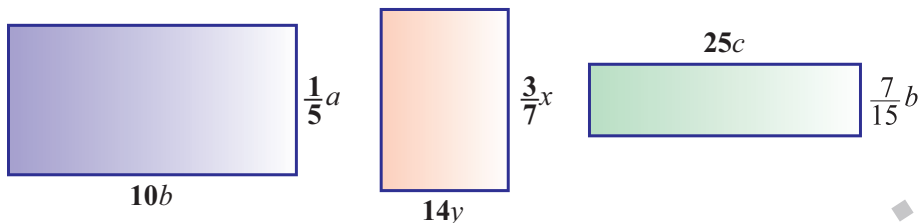
9. a , b და c ცვლადების გამოყენებით დაწერეთ ხუთი მსგავსი ერთწევრი. იპოვეთ მათი ჯამი.
10. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული ფიგურების მოცულობა და ფართობები. იპოვეთ მიღებული ერთწევრების ნამრავლი.



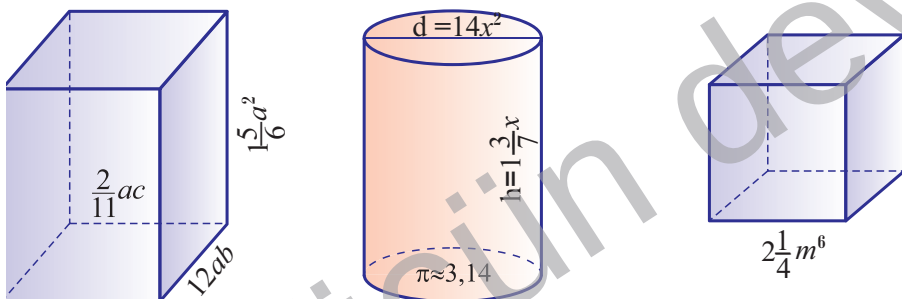
11. M -ის ადგილას ჩაწერეთ ისეთი ერთწევრი, რომ სწორი ტოლობა მიიღოთ:

ა) $M \cdot 5a^3b = 20a^7b^4c^2$; ბ) $-6c^4k^5 \cdot M = 3bc^9k^{10}$; გ) $M \cdot (2nx^8)^2 = 6n^2x^{20}y$;
 დ) $(2kp^4)^3 \cdot M = 72k^5y^{15}$; ე) $M \cdot M = 16x^4a^{12}$; ვ) $M \cdot M \cdot M = 27x^{12}y^{15}$.

12. იპოვეთ მოცემულგვერდებიანი მართკუთხედის ფართობი. განსაზღვრეთ შედეგში მიღებული ერთწევრის კოეფიციენტი და ხარისხი:



13. იპოვეთ ფიგურების მოცულობა, რომლის ზომებიც მოცემულია. განსაზღვრეთ შედეგში მიღებული ერთწევრის კოეფიციენტი და ხარისხი:



14. ჩაწერეთ გამოსახულების სახით:

- ა) a რიცხვის 7-მაგისა და b რიცხვის კვადრატის 2-მაგის ნამრავლი;
 ბ) m რიცხვის კუბის 9-მაგისა და n რიცხვის 3-მაგის ჯამი;
 გ) x რიცხვის კუბისა და y რიცხვის კვადრატის ჯამის 2-მაგი.

2.7. წილადის ახარისხება

საქმიანობა

$(a : b)^n$,

1. $\left(\frac{x}{y}\right)^2$ ხარისხი წარმოადგინეთ ტოლი მამრავლების ნამრავლის სახით.
2. განსაზღვრეთ ამ გამოსახულებაში $\frac{x}{y}$ მამრავლი რამდენჯერ მონაწილეობს.
3. მრიცხველში მყოფი მამრავლების ნამრავლი წარმოადგინეთ ხარისხის სახით.
4. მნიშვნელში მყოფი მამრავლების ნამრავლი წარმოადგინეთ ხარისხის სახით.
5. გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული შედეგების შესახებ.

ნიმუში

მაგალითად: $\left(\frac{x}{y}\right)^5$ გამოსახულება წარმოადგინეთ ხარისხების თანაფარდობის სახით.
ამოხსნა: $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{x^5}{y^5}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$.

გამოიკვლიეთ: $\left(\frac{mn}{a}\right)^3$ გამოსახულება წარმოადგინეთ ხარისხების თანაფარდობის სახით.

წილადის ახარისხებისათვის საჭიროა მრიცხველი და მნიშვნელი ცალ-ცალკე ავიყვანოთ ამ ხარისხში და ვიპოვოთ მიღებული ხარისხების შეფარდება. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ან $(a:b)^n = a^n : b^n$.

ნიმუში

მაგალითად: წილადის ხარისხი წარმოადგინეთ ტოლი ხარისხის მაჩვენებლის მქონე ხარისხების შეფარდების სახით.

ა) $\left(\frac{2abc}{3m}\right)^2$; ბ) $(-3pk : 4ab)^5$.

ამოხსნა: ა) $\left(\frac{2abc}{3m}\right)^2 = \frac{2^2 a^2 b^2 c^2}{3^2 m^2} = \frac{4a^2 b^2 c^2}{9m^2}$; ბ) $(-3pk : 4ab)^5 = (-3^5 p^5 k^5) : (4^5 a^5 b^5)$.

გამოიკვლიეთ $a^n : b^n = (a : b)^n$

ტოლმაჩვენებლიანი ხარისხების გაყოფისას საჭიროა გასაყოფის ფუძე გაყოფოთ გამყოფის ფუძეზე და ხარისხის მაჩვენებელი იგივე დავტოვოთ.

ნიმუში

მაგალითად: წილადი წარმოადგინეთ ხარისხის სახით: ა) $8^5 : m^5$; ბ) $\frac{27a^3 b^{12}}{64m^{15}}$.

ამოხსნა: ა) $8^5 : m^5 = (8 : m)^5$; ბ) $\frac{27a^3 b^{12}}{64m^{15}} = \frac{3^3 a^3 (b^4)^3}{4^3 (m^5)^3} = \left(\frac{3ab^4}{4m^5}\right)^3$.

საგარჯიშოები

1. განსაზღვრეთ, ხარისხები სწორად არის წარმოდგენილი თუ არა წილადის სახით. შეცდომები შეასწორეთ და განმარტეთ:

ა) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b}$; ბ) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$; გ) $\left(-\frac{m}{12}\right)^2 = -\frac{m^2}{144}$; დ) $\left(\frac{a+b}{m}\right)^2 = -\frac{a^2+b^2}{m^2}$;
 ე) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^9}{b^9}$; ვ) $\left(\frac{7a}{5}\right)^2 = \frac{49a}{25}$; ზ) $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}$; თ) $\left(-\frac{11}{7k}\right)^{10} = \frac{11^{10}}{49k^{10}}$.

2. წარმოადგინეთ წილადები ხარისხის სახით:

ა) $\frac{a^5}{b^5}$; ბ) $\frac{81a^4}{16}$; გ) $-\frac{1}{32}$; დ) $\frac{(4a)^6}{(5b)^{12}}$; ე) $\frac{x^8}{15^4}$; ვ) $\frac{-64^2}{27}$.

3. დაწერეთ ისეთი გამოსახულებების შეფარდება, რომ შესაძლებელი იყოს მათი რაიმე წილადის კვადრატის სახით წარმოდგენა.

4. დაწერეთ ისეთი გამოსახულებების შეფარდება, რომ შესაძლებელი იყოს მათი რაიმე წილადის კუბის სახით წარმოდგენა.

5. დაწერეთ ისეთი გამოსახულებების შეფარდება, რომ შესაძლებელი იყოს მათი რაიმე წილადის კვადრატის და კუბის სახით წარმოდგენა.

$$\frac{64a^6}{b^{12}} = \left(\frac{8a^3}{b^6}\right)^2 = \left(\frac{4a^2}{b^4}\right)^3$$

6. მოქმედებების თანმიმდევრობის ალგორითმის შედგენით გამოთვალეთ Z-ის მნიშვნელობა:

№	X	Y	Z
ა)	$\frac{2}{7}$	0,1	$X^2 \cdot 0,49 + Y^3 \cdot 430$
ბ)	$-\frac{2}{3}$	-0,5	$168 : X^3 - 150 : Y^2$
გ)	2	24	$X^4 \cdot 3^3 : 18 + Y^2$
დ)	-0,4	0,4	$X^3 \cdot 0,5^2 + (-0,5)^2 \cdot Y^3$

7. გამოთვალეთ. განსაზღვრეთ პირველად რომელი მოქმედების შესრულება ხდება:

ა) $-1^3 + (-3)^3$; ბ) $20 - 6 \cdot 2^3$; გ) $4^3 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$; დ) $-6^2 - (-2)^3$;
 ე) $2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 2^3$; ვ) $0,5 \cdot 3^4 - 0,4 \cdot 2^4$; ზ) $-7^3 + (-5)^3$; თ) $3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3^3$;
 ი) $8 \cdot 0,5^3 + 15 \cdot 0,2^3$; კ) $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 8,1^2$; ლ) $\frac{1}{640} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^2$; მ) $(7,9^3 - 3,039)^2$.

8. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\frac{(a^5)^{12} \cdot (a^8)^7}{(a^{16})^8 \cdot (a^2)^{10}} = 256$; ბ) $\frac{(x^{17})^{20} : (x^{42})^5 \cdot x}{(x^{35})^4 : (x^2)^5} = 1968$;
 გ) $\frac{(y^{51})^3 : (y^{16})^3}{(y^2)^{61} : (y^4)^{19} \cdot (y^{29})^2} = 1993$; დ) $\frac{(m^9)^{22} \cdot (m^{32})^3}{(m^{45})^3 \cdot (m^3)^{53}} = 1995$.

2.8. ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის შემცველი გამოსახულება

1. დასაბუთეთ, მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობების საპოვნელად ხარისხის რომელი თვისებები გამოიყენეთ:

ა) $1,1^5 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^5$; ბ) $2,3^5 \cdot \left(2\frac{3}{10}\right)^5$; გ) $(c^4)^7 \cdot c^{12}$; დ) $(a^{12})^{80} : ((a^{10})^{11})^8$.

2. გამოსახულების მნიშვნელობის საპოვნელად შეადგინეთ ალგორითმი და იპოვეთ მნიშვნელობა:

ა) $\frac{3^{12} \cdot (3^3)^2}{3^{11}}$; ბ) $\frac{6^2 \cdot (36^2)^5}{(6^2)^{11}}$;
 გ) $\frac{(5^7)^6 \cdot 125}{25^{20}}$; დ) $\frac{(4^3)^7}{64^3 \cdot 8^4}$.

1. გამოსახულება 64^3 ჩაანაცვლეთ $(2^6)^3$ ან 2^{18} ხარისხით;
2. გამოსახულება 8^4 ჩაანაცვლეთ $(2^3)^4$ ან 2^{12} ხარისხით;
3. იპოვეთ პირველი და მეორე ბრძანების შედეგების ნამრავლი;
4. 4^3 აიყვანეთ მე-7 ხარისხში;
5. მეოთხე ბრძანების შედეგი გაყავით მესამე ბრძანების შედეგზე.

3. გამოთვალეთ:

ა) $\frac{12^n + 12^n + 12^n + 12^n + 12^n + 12^n}{6^n + 6^n + 6^n + 6^n + 6^n}$; ბ) $\frac{49^m + 49^m + 49^m + 49^m + 49^m}{7^{2m} + 7^{2m} + 7^{2m} + 7^{2m} + 7^{2m} + 7^{2m}}$;
 გ) $\frac{64^n + 64^n + 64^n + \dots + 64^n}{8^{2n} + 8^{2n} + 8^{2n} + \dots + 8^{2n}}$; დ) $\frac{5^{2n} + 5^{2n} + 5^{2n} + \dots + 5^{2n}}{25^n + 25^n + 25^n + \dots + 25^n}$.

4. მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობის საპოვნელად გამოყენებული მოქმედებები ჩაწერეთ ცხრილში:

ა)	$-4^2 \cdot \frac{1}{24} + 1,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$				
	I მოქმედება	II მოქმედება	III მოქმედება	IV მოქმედება	V მოქმედება
ბ)	$\left(-1\frac{1}{3}\right)^2 + (-3)^3 : 27 =$				
	I მოქმედება	II მოქმედება	III მოქმედება	IV მოქმედება	V მოქმედება

5. მოცემული გამოსახულებები წარმოადგინეთ a ფუძიანი ხარისხის სახით:

ა) $a^n : a^2$; ბ) $\frac{a^n \cdot a^2}{a^3}$; გ) $\frac{a^{2n} \cdot a^3}{a^n}$; დ) $\frac{a^{3n+1} \cdot a^{2-n}}{a^{2n}}$; ე) $a^{m+1} : a^m$; ვ) $\frac{(a^{3n})^2 \cdot a^{5-2n}}{(a^2)^n}$.

6. იპოვეთ გამოსახულებების მნიშვნელობა:

ა) $\frac{(a^4)^6 b^{43}}{(a^2)^{13} (b^6)^7}$; თუ $a = -0,7$ და $b = 0,5$
 ბ) $\left(\frac{7c^8}{9d^7}\right)^6 \cdot \frac{3^{12} d^{43}}{7^5 (c^{23})^2}$; თუ $c = -\frac{1}{3}$ და $d = -\frac{4}{7}$

7. რომელი ციფრით უნდა მთავრდებოდეს a ნატურალური რიცხვი, რომ მისი ნებისმიერი ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხიც იგივე ციფრით მთავრდებოდეს? თქვენი პასუხი დასაბუთეთ ნიმუშით.

2.9. პარტიფი პროცენტით ზრდის ფორმულა



საქმიანობა

ეკმედმა 10000 მანეთი ფული ბანკში დეპოზიტზე შეიტანა. 1 წლის შემდეგ 20%-იანი ზრდით უკან გამოიტანა. განსაზღვრეთ რამდენი ფული აიღო ეკმედმა ერთი წლის შემდეგ.

1. იპოვეთ 10 000 მანათის 20%.
2. შეკრიბეთ მიღებული თანხა და 10 000 მანეთი.
3. გამოთქვით მოსაზრებები შედეგის შესახებ.

მემმედმა 10 000 მანათი შეიტანა ბანკში, 2 წლის შემდეგ, ყოველ წელს შეტანილი თანხის 15%-იანი ზრდით უკან გამოიტანა. გამოთვალეთ რამდენი ფული გამოიტანა მემმედმა ბანკიდან.

1. იპოვეთ 10 000 მანათის 15%.
2. გაამრავლეთ ეს რიცხვი 2-ზე.
3. შეკრიბეთ მიღებული თანხა და 10 000 მანათი.
4. გამოთქვით მოსაზრებები შედეგის შესახებ. განმარტეთ ვინ უფრო მეტი ფული მიიღო.

ნაბეჭდი

მაგალითად: მწერალმა დაწერილი ნაწარმოებისათვის 50 000 მანათი ჰონორარი მიიღო. მან ფული ჩადებული თანხის 12%-იანი მოგებით, 3 წლის ვადით სახელმწიფო ბანკში შეიტანა. განსაზღვრეთ საბოლოოდ რამდენი ფული უნდა გადაუხადოს ბანკმა მწერალს.

ამოხსნა: ამოცანის ამოხსნისათვის იპოვეთ 50 000 მანათის 12%:

$$50000 \cdot \frac{12}{100} = 6000 \text{ (მან).}$$

ეს რიცხვი გავზარდოთ 3-ჯერ: $6000 \cdot 3 = 18\,000$ (მან). შევკრიბოთ მიღებული და საწყისი

თანხა: $50\,000 + 18\,000 = 68\,000$ (მან).

პასუხი: 68 000 მანათი.

საქმიანობა

ნიმუშში მოცემული ალგორითმი ჩაწერეთ გამოსახულების სახით:

$50000 + 50000 \cdot \frac{12}{100} \cdot 3$. ამ გამოსახულებაში 50 000 გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ:

$50000 \cdot \left(1 + \frac{12 \cdot 3}{100}\right)$, მაშასადამე, საბოლოო თანხას S ასოთი თუ ავღნიშნავთ, მივიღებთ

ქვემოთ მოცემულ ფორმულას: $S = 50000 \left(1 + \frac{12 \cdot 3}{100}\right)$.

საქმიანობაში მიღებული ფორმულა ჩაწეროთ ზოგადი სახით:

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{rn}{100} \right). \text{ ამ ფორმულას პარტიკი პროცენტით ზრდის ფორმულა ეწოდება.}$$

ფორმულაში S_n – საბოლოო თანხა, S_0 – საწყისი თანხა, r – გარკვეული პერიოდისათვის პროცენტის მაჩვენებელი რიცხვია, n – თანხის ჩადების ხანგრძლივობა.

შენიშვნა. თუ საბოლოო თანხა (S_n) საწყის თანხაზე (S_0) -ზე ნაკლები იქნება, შემცირების

თვისების გამო ფორმულა $S_n = S_0 \left(1 - \frac{rn}{100} \right)$ სახით ჩაიწერება.

ნიმუში

მაგალითად: სველიშვილი გარკვეული მომსახურების ანგარიშწორების გასაწევად ანგარიშზე 500 მანეთი შეიტანა. გაწეული სამსახურის სანაცვლოდ ეს თანხა ყოველ თვითურად 10%-ით მცირდება. რამდენი ფული დარჩება სველის ანგარიშზე 3 თვის შემდეგ?

ამოხსნა: $S_0=500$, $n=3$, $r=10$. თანხის შემცირების გამო გამოვიყენოთ შენიშვნაში მოცემული ფორმულა:

$$S_3 = 500 \cdot \left(1 - \frac{10 \cdot 3}{100} \right) = 500 \cdot \frac{7}{10} = 350. \quad \text{პასუხი: 350 მანეთი.}$$

საგარჯიშოები

1. $S_n = S_0 \left(1 + \frac{rn}{100} \right)$ და $S_n = S_0 \left(1 - \frac{rn}{100} \right)$ ფორმულებიდან n , r და S_0 გამოსახეთ სხვა სიდიდეებით.
2. ათენი ვარაუდობს, რომ ბანკში შეტანილი 300 მანეთი. 5 წლის შემდეგ, წლიური 30%-იანი შემოსავლით, 750 მანეთია. თქვენი აზრით მართალს ამბობს ის? განმარტეთ მოსაზრება.
3. ა) აკიფმა 8 წლის შემდეგ 2000 მანათის მისაღებად, 1000 მანეთი რამდენ პროცენტისა ზრდის მქონე ბანკში უნდა ჩადოს?
ბ) წლიური 18%-იანი ზრდით, ერთი წლის განმავლობაში ბანკში ჩადებული რა თანხა გახდება 7316 მანეთი? თუ იგივე თანხას აკიფი წლიური 20%-იანი ზრდის მქონე ბანკში შეიტანს, რამდენ ფულს მიიღებს 2 წლის შემდეგ?
4. მარტივი პროცენტის ზრდის ფორმულის გამოყენებით შეავსეთ ცხრილი:

№	ბანკი	წლიური საპროცენტო მატება	შეტანილი თანხა (მანათი)	შეტანის ვადა (წელი)	საბოლოო თანხა (მანათი)
1	I ბანკი		3 000	2	3 840
2	II ბანკი	25%		4	4 000
3	III ბანკი	15,3%	5 000		7 295
4	IV ბანკი	11,5%	7 000	10	

ცხრილის დახმარებით გაეცით პასუხები ქვემოთ მოცემულ კითხვებს. გამოთვლისას გამოიყენეთ კალკულატორი.

ა) რა თანხად გადაიქცევა I ბანკში შეტანილი 3000 მანეთი 1 წლის შემდეგ?

ბ) რამდენ ფულს გადაიხდის III ბანკი 6 თვით შეტანილი 7000 მანათისათვის?

- გ) რამდენი ფული უნდა გადაიხადოს II ბანკმა 4 წლის მანძილზე ცხრილში მოცემული საწყისი თანხის საფუძველზე, წლიური 20%-იანი ზრდით?
5. სულეიმანმა ბიზნესის დასაწყებად, წლიური 10%-იანი ზრდის მქონე ბანკიდან 5 წლის ვადით 20 000 მანათი სესხი აიღო. რა თანხა უნდა დააბრუნოს სულეიმანმა ამ ვადის გასვლის შემდეგ?
6. **პრაქტიკული სამუშაო.** ნაღიმ გადაწყვიტა 642 მანეთიანი მობილური ტელეფონის კრედიტით გამოტანა. მან პირველადი შენატანის-200 მანათის გადახდის შემდეგ, დარჩენილი თანხის ყოველ თვე გადახდა დაიწყო. ბანკის თანამშრომელმა მას ქვემოთ მოცემული გადახდის ცხრილი მისცა:

№	გადახდის თარიღი	საწყისი ბალანსი (რ)	გადახდის თანხა	ძირითადი ბალანსი (რ)	სხვაობა (რ)	საბოლოო ბალანსი (რ)
1	17.10.2013	442.00	81.00	69.95	11.05	372.81
2	17.11.2013	372.81	81.00	71.68	9.32	301.88
3	17.12.2013	301.88	81.00	73.45	7.55	229.18
4	17.01.2014	229.18	81.00	75.27	5.73	154.67
5	17.02.2014	154.67	81.00	77.13	3.87	78.29
6	17.03.2014	78.29	76.47	74.51	1.96	
ჯამი			481.47	442.00	39.47	

- განსაზღვრეთ ცხრილის საფუძველზე:
- ა) ყოველთვიურად რამდენი ფული გადაიხადა ნაღიმ ბანკში?
- ბ) კალკულატორის გამოყენებით დაახლოებით განსაზღვრეთ 17 ოქტომბერს, 17 ნოემბერს, 17 მარტის გადახდის დროს, სხვაობის სვეტში მყოფი რიცხვი ძირითადი თანხის რამდენ პროცენტს შეადგენდა.
- გ) ოქტომბრის ბოლოს, ნოემბრის დასაწყისში რამდენი ფული ჰქონდა დარჩენილი ბანკისთვის გადასახდელი?
- დ) ბოლოს რამდენი ფული გადაიხადა ნაღიმ ბანკში ტელეფონისათვის?
- ე) რამდენით მეტი გამოვიდა გადახდილი თანხა, ტელეფონის ნაღდი ფულით შეძენის შემთხვევასთან შედარებით?
7. სამირმა ბანკიდან 4500 მანათი კრედიტი აიღო და ყოველ თვე 800 მანათის გადახდით, 6 თვეში უკან დააბრუნა. ჩახაზეთ სამირის გადახდის ცხრილი. განსაზღვრეთ რამდენი ფული გადაუხადა მან ბანკს და ბანკის წლიური პროცენტი.
8. $S_n = S_0(1 + r\% \cdot n)$ და $S_n = S_0(1 - r\% \cdot n)$ ფორმულებში n გვიჩვენებს თანხის შეტანის პერიოდს, $(r\% = \frac{r}{100})$. ამ ტოლობებიდან n -ის განსაზღვრისათვის დაწერეთ ფორმულა. იპოვეთ n , თუ:
- ა) $S_n = 500$, $S_0 = 2500$, $r\% = 10\% = 0,1$;
- ბ) $S_n = 2500$, $S_0 = 500$, $r\% = 25\% = 0,25$.
9. ლეითიმ გარკვეული მომსახურების ანგარიშების გაწევისათვის, ანგარიშზე 1000 მანათი შეიტანა. გაწეული სამსახურის სანაცვლოდ ეს თანხა ყოველთვიურად 5%-ით მცირდება. რამდენი თვის შემდეგ იქნება ანგარიშზე დარჩენილი თანხა:
- ა) 800 მანათი; ბ) 700 მანათი; გ) 400 მანათი; დ) 100 მანათი?

2.10. რთული პროცენტი ზრდის ფორმულა

საქმიანობა

კლიენტმა 2 წლის ვადით ბანკიდან 35 000 მანათი სესხი გამოიტანა. თუ კლიენტი ყოველ წელს წინა წლის თანხის 3%-ით მეტს გადაიხდის, რამდენი ფული უნდა დაუბრუნოს 2 წლის შემდეგ ბანკს?

1. იპოვეთ 35 000 მანეთის 3%.
2. შეკრიბეთ მიღებული რიცხვი და 35 000 მანეთი.
3. იპოვეთ ახალი თანხის 3%.
4. შეკრიბეთ ეს რიცხვი და მეორე მოქმედების შედეგი.
5. გამოთქვით მოსაზრება შედეგის შესახებ.

ნიმუში

მაგალითი: ნუსრეთმა, ბანკიდან 7 000 მანათი სესხი გამოიტანა. ბანკის წლიური პროცენტის ზრდა ყოველ წელს წინა წლის თანხის 11%-ს შეადგენს. რა თანხა უნდა დააბრუნოს ნუსრეთმა 2 წლის შემდეგ?

ამოხსნა: პირველ წელს 7 000 მანეთი 11%-ით გაიზარდა. მაშასადამე, პირველი წლის ბოლოს თავდაპირველი თანხა $7000 + 7000 \cdot \frac{11}{100} = 7770$ (მანეთი) გახდება. მეორე წელს 7770 მანათი 11%-ით გაიზრდება. მაშასადამე, მეორე წლის ბოლოს პირველი წლის თანხა 11%-ით გაიზარდა: $7770 + 7770 \cdot \frac{11}{100} = 8624,7$ (მანათი) გახდა.

პასუხი: 8 624,7 მანათი.

საქმიანობა

ნიმუშში მოცემული ამოცანის ამოხსნა ჩაეწეროთ გამოსახულების სახით:

$7770 + 7770 \cdot \frac{11}{100}$. ამ გამოსახულებაში მამრავლი 7770 გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ:

$$7770 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) \quad (*)$$

ბოლო გამოსახულებაში მიღებული 7770 ჩაეწეროთ ქვემოთ მოცემული სახით:

$$7770 = 70 \cdot 111 = 7000 \cdot \frac{111}{100} = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)$$

მიღებული შედეგი (*) გამოსახულებაში შევიტანოთ 7 770-ის ადგილას:

$$7770 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)^2$$

მაშასადამე, თუ საბოლოო თანხას ავღნიშნავთ S საოთი, ქვემოთ მოცემულ გამოსახულებას მივიღებთ:

$$S = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)^2$$

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

ფორმულას **რთული პროცენტით ზრდის ფორმულა** ეწოდება.

აქ S_n – საბოლოო თანხა, S_0 – საწყისი თანხა, r – გარკვეული პერიოდისათვის პროცენტის ზრდის მაჩვენებელი რიცხვია, n – თანხის შეტანის პერიოდი.

საგარჯიშოები

1. ისმაილი ვარაუდობს, რომ ყოველ წელს წინა წლის თანხის 10%-იანი ზრდის მქონე ბანკში შეტანილი 700 მანათი 2 წლის შემდეგ 800 მანათი გახდება. სწორია მისი დასკვნა?
2. არქიტექტორმა გადაწყვიტა, რომ ხიდის პროექტისათვის მიღებული 100 000 მანათი ჰონორარი ორ ბანკში შეიტანოს. მან ამ თანხის ნახევარი 3 წლის ვადით, ყოველ წლიურად ჩადებული თანხის 7%-იანი ზრდის მქონე სახელმწიფო ბანკში, მეორე ნახევარი კი-2 წლის ვადით, ყოველ წელს წინა წლის თანხის 10%-იანი ზრდის მქონე კომერციულ ბანკში შეიტანა. რომელმა ბანკმა უფრო მეტი შემოსავალი მოიტანა?
3. ყოველ წელს წინა წლის თანხის 25% ზრდის მქონე ბანკში შეტანილი გარკვეული თანხა 3 წლის შემდეგ 100 მლნ. მანათი გახდა. რამდენი იყო ბანკში შეტანილი პირველადი თანხა?
4. ცხრილის საფუძველზე გამოიკვლიეთ ქვემოთ მოცემული კითხვები:



№	ბანკი	წლიური პროცენტის ზრდა	თანხა (მანათი)	პერიოდი	პროცენტის ფორმულის სახე
1	I ბანკი	15%	3000	1 თვე	მარტივი
2	II ბანკი	11,5%	3000	12 თვე	მარტივი
3	III ბანკი	12,3%	5000	2 წელი	რთული
4	IV ბანკი	14%	10000	3 წელი	რთული

გამოთვლები აწარმოეთ კალკულატორით.

- ა) პერიოდის ბოლოს რა თანხად გადაიქცევა I და II ბანკში მოცემული პირობებით მარტივი პროცენტით ზრდის პირობით შეტანილი თანხა?
 - ბ) პერიოდის ბოლოს რა თანხად გადაიქცევა III და IV ბანკში მოცემული პირობებით რთული პროცენტით ზრდის პირობით შეტანილი თანხა?
 - გ) თუ 4000 მანათს 15%-იანი წლიური ზრდით ბანკში შევიტანთ, რა თანხად გადაიქცევა 2 წლის შემდეგ როგორც მარტივი, ასევე რთული პროცენტით ზრდის შემთხვევაში? რომელი უფრო მომგებიანია ამ ზრდებიდან?
 - დ) რა თანხად გადაიქცევა 3 წლის შემდეგ ყოველ წელს შეტანილი თანხის 10%-იანი ზრდის მქონე ბანკში შეტანილი 5000 მანათი?
5. ნებისმიერი ამოცანის შედგენისას გამოიყენეთ, როგორც მარტივი, ასევე რთული პროცენტით ზრდის ფორმულა.

- 6. პრაქტიკული სამუშაო.** გამოიკვლიეთ და შეადარეთ ცხრილში მოცემული კრედიტის პირობები. შეადგინეთ და უპასუხეთ აუცილებელ კითხვებს. თუ ამ ბანკებიდან დაბალი პროცენტით, 1 წლის ვადით 3000 მანათს გამოიტანთ, რა თანხა უნდა დაუბრუნოთ ბანკს ვადის ბოლოს? გამოთვლებისას გამოიყენეთ კალკულატორი (იხილე ნიმუში).

კრედიტის პირობები	I ბანკი	II ბანკი
კრედიტის თანხა	300-7000 AZN	150-3000 AZN
კრედიტის ვადა	12-18 თვე	3-24 თვე
საკრედიტო პროცენტი	მანიმუმი: 26% (წლიური) მაქსიმუმი: 32% (წლიური)	მანიმუმი: 28% (წლიური) მაქსიმუმი: 30% (წლიური)
კრედიტის გარანტია	1 ან 2 თავმდეები	გირაო
დაზღვევა	შეიძლება მოითხოვოს სიცოცხლის და ინდივიდუალური ავარიული შემთხვევის დაზღვევა	არ მოითხოვება
გადახდის ფორმა	კრედიტის ვადის ბოლოს	პირველადი შენატანით
შეკვეთის განხილვის ვადა	2 სამუშაო დღის მანძილზე	2 სამუშაო დღის მანძილზე
სესხის მიმღების მინიმალური ასაკის ზღვარი	20 წლის	20 წლის
სესხის მიმღების მაქსიმალური ასაკის ზღვარი	62 წლის (ქალები 57 წლის)	62 წლის (ქალები 57 წლის)
თვიურ შემოსავალზე მინიმალური მოთხოვნა	200 AZN	120 AZN

ნიმუში

მაგალითი: შეტანილი თანხის წლიური 26%-იანი ზრდის მქონე ბანკიდან, 18 თვის ვადით 2000 მანათი კრედიტის ამღებმა კლიენტმა უკან რამდენი ფული უნდა დააბრუნოს?

ამოხსნა: ამოცანის პირობის მიხედვით:

$$S_0 = 2000 \text{ მანათი}; \quad n = 18 \text{ თვე} = \frac{18}{12} = 1,5 \text{ წელი}; \quad r = 26\%.$$

მარტივი პროცენტის ზრდის ფორმულის მიხედვით:

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{rn}{100} \right) = 2000 \left(1 + \frac{26 \cdot 1,5}{100} \right) = 2780.$$

პასუხი: 2780 მანათი.

- 7.** ახერხა შეტანილი თანხის წლიური 12,5%-იანი ზრდით ბანკიდან 5000 მანათი კრედიტი აიღო. რამდენი ფული უნდა დაუბრუნოს მან ბანკს?

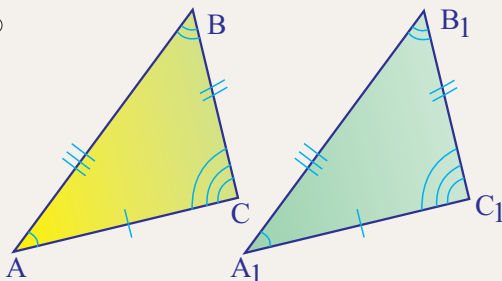
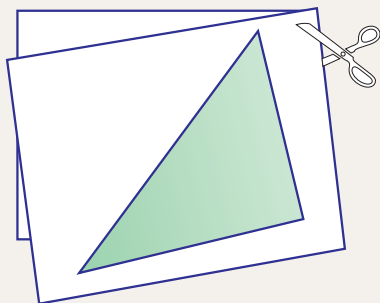
- 8.** გამოთვლების დროს გაირკვა, რომ ქალაქის მოსახლეობის ავტომობილების რაოდენობა ყოველ წელს წინა წელთან შედარებით, 15%-ით იზრდება. დაახლოებით განსაზღვრეთ რამდენჯერ გაიზარდა ავტომობილების რაოდენობა ბოლო 5 წლის მანძილზე?

2.11. კონგრუენტული სამკუთხედები

საქმიანობა

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

1. რვეულის ფურცელი გადაკვეთე შუაზე.
2. ერთ მხარეს დახაზეთ ნებისმიერი სამკუთხედი.
3. ორად გადაკვეცილი ფურცელი გაჭერით მაკრატლით სამკუთხედის გასწვრივ.



4. რამდენი ფიგურა მიიღეთ? გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული ფიგურების გვერდებისა და კუთხეების შესახებ. რა მოხდება, თუ მოძრაობის შედეგად ამ ფიგურების შესაბამის გვერდებს ერთმანეთზე მოვათავსებთ? შეიძლება ითქვას, რომ ისინი ტოლები არიან?

ტოლი სიგრძეების მქონე მონაკვეთებს კონგრუენტული მონაკვეთები, ტოლი გრადუსის მქონე კუთხეებს კი კონგრუენტული კუთხეები ეწოდებათ.

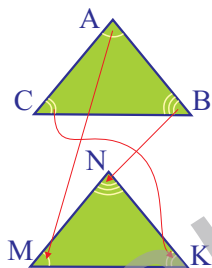
თუ ორი სამკუთხედის შესაბამისი გვერდები და კუთხეები კონგრუენტულია, მათ **კონგრუენტული სამკუთხედები** ეწოდებათ.

სამკუთხედების კონგრუენტულობა “ $\cong$ ” ნიშნით აღინიშნება.

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

მაშასადამე, თუ, $AB \cong A_1B_1$; $AC \cong A_1C_1$; $BC \cong B_1C_1$ და $\angle A \cong \angle A_1$; $\angle B \cong \angle B_1$; $\angle C \cong \angle C_1$ პირობები კმაყოფილდება, მაშინ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები კონგრუენტულებია.

კონგრუენტულ სამკუთხედებში კონგრუენტული გვერდების პირდაპირ კონგრუენტული კუთხეები, კონგრუენტული კუთხეების პირდაპირ კი-კონგრუენტული გვერდები მდებარეობს.



თუ სამკუთხედები კონგრუენტულია, მაშინ ჩაწერისას კონგრუენტული გვერდები და კონგრუენტული კუთხეები ამ სამკუთხედების ჩაწერის თანმიმდევრობის შესაბამისად აიღება. თუ ცნობილია, რომ $\triangle ABC \cong \triangle MNK$ მაშინ:

$$\begin{aligned} AB &\cong MN; BC \cong NK; AC \cong MK \\ \angle A &\cong \angle M; \angle B \cong \angle N; \angle C \cong \angle K \end{aligned}$$

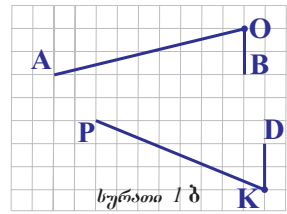
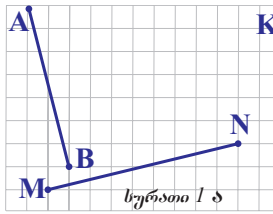
პართებულია.

$$\begin{aligned} AB &\cong NK; BC \cong MK; AC \cong MN \\ \angle A &\cong \angle N; \angle B \cong \angle K; \angle C \cong \angle M \end{aligned}$$

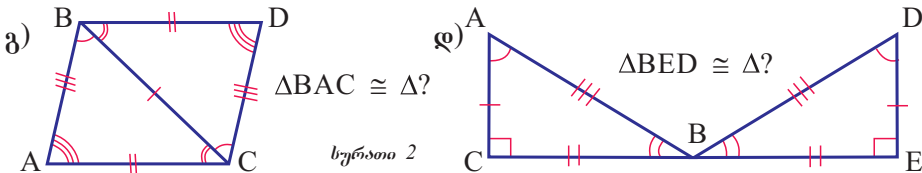
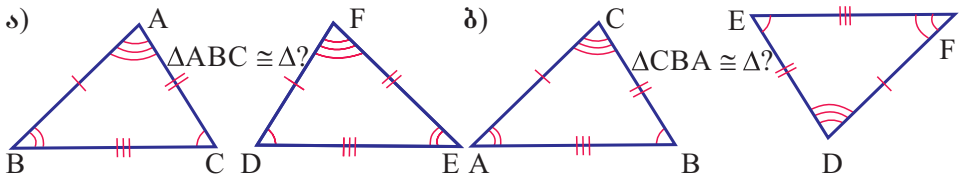
არ არის პართებულია.

საგარჯიშოები

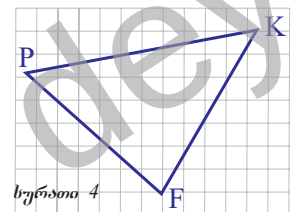
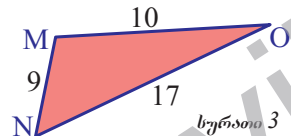
- კონგრუენტულია თუ არა AB და MN მონაკვეთები (სურათი 1 ა)? განმარტეთ თქვენი პასუხი.
- კონგრუენტულია თუ არა AOB და PKD კუთხეები (სურათი 1 ბ)? განმარტეთ თქვენი პასუხი.



- “?” ნიშნის ადგილას დაწერეთ მოცემული სამკუთხედის კონგრუენტული სამკუთხედის დასახელება (სურათი 2). დაასაბუთეთ, რატომ შეარჩიეთ ასოების ასეთი თანმიმდევრობა.



- ABC სამკუთხედი სურათი 3-ზე მოცემული MON სამკუთხედის კონგრუენტულია. განსაზღვრეთ ABC სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები. რომლებია ამ სამკუთხედების კონგრუენტული კუთხეები?
- უჯრებიან რვეულში ჩახაზეთ სურათი 4-ზე მოცემული PKF სამკუთხედის კონგრუენტული ABC სამკუთხედი.
- უჯრებიან რვეულში ჩახაზეთ ნებისმიერი ABCD მართკუთხედი და მისი კონგრუენტული MNPK მართკუთხედი. გაავლეთ AC და MP მონაკვეთები და დაასახელოთ მიღებული კონგრუენტული სამკუთხედები.
- გაავლეთ AOB კუთხის OC ბისექტრისა. განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული კუთხეებიდან რომლებია კონგრუენტულები.
 - $\angle AOC$ და $\angle BOC$;
 - $\angle AOC$ და $\angle AOB$;
 - $\angle AOB$ და $\angle COB$.
 დაასაბუთეთ მოსაზრება.

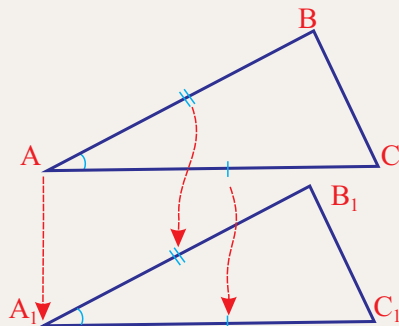


- მახვილკუთხა და ბლაგვკუთხა სამკუთხედები;
- მართკუთხა და ბლაგვკუთხა სამკუთხედები;
- ტოლფერდა და ტოლგვერდა სამკუთხედები.

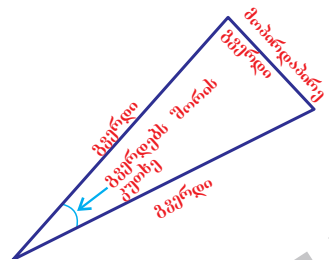
2.12. სამკუთხედების კონგრუენტულობის პირველი ნიშანი

საქმიანობა

1. გაიხსენეთ ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მიხედვით სამკუთხედის აგების წესი.
2. ააგეთ ABC სამკუთხედი, $AB = 3$ სმ, $AC = 5$ სმ, $\angle A = 30^\circ$.
3. ააგეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი, $A_1B_1 = 3$ სმ, $A_1C_1 = 5$ სმ, $\angle A_1 = 30^\circ$.
4. ABC სამკუთხედი მოძრაობის შედეგად მოათავსეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედზე. $\triangle A_1B_1C_1$ -ის რომელი გვერდი დაემთხვევა BC გვერდს?
5. რა შეგიძლიათ თქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების შესახებ?



სამკუთხედების კონგრუენტულობის შემოწმებისათვის სულაც არ არის საჭირო მათი ექვსივე ძირითადი ელემენტის (სამი გვერდი, სამი კუთხე) კონგრუენტულობის შემოწმება. ამისათვის საკმარისია სამკუთხედების რამოდენიმე ძირითადი ელემენტის კონგრუენტულობის შემოწმება. ამას ამტკიცებს სამკუთხედების კონგრუენტულობის ნიშნები.



სამკუთხედის ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მიხედვით კონგრუენტულობის ნიშანი (I ნიშანი).

თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე მეორე სამკუთხედის შესაბამისი ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კონგრუენტულია, მაშინ ეს სამკუთხედები კონგრუენტულია.

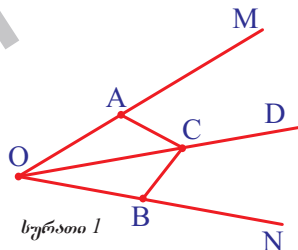
პირველ ნიშანს **პპპ** (გვერდი, კუთხე, გვერდი) ნიშანიც ეწოდება.

ნამუშაუ

ამოცანა: MON კუთხის გვერდები OA და OB კონგრუენტულ მონაკვეთებად არის გაყოფილი, $\angle AOB$ -ს OD ბისექტრისაზე მდებარე C წერტილი A და B წერტილებთანაა შეერთებული. (სურათი 1). უჩვენეთ, რომ $\triangle AOC \cong \triangle BOC$.

ამოხსნა: განვიხილოთ სურათი 1-ზე მოცემული AOC და BOC სამკუთხედები. პირობის თანახმად $OA \cong OB$, OC ორი სამკუთხედის საერთო გვერდია და $\angle AOC \cong \angle BOC$ (რადგანაც OC ბისექტრისაა).

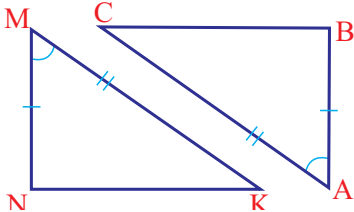
მაშინ სამკუთხედების კონგრუენტულობის I ნიშნის თანახმად $\triangle AOC \cong \triangle BOC$.



საგარჯიშოები

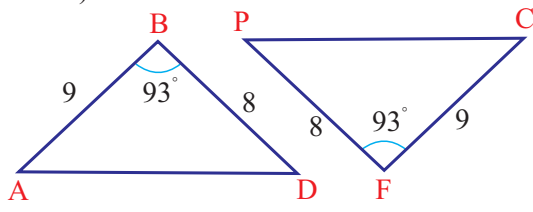
1. შეიძლება ითქვას, რომ სურათებში მოცემული სამკუთხედები კონგრუენტულია? გამოთქვით ზმზ ნიშანი და დაასაბუთეთ პასუხი.

ა)



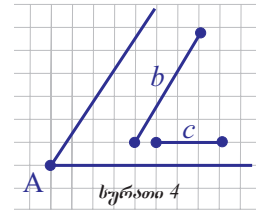
სურათი 2

ბ)



სურათი 3

2. **პრაქტიკული სამუშაო.** უჯრებიან რვეულში ჩახაზეთ A კუთხის (სურათი 4) კონგრუენტული კუთხე. მის ერთ გვერდზე A წერტილიდან გადადით b მონაკვეთის მეორე გვერდზე კი-ც მონაკვეთის კონგრუენტული მონაკვეთები. მიღებული მონაკვეთების ბოლოები აღნიშნეთ შესაბამისად B და C ასოებით. თქვენი აზრით, იქნება თუ არა ერთმანეთის კონგრუენტული კლასში თითოეული მოსწავლის მიერ ჩახაზული ABC სამკუთხედი? დაასაბუთეთ თქვენი პასუხი.

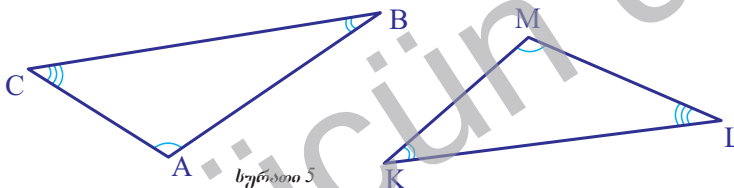


სურათი 4

3. ცნობილია, რომ $\triangle ABC \cong \triangle KLM \cong \triangle DEF$. განსაზღვრეთ KLM და DEF სამკუთხედის შესაბამისი გვერდების სიგრძე და კუთხე და შეავსეთ ცხრილი.

$\triangle ABC$	$AB = 6 \text{ სმ}; BC = 12 \text{ სმ};$ $\angle B = 105^\circ$	$AB = 7,5 \text{ მმ}; AC = 1,4 \text{ მმ};$ $\angle A = 53^\circ$
$\triangle KLM$		
$\triangle DEF$		

4. მოცემული სამკუთხედების საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\triangle ABC \cong \triangle KLM$? თუ არა, მაშინ როგორ უნდა შევცვალოთ KLM სამკუთხედის წევრები ისე, რომ ეს სამკუთხედები ერთმანეთის კონგრუენტული იყოს? (სურათი 5).



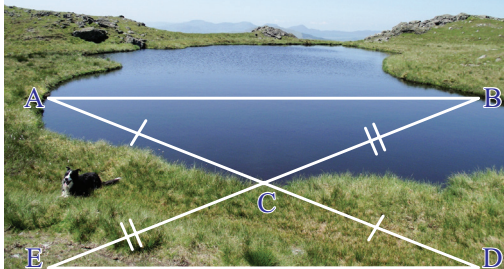
სურათი 5

5. ABC სამკუთხედის AB და AC გვერდები ამ გვერდების სიგრძის ტოლ მონაკვეთებად გააგრძელეთ A წერტილიდან მოპირდაპირე მხარეს. მიღებული მონაკვეთების წევრები აღნიშნეთ შესაბამისად D და E წერტილებით. შეიძლება ითქვას, რომ მიღებული ABC და AED სამკუთხედები კონგრუენტულია? დაასაბუთეთ თქვენი პასუხი.

II განყოფილება

6. $\triangle ABC$ ტოლფერდაა. $AB = AC$. A წვეროდან გავლებული ბისექტრისა BC გვერდს D წერტილში კვეთს. შეიძლება ვთქვათ, რომ ABD და ACD სამკუთხედები კონგრუენტულეზა? დაასაბუთეთ თქვენი პასუხი.

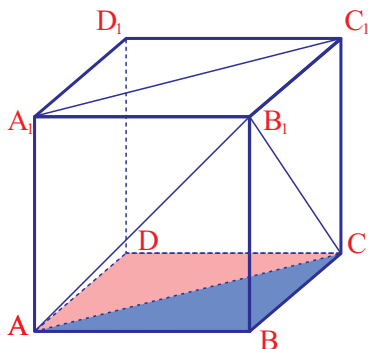
7. ბავშვებს სოფლის ახლოს მდებარე ტბის სიგანის გაზომვა უნდათ. ამისათვის ისინი ზომავენ AC და BC მანძილებს და ამ მანძილებს შორის კუთხეს. კიდევ რა უნდა გააკეთონ ბავშვებმა AB მანძილის საპოვნელად? სურათში მოცემული რომელი მონაკვეთის ტოლია ტბის სიგანე? (სურათი 6).



სურათი 6

8. რამდენი იქნება ტბის სიგანე, თუ მე-6 სურათზე $EC = 20$ მ, $CD = 1900$ სმ, $ED = 0,029$ კმ, $AC = 19000$ მმ, $BC = 2000$ სმ.

9. მოცემულია $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ კუბი. მის ზედაპირზე მდებარე სამკუთხედებიდან დაასახელეთ კონგრუენტულეზი. დაასაბუთეთ, ეს სამკუთხედები რომელი წესით არიან კონგრუენტულეზი (სურათი 7).



სურათი 7

10. **პრაქტიკული სამუშაო.** ქალაქისაგან გამოჭერით ნებისმიერი ABC სამკუთხედი და A წვეროს ირგვლივ 90° -ით შემობრუნეთ საათის ისრის მიმართულებით. რა შეგიძლიათ თქვათ მიღებული და ABC სამკუთხედის შესახებ?

11. ცნობილია, რომ სურათ 8-ზე მოცემული ფიგურის საწყისი მდგომარეობა მართკუთხედი იყო. როგორ შეიძლება დავიყვანოთ საწყისი მდგომარეობაში სურათში მოცემული ფიგურა კონგრუენტული სამკუთხედების გამოყენებით? დაახლოებით გან-საზღვრეთ ამ ფიგურის შემადგენლობაში არსებული კონგრუენტული სამკუთხედები და დაასახელეთ ისინი. დააზუსტეთ თქვენი ვარაუდები საჭირო გაზომვების ჩატარებით. კონგრუენტული სამკუთხედების გამოყენებით გამოჭერით სხვადასხვა ორნამენტები.



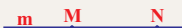
სურათი 8

12. . გაავლეთ O ცენტრიანი წრეწირის AB და CD დიამეტრები. გამოთქვით მოსაზრებები AOC და BOD სამკუთხედების შესახებ. თუ BD და AC ქორდების ჯამი $18,4$ სმ-ია, რამდენი მილიმეტრი იქნება თითოეული ქორდის სიგრძე?

2.13. სამკუთხედების კონგრუენტულობის მეორე ნიშანი

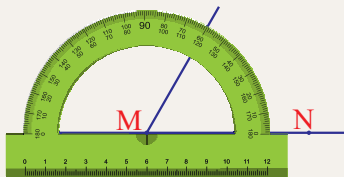
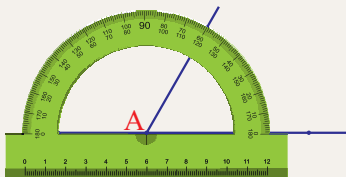
საქმიანობა

1. a წრფეზე აიღეთ 2 სმ სიგრძის AB მონაკვეთი, ხოლო m წრფეზე-იგივე სიგრძის MN მონაკვეთი (სურათი 1).



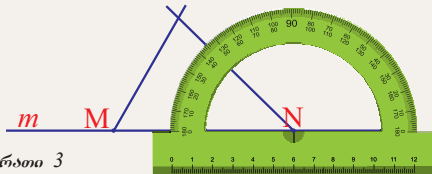
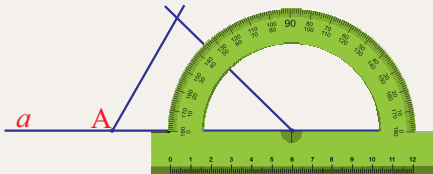
სურათი 1

2. ააგეთ ორი 60° -იანი კუთხე, რომელთა წვეროებიც არის A და M წერტილებში (სურათი 2).



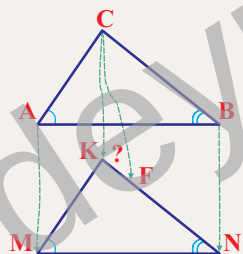
სურათი 2

3. ააგეთ A და M კუთხეებთან ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარე 45° -იანი ორი კუთხე, რომელთა წვეროებიც არის B და N წერტილებში (სურათი 3).



სურათი 3

4. A და B კუთხეების გვერდების გადაკვეთის წერტილი აღნიშნეთ C ასოთი, M და N კუთხეების გვერდების გადაკვეთის წერტილი კი K ასოთი.
5. მაკრატლით ამოჭერით ABC სამკუთხედი. და ისე მოათავსეთ MNK სამკუთხედი, რომ A წვერო- M წვეროს, B წვერო კი- N წვეროს დაემთხვეს. რომელ წერტილს დაემთხვევა ამ შემთხვევაში C წვერო? დაასაბუთეთ მოსაზრება (სურათი 4).
6. წარმოიდგინეთ, რომ C წერტილი ემთხვევა რომელიმე F წერტილს. შესაძლებელია ეს? რატომ? გაავლეთ MF მონაკვეთი და დაასაბუთეთ მოსაზრებები.



სურათი 4

სამკუთხედების ერთი გვერდის და მასთან მდებარე ორი კუთხის მიხედვით კონგრუენტულობის ნიშანი (II ნიშანი):

თუ ერთი სამკუთხედის ერთი გვერდი და მასთან მდებარე ორი კუთხე შესაბამისად მეორე სამკუთხედის ერთი გვერდისა და მასთან მდებარე ორი კუთხის კონგრუენტულია, მაშინ ეს სამკუთხედები კონგრუენტულია.

მეორე ნიშანს კვ (კუთხე, გვერდი, კუთხე) ნიშანი ეწოდება.

ნომუმი

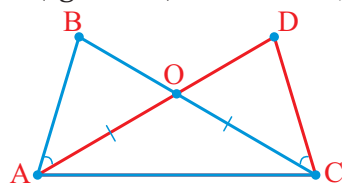
ამოცანა: მოცემულია ABC და CDA სამკუთხედები (სურათი 5). $AO \cong OC$, $\angle OCD \cong \angle OAB$. ეს აჩვენებს, რომ $AB \cong CD$ და $\angle B \cong \angle D$.

ამოხსნა: $\triangle AOB$ და $\triangle COD$ -ში $AO \cong OC$ და $\angle OCD \cong \angle OAB$ ვიცით, რომ, $\angle AOB \cong \angle COD$, რადგანაც ვერტიკალური კუთხეებია.

მაშინ, სამკუთხედების კონგრუენტულობის

II ნიშნის თანახმად მივიღებთ: $\triangle AOB \cong \triangle COD$ ე.ი. ამ სამკუთხედების

შესაბამისი გვერდები და კუთხეები კონგრუენტულია: $AB \cong CD$ და $\angle B \cong \angle D$.



სურათი 5

კუთხის მნიშვნელობა გრადუსით ($^{\circ}$), მინუტით ($'$) და სეკუნდით ($''$) იზომება:

$$1^{\circ} = 60', 1' = 60'', 1' = \frac{1}{60}, 1'' = \frac{1}{3600}.$$

მაგალითად : $10^{\circ}29'$ (10 გრადუსი 29 მინუტი);

$78^{\circ}25'43''$ (75 გრადუსი 25 მინუტი 43 სეკუნდი); $35,6^{\circ}$.

შესაძლებელია კუთხის ერთი ერთეულიდან მეორეზე გადასვლა.

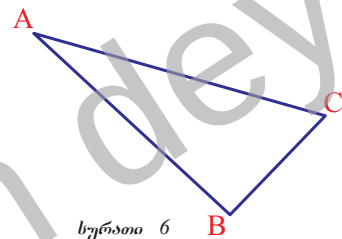
ნომუმი

1) $16,3^{\circ} = 16^{\circ} + 0,3^{\circ} = 16^{\circ} + 0,3 \cdot 60' = 16^{\circ} + 18' = 16^{\circ}18'.$

2) $48^{\circ}34'11'' = 48^{\circ} + 34' + 11'' = 48 + 34 \cdot \frac{1^{\circ}}{60} + 11 \cdot \frac{1^{\circ}}{3600} \approx 48^{\circ} + 0,57^{\circ} + 0,003^{\circ} = 48,573 \approx 48,6^{\circ}.$

საგარჯიშოები

1. აჩვენეთ მოცემული სამკუთხედის თითოეულ გვერდთან მდებარე და მისი მოპირდაპირე კუთხეები. აღნიშნეთ თითოეული კუთხის მოპირდაპირე გვერდი. რომელი კუთხის პირდაპირ მდებარე გვერდია უდიდესი სურათის მიხედვით? რომელი გვერდის პირდაპირ მდებარე კუთხეა უმცირესი? (სურათი 6).



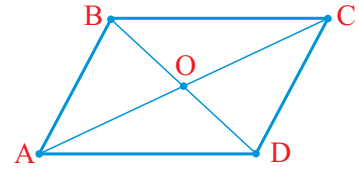
სურათი 6

2. ცნობილია, რომ $\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle PMN$. შეავსეთ ცხრილი.

$\triangle ABC$	$AB = 12$ სმ, $\angle A = 47^{\circ}$, $\angle B = 36^{\circ}$	$AC = 4,4$ სმ, $\angle A = 27^{\circ}19'$, $\angle C = 45^{\circ}$
$\triangle DEF$		
$\triangle PMN$		

განსაზღვრეთ ამ სამკუთხედების მესამე კუთხეები.

3. $AO \equiv OC$, $\angle OCB \equiv \angle OAD$ (სურათი 7). დამტკიცეთ, რომ $\triangle COB \equiv \triangle AOD$.

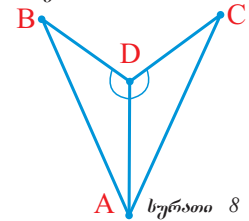


სურათი 7

4. სურათი 7-ზე $AO \equiv OC$, $\angle OCD \equiv \angle OAB$.

ა) თუ $CD = 10$ სმ, $AB = ?$

ბ) თუ $OD = 2,7$ სმ, $BD = ?$



სურათი 8

5. AD მონაკვეთი $\angle CAB$ -ს ბისექტრისაა (სურათი 8).

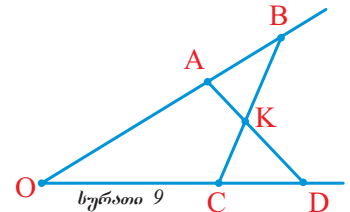
$\angle ADB \equiv \angle ADC$. დამტკიცეთ, რომ $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$.

6. A კუთხის გვერდებზე აღნიშნულია B და C წერტილები, ხოლო ბისექტრისაზე D წერტილი. $\angle ADB \equiv \angle ADC$. დამტკიცეთ, რომ $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$.

7. ტოლი სიგრძის AB და CD მონაკვეთების შემცველი წრფეები O წერტილში იკვეთებიან და $AO \equiv OC$.

დამტკიცეთ, რომ:

ა) $\triangle BOC \equiv \triangle DOA$; ბ) $\angle ABC \equiv \angle ADC$.



სურათი 9

8. სურათი 9-ზე $OA \equiv OC$ და $OB \equiv OD$.

დამტკიცეთ, რომ: ა) $AD \equiv BC$; ბ) $\angle BCD \equiv \angle DAB$.

9. რაიმე კუთხის გვერდებზე წვეროდან გადადებულია თანაბარი სიგრძის ორი მონაკვეთი. თითოეული მონაკვეთის ბოლოდან კუთხის მეორე გვერდზე დაშვებულია პერპენდიკულარი. შეიძლება ითქვას, რომ ეს პერპენდიკულარები თანაბარი სიგრძისაა? (განიხილეთ მახვილი, მართი და ბლაგვი კუთხეები).

10. A კუთხის ბისექტრისის პერპენდიკულარული წრფე კუთხის გვერდებს B და C წერტილებში კვეთს. შეიძლება ვთქვათ, რომ $\triangle ABC$ ტოლფერდაა?

11. ABC სამკუთხედში B წვეროდან გავლებული მედიანა AC ფუძეს D წერტილში კვეთს და D წერტილიდან გაგრძელებულია E წერტილამდე ისე, რომ $DE=BD$. იპოვეთ $\angle BAE$ თუ, $\angle BAD = 56^\circ$ და $\angle BCD = 40^\circ$.

12. ა) კუთხის ათწილადით მოცემული მნიშვნელობები გამოსახეთ გრადუსით, მინუსით და სეკუნდით: $73,4^\circ$; $66,2^\circ$; $125,1^\circ$; $41,93^\circ$; $12,5^\circ$.

ბ) კუთხის გრადუსით, მინუსით და სეკუნდით მოცემული მნიშვნელობები მიახლოებით გამოსახეთ გრადუსით: $12^\circ 36'$; $44^\circ 16' 25''$; $54^\circ 30''$; $135^\circ 56' 10''$; $49^\circ 49''$.

13. შესარულეთ მოქმედებები:

- | | | |
|-----------------------------------|---|---|
| ა) $7^\circ 15' + 16^\circ 30'$; | ბ) $46^\circ 25' - 17^\circ 59''$; | გ) $150^\circ 21' 12'' + 51^\circ 16' 51''$; |
| დ) $42^\circ - 25^\circ 10'$; | ე) $175^\circ 13' - 101^\circ 43''$; | ვ) $98^\circ 15' - 53^\circ 45'$; |
| ზ) $23^\circ 36' \cdot 2$; | თ) $24,5^\circ - 6^\circ 7' + 32,1^\circ$; | ი) $77^\circ 19' - 56,4^\circ$. |

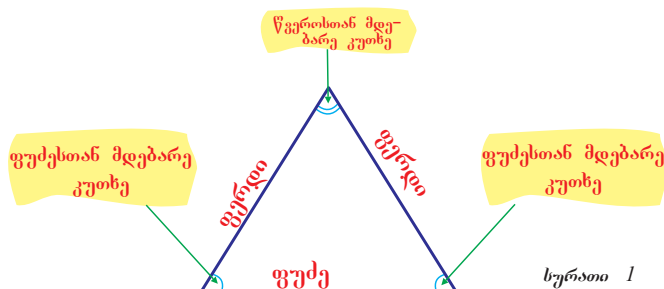
14. ABC სამკუთხედის კუთხეებია $15,8^\circ$ და $44^\circ 53'$. იპოვეთ მესამე კუთხე.

15. გავლებულია ABC სამკუთხედის BD სიმაღლე და $\angle ABD \equiv \angle CBD$. BD სიმაღლის ნებისმიერი M წერტილი შეერთებულია A და C წერტილებთან. დამტკიცეთ AM და MC მონაკვეთების კონგრუენტულობა.

2.14. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები

სამკუთხედს, რომელსაც ორი გვერდი ტოლი აქვს, **ტოლფერდა სამკუთხედი** ეწოდება. ტოლფერდა სამკუთხედის ტოლ გვერდებს მისი ფერდები, მის მესამე გვერდს კი ამ სამკუთხედის ფუძე ეწოდება (სურათი 1).

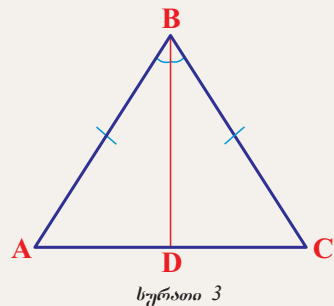
ტოლფერდა სამკუთხედი ტოლფერდა სამკუთხედის კერძო შემთხვევაა.



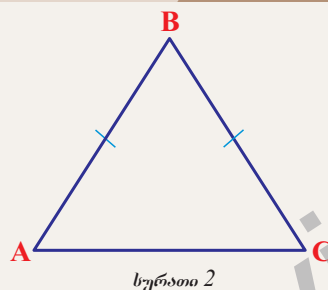
საქმიანობა

ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები:

1. დახაზეთ ტოლფერდა ABC სამკუთხედი, $AB=BC$ (სურათი 2). აჩვენეთ მისი წვერო და ფუძესთან მდებარე კუთხეები.



2. გაავლეთ წვეროს კუთხის BD ბისექტრისა. დაასახელეთ ეს კუთხეები. რა შეგიძლიათ თქვათ ამ კუთხეების შესახებ? (სურათი 3).



3. შესაძლებელია ითქვას, რომ ABD და CBD სამკუთხედები კონგრუენტულია? თქვენი აზრით, სამკუთხედების ტოლობის რომელი ნიშანი კმაყოფილდება ამ სამკუთხედებისათვის? გამოთქვით მოსაზრებები A და C კუთხეების შესახებ (სურათი 3).

თეორემა

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეების თვისება.

ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხეები კონგრუენტულია.

თეორემის პირობა: $\triangle ABC$ ტოლფერდაა. $AB = BC$ (სურათი 3).

თეორემის დასკვნა: $\angle A \cong \angle C$.

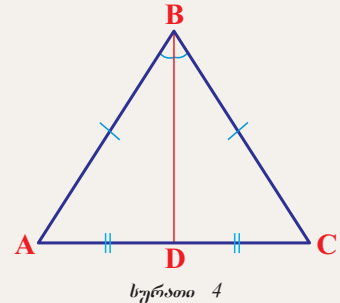
დამატებით.

გაავლეთ $\triangle ABC$ -ში BD ბისექტრისა. გამოიყენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობის გვგ ნიშანი.

საქმიანობა

ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები:

1. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია: $AB=BC$ (სურათი 4).
2. გაავლეთ BD მედიანა. რა შეგიძლიათ თქვათ ABD და CBD სამკუთხედების შესახებ? ამ სამკუთხედების რომელი გვერდებისა და რომელი კუთხეებისათვის შეგიძლია ვთქვათ, რომ კონგრუენტულია? რატომ?
3. შეგიძლია ვთქვათ, რომ ABD და DBC კუთხეები კონგრუენტულია? ამ შემთხვევაში სამკუთხედის ასევე რა ელემენტია BD მედიანა?
4. შეგიძლია ვთქვათ, რომ ADB და BDC კუთხეები მოსაზღვრე და კონგრუენტული კუთხეებია? ამ შემთხვევაში სამკუთხედის ასევე რა ელემენტია BD მედიანა?



თეორემა ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძისადმი გავლებული მედიანის თვისება.

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძისადმი გავლებული მედიანა ბისექტრისაც არის და სიმაღლეც.

თეორემის პირობა: $\triangle ABC$ ტოლფერდაა. $AB = BC$. BD მედიანაა (სურათი 4).

თეორემის დასკვნა: BD ბისექტრისაცაა და სიმაღლეც.

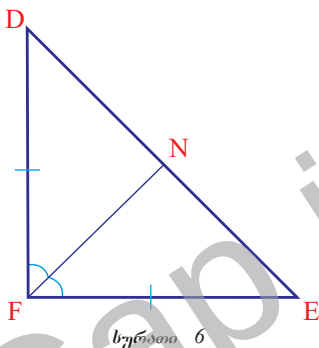
დაამტკიცეთ.

გამოიყენეთ სამკუთხედის კონგრუენტულობა და მოსაზღვრე კუთხეების თვისება.

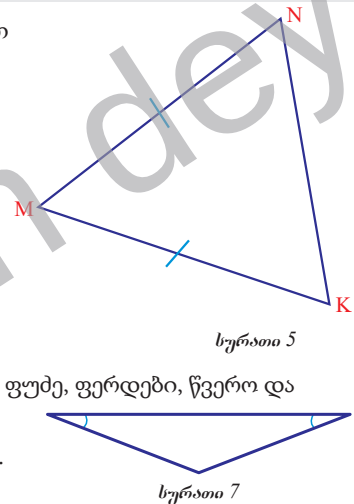
საგარჯიშოები

1. MNK ტოლფერდა სამკუთხედია (სურათი 5). აჩვენეთ მისი კონგრუენტული გვერდები და კუთხეები.

2. ტოლფერდა სამკუთხედში გავლებულია ბისექტრისა (სურათი 6). აჩვენეთ აქ მიღებული კონგრუენტული მონაკვეთები და კუთხეები.

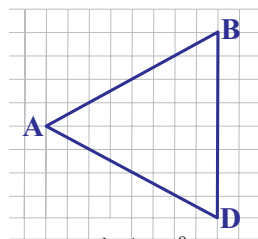


3. განიხილეთ სურათზე მოცემული ტოლფერდა სამკუთხედი, აჩვენეთ ფუძე, ფერდები, წვერო და ფუძესთან მდებარე კუთხეები (სურათი 7).



II განყოფილება

4. უჯრებიან რვეულში ჩახაზეთ სამკუთხედი და მისი წვეროდან გავლებული ბისექტრისა. დაასახელეთ სამკუთხედი. აჩვენეთ კონგრუენტული კუთხეები და გვერდები (სურათი 8).

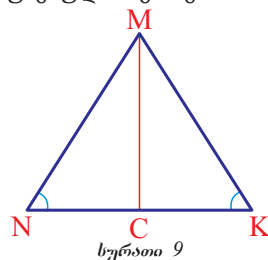


სურათი 8

5. ა) ტოლფერდა ABC სამკუთხედის AB ფუძისადმი გავლებულია CK ბისექტრისა. განსაზღვრეთ AK და BK მონაკვეთების სიგრძეები, თუ ცნობილია, რომ AB -ს სიგრძეა: 1) 12 სმ; 2) 25 სმ; 3) 14,4 სმ.
- ბ) ტოლფერდა ABC სამკუთხედის AB ფუძისადმი გავლებულია CK ბისექტრისა. განსაზღვრეთ AB ფუძის სიგრძე, თუ ცნობილია BK -ს სიგრძე: 1) 3,4 სმ; 2) 5 მმ; 3) 4,45 სმ.

6. განსაზღვრეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხეების თვისებების პირობა და დასკვნა. მათი ადგილების შეცვლით მიიღეთ შებრუნებული თეორემა.

7. გავლებულია MNK სამკუთხედის MC ბისექტრისა. ცნობილია, რომ $\angle N \cong \angle K$ (სურათი 9). დაამტკიცეთ, რომ $MN \cong MK$.



სურათი 9

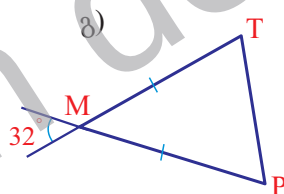
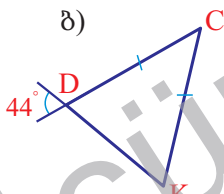
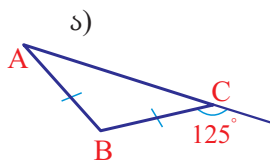
8. რამდენი გრადუსი იქნება ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე თითოეული კუთხე, თუ ცნობილია, რომ წვეროში მდებარე კუთხე არის ა) 30° ; ბ) 120° ; გ) 90° ?

9. ა) შეიძლება ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხეებიდან ერთ-ერთი იყოს: 1) 89° ; 2) 120° ; 3) 90° ? დაასაბუთეთ მოსაზრება.

- ბ) განსაზღვრეთ ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროში მდებარე კუთხე, თუ ცნობილია, რომ ფუძესთან მდებარე ერთ-ერთი კუთხე არის 1) 30° ; 2) 28° ; 3) 79° .

10. სამირი ამბობს, რომ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეები 45° -ია. სწორია მისი მოსაზრება?

11. განსაზღვრეთ სამკუთხედის კუთხეები ქვემოთ მოცემული სურათების საფუძველზე (სურათი 10).

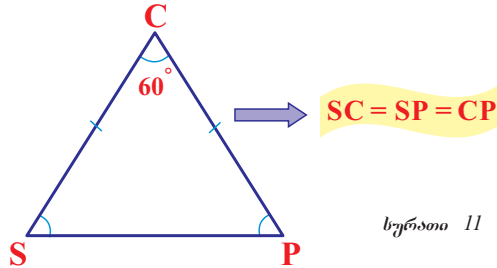


სურათი 10

12. MNK ტოლფერდა სამკუთხედში $MN \cong NK$, ფერდების სიგრძე 11 სმ-ია, ND ბისექტრისაა და $MD=3,5$ სმ. იპოვეთ MNK სამკუთხედის პერიმეტრი.

13. 48 სმ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედში ცნობილია, რომ $AB \cong AC$. AK მედიანაა. იპოვეთ AK მედიანის სიგრძე, თუ ABK სამკუთხედის პერიმეტრია 36 სმ.

14. სეიმური ვარაუდობს, რომ ერთი კუთხე 60° -ის მქონე SCP ტოლფერდა სამკუთხედი ასევე ტოლფერდაცაა. თქვენი აზრით, მართალს ამბობს ის? დაასაბუთეთ მოსაზრება (სურათი 11).



15. პრაქტიკული სამუშაო. კლასის მოსწავლეები იყოფიან 3 ჯგუფად.

I ჯგუფი: ABC ტოლფერდა სამკუთხედის (სურათი 12)

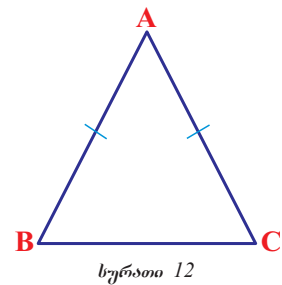
A წვეროდან ფუძისადმი ავლებს ბისექტრისას, მედიანასა და სიმაღლეს. განმარტავს მათ მდებარეობას.

II ჯგუფი: ABC ტოლფერდა სამკუთხედის B წვეროდან

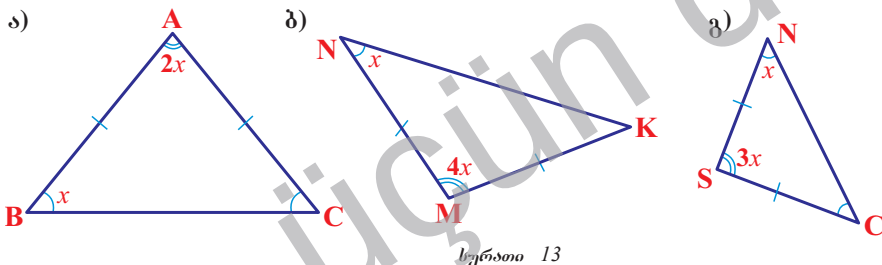
ავლებს ბისექტრისას, მედიანასა და სიმაღლეს. განმარტავს მათ მდებარეობას.

III ჯგუფი: ABC ტოლფერდა სამკუთხედის C წვეროდან

ავლებს ბისექტრისას, მედიანასა და სიმაღლეს. განმარტავს მათ მდებარეობას.



16. შეიძლება ვთქვათ, რომ ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა, თუ ა) $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$;
ბ) $\angle B = 36^\circ$, $\angle C = 72^\circ$; გ) $\angle A = 80^\circ$, $\angle C = 50^\circ$ დაასაბუთეთ მოსაზრებები.
17. განსაზღვრეთ ტოლფერდა სამკუთხედის დანარჩენი ორი კუთხე, თუ ერთ-ერთი კუთხე არის: ა) 58° ; ბ) 20° ; გ) 80° . აქ რამდენი შემთხვევაა შესაძლებელი?
18. განსაზღვრეთ სამკუთხედის კუთხეები ნახაზების საფუძველზე (სურათი 13).



19. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის წვეროს კუთხე 36° -ია, ფუძესთან მდებარე ერთ-ერთი წვეროდან კუთხიდან გაავლეთ ბისექტრისა. განსაზღვრეთ ახლად მიღებული სამკუთხედის კუთხეები.

2.15. სამკუთხედის აგება სამი გვერდის მიხედვით

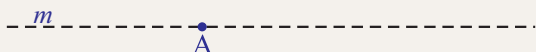
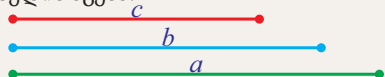
საქმიანობა

ფარგალი, სახაზავი

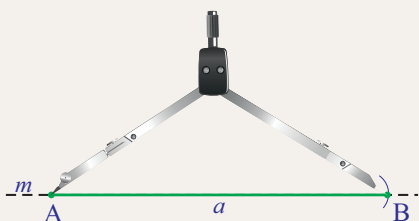
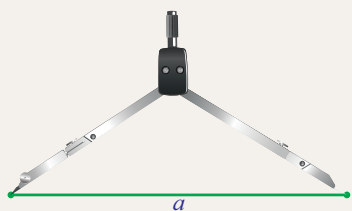
ააგეთ a , b და c სიგრძის გვერდების მქონე სამკუთხედი.

1. რა შეგიძლიათ თქვათ მოცემული მონაკვეთის სიგრძის გვერდების მქონე სამკუთხედის არსებობის შესახებ? შესაძლებელია ასეთი სამკუთხედის აგება?

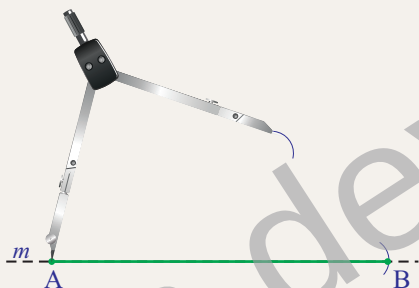
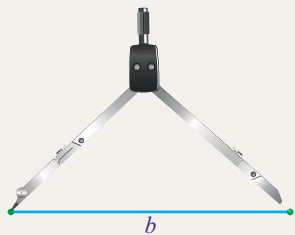
2. გაავლეთ ნებისმიერი m წრფე. აღნიშნეთ მასზე ნებისმიერი A წერტილი.



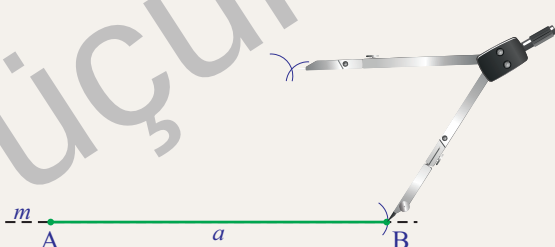
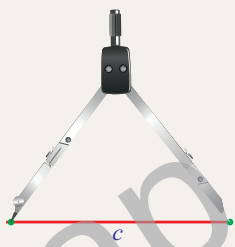
3. ფარგლის წვეროები a -მონაკვეთამდე გაშალეთ, წვეტიანი მხარე A წერტილზე დადეთ, აღნიშნეთ ცენტრით A წერტილში, a -რადიუსის მქონე წრეწირის m წრფესთან გადაკვეთის წერტილი B ასოთი.



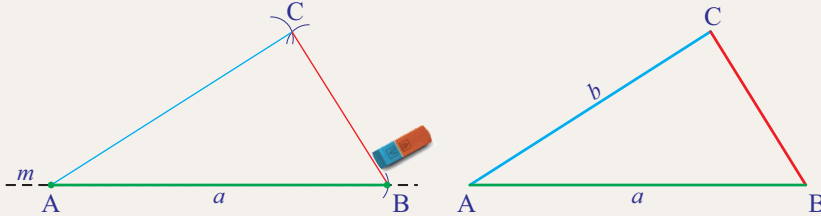
4. ფარგლის წვეროები b -მონაკვეთამდე გაშალეთ, წვეტიანი მხარე A წერტილზე დადეთ, დახაზეთ რკალი, რომლის ცენტრიც არის A წერტილში, რადიუსი კი a .



5. ფარგლის წვეროებს შორის მანძილი c -მდე შეამცირეთ. წვეტიანი მხარის B წერტილზე დადებით, დახაზეთ ცენტრით B წერტილში, c -რადიუსის მქონე რკალი.

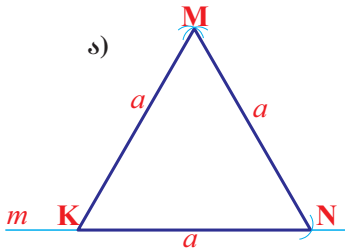


6. რკალების გადაკვეთის წერტილი აღნიშნეთ C ასოთი. C წერტილი შეაერთეთ A და B წერტილებთან. წაშალეთ ზედმეტი ხაზები. მიღებული ABC სამკუთხედი მოთხოვნილი სამკუთხედი.

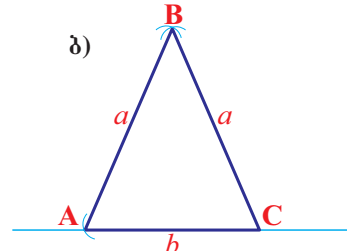


საგარჯიშოები

1. შეადგინეთ სურათი 1-ის ა) და ბ) ნახაზებზე მოცემული სამკუთხედების აგების ალგორითმი. ააგეთ ეს სამკუთხედები, როდესაც $a=3$ სმ, $b=2$ სმ. განსაზღვრეთ მიღებული სამკუთხედების სახე.

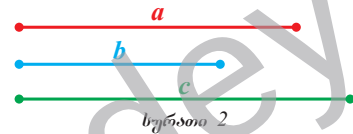


სურათი 1



2. ააგეთ სამკუთხედები, რომელთა გვერდების სიგრძეებია: ა) 4 სმ, 5 სმ, 7 სმ; ბ) 3 სმ, 4 სმ, 5 სმ; გ) 4 სმ, 4 სმ, 5 სმ; დ) 2,7 სმ, 4,3 სმ, 3,3 სმ. განსაზღვრეთ თითოეული სამკუთხედის სახე.

3. ააგეთ სამკუთხედი, რომლის გვერდები a , b და c სიგრძის მონაკვეთებია (სურათი 2). იქნება თუ არა კონგრუენტული კლასში თითოეული მოსწავლის მიერ აგებული სამკუთხედი? რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.



სურათი 2

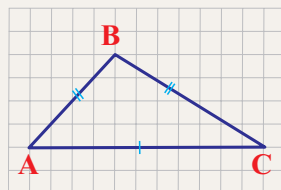
4. 2,8 სმ, 4,1 სმ და 4,9 სმ გვერდების სიგრძეების მქონე სამკუთხედის აგებისას, ნაილმა და სამირმა პირველ რიგში გადადეს სამკუთხედის უდიდესი გვერდი პორიზონტალურ წრფეზე. თუმცა, სამირის აგებული სამკუთხედი ამ წრფის ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობდა, ხოლო ნაილის აგებული სამკუთხედი კი-ქვედა ნახევარსიბრტყეში. თქვენი აზრით, რატომ მოხდა ასე? რა შეიძლება ითქვას ამ სამკუთხედების შესახებ? რომელმა ააგო სამკუთხედი სწორად?

5. ააგეთ სამკუთხედი, რომლის გვერდებია: ა) 0,024 მ, $\frac{3}{50}$ მ, 4,7 სმ;
ბ) 3,2 სმ, 30 მმ და 0,4 დმ.

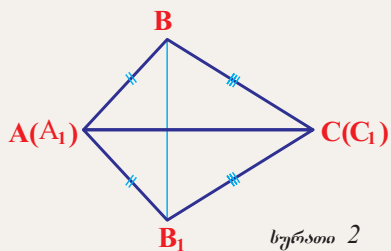
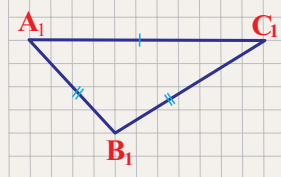
2.16. სამკუთხედების კონგრუენტულობის შესამე ნიშანი

საქმიანობა

1. ააგეთ ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $AB = 3$ სმ, $BC = 5$ სმ, $AC = 6$ სმ.
2. ააგეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $A_1B_1 = 3$ სმ, $B_1C_1 = 5$ სმ, $A_1C_1 = 6$ სმ.
3. მიღებული ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებები განათავსეთ, ისე, როგორც სურათი 2-ზეა მოცემული. შეაერთეთ B და B_1 წერტილები. განსაზღვრეთ მიღებული ABB_1 და CBB_1 სამკუთხედების სახეები. რა შეგიძლიათ თქვათ AB და A_1B_1 გვერდების შესახებ? BC და B_1C_1 გვერდების შესახებ?
4. როგორი კუთხეებია $\angle ABB_1$ და $\angle AB_1B$? კონგრუენტულია $\angle CBB_1$ და $\angle BB_1C$ კუთხეები?
5. შეიძლება ვთქვათ, რომ ABC და $A_1B_1C_1$ კუთხეები ტოლია? რატომ?
6. კონგრუენტულია ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები? თუ კონგრუენტულია, რომელი ნიშნის თანახმად?
7. როგორ შეიძლება გადმოვცეთ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების კონგრუენტულობა, თუ იმა-საც გავითვალისწინებთ, რომ AC და A_1B_1 გვერდებიც კონგრუენტულია?



სურათი 1



სურათი 2

თეორემა

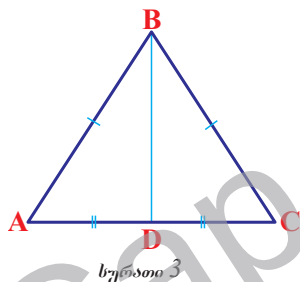
სამკუთხედების კონგრუენტულობა სამი გვერდის მიხედვით (გგგ)

თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი მეორე სამკუთხედის შესაბამისი სამი გვერდის კონგრუენტულია, მაშინ ეს სამკუთხედები კონგრუენტულებია.

ამ ნიშანს გგგ (გვერდი, გვერდი, გვერდი) ეწოდება.

თეორემის პირობა: $\triangle ABD$ და $\triangle BDC$, $AB \cong BC$, $AD \cong DC$, BD გვერდი საერთოა.

თეორემის დასკვნა: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (სურათი 3).



სურათი 3

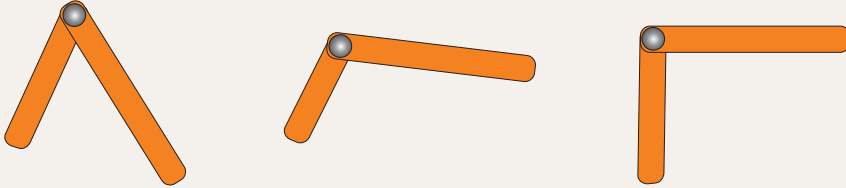
დაამტკიცეთ.

გამოიყენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობის I ან II ნიშანი.

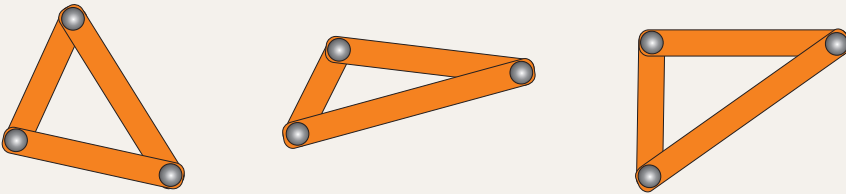
საქმიანობა

ფიგარი, ლურსმანი, ჩაქუჩი

- ორი ფიცრის ნაჭერის თითო წვერო ერთმანეთზე დადეთ და ლურსმნით მიაჭედეთ უმოძრაო დაფაზე. ამოძრავით ფიცრის ნაჭრების თავისუფალი წვეროები და გააჩერეთ სხვადასხვა მდგომარეობაში:

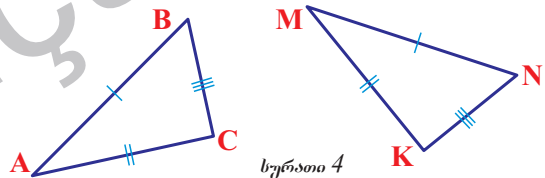


- ახსენით, რატომ მოძრაობენ ეს ფიცრის ნაჭრები. როგორ შეიძლება მოვიქცეთ, რომ ფიცრის ნაჭრებმა არ იმოძრაონ? რა გესმით, როდესაც საუბრობენ სამკუთხედის სიმყარის თვისებაზე? როგორ გამოიყენება ყოფა-ცხოვრებაში ეს თვისება?

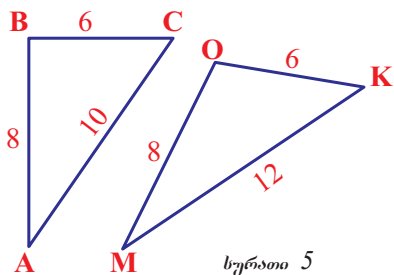


საგარჯიშოები

- ჩამოთვალეთ სურათი 4-ზე მოცემული სამკუთხედების კონგრუენტული ელემენტები. კონგრუენტულია ეს სამკუთხედები? რომელი ნიშნის თანახმად?

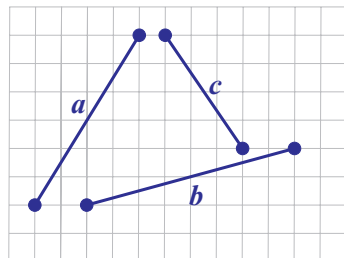


2. სურათი 5-ზე მოცემულია ABC და MOK სამკუთხედების გვერდები. კონგრუენტულია ეს სამკუთხედები? რატომ?



3. **პრაქტიკული სამუშაო.** უჯრებიანი რგულის ფურცელზე დახაზეთ ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდებიც a , b და c მონაკვეთების (სურათი 6) კონგრუენტულია. ფურცელი ორად გადაკვეთეთ და სამკუთხედი ამოჭერით მაკრატლით, რამდენი სამკუთხედი მიიღეთ? მოსწავლეები იყოფიან 3 ჯგუფად.

I ჯგუფი: მიღებულ სამკუთხედებს ისე ალაგებს მაგიდაზე, რომ a -ს ტოლი გვერდები ერთმანეთს დაემთხვეს, დანარჩენი გვერდები კი a -ს მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეებში იყოს.



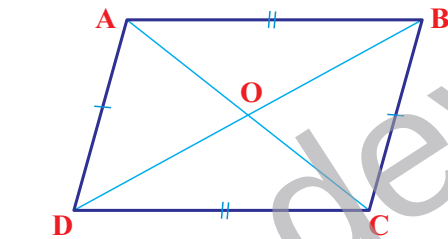
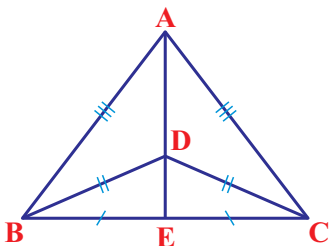
II ჯგუფი: მიღებულ სამკუთხედებს ისე ალაგებს მაგიდაზე, რომ b -ს ტოლი გვერდები ერთმანეთს დაემთხვეს, დანარჩენი გვერდები კი b -ს მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეებში მდებარეობდნენ.

სურათი 6

III ჯგუფი: მიღებულ სამკუთხედს ისე ალაგებს მაგიდაზე, რომ c -ს ტოლი გვერდები ერთმანეთს დაემთხვეს, დანარჩენი გვერდები კი c -ს მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეებში მდებარეობდნენ.

თითოეული ჯგუფი ასაბუთებს მიღებული სამკუთხედების კონგრუენტულობას.

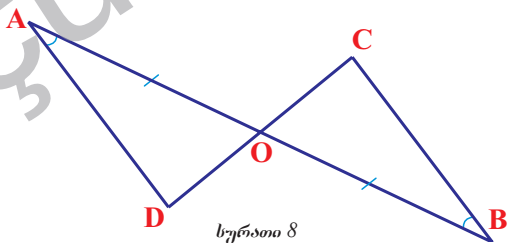
4. დაასახელეთ სურათებში მოცემული კონგრუენტული სამკუთხედები (სურათი 7).



სურათი 7

5. ABC სამკუთხედში: $AB = 11$ სმ, $BC = 8$ სმ, $AC = 9$ სმ და MNK სამკუთხედში: $MN = 9$ სმ, $NK = 11$ სმ, $MK = 8$ სმ. დაასახელეთ ამ სამკუთხედების კონგრუენტული კუთხეები.

6. AB და CD მონაკვეთები იკვეთებიან AB მონაკვეთის O შუაწერტილზე. დაამტკიცეთ $\triangle AOC \cong \triangle BOD$, თუ ცნობილია, რომ $\angle CBO \cong \angle DAO$ (სურათი 8).

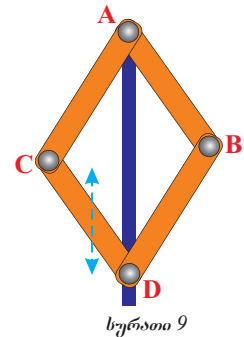


სურათი 8

7. შეავსეთ ცხრილი, თუ $\triangle ABC \cong \triangle KPM \cong \triangle DEF$.

$\triangle ABC$	AB = 10 სმ AC = 6 სმ BC = 11 სმ		
$\triangle KPM$		MK = 5 მმ KP = 9 მმ PM = 8 მმ	
$\triangle DEF$			EF = 17 მმ DF = 1,7 მმ DE = 0,20 მმ

8. პრაქტიკული სამუშაო. აიღეთ ტოლი სიგრძის 4 ფიცრის ნაჭერი. ისინი მიამაგრეთ ერთმანეთზე ლურსმნის საშუალებით, როგორც სურათზეა მოცემული (სურათი 9). მიღებული ხელსაწყოს A წვერო მიამაგრეთ ჯოხზე. D წვერო კი იმავე ჯოხზე მიუმაგრებელი დარჩეს. ეს ხელსაწყო გამოიყენება კუთხის შუაზე გასაყოფად. თქვენი აზრით, როგორ შეიძლება გავაკეთოთ ეს? ჩახაზეთ ნებისმიერი კუთხე. გაყავით კუთხე შუაზე აგებული ხელსაწყოს საშუალებით.



9. სურათი 10-ზე ცნობილია, რომ $BM \cong CM$, $BD \cong CD$.

დაამტკიცეთ: ა) $\triangle BDM \cong \triangle CDM$;

ბ) MD მონაკვეთი BMC კუთხის ბისექტრისაა.

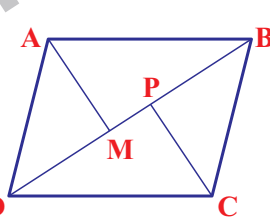
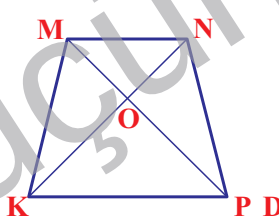
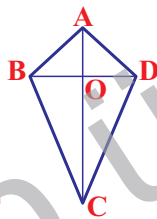
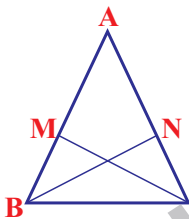
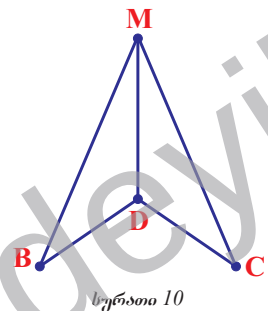
10. სურათი 11-ზე ცნობილია, რომ $BN \cong CM$ და $BM \cong CN$.

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $AB=AC$? დაასაბუთეთ პასუხი.

11. სურათი 12-ზე ABD და BDC ტოლფერდა სამკუთხედებს საერთო BD ფუძე გააჩნიათ. AC მონაკვეთი BD-ს O წერტილში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $\angle ABC \cong \angle ADC$

12. სურათი 13-ის თანახმად $MK \cong NP$ და $KN \cong MP$. განსაზღვრეთ $\angle KMP$, თუ $\angle KNP = 67^\circ$.

13. სურათი 14-ზე AM და CP მონაკვეთები ბისექტრისებია. $AD \cong BC$ და $AB \cong CD$. იპოვეთ $\angle BDC$ და DM-ის სიგრძე თუ $\angle ABD = 25^\circ$ და $BP = 3$ სმ.



თვითშემოწმება

1. მოცემული ნამრავლები ჩაწერეთ ხარისხის სახით:
 - ა) $(x+3)(x+3)(x+3)(x+3)$;
 - ბ) $(xy)(xy)(xy)(xy)(xy)$;
 - გ) $(a-b+c)(a-b+c)(a-b+c)$.
2. განსაზღვრეთ მოცემული ხარისხების მნიშვნელობის ბოლო ციფრი:
 - ა) 1256^{25} ; ბ) 999^{16} ;
 - გ) 1000^{100} ; დ) 25^{1256} ; ე) 18^{99} .
3. გამოთვალეთ გამოსახულებების მნიშვნელობები:
 - ა) $25^3 \cdot 25^6 : 25^2$;
 - ბ) $(-3)^{18} : (-3)^9 \cdot (-3)^5$;
 - გ) $17^6 \cdot 17^{35} : 17^9 \cdot 17^{25}$.
4. გაამარტივეთ გამოსახულებები:
 - ა) $4^{k+1} \cdot 4^{k-2} : 4^{2k}$;
 - ბ) $a^{m+1} : a^{-m-3} \cdot a^{11-m}$.
5. განსაზღვრეთ a^n -ის ნიშანი $a>0$ და $a<0$ -პირობებისათვის.
6. გაამარტივეთ გამოსახულებები:
 - ა) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 : 16^2$;
 - ბ) $49^4 : (-343)^2 : 21^2$.
7. ცნობილია, რომ ABD და CNM სამკუთხედები კონგრუენტულებია, თითოეულის პერიმეტრი 0,559 დმ-ია. განსაზღვრეთ CM გვერდის სიგრძე, თუ $AB = 13,8$ მმ, $BD = 2,03$ სმ.
8. გაამარტივეთ გამოსახულებები:
 - ა) $16x^2y \cdot \frac{1}{8}x^3y^4$;
 - ბ) $(2ab^3)^2 \cdot (-3a^2b)^3$;
 - გ) $11,3p^3k^8 \cdot 0,6pk^5$;
 - დ) $(1,8m^4n)^2 \cdot \frac{2}{3}mn^2$.

დაწერეთ მიღებული ერთწევრების კოეფიციენტები და ხარისხები.
9. მოცემულია $\triangle ABC \cong \triangle PNM$ სამკუთხედები. თუ $AB = 5$ სმ, $NM = 9$ სმ, $\angle B = 25^\circ$, $\angle N = ?$, $PN = ?$, $BC = ?$
10. გამოთვალეთ:
 - ა) $\frac{2^7 \cdot 3^{12}}{9^6 \cdot 4^3}$; ბ) $\frac{36^5 \cdot 6^7}{216 \cdot (6^4)^2}$; გ) $\frac{49 \cdot 7^3 \cdot 25^3}{125^2 \cdot 343}$.
11. აკიფმა ყოველწლიურად შეტანილი თანხის 12%-იანი ზრდის მქონე ბანკში 4000 მანეთი შეიტანა და 5 წლის შემდეგ ანაბარი უკან გამოიტანა. რამდენი ფული დაუბრუნა ბანკმა აკიფს?
12. ააგეთ სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებიც არის 1,6 სმ, 3,4 სმ და 3,1 სმ.
13. ყოველ წელს გასული წლის თანხის 20%-იანი ზრდის მქონე ბანკში შეტანილი გარკვეული თანხა 2 წლის შემდეგ 36000 მანეთი გახდა. რამდენი იყო თავდაპირველად ბანკში შეტანილი თანხა?
14. ტოლფერდა სამკუთხედის კუთხეებიდან ერთ-ერთი 42° -ია. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.
15. შეასრულეთ მოქმედებები:
 - ა) $11^\circ 25' + 53^\circ 40'$;
 - ბ) $28^\circ 53' - 13^\circ 46'$;
 - გ) $105^\circ 12' 23'' + 73^\circ 16' 49''$;
 - დ) $108^\circ - 70^\circ 19'$;
 - ე) $63^\circ 13' - 41^\circ 43'$;
 - ვ) $58^\circ 28' - 58^\circ 5'$;
 - ზ) $13^\circ 23' \cdot 6$;
 - თ) $16,2^\circ + 5^\circ 7' - 12,1^\circ$;
 - ი) $67^\circ 39' - 51,6^\circ$.

III განყოფილება

მრავალწევრს, რომლის თითოეული წევრიც სტანდარტული სახისაა და არ შეიცავს მსგავს წევრებს, **სტანდარტული სახის მრავალწევრი** ეწოდება. მრავალწევრის სტანდარტულ სახეზე დასაყვანად საჭიროა მსგავსი შესაკრებების შეერთება.

სტანდარტული სახის მრავალწევრში შემავალი ერთწევრებიდან ყველაზე მაღალი ხარისხის მქონე ერთწევრის ხარისხს მრავალწევრის ხარისხი ეწოდება.

მრავალწევრში შემავალ ნულხარისხიან ერთწევრს **თავისუფალი წევრი** ეწოდება.

ნიმუში

მაგალითი: $x^6 + 3xyx + x^2y + 4yx^2 - 7xxy - 6yxx + y^3y - 19$ მრავალწევრი დაიყვანეთ სტანდარტულ სახეზე, განსაზღვრეთ თავისუფალი წევრი და მისი ხარისხი.

ამოხსნა: დაიყვანოთ სტანდარტულ სახეზე მრავალწევრის წევრები და შევაერთოთ მსგავსი შესაკრებები: .

$$x^6 + 3xyx + x^2y + 4yx^2 - 7xxy - 6yxx + y^3y - 19 = x^6 + \underline{3x^2y} + \underline{x^2y} + \underline{4x^2y} - \underline{7x^2y} - \underline{6xy^2} + y^4 - 19 = x^6 + y^4 + x^2y - 6xy^2 - 19$$

$x^6 + y^4 + x^2y - 6xy^2 - 19$ მრავალწევრი სტანდარტული სახის მრავალწევრია.

ამ მრავალწევრში მონაწილე ერთწევრების ხარისხები შესაბამისად არის: 6; 4; 3; 3; 0. მათ შორის ყველაზე მაღალი ხარისხის მქონე ერთწევრია x^6 . ე.ი. მრავალწევრის ხარისხია 6. ამ მრავალწევრის თავისუფალი წევრია -19.

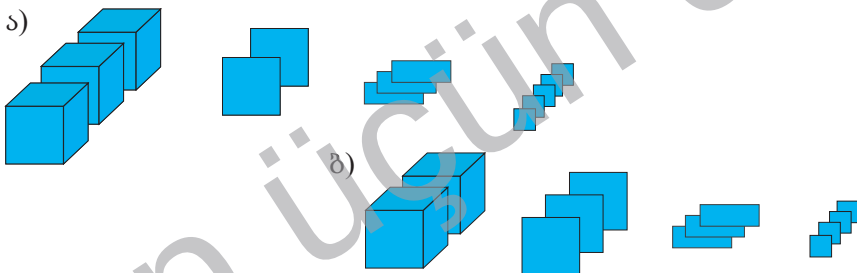
საგარჯიშოები

1. მოცემული მრავალწევრების წევრები ჩაწერეთ ცხრილში, ისე როგორც ნიმუშშია. ნაჩვენები და განსაზღვრეთ მრავალწევრის ხარისხი:

- ა) $2x + 5y - 12$; ბ) $-6x^4 + y^3 - 5y + 11$; გ) $14a^5b + ab^2 - a^2b + 8a - 7b$;
 დ) $8,2mnk - 1,02m^2n + 11a - 9$; ე) $\frac{1}{2}a - 0,6b - 3\frac{7}{9}c + 12ab - c + 7,2$.

მრავალწევრი	I წევრი	II წევრი	III წევრი	IV წევრი	თავისუფალი წევრი	ხარისხი
$4x^6y - 11x^3y + 0,5xy^2 + x - 9$	$4x^6y$	$-11x^3y$	$0,5xy^2$	x	-9	7

2. მოცემულია კუბი, რომლის წიბოც a სმ-ია, მართკუთხედი 1 სმ და a სმ გვერდებით და კვადრატი 1 სმ-იანი გვერდით. განსაზღვრეთ კუბის მოცულობა, მართკუთხედისა და კვადრატის ფართობი. ჩაწერეთ ალგებრული ჯამის სახით მიღებული ერთწევრები. დაასახელეთ თითოეული წევრი.



3. ჩაწერეთ მოცემული მრავალწევრების წევრები და ხარისხი:

- ა) $3x^5 + 2x^3 - 4$; ბ) $2x^4 - 3x + 2$; გ) $x^5 + x^4 - 2x^2 - 1$;
 დ) $2m^6 + 7$; ე) $4xy^6 + xy^2 - x^2 + y^8$; ვ) $a^3 - bc - 7$.

4. მრავალწევრი დაიყვანეთ სტანდარტულ სახეზე მსგავსი შესაკრებების შეერთებით:

- ა) $10x - 6xy + 3xy$; ბ) $4x^4 - 5x + 9x^2 - 7x^4 + 6x$;
 გ) $6ab - 11ab + 3a^2$; დ) $5a^3 + a^2 - 12 + 2a^2 + a^3 - a - 30$.

5. განსაზღვრეთ მოცემული მრავალწევრებიდან რომელია $3a^2 + b$ გამოსახულების ტოლი:

- ა) $4a^2 - 4b - a^2 + 17b - b$; ბ) $12a^3 - 9b - 9a^2 + 6b + b$;
 გ) $-0,7a^2 - 7b - 2,3a^2 + 8b$; დ) $1,8a^2 - 4,2b + 1,2a^2 + 5b + 0,2b$.

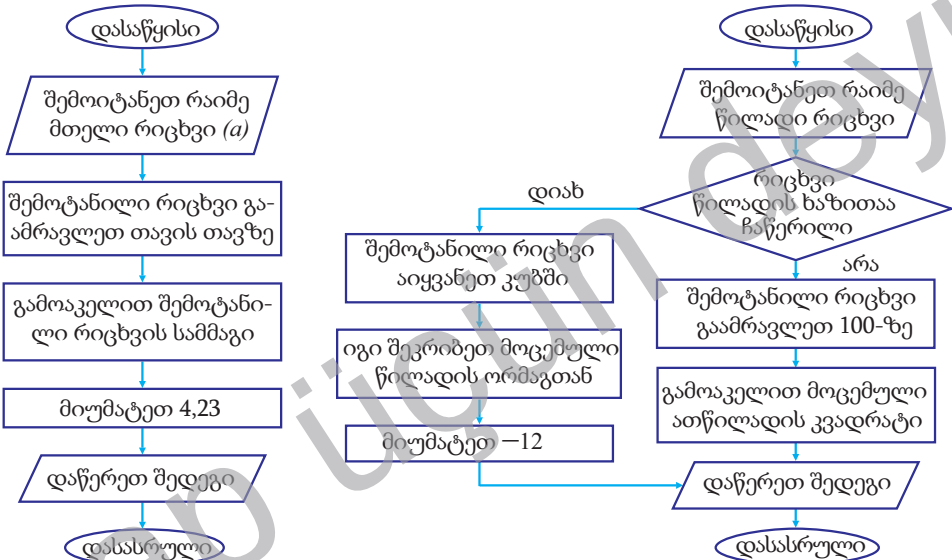
6. დაიყვანეთ სტანდარტულ სახეზე მრავალწევრები. ამ მრავალწევრებიდან რომლის თავისუფალი წევრია ნულისაგან განსხვავებული? დაწერეთ ყველა მრავალწევრის ხარისხი.

- ა) $-4p^4 + 21p^3 + 4p^4 - 8p^2 + 7p^2$;
 ბ) $2aa^2 + a^2 - 6a^2 + a^3 - a$;
 გ) $8xx^5 + 3xx^4 - 5x^2x^3 - 6xx^2$;
 დ) $5a \cdot 4b^2 - 0,8b \cdot 4b^2 - 2ab \cdot 3b + b \cdot 3b^2 - 1$.

7. განსაზღვრეთ მრავალწევრების ხარისხი:

- ა) $4a^6 - 2a^7 + a - 1$; ბ) $5p^3 - p - 2$;
 გ) $1 - 3x$; დ) $4xy + xy^2 - 5x^2 + y$;
 ე) $8x^4y + 5x^2y^3 - 11$; ვ) $xy + yz + xz - 1$.

8. დაწერეთ თითოეული ალგორითმის შესაბამისი მრავალწევრი. გამოთვალეთ შედეგი ცვლადის ადგილას რიცხვის ჩაწერით (გამოიყენეთ კალკულატორი):



3.2. მრავალწევრების შეკრება

საქმიანობა

მრავალწევრების ჯამი

1. იპოვეთ მრავალწევრების ჯამი მოდელის საფუძველზე.

$$\left(\begin{array}{c} \text{3 blue squares} \\ \text{2 blue rectangles} \\ \text{1 blue unit square} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{2 blue squares} \\ \text{2 blue rectangles} \\ \text{4 blue unit squares} \end{array} \right)$$

$$(3x + 3x + 2) + (2x + 2x + 4)$$

2. შეაერთეთ მსგავსი წევრები ფრჩხილების გახსნით. წარმოადგინეთ მიღებული მრავალწევრის წევრები.

3. მრავალწევრები ჩაწერეთ სვეტის სახით და შეკრიბეთ.

$$\begin{array}{r} 3x + 3x + 2 \\ + 2x + 2x + 4 \\ \hline 5x + 5x + 6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{5 blue squares} \\ \text{5 blue rectangles} \\ \text{6 blue unit squares} \end{array} \right)$$

$$(5x + 5x + 6)$$

მრავალწევრების ჯამის საპოვნელად იხსნება ფრჩხილები (თუ არის) და შეერთდება მსგავსი წევრები, თუ არის. მრავალწევრების სვეტის სახით შეკრებისას მსგავსი წევრები ერთმანეთის ქვეშ იწერება.

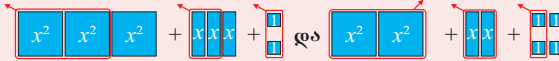
საგარჯიშოები

- ა) ჩაწერეთ ჯამის სახით $4x^3 - 5x - 7$ და $x^3 - 8x$ მრავალწევრები და წარმოადგინეთ მიღებული მრავალწევრი სტანდარტული სახით.
ბ) ჩაწერეთ ჯამის სახით $x^3 - 8x$ და $4x^3 - 5x - 7$ მრავალწევრები და წარმოადგინეთ მიღებული მრავალწევრი სტანდარტული სახით.
გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული შედეგების შესახებ. შეკრების რომელი თვისება გამოყენდება აქ?
- დამოუკიდებლად მოცემული მრავალწევრების ჯამი და იპოვეთ:
ა) $(2x + 3) + (3x - 9)$; ბ) $(2x^2 + 6x + 2) + (x^2 + x - 3)$;
გ) $(2x^3 + 6x - 2) + (x^3 - 1)$; დ) $(a^3 + 5a^2 - 10) + (a^3 - 17)$.
- მოცემული მრავალწევრები ჩაწერეთ სვეტის სახით და იპოვეთ ჯამი:
ა) $(4a + 5b - c) + (8a - 6b + c)$; ბ) $(3a^2 + 8a - 4) + (3 + 8a - 5a^2)$;
გ) $(b^3 - 3b^2 + 4b) + (b + 2b^2 + b^3)$; დ) $(0,1x^2 + 0,02y^2) + (0,17x^2 - 0,08y^2)$.
- ა) განსაზღვრეთ $P + Q$ მრავალწევრი, თუ $P = 5a^2 + b$; $Q = -4a^2 - b$
ბ) განსაზღვრეთ $A + B + C$ მრავალწევრის ხარისხი, თუ $A = a^2 - b^2 + ab$; $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$; $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$
- სეიმური ამბობს, რომ მიმდევრობით აღებული ხუთი ნატურალური რიცხვის ჯამი უნაშთოდ იყოფა 5-ზე. შეგიძლიათ აჩვენოთ მართალს ამბობს თუ არა ის? სწორია მოსაზრება, რომ მიმდევრობით აღებული ოთხი ნატურალური რიცხვის ჯამი იყოფა 4-ზე? რაზე გაიყოფა მიმდევრობით აღებული ოთხი კენტი რიცხვის ჯამი? კიდევ რომელი რიცხვების თვისებები შეგიძლიათ დაასახელოთ, რომლებიც ასეთ კანონზომიერებას აკმაყოფილებენ?

3.3. მრავალწევრების გამოკლება

საქმიანობა

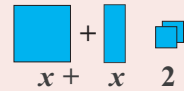
1. მოდელის საფუძველზე განსაზღვრეთ მრავალწევრები.



2. ჩაწერეთ მოდელი მრავალწევრების სხვაობის სახით.

$$(3x^2 + 3x + 2) - (2x^2 + 2x + 4)$$

3. გახსენით ფრჩხილები. როგორ შეიცვლიან ნიშნებს ამ დროს ფრჩხილების წინ მინუსი ნიშნის მქონე, ფრჩხილებში მყოფი ერთწევრები? ფრჩხილების გახსნის შემდეგ შეაერთეთ მსგავსი წევრები.



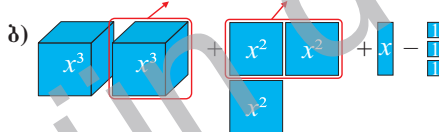
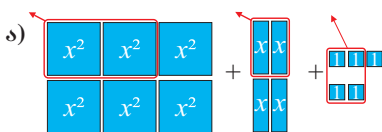
4. $(3x^2 + 3x + 2) - (2x^2 + 2x + 4)$ სხვაობის საპოვნელად მაკლების წევრებს ნიშანს ვუცვლით მოპირდაპირე ნიშნით და წარმოვადგენთ მრავალწევრის ჯამის სახით, იპოვეთ ჯამი მრავალწევრების სვეტის სახით ჩაწერით:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x + 2 \\ + (-2x^2) + (-2x) + (-4) \\ \hline x^2 + x - 2 \end{array}$$

ორი მრავალწევრის სხვაობის საპოვნელად საჭიროა საკლებს მიუშვათ მაკლების მოპირდაპირე.

საგარჯიშოები

1. ა) იპოვეთ $8a^3 - 12a + 3$ და $2a^3 - 8a$ მრავალწევრების სხვაობა და მიღებული მრავალწევრი წარმოადგინეთ სტანდარტული სახით.
ბ) იპოვეთ $2a^3 - 8a$ და $8a^3 - 12a + 3$ მრავალწევრების სხვაობა და მიღებული მრავალწევრი წარმოადგინეთ სტანდარტული სახით. გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული მრავალწევრების შესახებ.
2. დაწერეთ საკლები და მაკლები მრავალწევრები მოდელის საფუძველზე და იპოვეთ სხვაობა:



3. მოცემული სხვაობები დაამოძღვრეთ გეომეტრიული ფიგურების საშუალებით და გამოთვალეთ:

ა) $(7m + 3) - (3m + 1)$; ბ) $(5x^2 + 10) - (5x^2 + 8)$; გ) $(3a^3 + 2a + 4) - (a^3 + 2)$.

4. გამოთვალეთ:

ა) $\begin{array}{r} 6x^2 + 4x - 8 \\ - 2x^2 - 2x + 4 \\ \hline \end{array}$ ბ) $\begin{array}{r} 6x^3 + 4x^2 - 8x \\ - 2x^2 \\ \hline \end{array} + 4$

III განყოფილება

5. ცხრილში ნაჩვენებია სამირის, ნადის, უსუფისა და ნაზირის საბანკო ანგარიშებზე არსებული თანხები.

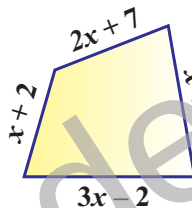
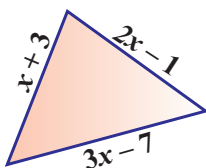
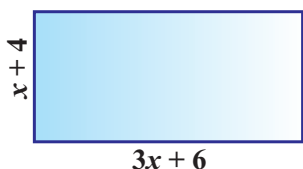
საბანკო ანგარიში	
სახელი	ბალანსი
სამირი	$6x + 7$
ნადი	$7x - 10$
უსუფი	$12x + 3$
ნაზირა	$4x + 27$

- ა) რომელი ორი ანგარიშის სხვაობაა $(5x + 13)$ -ის ტოლი?
 ბ) რომელი ორი ანგარიშის სხვაობაა $(8x - 24)$ -ის ტოლი?
 გ) რომელი ორი ანგარიშის სხვაობაა $(3x - 37)$ -ის ტოლი?
 დ) გამოთვალეთ ყველას ბალანსი, თუ $x = 100$ \$, განსაზღვრეთ რომლის ანგარიშზე რამდენი მანათია (აქ აღებულია $1\$ = 0,78$ რ).

6. ჯავიღმა აზერბაიჯანის სახალხო მხატვრის, მარალ რეჰმანზადეს ნაწარმოები "ზინალიკ" ჩარჩოში ჩასვა და კედელზე ჩამოკიდა. შიდა მართკუთხედის ფართობი $(x^2 + 7)$ კვადრატული სანტიმეტრია. ჩარჩოსთან ერთად სურათის ფართობი კი $-(2x^2 + 3)$ კვადრატული სანტიმეტრია. განსაზღვრეთ ჩარჩოს ფართობი.



7. შეადგინეთ ორი ისეთი მრავალწევრი, რომ მათი სხვაობა $(3a^2 - 5a + 4)$ მრავალწევრი იყოს.
8. განსაზღვრეთ A მრავალწევრი უცნობი შესაკრების, საკლებისა და მაკლების პოვნის წესების გამოყენებით და წარმოადგინეთ მისი ხარისხი.
- ა) $A + (12y^2 + 6y - 1) = -10y + 9$; ბ) $(-6x^2 + 7x - 11) - A = 2x^2 + 2x - 1$;
 გ) $A - (6a^2 - 5ab + b^3) = 4b^3 - 11ab$; დ) $(25x^5 - 13x^3 + 7) + A = 15x^5 - 13x^2$.
9. გამოთვალეთ მოცემული ფიგურების პერიმეტრი. განსაზღვრეთ მიღებული მრავალწევრების თავისუფალი წევრები.



10. შეასრულეთ მოქმედებები მრავალწევრებზე:

- ა) $(4a + 5b - 6c) + (3a - 7b + 2c) - (2a - b + 7c)$;
 ბ) $(3x^3 - 7x + 21) - (-x^3 - 2x^2 - 3x) + (4x^3 - 21)$;
 გ) $(9ax^3 - 5ax^2 + 6ax) - (-3ax^3 - 6ax^2 - 7ax) - (5ax^3 + ax)$;
 დ) $(a^3 - 0,12b^3) + (0,39a^3 - b^3 - 9) + (0,01a^3 - 1,88b^3 + 11)$.

11. გაამარტივეთ გამოსახულებები, თუ:

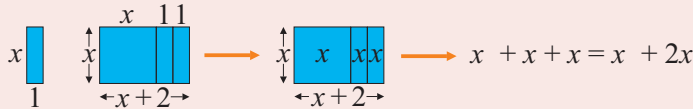
$$A = 2\frac{3}{5}b - \frac{3}{4}b^3; \quad B = \frac{1}{4}b^3 - 1\frac{3}{5}b; \quad C = 1\frac{1}{4}b^3 + 6\frac{3}{5}b$$

- ა) $A + B - C$; ბ) $A - B + C$; გ) $B - A + C$; დ) $C - B - A$.

3.4. ერთწევრის მრავალწევრზე გამრავლება

საქმიანობა

1. დავუშვათ, რომ მოცემულია მართკუთხედი, რომლის სიგანეც არის x , სიგრძე კი $x+2$. მოდელის მიხედვით დაადგინეთ, რომელი მრავალწევრის ტოლია მისი ფართობი.



2. მეორე მხრივ, გამოთვალეთ ამ მართკუთხედის ფართობი $S=x(x+2)$ ფორმულით. გაუტოლეთ ერთმანეთს ფართობის გამოთვლისათვის მიღებული ორი გამოსახულება. რა ტოლობა მიიღეთ?
3. ეცადეთ განმარტოთ ქვემოთ მოცემული ტოლობის სისწორე. რომელი მოქმედებაა შესრულებული? გამრავლების რომელი თვისებაა გამოყენებული?

$$x(x+2) = x \cdot x + x \cdot 2 = x^2 + 2x$$

ერთწევრის მრავალწევრზე გამრავლებისათვის საჭიროა ერთწევრი გავამრავლოთ მრავალწევრის თითოეულ წევრზე, მიღებული ნამრავლები ჩავწეროთ ალგებრული ჯამის სახით.

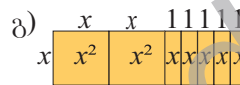
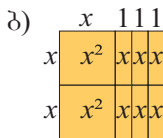
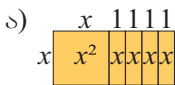
ნიმუში

მაგალითი: იპოვეთ $-3a^2$ ერთწევრისა და $(4a^3 - a + 1)$ სამწევრის ნამრავლი.

ამოხსნა: $-3a^2(4a^3 - a + 1) = -3a^2 \cdot 4a^3 - (-3a^2 \cdot a) + (-3a^2 \cdot 1) = -12a^5 + 3a^3 - 3a^2$.

საგარჯიშოები

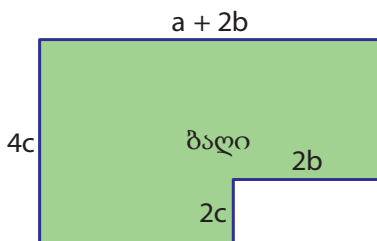
1. მოდელის საფუძველზე ორი ხერხით გამოთვალეთ მოცემული მართკუთხედების ფართობი. რა შეგიძლიათ თქვათ მიღებული გამოსახულებების შესახებ?



2. იპოვეთ ნამრავლი მოდელის შედგენით:
 - ა) $2x(x+4)$;
 - ბ) $x(3x+1)$;
 - გ) $3x(x+2)$.
 3. ნამრავლების პოვნისას გამოიყენეთ გამრავლების მიმართულების მაჩვენებელი ისრები და განსაზღვრეთ მიღებული მრავალწევრის ხარისხი და თავისუფალი წევრი.
 - ა) $5(2x+7)$;
 - ბ) $3m(m+9)$;
 - გ) $(b-11) \cdot 8b$;
 - დ) $x(-3x+6)$;
 - ე) $2x(5x^2-3x)$;
 - ვ) $(10c^5+2c^3) \cdot (-2c^2)$;
 - ზ) $6(a^2-2a+6)$;
 - თ) $-10x^2(-4x^3-3x^2+5)$;
 - ი) $n^2(7n^3+11n^2-1)$;
 - კ) $2ab(4a^2b^3+5ab^3-2,1ab)$;
 - ლ) $-3x^2y^3(-1,1-2xy^2+0,5x-2,3y^3)$.
- გამრავლების რომელი თვისებაა გამოყენებული?

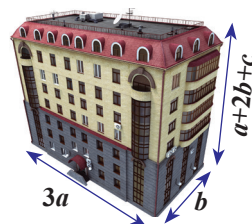
III განყოფილება

4. მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის შენობის სიგრძეა $3a$, სიგანე b , სიმაღლე კი $(a + 2b + c)$. რომელი მრავალწევრით განისაზღვრება შენობის მოცულობა?



ა)
$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ x \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ 5x^3 + 3x^2 - 5x - 3 \end{array}$$

5. გეგმაზე მოცემულია ნამიკის ბაღის პროექტი. განსაზღვრეთ



გეგმაზე ბაღის ფართობი, თუ $a = 8$ სმ, $b = 5$ სმ, $c = 3$ სმ. იპოვეთ ბაღის რეალური ფართობი, თუ იცით, რომ მასშტაბია 1 : 200.

6. ნიმუშის საფუძველზე იპოვეთ ერთწევრისა და მრავალწევრის ნამრავლი სვეტური გამრავლების ხერხის გამოყენებით:

ბ)
$$\begin{array}{r} -7a^3b \\ x \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ -2a^3 - 6a^3b - 5a - 3b \end{array}$$

$4x^2$	x	5
$2x^3 + x$		
$8x^5$	$4x^3 + 20x^2$	

7. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

ა) $(6m^2 - 4m + 9n) \left(-\frac{1}{6}m^2 \right);$

გ) $2a(a - b) - a(a - 2b);$

ე) $(1 + 3a - a^4) \cdot 5a;$

ზ) $\frac{2}{7}x(1,4x^2 - 3,5y);$

ი) $-\frac{1}{3}c^2(1,2d^2 - 6c);$

ბ) $-0,5x^2(2x^2 + 6x - 7);$

დ) $-x(x^2 - 7) + x^2(x - 3);$

ვ) $3a^4x(a^2 - 2ax + x^3 - 1);$

თ) $\frac{1}{2}ab \left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{4}{5}b^2 \right);$

კ) $-\frac{2}{5}a^2y^5 \left(5ay^2 - \frac{1}{2}a^2b - \frac{5}{6}a^3 \right).$

8. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $5x + 3(x - 1) = 6x + 11;$

ბ) $3x - 5(2 - x) = 54;$

გ) $8(y - 7) - 3(2y + 9) = 15;$

დ) $0,6 - 0,5(y - 1) = y + 0,5;$

ე) $6 + (2 - 4x) + 5 = 3(1 - 3x);$ ვ) $0,15(x - 4) = 9,9 - 0,3(x - 1).$

9. ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის არის:

ა) $2(3 - 5c)$ გამოსახულების მნიშვნელობა $4(1 - c)$ გამოსახულების მნიშვნელობაზე 1 ერთეულით ნაკლები?

ბ) $-3(2x + 1)$ გამოსახულების მნიშვნელობა $(8x + 5)$ გამოსახულების მნიშვნელობაზე 20 ერთეულით მეტი?

გ) $(5x + 7)$ გამოსახულების მნიშვნელობა $(61 - 10x)$ გამოსახულების მნიშვნელობებზე 3-ჯერ ნაკლები?

დ) $8-y$ გამოსახულების მნიშვნელობა $(7+y)$ გამოსახულების მნიშვნელობაზე 2-ჯერ მეტი?

10. სამკუთხედის პერიმეტრი 44 სმ-ია. მისი ერთი გვერდი მეორე გვერდზე 4 სმ-ით ნაკლებია, მესამე გვერდზე კი 2-ჯერ მეტი. განსაზღვრეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

საქმიანობა

- $$(x+3)(2x+1) = x \cdot 2x + x \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 2x^2 + 7x + 3$$

- $$\begin{array}{r} x+3 \\ \times 2x+1 \\ \hline 2x^2+x \\ + \quad \quad 6x+3 \\ \hline 2x^2+7x+3 \end{array}$$

საგარჯიშოები

- $$d) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x^2 & x^2 & x & x \\ \hline x & x & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta) \begin{array}{c|cc} & x^2 & x & x \\ \hline x & 1 & 1 & 1 \\ \hline x & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

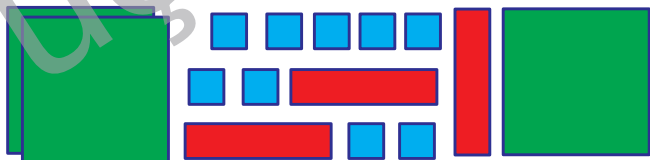
$$\mathfrak{d}) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x^2 & x^2 & x^2 & xx \\ \hline x & x & x & 11 \\ \hline \end{array}$$

g)

x^2	x^2	x
x	x	1
x	x	1
x	x	1

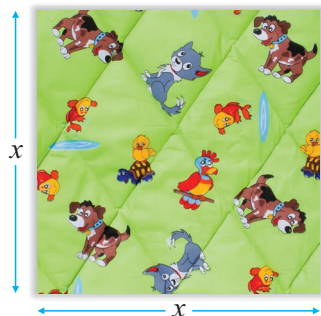
- 5) $(x+3)(x+3)$; 8) $(x+1)(x+4)$; 9) $(2x+1)(x+3)$; 10) $(3x+1)(x+2)$;
 6) $(x+4)(2x+3)$; 7) $(3x+1)(x+1)$; 11) $(x+2)(3x+2)$; 12) $(x+1)(x+5)$.

- ფერად ქაღალდებზე გამოჭერით რამდენიმე მწვანე კვადრატო, რომლის გვერდის სიგრძეც 3 სმ-ია, რამდენიმე წითელი მართკუთხედი, რომლის სიგანე 1 სმ, სიგრძე-3 სმ-ია და რამდენიმე ლურჯი კვადრატო, რომლის გვერდიც 1 სმ-ია. ამ ფიგურების გამოყენებით შეადგინეთ ნებისმიერი ორი ორწევრის სამრავლის მოდე-ლი.

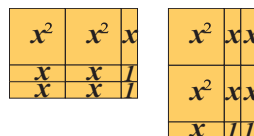


III განყოფილება

4. ბავშვის საბანი კვადრატის ფორმისაა, რომლის გვერდის სიგრძეც x სმ-ია. ზრდასრული ადამიანის საბნის სიგრძე ბავშვის საბნის გვერდზე 30 სმ-ით, სიგრძე კი 40 სმ-ით მეტია. დაბაზე ბავშვის საბნის გამოსახველი კვადრეტი და მისი გვერდების შესაბამისად 30 სმ-ით და 40 სმ-ით გაზრდით გამოსახეთ ზრდასრული ადამიანის საბანი. როგორ შეიცვლება ფართობი ამ შემთხვევაში? ზრდასრული ადამიანის საბნის ფართობი ჩაწერეთ მრავალწევრის სახით ორწევრების ნამრავლებით გამოსახვით.



5. სამირი ამბობს, რომ მოცემული მოდელები ერთი და იგივე ორწევრების ნამრავლს ასახავს. ანარი კი ამბობს, რომ ის არასწორად ფიქრობს. თქვენი აზრით, რომელია მართალი მათ შორის? სურათზე მოცემული გამოსახულება გამრავლების რომელ თვისებას ასახავს?



6. იპოვეთ მრავალწევრების ნამრავლი სვეტებად ჩაწერით:

- ა) $(x^2 + 2)(x - 3)$;
 ბ) $(3x^2 - 5x)(2 - x)$;
 გ) $(c - 4)(c + 4)$;
 დ) $(5x^2 - 6y^2)(6x^2 - 5y^2)$;
 ე) $(a^2 + 2b)(2a + b^2)$;
 ვ) $(x^2 + 2x + 1)(x + 3)$;
 ზ) $(-p + q)(-1 - q)$.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 3x^3 \\
 \underline{x + 5} \\
 2x^5 + 10x^4 \\
 + \quad 3x^4 + 15x^3 \\
 \hline
 2x^5 + 13x^4 + 15x^3
 \end{array}$$

7. მრავალწევრების ნამრავლის პოვნისას გამოიყენეთ ერთწევრის მრავალწევრზე გამრავლება.

- ა) $(2x^2 + 7x - 3)(x + 3)$;
 ბ) $(x^3 - 11xy + 5y)(xy - x)$;
 გ) $(a - b - c + k)(1 - ac)$;
 დ) $(9m^2 - 5mn + n^2)(3m - n)$;
 ე) $\left(\frac{3}{4}ab - 2b^2 + \frac{1}{2}\right)(a + 6b)$.

$$\begin{aligned}
 (3a^2 - 3a + 5)(a - 7) &= \\
 &= 3a^2 \cdot (a - 7) - 3a \cdot (a - 7) + \\
 &\quad + 5 \cdot (a - 7) = 3a^3 - 21a^2 - 3a^2 + \\
 &\quad + 21a + 5a - 35 = 3a^3 - 24a^2 + \\
 &\quad + 26a - 35
 \end{aligned}$$

8. სევიჩმა გამოთვლების ჩატარებით განსაზღვრა, რომ როდესაც $x = 2\frac{1}{7}$, მაშინ $(5x - 1)(x + 3) - (x - 2)(5x - 4)$ გამოსახულების მნიშვნელობა 49-ის ტოლია. როგორ შეიძლება შევამოწმოთ მისი შედეგის სისწორე მარტივი გზით?

9. გაამარტივეთ მოცემული გამოსახულებები:

- ა) $(x + 3)(x - 3) + (4 - x)x - 3x$; ბ) $x(1 - 2x) - (x - 3)(x + 3) + 3x^2$;
 გ) $x^2(3 - x) - (2 - x^2)(x + 1) - 4x^2$; დ) $(x + 2)(x + 2) - x(5 - x) - 2x^2$.

განსაზღვრეთ x -ის რა მნიშვნელობისთვის არის ამ გამოსახულების მნიშვნელობა a -ს ტოლი?

3.6. მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა

საქმიანობა

მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა:

1. რომელია ერთნაირი მამრავლი ab და $2b$ ერთწევრებში, რომლებიც $ab - 2b + 3a - 6$ მრავალწევრის შესაკრებებია? და რა არის საერთო მამრავლი $3a$ და 6 ერთწევრებში? დააჯგუფეთ ეს ერთწევრები და ჩაწერეთ ფრჩხილებში.
2. განმარტეთ, მოცემული მრავალწევრის $(ab - 2b) + (3a - 6)$ სახით ჩაწერით რომელი მოქმედება შესაძლებელია. ყველა ფრჩხილებიდან ერთნაირი მამრავლი ფრჩხილებს გარეთ გაიტანეთ. რა სახეს მიიღებს ამ დროს მოცემული გამოსახულება?
3. რომელი მამრავლებისაგან შედგება $b(a - 2) + 3(a - 2)$ გამოსახულებაში მონაწილე შესაკრებები? რომელია მათ შორის ერთნაირი მამრავლი?
4. რა გამოსახულებას ჩაწერთ ფრჩხილების შიგნით, თუ $(a - 2)$ მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გაიტანით?
5. რომელი ორწევრების ნამრავლისაგან შედგება მიღებული გამოსახულება? რას დაარქმევდით ამ მოქმედებას? ახსენით მოსაზრებები.

ნიმუში

მაგალითი: დაშალეთ მამრავლებად მრავალწევრი $ac + bd - bc - ad$.

ამოხსნა: მოცემულ მრავალწევრში დააჯგუფეთ საერთო მამრავლების მქონე ერთწევრები:

$$ac + bd - bc - ad = ac - bc + bd - ad$$

საერთო მამრავლი გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ: $ac - bc$ გამოსახულებაში საერთო მამრავლია c , $bd - ad$ გამოსახულებაში კი საერთო მამრავლი არის $-d$. (ფრჩხილებში $(a - b)$ მამრავლის მისაღებად მამრავლი $-d$ გადის ფრჩხილებს გარეთ).

$c(a - b) - d(a - b)$. ამ გამოსახულებაში საერთო მამრავლი $(a - b)$ ორწევრია. თუ გავიტანთ მას ფრჩხილებს გარეთ, მივიღებთ: $(a - b)(c - d)$.

ე.ი. მრავალწევრი ჯუფთებადობის გზით დავშალეთ მამრავლებად:

$$ac + bd - bc - ad = ac - bc + bd - ad = c(a - b) - d(a - b) = (a - b)(c - d).$$

ნიმუშში მოცემული ხერხი მრავალწევრის ჯუფთებადობის გზით მამრავლებად დაშლის ხერხია.

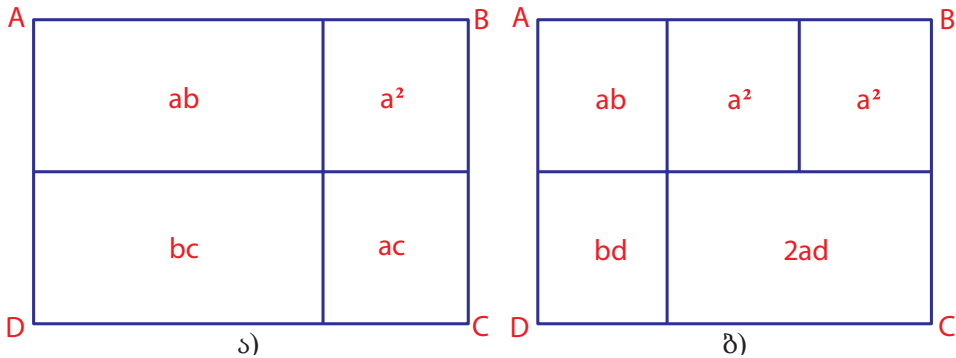
საგარჯიშოები

1. ქველემ რამდენიმე მრავალწევრი დაშალა მამრავლებად ქვემოთ მოცემული სახით. განსაზღვრეთ, სწორია თუ არასწორი ორწევრების ნამრავლის პოვნით მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა.

მრავალწევრი	მამრავლებად დაშლა	სწორია	არასწორია
$x(b + c) + 4b + 4c$	$(x + 4)(b + c)$		
$2c - 2d + p(c - d)$	$(2 - c)(p - d)$		
$mx + my + 6x + 6y$	$(m + 6)(x + y)$		

III განყოფილება

2. ჩაწერეთ ABCD მართკუთხედის ფართობის გამომსახველი მრავალწევრი. სურათის საფუძველზე განსაზღვრეთ, რომელი ორწევრების ნამრავლების ტოლია ეს მრავალწევრი.



3. შეადგინეთ მოცემული მრავალწევრის შესაბამისი მართკუთხედის მოდელი. განსაზღვრეთ, თუ რომელი ორწევრებით გამოისახება მართკუთხედის გვერდები.
- ა) $ab + ac + 2b + 2c$; ბ) $x^2 + 2xy + y^2$; გ) $8y + cz + 8z + cy$.
4. ცხრილში მოცემულია მრავალწევრების მამრავლებიდან ერთ-ერთი. განსაზღვრეთ, რომელი ორწევრის ტოლია უცნობი მამრავლი.

მრავალწევრი	I მამრავლი	II მამრავლი
$ax + 6(b + x) + ab$	$a + 6$	?
$mn - mk + xk - xn$	?	$m - x$
$ax - 2bx + ay - 2by$	$x + y$	?
$1 - bx - x + b$	$1 - x$	?

5. მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად:

- ა) $x^3 + x^2 + x + 1$; ბ) $a^2 - ab - 8a + 8b$;
 გ) $y^5 - y^3 - y^2 + 1$; დ) $ab - 5b + b^2 - 5a$;
 ე) $a^4 + 2a^3 - a - 2$; ვ) $7x - xy + 7y - x^2$;
 ზ) $b^6 - 3b^4 - 2b^2 + 6$; თ) $kn - mn - n^2 + mk$.

$$\begin{aligned}
 & 3x^3 - 2y^3 - 6x^2y^2 + xy = \\
 & = 3x^3 - 6x^2y^2 + xy - 2y^3 = \\
 & = 3x^2(x - 2y^2) + y(x - 2y^2) = \\
 & = (x - 2y^2)(3x^2 + y)
 \end{aligned}$$

6. სამირმა $a^2 + 7a + 12$ სამწევრი $7a$ ერთწევრის $3a$ და $4a$ ერთწევრების ჯამის სახით წარმოადგენით, ჯუფთებადობის გზით დაშალა მამრავლებად. თქვენი აზრით, რატომ გააკეთა ეს სამირმა? ნამიკმა კი $7a$ ერთწევრი $2a + 5a$ ჯამის სახით წარმოადგინა. თუმცა მრავალწევრი მამრავლებად ვერ დაშალა. რატომ? განმარტეთ მოსაზრებები.
7. $x^2 + 6x + 5$ მრავალწევრის მამრავლებად დაშლისათვის შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული ალგორითმი:
- იპოვეთ ორი ნატურალური რიცხვი, რომელთა ნამრავლი 5, ჯამი კი 6-ია.
 - $6x$ ერთწევრი წარმოადგინეთ ისეთი ორი ერთწევრის ჯამის სახით, რომ მათი კოეფიციენტები პირველი ბრძანების შედეგად მიღებული ნატურალური რიცხვები იყოს.
 - ჯუფთებადობის გზით მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად.
 - შეამოწმეთ შედეგის სისწორე მიღებული ორწევრების ნამრავლის პოვნით.

8. ქვემოთ მოცემული მრავალწევრები დაშალეთ მამრავლებად წინა დავალებაში მოცემული ალგორითმის გამოყენებით:

- ა) $a^2 - 5a + 4$; ბ) $a^2 - 6a - 16$; გ) $x^2 + 9xy + 8y^2$;
 დ) $a^2 + 7ab + 6b^2$; ე) $y^2 - 9xy + 8x^2$; ვ) $m^2 - 5mn + 4n^2$.

9. გულნარმა $2am + 2an - 3bn - 3bm$ სამწევრში $(2am + 2an) - (3bn + 3bm)$ ჯუფთება მოახდინა და დაშალა მამრავლებად, ალიმ კი იგივე მრავალწევრი $(2am - 3bm) + (2an - 3bn)$ სახით დააჯგუფა და მამრავლებად დაშალა. ბავშვებიდან რომელმა მოახდინა სწორი ჯუფთება? გამოთქვით მოსაზრებები მათ მიერ მიღებული შედეგების შესახებ.

10. დაშალეთ მამრავლებად გამოსახულებები და გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მოცემული მნიშვნელობისათვის:

- ა) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$, $x = -3$, $a = 4$;
 ა) $m^2 - mn - 3m + 3n$, $m = 0,5$, $n = 0,25$;
 გ) $a^2 + ab - 11a - 11b$, $a = 6,6$, $b = 0,4$;
 დ) $a^2 - ab - 2a + 2b$, $a = \frac{7}{20}$, $b = 0,15$.

11. გამოთვალეთ:

- ა) $139 \cdot 18 + 139 \cdot 21 + 261 \cdot 21 + 261 \cdot 18$;
 ბ) $125 \cdot 48 - 31 \cdot 82 - 31 \cdot 43 + 125 \cdot 83$;
 გ) $44,7 \cdot 13 - 2 \cdot 44,7 + 13 \cdot 5,3 - 2 \cdot 5,3$;
 დ) $3\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{5} + 4,2 \cdot \frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{4}{5} + 2,8 \cdot \frac{2}{3}$.

12. რა შეგიძლია ვთქვათ მამრავლების შესახებ, თუ ამ მამრავლების ნამრავლი ნულის ტოლია? თქვენი აზრით, თითოეული მამრავლი ნულის ტოლია? თუ არც ერთი მამრავლი ნულის ტოლი არ არის, შესაძლებელი იქნება, რომ ეს ნამრავლი იყოს ნულის ტოლი?

13. ამოხსენით განტოლებები ნამრავლის ნულთან ტოლობის პირობის გამოყენებით:

- ა) $x(x - 8) + 2(x - 8) = 0$; ბ) $y(y - 12) + y - 12 = 0$;
 გ) $a + 4 - a(a + 4) = 0$; დ) $(x^2 - 5x) + x - 5 = 0$;
 ე) $(x^2 + 7x) - 4x - 28 = 0$; ვ) $5x^2 - 10x + (x - 2) = 0$.

14. წერტილების ადგილას ჩაწერეთ ისეთი ერთწევრი, რომ ტოლობა სწორი იყოს:

- ა) $6a^3 - 15a^2b - 14ab + \dots = (2a - 5b)(\dots - \dots)$;
 ბ) $12x^3 + 42x^2y - \dots - 35y^3 = (\dots + \dots)(6x^2 - 5y^2)$;
 გ) $24m^4 - 18m^3 - 4mn^3 + \dots = (\dots - \dots)(\dots - \dots)$;
 დ) $36y^5 - 54y^4 + 10y - \dots = (\dots - \dots)(\dots + \dots)$.

15. მოცემული გამოსახულებები დაშალეთ მამრავლებად:

- ა) $x(x + 2) - (y + 1)(y - 1)$;
 ბ) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$.

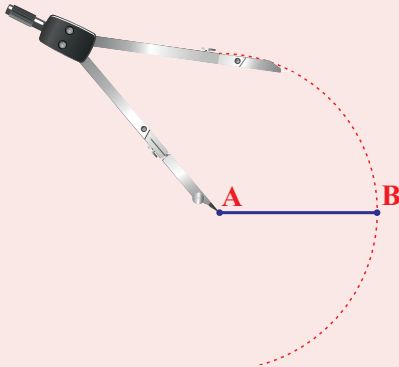
3.7. მონაკვეთის შუაზე გაყოფა

საქმიანობა

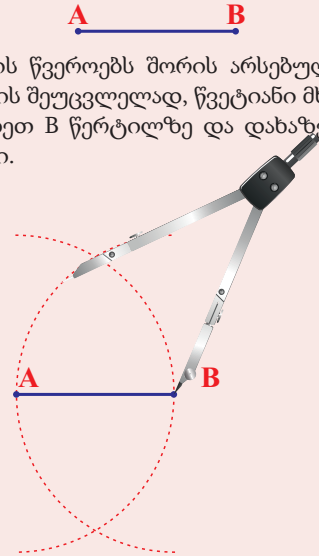
ფარგალი, სახაზავი

მონაკვეთის შუაწერტილის პოვნა:

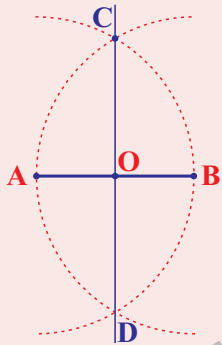
1. დახაზეთ 4 სმ-იანი AB მონაკვეთი.
2. ფარგლის წვეროები გაშალეთ AB მონაკვეთის წვეროებამდე. მისი წვეტიანი მხარე A წერტილზე დადეთ და AB-ს ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირი დახაზეთ. (სურათზე წარმოდგენილია წრეწირის საჭირო ნაწილი).



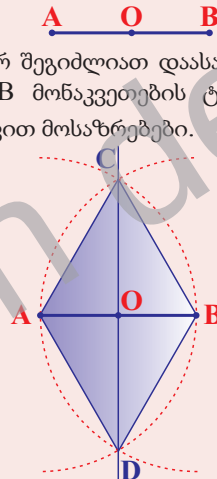
3. ფარგლის წვეროებს შორის არსებული მანძილის შეუცვლელად, წვეტიანი მხარე დადეთ B წერტილზე და დახაზეთ წრეწირი.



4. სახაზავის დახმარებით გაავლეთ წრფე, რომელიც წრეწირების გადაკვეთის წერტილებზე (C და D წერტილებზე) გადის. აღინიშნეთ O ასოთი ამ წრფის AB მონაკვეთთან გადაკვეთის წერტილი. O წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია და მას შუაზე ყოფს.



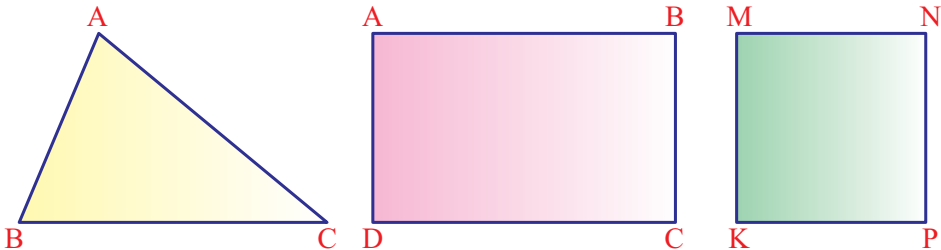
5. როგორ შეგიძლიათ დაასაბუთოთ OA და OB მონაკვეთების ტოლობა? გამოთქვით მოსაზრებები.



6. რა შეიძლება ითქვას ADC და BDC სამკუთხედების სახეების შესახებ? კონგრუენტულია ეს სამკუთხედები? CO მონაკვეთი ABC სამკუთხედის ბისექტრისა? შეგიძლია ვუწოდოთ CO მონაკვეთს ABC სამკუთხედის მედიანა? რატომ? თუ CO მედიანაა, მაშინ O წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია?

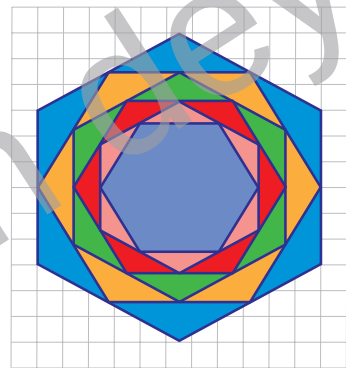
საგარჯიშოები

- დახაზეთ ვერტიკალურ მდგომარეობაში ნებისმიერი სიგრძის MN მონაკვეთი. ააგეთ მისი შუაწერტილი.
- ააგეთ მოცემული ორი a და b მონაკვეთის ჯამის (სხვაობის) ტოლი მონაკვეთი და მიღებული მონაკვეთი შუაზე გაყავით.
- პრაქტიკული სამუშაო.** მოსწავლეები იყოფიან 3 ჯგუფად. პირველი ჯგუფი სურათი 1-ზე მოცემულ ABC სამკუთხედის, მეორე ჯგუფი $ABCD$ მართკუთხედის, მესამე ჯგუფი კი $MNPK$ კვადრატის შუაწერტილებს პოულობს ფარგლის საშუალებით და აკავშირებს წერტილებს მიმდევრობით. თითოეული ჯგუფი აფერადებს მიღებულ ფიგურას.



სურათი 1

- დახაზეთ ზღაგკუთხა MNK სამკუთხედი. ფარგლის საშუალებით ააგეთ მისი მედიანები.
- 9,6 სმ-იანი მონაკვეთი გაყავით ოთხ ტოლ ნაწილად. ამისათვის რამდენ ნაწილად უნდა გაიყოს ეს მონაკვეთი თავდაპირველად? გაყოფის დამთავრების შემდეგ მიღებული მონაკვეთების სიგრძეების გაზომვით დააზუსტეთ, რომ სწორად განახორციელეთ აგება.
- როგორ შეიძლება გავყოთ 3 ტოლ ნაწილად მოცემული მონაკვეთი ფარგლის გამოყენებით? $AB = 12$ სმ სიგრძის მონაკვეთი გაყავით 3 ტოლ ნაწილად.
- უჯრებიანი რვეულის ფურცელზე დახაზეთ ექვსკუთხა ფიგურა (სურათი 2), რომლის ყველა გვერდი ტოლია. ყოველ ჯერზე, მისი გვერდების შუაზე გაყოფით მიღებული წერტილები შეაერთეთ. ეს აგება გაიმეორეთ 5-ჯერ. გააფერადეთ მიღებული ნახაზი. დახატეთ რაიმე მოხატულობა სხვა ფიგურის ჩახაზვისას.
- მოცემულია:
 - AB მონაკვეთი;
 - ABC სამკუთხედი;
 - $ABCD$ მართკუთხედი;
 გაყავით 2, 4, 8, 16 ტოლ ნაწილად.

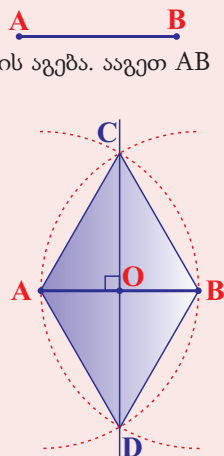


სურათი 2

3.8. მონაკვეთის შუამართობი

საქმიანობა

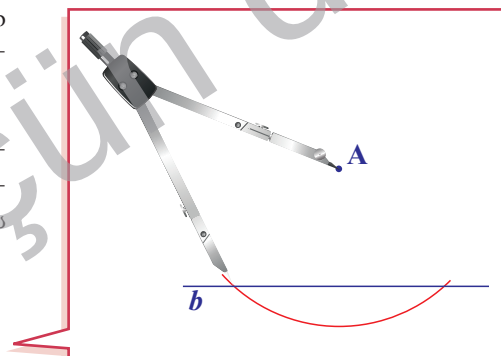
1. დახაზეთ ნებისმიერი სიგრძის AB მონაკვეთი.
2. წინა თემაში შეისწავლეთ მონაკვეთის შუაწერტილის აგება. ააგეთ AB მონაკვეთის შუაწერტილი.
3. რა შეიძლება ითქვას ADC და BDC სამკუთხედების შესახებ? CO მონაკვეთი AB სამკუთხედის ბისექტრისაა? შეგიძლიათ თქვათ, რომ CO მონაკვეთი AB სამკუთხედის სიმაღლეა? რატომ? რა შეიძლება ითქვას CD წრფისა და AB მონაკვეთის შესახებ, თუ CO სიმაღლეა? სწორია $CD \perp AB$?



საგარჯიშოები

1. დაასრულეთ m წრფეზე აღნიშნული K წერტილიდან იმავე წრფის პერპენდიკულარული წრფის აგების ალგორითმი და ააგეთ.
 - I. ფარგლის მახვილი წვერო დადეთ K წერტილზე და m წრფეზე გამოყავით ტოლი მონაკვეთები K წერტილის სხვადასხვა მხარეს (სურათი 1).
 - II. მონაკვეთების წვეროები აღნიშნეთ M და N ასოებით.
 - III. ...
2. ააგეთ a წრფეზე მოცემული A , B და C წერტილებიდან a წრფის მართობული წრფეები. აგების სიზუსტე შეამოწმეთ კუთხედის დახმარებით. გამოთქვით მოსაზრებები მიღებული წრფეების ურთიერთმდებარეობის შესახებ.
3. გაავლეთ b წრფე და აღნიშნეთ მის გარეთ მდებარე A წერტილი. ააგეთ ამ წერტილიდან b წრფის პერპენდიკულარული წრფე.

შენიშვნა. ფარგლის საშუალებით დახაზეთ წრეწირი, რომლის ცენტრი A წერტილია და b წრფეს ორ წერტილში კვეთს.



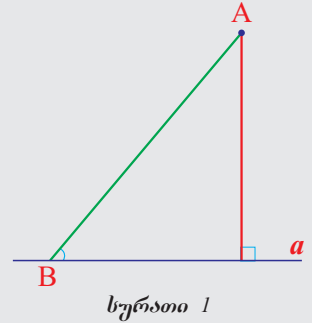
3.9. მართობი და დახრილი

მოცემულია a წრფე და A წერტილი, რომელიც არ მდებარეობს ამ წრფეზე. A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებულია AH მართობი და წრფის ნებისმიერ B წერტილთან შემაერთებელი AB მონაკვეთი. AB მონაკვეთს A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებული დახრილი ეწოდება ხოლო B წერტილს- AB დახრილის ფუძე.

AH მონაკვეთის სიგრძე A წერტილიდან a წრფემდე არსებული მანძილია. H წერტილი AH პერპენდიკულარის ფუძეა.

დახრილის ფუძისა და მართობის ფუძის შემაერთებელ მონაკვეთს დახრილის a წრფეზე მდებარე გეგმილი ეწოდება. BH მონაკვეთი AB დახრილის a წრფეზე გეგმილია.

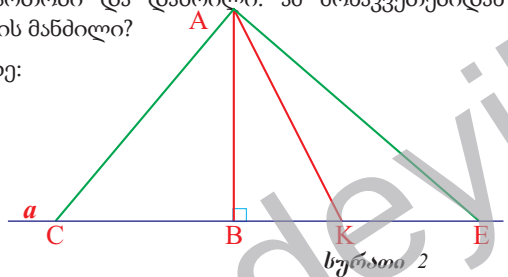
A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს ეწოდება A წერტილიდან a წრფემდე მანძილი. AH მონაკვეთი A წერტილიდან a წრფემდე გავლებულ მონაკვეთებს შორის უმცირესია: $AH < AB$.



სურათი 1

საგარჯიშოები

- გაავლეთ m წრფე და აღნიშნეთ M წერტილი, რომელიც არ მდებარეობს მასზე M წერტილიდან m წრფეზე დაუშვით მართობი და დახრილი. ამ მონაკვეთებიდან რომელია M წერტილსა და m წრფეს შორის მანძილი?
- წარმოადგინეთ სურათი 2-ის საფუძველზე:
 - დახრილები;
 - დახრილების ფუძეები;
 - მართობი;
 - მართობის ფუძე;
 - დახრილების გეგმილები;
 - A წერტილიდან a წრფემდე მანძილი.
- დახაზეთ: ა) მახვილკუთხა; ბ) მართკუთხა; გ) ბლაგვკუთხა სამკუთხედი. გამოსახეთ ამ სამკუთხედის თითოეული წვეროდან მოპირდაპირე გვერდამდე მანძილი.
- მართკუთხედის სიგანე 3 სმ და 4 მმ-ია, სიგრძე კი მასზე 3-ჯერ მეტია. იპოვეთ მართკუთხედის თითოეული წვეროდან მოპირდაპირე გვერდამდე მანძილი.
- მართკუთხა პარალელეპიპედის ზომებია 12 სმ, 15 სმ და 16,2 სმ. განსაზღვრეთ მისი თითოეული წვეროდან წიბოებამდე არსებული მანძილი.
- წრფეზე არამდებარე წერტილიდან ამ წრფეზე დაშვებულია ორი დახრილი, რომელთა შორის კუთხე 60° ია. განსაზღვრეთ დახრილების ფუძეებს შორის მანძილი, თუ დახრილის სიგრძეა 8 სმ.



სურათი 2

3.10. ცენტრალური სიმეტრია

საქმიანობა

1. თქვენს რვეულში აღნიშნეთ A და O წერტილები. შეაერთეთ ეს წერტილები წრფის საშუალებით.
2. ფარგლის წვეროები გაშალეთ OA მონაკვეთის სიგრძემდე, წვერო დადეთ O წერტილზე და გამოყავით ამ წრფეზე $OA_1 = OA$ მონაკვეთი.



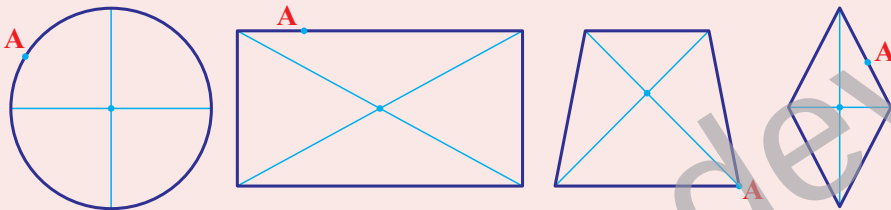
3. რა შეიძლება ითქვას OA და OA_1 მონაკვეთების შესახებ? გამოთქვით მოსაზრება O წერტილის შესახებ. როგორ მდებარეობენ A და A_1 წერტილები O წერტილთან მიმართ?

თუ O წერტილი AA_1 მონაკვეთის შუაწერტილია, მაშინ O წერტილს A და A_1 წერტილების მიმართ **სიმეტრიული წერტილი** ეწოდება.

O წერტილს **სიმეტრიის ცენტრი ეწოდება** და თავისთავად სიმეტრიის წერტილად ითვლება.

საქმიანობა

1. სურათზე მოცემულ თითოეულ ფიგურაზე მდებარე A წერტილისათვის ააგეთ O -ს მიმართ სიმეტრიული წერტილი (სურათი 1).



სურათი 1

2. რა შეგიძლიათ თქვათ თითოეული ფიგურის A წერტილისათვის O -ს მიმართ სიმეტრიული წერტილის მდებარეობის შესახებ? რომელ ფიგურაზე არ ეკუთვნის O -ს მიმართ A -ს სიმეტრიული წერტილი ამ ფიგურას?

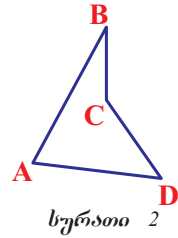
თუ ფიგურაზე აღებული თითოეული წერტილისათვის O წერტილის მიმართ სიმეტრიული წერტილიც ამ ფიგურაზე მდებარეობს, ასეთ ფიგურას O წერტილის მიმართებაში სიმეტრიული ფიგურა ეწოდება. O წერტილს ფიგურის სიმეტრიის ცენტრი ეწოდება.

სიმეტრიას ხშირად ვხვდებით ხელოვნებაში, არქიტექტურაში, ტექნიკაში, ყოფაცხოვრებაში. ხალიჩებზე, შპალერებზე, ქსოვილებზე მოხატულობების უმრავლესობა სიმეტრიის ცენტრის მქონე ფიგურებია.

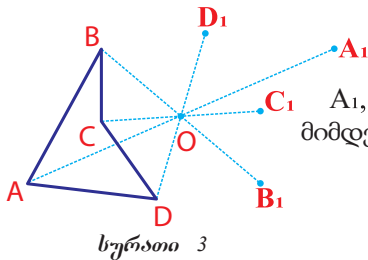
ნიმუში

მაგალითად: ააგეთ სურათი 2-ზე მოცემული ფიგურის O წერტილის მიმართ სიმეტრიული ფიგურა.

ამოხსნა: მოცემული $ABCD$ ფიგურის O წერტილის მიმართ სიმეტრიული ფიგურის ასაგებად საკმარისია ამ ფიგურის წვეროების წერტილების O წერტილის მიმართ სიმეტრიული წერტილების აგება (სურათი 3).

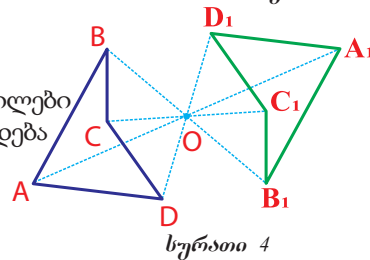


სურათი 2



სურათი 3

A_1, B_1, C_1, D_1 წერტილები მიმდევრობით შეერთდება (სურათი 4)



სურათი 4

შევართოთ თანმიმდევრობით A_1, B_1, C_1, D_1 წერტილები. მიღებული $A_1B_1C_1D_1$ ფიგურა O წერტილის მიმართ $ABCD$ ფიგურის სიმეტრიული ფიგურაა.

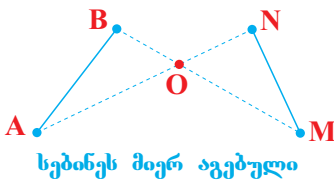
საგარჯიშოები

1. a წრფეზე მოცემული წერტილებიდან (სურათი 5), თქვენი ვარაუდით, დაახლოებით რომლებია O წერტილის მიმართ სიმეტრიულები. საჭირო გაზომვების ჩატარებით შეამოწმეთ თქვენი ვარაუდების სისწორე.

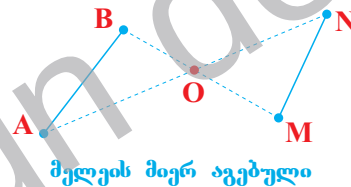


სურათი 5.

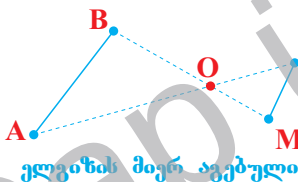
2. ბავშვებმა ააგეს მოცემული AB მონაკვეთის O წერტილის მიმართ სიმეტრიული მონაკვეთები. თუმცა თითოეულმა მათგანმა სხვადასხვა მონაკვეთები მიიღეს. გამოიკვლიეთ, ბავშვებიდან რომლის აგებაა სწორი და ააგეთ თქვენს რვეულში O წერტილის მიმართ AB მონაკვეთის სიმეტრიული MN მონაკვეთი.



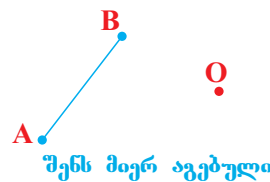
სებინეს მიერ აგებული



მელეს მიერ აგებული



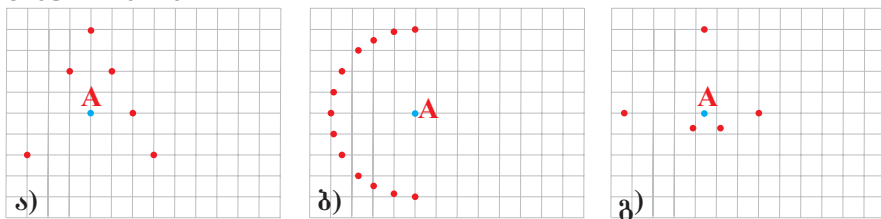
ელვის მიერ აგებული



შენს მიერ აგებული

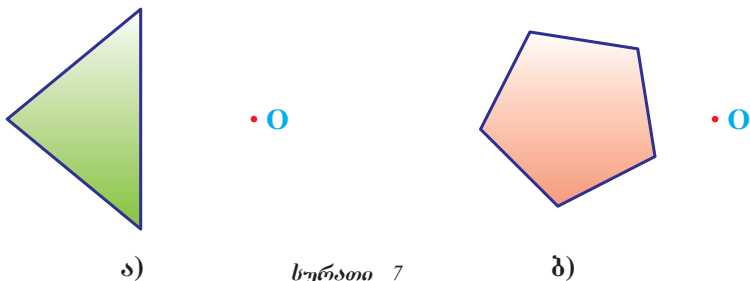
III განყოფილება

3. ააგეთ სურათი 6-ზე მოცემული წერტილების A წერტილის მიმართ სიმეტრიული წერტილები. შეაერთეთ ყველა წერტილი მიმდევრობით. რა შეიძლება ითქვას მიღებული ფიგურის შესახებ?



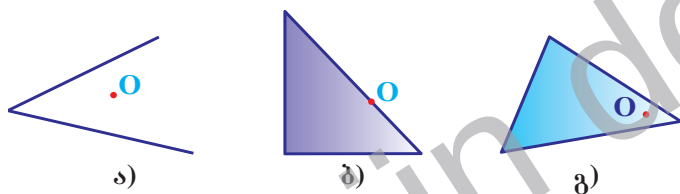
სურათი 6

4. c წრე AB მონაკვეთს O წერტილში კვეთს და $OA \neq OB$. სიმეტრიულია A და B წერტილები O წერტილის მიმართ? რატომ?
5. გააჩნიათ სიმეტრიის ცენტრი ა) სხივს; ბ) წრეებს; გ) ორ გადაკვეთ წრეებს; დ) კვადრატს; ე) სამკუთხედს? აჩვენეთ მათი სიმეტრიის ცენტრი.
6. ააგეთ მოცემული ფიგურების (სურათი 7 ა, ბ) O წერტილის მიმართ სიმეტრიული ფიგურები.



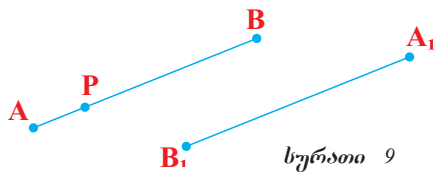
სურათი 7

7. ააგეთ მოცემული ფიგურების (სურათი 8 ა, ბ, გ) O წერტილის მიმართ სიმეტრიული ფიგურები.



სურათი 8

8. ააგეთ ABC ზღაგვკუთხა სამკუთხედის მისი სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილის მიმართ სიმეტრიული MNP სამკუთხედი.
9. AB და A_1B_1 მონაკვეთები რომელიღაც O წერტილის მიმართ სიმეტრიული მონაკვეთებია. განსაზღვრეთ ამ სიმეტრიაში P წერტილის სიმეტრიული წერტილის ადგილი (სურათი 9).



სურათი 9

3.11. იგივეობა. იგივერი გარდაქმნა

საქმიანობა

დაამტკიცეთ, რომ $(a - 8)(b + 3) - 1 = ab - 8b + 3a - 25$ ტოლობა სწორია.

1. იპოვეთ ტოლობის მარცხენა მხარეს მდებარე ორწევრების ნამრავლი. მიღებული მრავალწევრი დაიყვანეთ სტანდარტულ სახეზე. რომელი მრავალწევრი მიიღეთ?
2. ტოლობის მარჯვენა მხარეს, $ab - 8b$ გამოსახულებაში, საერთო მამრავლი გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ. რომელი ტრანსფორმაცია უნდა მოახდინოთ $3a - 25$ გამოსახულებაში, რომ მისი მამრავლებად დაშლა შესაძლებელი იყოს? შეიძლება -25 ერთწევრის ადგილას $-24 - 1$ ჩაწეროთ?
3. არის საერთო მამრავლი მიღებულ $(ab - 8b)$ და $(3a - 24)$ ორწევრებში? რატომ არ შევიდა ამ გამოსახულებაში -1 ?
4. შეძელით ტოლობის სისწორის ჩვენება? გამოთქვით მოსაზრებები ტოლობის შესახებ.

ტოლობას, რომელიც მართებულია ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობისათვის, იგივეობა ეწოდება.

იგივეობის დამტკიცებისათვის საჭიროა მის მარცხენა მხარეს მდებარე გამოსახულების მარჯვენა მხარეს მდებარე გამოსახულებად ან მარჯვენა მხარეს მდებარე გამოსახულების მარცხენა მხარეს მდებარე გამოსახულებად გადაქცევა, ან კიდევ ორივე მხარის ერთი და იგივე გამოსახულებასთან იგივეურად ტოლობის ჩვენება.

ერთი გამოსახულების მის ტოლ მეორე გამოსახულებად გარდაქმნას იგივერი გარდაქმნა ეწოდება. ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ერთი და იგივე მნიშვნელობის მქონე გამოსახულებებს იგივეურად ტოლი გამოსახულებები ეწოდებათ.

ნამუში

მაგალითად: დაამტკიცეთ იგივეობა: $(x + 5)(x - 4) + 12 = (x - 1)(x + 2) - 6$.

ამოხსნა: იგივეობის დამტკიცებისათვის ვაჩვენოთ, რომ ტოლობის ორივე მხარე ერთი და

$$\text{იგივე გამოსახულების ტოლია: } \underbrace{(x + 5)(x - 4) + 12}_{\text{მარცხენა მხარე}} = \underbrace{(x - 1)(x + 2) - 6}_{\text{მარჯვენა მხარე}}$$

მარცხენა მხარე: $(x + 5)(x - 4) + 12 = x^2 - 4x + 5x - 20 + 12 = x^2 + x - 8$

მარჯვენა მხარე: $(x - 1)(x + 2) - 6 = x^2 + 2x - x - 2 - 6 = x^2 + x - 8$

რადგან ორივე მხარე ერთი და იგივე გამოსახულების ტოლია, მოცემული ტოლობა იგივეობაა.

საგარჯიშოები

1. ქერიმი ვარაუდობს, რომ $21c(a - b) = -21c(b - a)$ ტოლობა იგივეობაა. თქვენი აზრით, მართალია ის? რატომ? როგორი განმარტავთ ამას ფრჩხილების გაუხსნელად?
2. ა) ჩაწერეთ ასოითი გამოსახულების სახით შეკრების, გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისებები. დაამტკიცეთ მათი იგივეობა.
ბ) ჩაწერეთ ასოითი გამოსახულების სახით გამრავლების გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისებები. იგივეობებია ეს ტოლობები?

III განყოფილება

გ) რომელ თვისებას ასახავს $a(b + c) = ab + bc$ ტოლობა? შეიძლება ვთქვათ, რომ ეს ტოლობა იგივეურია?

გამოთქვით მოსაზრებები $a + 0 = 0 + a$; $a \cdot 1 = a$; $a \cdot \frac{1}{a} = 1$; $a + (-a) = 0$ ტოლობების შესახებ.

3. დაასაბუთეთ, იგივეურია თუ არა მოცემული ტოლობები:

ა) $2a + 4b = 2(a + 4b)$; ბ) $x = x + 1$;

გ) $a + b - c = a - c + b$; დ) $(m - n)(k - p) = (n - m)(p - k)$.

4. მოცემული გამოსახულებებიდან შეარჩიეთ ტოლები და ჩაწერეთ იგივეობის სახით.

$ab - am - bm + m^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - b^2$
$-(m - n)$	$n - m$	$m^2 - n^2$
$(a - b)(a + b)$	$n^2 - m^2$	$(n - m)(n - m)$
$(a - m)(b - m)$	$(a - b)(a - b)$	

5. დაამტკიცეთ იგივეობები:

ა) $(m - 2k)(m + k) = m^2 - km - 2k^2$;

ბ) $b(b - 4c) + 5bc = b(b + c)$;

გ) $a(a + 11) + a(a^2 - 11) = a^2(a + 1)$;

დ) $(3 - p)(p + 2) - 1 = (p + 8)(9 - p) - 67$.

6. რომელ ერთწევრებს დაამატებდით ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეებში, იმისათვის, რომ მოცემული გამოსახულებები იგივეობები გახდეს? ახსენით თქვენი მოსაზრება.

ა) $(a + 5)(a - 12) = a^2 - 60\dots$;

ბ) $y^2 - 2\dots = (y + 1)(y - 1)$;

გ) $(m - 7)(m + 10) = m^2 + 2m - 70\dots$;

დ) $x^2 - 12x + 30\dots = (x - 7)(x - 5)$.

7. მოცემული გამოსახულებები რაღაც მუდმივი რიცხვის ტოლია. გამოსახულებების გარდაქმნების გარეშე ივარაუდეთ ეს რიცხვები. შემდეგ შეამოწმეთ თქვენი ვარაუდის სისწორე გამოსახულებებზე იგივეური გარდაქმნების წარმოებით.

ა) $(a - 3)(a^2 - 8a + 5) - (a - 8)(a^2 - 3a + 5)$;

ბ) $(x^2 - 3x + 2)(2x + 5) - (2x^2 + 7x + 17)(x - 4)$;

გ) $(b^2 + 4b - 5)(b - 2) + (3 - b)(b^2 + 5b + 2)$.

8. ა) დაწერეთ ისეთი სამწევრი, რომ მისი ორწევრების ნამრავლის სახით წარმოდგენა შესაძლებელი იყოს.

ბ) a და b ცვლადების გამოყენებით ჩაწერეთ ნებისმიერი ორწევრის კვადრატი და გადააქციეთ ის მრავალწევრად.

გ) x და y ცვლადების გამოყენებით ჩაწერეთ ნებისმიერი ორწევრის კუბი და გადააქციეთ ის მრავალწევრად.

9. დაამტკიცეთ იგივეობები:

ა) $a(b + c)^2 + b(a + c)^2 + c(a + b)^2 - 4abc = (a + b)(a + c)(b + c)$.

ბ) $(a + b + c)(ab + ac + bc) - abc = (a + b)(a + c)(b + c)$.

გ) დაამტკიცეთ, რომ როდესაც $a + b + c = 0$, სწორია ქვემოთ მოცემული იგივეობები:

$a(a + b)(a + c) = abc$, $b(b + a)(b + c) = abc$, $c(c + a)(c + b) = abc$.

3.12. ერთცვლადიანი წრფის განტოლება

საქმიანობა

- $6x - 12 = 18 + 4x$ განტოლებაში ტოლობის ორივე მხარეს მიუმატეთ 12.
- რა ტოლობა მიიღეთ? მიღებული ტოლობის თითოეულ მხარეს გამოაკელით $4x$ ერთწევრი.
- განსაზღვრეთ x მორიგი ტოლობიდან.
- სხვა რომელი გზით შეიძლება ამ განტოლების ამოხსნა? ერთწევრების ტოლობის ერთ მხარეს გადატანისას როგორ იცვლება ერთწევრის ნიშანი? განმარტეთ პასუხი.

$ax = b$ სახით მოცემულ განტოლებას ერთცვლადიანი წრფივი განტოლება ეწოდება. სადაც $a \neq 0$. ამ განტოლების ფესვია $x = b : a$.

1. განტოლების ნებისმიერი წევრის ნიშნის შეცვლით ტოლობის ერთი მხრიდან მეორე მხარეს გადატანა შეიძლება (ან სხვანაირად, განტოლების ორივე მხარეს ერთი და იგივე გამოსახულების მიმატება ან გამოკლება შეიძლება).

2. განტოლების ორივე მხარე შეიძლება გავამრავლოთ ან გავყოთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე.

საგარჯიშოები

- ამოხსენით განტოლებები:

ა) $13 - 100x = 0$;	ბ) $7x - 4 = x - 16$;	გ) $13 - 5x = 8 - 2x$;
დ) $4y + 15 = 6y + 17$;	ე) $5x + (3x - 7) = 9$;	ვ) $3y - (5 - y) = 11$;
ზ) $13 - (5x + 11) = 6x$;	თ) $(7x + 1) - (6x + 3) = 5$;	ი) $(5x + 2) - (4x + 7) = 8$.
- ამოხსენით განტოლებები ფრჩხილების გარეთ მდებარე ნიშნების გათვალისწინებით:

ა) $(13x - 15) - (9 + 6x) = -3x$;	ბ) $12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$;
გ) $1,6 - (x - 2,8) = (0,2x + 1,5) - 0,7$;	დ) $5(5x - 1) - 2,7x + 0,2x = 6,5 - 0,5x$;
ე) $(0,5x + 1,2) - (3,6x - 4,5) = (4,8x - 0,3) + (10,5x + 0,6)$.	
- ამოხსენით განტოლებები:

ა) $5(x - 3) - 2(x - 7) + 7(2x + 6) = 7$;
ბ) $11(y - 4) + 10(5 - 3y) - 3(4 - 3y) = -6$;
გ) $5(8z - 1) - 7(4z + 1) + 8(7 - 4z) = 9$;
დ) $10(3x - 2) - 3(5x + 2) + 5(11 - 4x) = 25$.
- აჩვენეთ, რომ მოცემული ტოლობები ერთცვლადიანი წრფივი განტოლებებია და იპოვეთ ფესვები:

ა) $\frac{11}{7} = \frac{2-x}{5}$;	ბ) $\frac{3x}{5} = \frac{6+x}{3}$;	გ) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$;	დ) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 14$.
-------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------
- ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\frac{x-4}{5} = 9 + \frac{2+4x}{9}$;	ბ) $2 - \frac{3x-7}{4} + \frac{x+17}{5} = 0$;
გ) $\frac{8-y}{6} + \frac{5-4y}{3} = \frac{y+6}{2}$;	დ) $\frac{4x+7}{5} + \frac{3x-2}{2} - \frac{5x-2}{2} = 32$;

III განყოფილება

$$\text{ი) } \frac{9x-5}{2} - \frac{3+5x}{3} - \frac{8x-2}{4} = 2; \quad \text{ჰ) } \frac{4x-3}{2} - \frac{5-2x}{3} = \frac{3x-4}{3}.$$

6. მოცემული გამოსახულებები ჩაწერეთ განტოლების სახით და ამოხსენით:

ა) თუ a რიცხვს 26%-ით შევამცირებთ, მივიღებთ, 7,4-ს.

ბ) თუ m რიცხვს 20%-ით გავზრდით, მივიღებთ 9,6-ს;

გ) 3,25-ისა და x -ის ნამრავლი 1-ისა და x -ის ჯამზე 2-ჯერ მეტია;

დ) $\frac{7}{12}$ -ისა და $2y$ -ის ჯამი 25y-ის ერთ მეოთხედზე სამჯერ ნაკლებია.

ნიმუში

მაგალითი 1: ამოხსენით განტოლება: $|x| = 9$

ამოხსნა: რიცხვის მოდული (აბსოლუტური მნიშვნელობა) ნული ან დადებითი რიცხვია. 9-ის ტოლი მოდულის მქონე ორი რიცხვი არსებობს: -9 და 9. მაშინ მივიღეთ $x=9$ და $x=-9$.

პასუხი: 9 და -9.

მაგალითი 2: $|2x + 5| = 0$ განტოლებას რამდენი ფესვი აქვს?

ამოხსნა: მოდული ნულის მქონე რიცხვი მხოლოდ 0-ია.

მაშასადამე, $2x + 5 = 0$, $2x = -5$, $x = -2,5$.

პასუხი: განტოლებას ერთი ფესვი აქვს.

მაგალითი 3: ამოხსენით განტოლება: $|8 - 3x| + 16 = 0$

ამოხსნა: განტოლების ამოხსნისათვის ტოლობის ორივე მხარეს ვუმატებთ -16-ს (ან ტოლობის მარცხენა მხარეს მდებარე 16-ის ნიშნის შეცვლით გადაგვყავს მარჯვენა მხარეს). $|8 - 3x| + 16 - 16 = 0 - 16$. თუ გავამარტივებთ, მივიღებთ: $|8 - 3x| = -16$ რადგან მოდულის მნიშვნელობა უარყოფითი რიცხვი არ შეიძლება იყოს, ამიტომაც განტოლებას ფესვი არ აქვს.

პასუხი: $\emptyset$.

7. იპოვეთ ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლების ფესვი:

ა) $|x| = 5$;

ბ) $|2a| = -7$;

გ) $|x - 3| = 0,3$;

დ) $|3x + 17| = 0$;

ე) $2|m| = 12$;

ვ) $0,25|x - 8| = 5$;

ზ) $16 + |x| = 11$;

თ) $|x| - \frac{1}{4} = 2,75$.

8. ამოუხსნელად განსაზღვრეთ, რამდენი ფესვი აქვს მოცემულ განტოლებებს. განტოლებების ამოხსნით დაადგინეთ, სწორია თუ არა თქვენი მოსაზრება:

ა) $|10x - 9| = 14$;

ბ) $|-3x + 21| + 4 = 4$;

გ) $\frac{|x+11|}{5} = -2$;

დ) $\frac{|1-x|}{4} = \frac{1}{2}$;

ე) $\frac{7}{8} = |a - 7|$;

ვ) $1 - \frac{|7x-1|}{6} = 0$.

9. ამოხსენით განტოლებები მოდულის განსაზღვრების გამოყენებით:

ა) $|x - 3| = 2$;

ბ) $|3x - 7| = 0,3$;

გ) $|0,6x + 1| = 4$;

დ) $|x + 3| = -1$;

ე) $|-x + 100| = 10$;

ვ) $|3,4 - x| = 2$;

ზ) $\left| \frac{x-19}{8} \right| = 1$;

თ) $|8,5 - 0,4a| = 1\frac{1}{2}$.

3.13. აბსოლუტური ცდომილება

ზოგჯერ პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას, გამოიყენება რაოდენობების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

რიცხვების დამრგვალებისას, ხელსაწყოებით რაოდენობების გაზომვისას, გაცნობილი ხარტ მიახლოებითი მნიშვნელობის ცნებას. ახლა გამოვიკვლიოთ ცდომილება რაოდენობების მიახლოებით და ზუსტ მნიშვნელობებს შორის.

საქმიანობა

1. აიღეთ რკინისა და ხის სახაზავი. გაზომეთ „მათემატიკა 7“- წიგნის სიგრძე ორივე სახაზავის საშუალებით, ჩაწერეთ მიღებული რიცხვები, შეადარეთ შედეგები. ორივე გაზომვისას ერთნაირი შედეგი მიიღეთ?

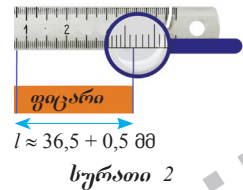
2. ჩათვალეთ ზუსტი სიგრძე 24 სმ-ის ტოლად და იპოვეთ ზუსტ და მიახლოებითი მნიშვნელობებს შორის სხვაობის მოდული. თქვენი აზრით, როგორ შეიძლება იწოდოს მიღებული რიცხვი?



სურათი 1

ნამუშაო

- ფიცრის ნაჭრის სიგრძე (l) სურათის მიხედვით 3,6 სმ-სა და 3,7 სმ-ს შორის მდებარეობს. ე.ი. შეიძლება ჩავწეროთ, რომ $l \approx 36,5 + 0,5 = 37$ (მმ) ან $l \approx 36,5 - 0,5 = 36$ (მმ) ანუ ფიცრის სიგრძე მოცემულია 0,5 მმ-ის სიზუსტით.
- აქ გაზომვის დროს დაშვებულ ცდომილებად $|37 - 36,5| = 0,5$ (მმ) ან $|36 - 36,5| = 0,5$ (მმ) ითვლება.



სურათი 2

რაოდენობის ზუსტი მნიშვნელობისა და მიახლოებითი მნიშვნელობის სხვაობის მოდულს მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება.

აბსოლუტური ცდომილება = |ზუსტი მნიშვნელობა - მიახლოებითი მნიშვნელობა|

აბსოლუტური ცდომილება გვიჩვენებს, თუ რამდენით განსხვავდება რაოდენობის რეალური მნიშვნელობა გაზომვების შედეგად მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობისაგან.

თუ $a \approx b$, რაოდენობის ზუსტი მნიშვნელობისათვის $|a - b| < a < a + b$ ორმაგ უტოლობას აკმაყოფილებს (სადაც $a > 0$).

ნამუშაო

- მაგალითი:** 5,019 დაამრგვალეთ მეასედისა და მეათედის თანრიგის სიზუსტით. გამოთვალეთ დამრგვალების დროს დაშვებული აბსოლუტური ცდომილება.
- ამოხსნა:** $5,019 \approx 5,02$ (მეასედებამდე დამრგვალება). ამ დროს რიცხვი 0,001-ით გაიზარდა, ანუ აბსოლუტური ცდომილება: $|5,019 - 5,02| = 0,001$. $5,019 \approx 5$ (მეათედამდე დამრგვალება). ამ დროს რიცხვი 0,019-ით შემცირდა, ანუ აბსოლუტური ცდომილება: $|5,019 - 5| = 0,019$.

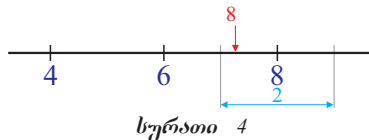
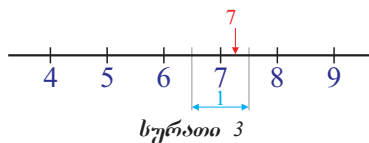
საგარჯიშოები

1. გამოთვალეთ დამრგვალებით მიღებული ცდომილებები და შეავსეთ ცხრილი:

მოცემული რიცხვი	დამრგვალებული რიცხვი	მოქმედება	ცდომილება
54.763	54.76		
54.766	54.77	$6 > 5$, 1 ემატება	+ 0.004
54.765	54.76		
54.7652	54.77		
54.7699	54.77	$99 > 50$, აკლდება	- 0,0001

2. რიცხვით ღერძზე:

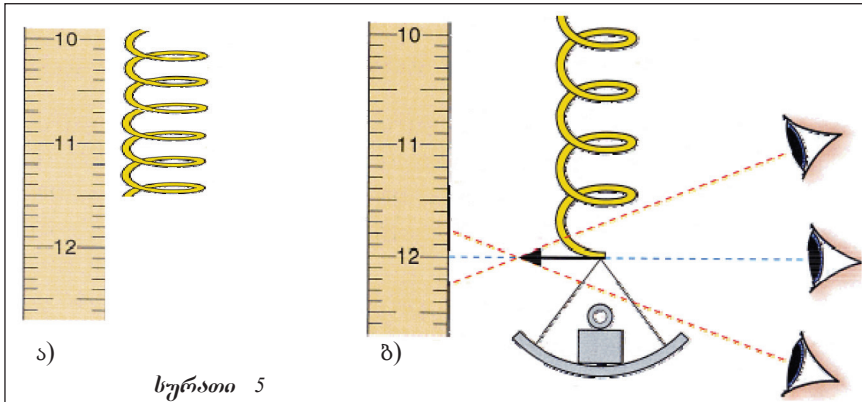
- ა) $6\frac{1}{2}$ და $7\frac{1}{2}$ შორის მდებარე ნებისმიერი რიცხვი მიახლოებით 7-ის ტოლად არის წარმოდგენილი. რას უდრის ამ შემთხვევაში უდიდესი აბსოლუტური ცდომილება? (სურათი 3).
- ბ) 7-ს და 9-ს შორის მდებარე ნებისმიერი რიცხვი მიახლოებით 8-ის ტოლად არის წარმოდგენილი. რას უდრის ამ შემთხვევაში აბსოლუტური ცდომილება? (სურათი 4).



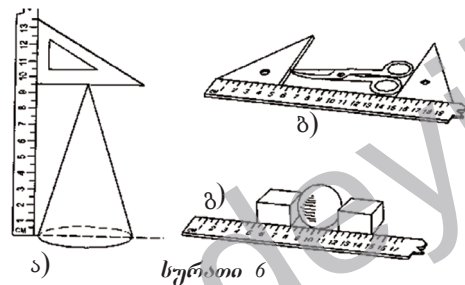
3. ცნობილია, რომ ღობის სიგრძე 0,1 მეტრამდე სიზუსტით 12,5 მ-ია. რომელ რიცხვებს შორის მდებარეობს რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს ღობის სიგრძეს?
4. მართკუთხედის სიგანე და სიგრძე 1 სმ-მდე სიზუსტით შესაბამისად 6 მ და 8 მ-ია. რომელ რიცხვებს შორის მდებარეობს მართკუთხედის სიგანისა და სიგრძის მაჩვენებელი რიცხვები? რომელ რიცხვებს შორის მდებარეობს მართკუთხედის ფართობი?
5. მართკუთხა პარალელეპიპედის ზომები 2 სმ-მდე სიზუსტით 23 სმ, 24 სმ და 27 სმ-ია. რომელ რიცხვებს შორის მდებარეობს მისი მოცულობის მაჩვენებელი რიცხვი?
6. თერმომეტრით გაზომვისას დაადგინეს, რომ ჰაერის ტემპერატურა $18,6^{\circ}\text{C}$ -ია. თერმომეტრის დანაყოფის მნიშვნელობა $0,2^{\circ}$ -ია. რას იქნება ჰაერის ზუსტი ტემპერატურა, თუ გაზომვა $0,1$ სიზუსტით მოხდება?
7. ალიმ 25,925 დაამრგვალა მეათედებამდე, მეასედებამდე და ერთეულებამდე და თითოეული შემთხვევისათვის გამოთვალა მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება. ივარაუდეთ, რომელ შემთხვევაში უფრო მეტი იქნება აბსოლუტური ცდომილების მნიშვნელობა. გამოთვლებით შეამოწმეთ თქვენი პასუხების სიზუსტე.
8. $\frac{2}{3}$ წარმოადგინეთ ათწილადის სახით. დაამრგვალეთ ეს ათწილადი მეათედებამდე, მეასედებამდე და მეათასედებამდე. თითოეული შემთხვევისათვის გამოთვალეთ მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება.
9. მაგიდის სიგრძის გაზომვისას დაშვებული აბსოლუტური ცდომილება 1 სმ, ქალაქებს შორის მანძილის გაზომვისას დაშვებული აბსოლუტური ცდომილება კი-1მ = 100 სმ-ია. თქვენი აზრით, რომელი გაზომვა უფრო ზუსტი? დაასაბუთეთ მოსაზრება.

10. სემედი ამბობს, რომ $\frac{5}{9}$ -ის 0,001 სიზუსტით მიახლოებითი მნიშვნელობა 0,556-ია, ელმირი კი ვარაუდობს, რომ ეს რიცხვია 0,555. თქვენი აზრით, რომელია მართალი მათ შორის?

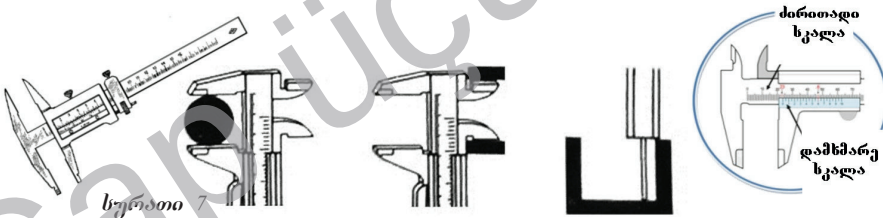
11. **პრაქტიკული სამუშაო.** სახაზავი განათავსეს სპირალის გვერდით, ისე როგორც სურათზეა (სურათი 5 ა) ნაჩვენები და ჩამოკიდეს მის წვეროზე რაიმე სხეული. შეხედეთ სპირალის წვეროს ისარს ბოლო მდგომარეობას სამი მიმართულებიდან (სურათი 5 ბ) და განმარტეთ, სახაზავზე რომელ რიცხვს შეესაბამება ის. განსაზღვრეთ, თუ რომელი მიმართულებიდან შეხედვისას უფრო ზუსტი შედეგი მიიღება.



12. სურათი 6-ზე ნაჩვენებია სახაზავისა და სამკუთხედის გამოყენების გზები კონუსის სიმაღლის, მაკრატლის სიგრძისა და ბირთვის დიამეტრის გასაზომად. თქვენც იგივე გზების გამოყენებით, განსაზღვრეთ ამ ფიგურების ზომები, მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტურ ცდომილებად აიღეთ 0,1 მმ.



13. **პრაქტიკული სამუშაო.** შტანგენფარგალი (სურათი 7) უფრო მაღალი გაზომვის სიზუსტის მქონე საზომი ხელსაწყოა. მისი საშუალებით შესაძლებელია დეტალის შიდა და გარე წრფივი ზომების, ხვრელის სიღრმის ან წამონაზარდის სიმაღლის გაზომვა. იპოვეთ ნებისმიერი დეტალის წრფივი ზომები შტანგენფარგალის გამოყენებით. აჩვენეთ ხელსაწყოზე (nonius) მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება.



3.14. ფარდობითი ცდომილება

საქმიანობა

აბსოლუტური ცდომილების დონის გამოკვლევა:

1. 6,087 დაამრგვალეთ მეათედებამდე. განსაზღვრეთ აბსოლუტური ცდომილება.
2. კალკულატორის დახმარებით იპოვეთ აბსოლუტური ცდომილების მნიშვნელობის თანაფარდობა სიდიდის ზუსტ მნიშვნელობასთან.
3. მიღებული რიცხვის პროცენტებში გადაყვანისათვის გაამრავლეთ ის 100%-ზე.
4. დაახლოებით რამდენ პროცენტს შეადგენს აბსოლუტური ცდომილების მნიშვნელობის თანაფარდობა ზუსტ მნიშვნელობასთან? თქვენი აზრით, ეს ბევრია თუ ცოტა? ახსენით მოსაზრება.

ნამუში

მაგალითი: 0,01 მმ სიზუსტით გაზომილი ადამიანის თმის სისქე 0,15 მმ-ია, დედამიწიდან მთვარემდე 500 კმ სიზუსტით გაზომილი მანძილი კი-დაახლოებით 384 000 კმ-ია. რომელი გაზომვა უფრო ზუსტია?

ამოხსნა: გამოვსახოთ პროცენტით თმის სისქის აბსოლუტური ცდომილების თანაფარდობა

$$\text{მიახლოებით ზომასთან: } \frac{0,01}{0,15} = \frac{1}{15} = 0,0666... \approx 0,067 = 6,7\%.$$

გამოვსახოთ პროცენტით დედამიწიდან მთვარემდე მანძილის გაზომვისას დაშვებული აბსოლუტური ცდომილების თანაფარდობა მიახლოებით მანძილთან:

$$\frac{500}{384000} = \frac{1}{768} \approx 0,0013... \approx 0,0013 = 0,13\%.$$

რადგანაც $0,13\% < 6,7\%$, დედამიწიდან მთვარემდე მანძილი უფრო ზუსტად არის გაზომილი.

აბსოლუტური ცდომილების მნიშვნელობის თანაფარდობას რაოდენობის ზუსტი მნიშვნელობის მოდულთან მიახლოებითი მნიშვნელობის **ფარდობითი ცდომილება** ეწოდება.

ფარდობითი ცდომილების პოვნით შესაძლებელია განისაზღვროს დაშვებული ცდომილების, ანუ გაზომვის სიზუსტის დონე. ფარდობითი ცდომილება, ძირითადად პროცენტით გამოისახება.

$\text{ფარდობითი ცდომილება} = \frac{\text{აბსოლუტური ცდომილება}}{ \text{ზუსტი მნიშვნელობა} }$	$\text{ფარდობითი ცდომილება (პროცენტებით)} = \frac{\text{აბსოლუტური ცდომილება}}{ \text{ზუსტი მნიშვნელობა} } \cdot 100\%$
---	---

საგარჯიშოები

1. 8,345 დაამრგვალეთ ერთეულებამდე. განსაზღვრეთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებები.
2. $2,45 \approx 2,4$ და $2,45 \approx 2,5$ ტოლობებიდან, რომლის ჩაწერა უფრო სწორი იქნება 2,45-ის მეათედებამდე დამრგვალეობას? გამოთვალეთ ორივე ტოლობის ფარდობითი ცდომილება და დაასაბუთეთ თქვენი შერჩეული პასუხი.

3. სასწორებზე 5 გრ სიზუსტით კარაქი და 3 გრ სიზუსტით შაქარი აიწონა. შეაფასეთ პროცენტებით პროდუქტების მასების ფარდობითი ცდომილებები და განსაზღვრეთ გაზომვების ხარისხები (სურათი 1).



სურათი 1

4. რიცხვები წარმოადგინეთ ათწილადის სახით. მიღებული წილადები დაამრგვალეთ მეასედებამდე. კალკულატორით გამოთვალეთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება და შეავსეთ ცხრილი. (შედეგები დაამრგვალეთ მეათედებამდე).

რიცხვი	ათწილადი (დამრგვალებული)	აბსოლუტური ცდომილება	ფარდობითი ცდომილება
$4\frac{3}{8}$			
$7\frac{1}{9}$			
$10\frac{3}{16}$			

5. **პრაქტიკული სამუშაო.** გაზომეთ სხვადასხვა სახაზავების საშუალებით თქვენს ხელთ არსებული კალამი. დაწერეთ მიახლოებითი მნიშვნელობა. გამოთვალეთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება.
6. სეიმურმა განსაზღვრა, რომ ფიცრის ნაჭერის სიგრძე 1 მმ სიზუსტით 269 მმ-ია, თაღვამა კი განსაზღვრა, რომ სხვა ფიცრის ნაჭერის სიგრძე 1 სმ სიზუსტით 189 სმ-ია. რომელმა ბიჭმა უფრო ზუსტად შეასრულა საქმე? რატომ?
7. მიახლოებითი მნიშვნელობა 4,89, ფარდობითი ცდომილება კი-1%-ია. განსაზღვრეთ მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება.
8. შეავსეთ ცხრილი.

სახლის სი- მაღლე	გაზომვით მიღებული შედეგები	აბსო- ლუტური ცდომილება	ფარ- დობითი ცდომილება	ყველაზე ზუსტი გა- ზომვა
ნერიმანის სახლი	12 მ	0,1 მ		
ულურის სახლი	5 მ		3%	
ნიგარის სახლი	8 მ	0,02 მ		
ინაეთის სახლი	7 მ	10 სმ		

თვითშემოწმება

1. მრავალწევრები დაიყვანეთ სტანდარტულ სახეზე და განსაზღვრეთ მისი ხარისხი:

ა) $-3xy + 9xy - 12xy$;

ბ) $8x^3 - 11x + 8x^3 - 10x^3 + 16x$;

გ) $15a^5 + a^3 - 12 + 2a^5 - a^3 - 30$.

2. იპოვეთ მოცემული მრავალწევრების ჯამი და სხვაობა:

ა) $(-3ab + 6b - 3c)$ და $(7ab - 6b + 2c)$; ბ) $(8x^2 + 11x - 1)$ და $(3 + 5x - 5x^2)$.

3. ჩახაზეთ ABC ტოლფერდა სამკუთხედი. ფარგლითა და სახაზავით ააგეთ მისი გვერდების შუაწერტილები და შეაერთეთ.

4. ფარგლითა და სახაზავით ააგეთ a წრეზე მდებარე A წერტილიდან ამ წრეის მართობული b წრე.

5. წრეზე არამდებარე წერტილიდან ამ წრეზე გავლებულია მართობი და დახრილი. განსაზღვრეთ მიღებული სამკუთხედის სახეობა.

6. იპოვეთ ნამრავლი და განსაზღვრეთ მიღებული მრავალწევრის ხარისხი:

ა) $-2x^4y(x^2 - 2xy + y^3 - 6)$;

ბ) $(x + 8)(x - 7)$;

გ) $(x + y - 2)(x^3 + 4)$.

7. მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $a^3 - a^2 + a - 1$;

ბ) $x^2 - xy - 9x + 9y$;

გ) $m^2 - 8m + 12$.

8. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $m(m - 5) + 8(m - 5) = 0$;

ბ) $y(y + 2) + y + 2 = 0$.

9. ABC სამკუთხედის გვერდზე აღნიშნეთ K წერტილი. ააგეთ ABC სამკუთხედის სიმეტრიული სამკუთხედი K წერტილმიმართ.

10. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $a(b - x) + x(a + b) = b(a + x)$;

ბ) $16 - (a + 3)(a + 2) = 4 - (6 + a)(a - 1)$.

11. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $(2x + 1)^2 = 13 + 4x^2$;

ბ) $(3x - 1)^2 - 9x^2 = -35$;

გ) $4(x - 4)(x + 8) = (3x + 2)(x - 5) + (x - 1)(x + 1)$;

დ) $\frac{|x - 5|}{6} = 8$.

12. 6,789 დაამრგვალეთ მეათედებამდე. გამოთვალეთ მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება.

13. ქვემოთ ჩამოთვლილი გაზომვებიდან, რომელი უფრო მეტი სიზუსტით არის შესრულებული?

ა) 100 კგ ცდომილებით აწონილი ერთი ვაგონის მასა 50 ტონაა.

ბ) 0,01 გრ ცდომილებით აწონილი გარკვეული რაოდენობის წამალი 5 გრ-ია.

14. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\frac{5x - 4}{5} + \frac{2 - 7x}{3} = \frac{x - 3}{2}$;

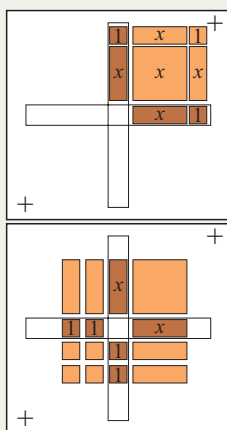
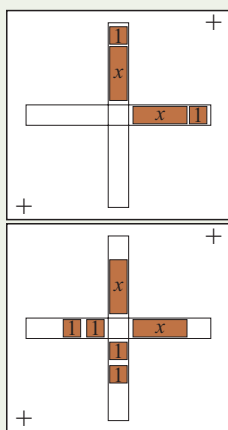
ბ) $0,75 - \frac{7 + 3x}{4} = \frac{10x - 3}{3}$.

IV განყოფილება. უმეოპოპულო ბაპრაპოპოს უოროპოპოპი. პარაპოპოპოპოს ნოპნაპო

4.1. ორი გაპოსახულები ჯაპისა და სხვაოპი კვაპრაპი

საქპიანოპა

ააგეთ $(x+1)(x+1)$ ნაპრაპოპი მოპელი გეოპეტრიული ფიგურები დასპარებით. გაპოსახეთ ორი გაპაპკვეთი ხაპი, ისე როგორც სურათზეა ნაჩვენები. როგორც სურათზეა მოცეპული, პირველი ნაპრაპი პოროპონტაპურ ხაპზე, მეორე ნაპრაპი კი -ვერტიკაპურ ხაპზე წარმოაპგინეთ 1 ერთეული სიგრპის გვერდის მქონე კვაპრაპისა და 1 და x ერთეული სიგრპის გვერდების მქონე მარტკუთხეპით. დაპებითი ნიშნის მქონე წევრები დაპებით მხარეს (გაპაპკვეთიდან მარჯვნივ და ზევით), უარყოფითი ნიშნის მქონე წევრები კი -უარყოფით მხარეს (გაპაპკვეთიდან მარცხნივ და ქვევით) მოათავსეთ. მოპელში კუთხეებში წარმოაპგენილი ნიშნები (+, -) აჩვენებს ნაპრაპოპი მიღებული მრავაპწევრის წევრების ნიშნებს. მოპელის შიგნით ააგეთ კვაპრაპი და მარტკუთხეპი, რომლის გვერდებიც 1 და x ერთეულის ტოლია. მიღებული ფიგურების ფართოპი ჩაწერეთ გეოპეტრიული ჯაპის საპით.



$$\begin{array}{ll} \begin{array}{|c|} \hline x^2 \\ \hline \end{array} x & S = x^2 \text{ კვ.ე} \\ \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} 1 & S = x \text{ კვ.ე} \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} 1 & S = 1 \text{ კვ.ე} \end{array}$$

I მოპელის მიხედვით

$$(x+1)(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ჩაწერა შეიპლება?

II მოპელის მიხედვით

$$(x-2)(x-2) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

სწორია ჩანაწერი? გაპოთქვით მოსაზრება მოპელის საფუძველზე.

საქპიანოპა

- $(x+1)^2$ და $(x-2)^2$ გაპოსახულები მრავაპწევრად გაპაქვევისათვის, წარმოაპგინეთ ისინი ორწევრების ნაპრაპის საპით და იპოვეთ ნაპრაპი:

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

- განსაზღვრეთ მიღებულ სამწევრში რომელი კანონზომიერებაა გაპოყენებული.

ორი გაპოსახულები ჯაპი კვაპრაპი ამ გაპოსახულებათა კვაპრაპებისა და მათი გაორმაგებული ნაპრაპის ჯაპის ტოლია. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

ორი გაპოსახულები სხვაოპი კვაპრაპი ამ გაპოსახულებათა კვაპრაპების ჯაპისა და მათი გაორმაგებული ნაპრაპის სხვაოპი ტოლია. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

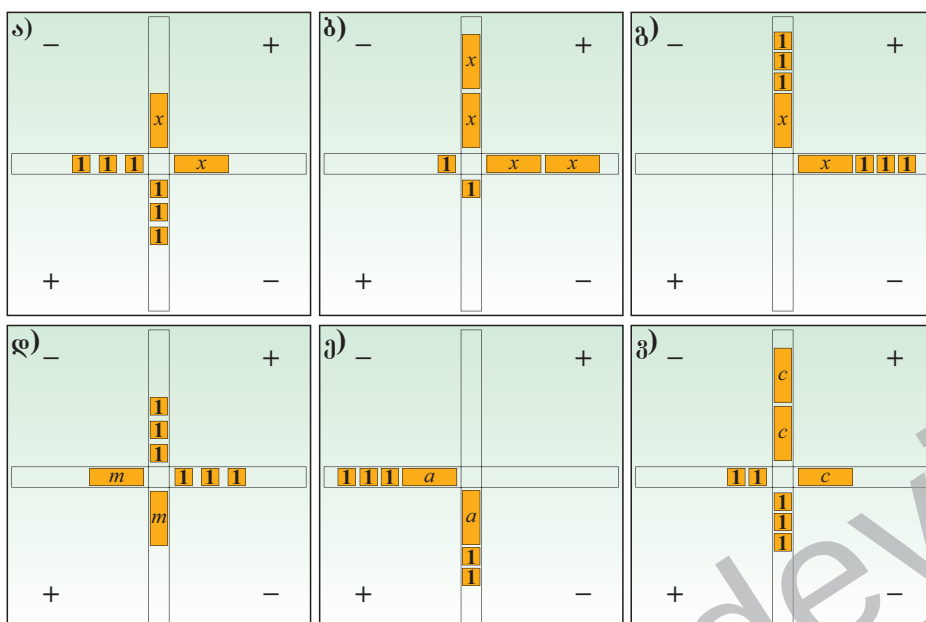
ნომუმი

მაგალითი:

1. $(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$;
2. $(3 - b)^2 = 3^2 + b^2 - 2 \cdot 3 \cdot b = 9 + b^2 - 6b$;
3. $(2m + 3n)^2 = (2m)^2 + (3n)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 3n = 4m^2 + 9n^2 + 12mn$;
4. $\left(1\frac{1}{4} - 0,1a\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2 + (0,1a)^2 - 2 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 0,1a = 1\frac{9}{16} + 0,01a^2 - \frac{1}{4}a$.

საგარჯიშოები

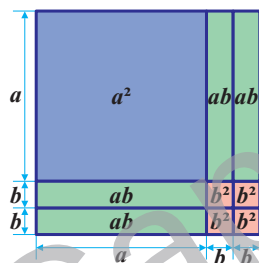
1. განსაზღვრეთ, მოცემულ მოდელში რომელი ორწევრის კვადრატია ასახული. იპოვეთ მათი კვადრატი მოდელის მიხედვით.



2. გადააქციეთ მრავალწევრად მოცემული ორწევრების კვადრატი:

- ა) $(x + 4)^2$; ბ) $(4 - 3a)^2$; გ) $(1 - 3x)^2$; დ) $(a + 5)^2$; ე) $(b - 5)^2$.

3. ორწევრის ორივე წევრში მონაწილეობს ცვლადი: $(a + 2b)^2$. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია მოდელის აგება ქვემოთ მოცემული სახით.



$$(a + 2b)^2 = (a + 2b)(a + 2b) = a^2 + 4b^2 + 4ab$$

ქვემოთ მოცემული ორწევრების კვადრატი ასახეთ ისე, როგორც ნიმუშშია ნაჩვენები და გადააქციეთ სამწევრად:

- ა) $(m + n)^2$; ბ) $(2a + c)^2$; გ) $(x + 3y)^2$;
 დ) $(2a + 3b)^2$; ე) $(4m + n)^2$; ვ) $(2x + 2y)^2$.

4. წერტილების ადგილას ჩაწერეთ საჭირო გამოსახულება:

ა) $(a - \dots)^2 = \dots^2 - 2 \dots b + b^2$;

ბ) $(m - \dots)^2 = m^2 - 20m + \dots^2$;

გ) $(5 + \dots)^2 = \dots + \dots + a^2$;

დ) $71^2 = 4900 + \dots + 1$.

5. ორწევრის კვადრატის ორწევრების ნამრავლის სახით წარმოდგენით, შეასრულეთ გამრავლება “ქვეშმიწერით” გამრავლების დახმარებით:

ა) $(5y - 3x)^2$;

ბ) $(0,3a - 4x)^2$;

გ) $(10c + 0,1b)^2$;

დ) $(7p - k)^2$;

ე) $(12 + 8k)^2$;

ვ) $\left(\frac{1}{3}x - 3y\right)^2$;

ზ) $(0,6 + 2x)^2$; თ) $(4a + b)^2$;

ი) $(12a - 0,3c)^2$;

კ) $(0,2m + 5n)^2$.

$$(5x + 2)^2 = (5x + 2)(5x + 2)$$

$$\begin{array}{r} 5x + 2 \\ \times 5x + 2 \\ \hline 25x^2 + 10x \\ + 10x + 4 \\ \hline 25x^2 + 20x + 4 \end{array}$$

6. დასვენების დროს ელდარი, ზაქირი და მეჰმედი ერთად ჩაის სვამდნენ. მათემატიკაში განვლილი თემის განხილვისას, ზაქირმა მეგობრებს უთხრა, რომ შეუძლია იოლად, ზეპირად გამოთვალოს ნებისმიერი ორნიშნა ან სამნიშნა რიცხვის კვადრატი. ბავშვებმა შემოწმების მიზნით შესთავაზეს 49^2 -ის გამოთვლა. ზაქირმა რამოდენიმე წამში უპასუხა, რომ პასუხია 2401. თქვენი აზრით, რომელი ხერხი გამოიყენა ზაქირმა? იგივე ხერხის გამოყენებით ეცადეთ ზეპირად გამოთვალოთ ქვემოთ მოცემული რიცხვების კვადრატი. პასუხები შამოწმეთ.

ა) $(100 + 1)^2$; ბ) $(100 - 1)^2$; გ) 61^2 ; დ) 199^2 ; ე) 999^2 ; ვ) 703^2 ;

ზ) $9,9^2$; თ) $10,2^2$; ი) 305^2 ; კ) 1001^2 ; ლ) 599^2 ; მ) $9,98^2$.

7. სელიმმა $(3 - a)^2$; $(-5 + 2k)^2$ და $(-11 - 3x)^2$ გამოსახულებები, ელგიზმა კი $(a - 3)^2$; $(2k - 5)^2$ და $(11 + 3x)^2$ გამოსახულებები გადააქციეს მრავალწევრად და თითოეული გამოსახულებისათვის ერთი და იგივე შედეგი მიიღეს. თქვენი აზრით, რატომ? დაასაბუთეთ პასუხი.

8. ა) $(x - y)^2$ გამოსახულებაში x -სა და y -ს ისე შეუცვალეთ ნიშნები, რომ მიღებული გამოსახულება $(x - y)^2$ გამოსახულების ტოლი იყოს.

ბ) $(x + y)^2$ გამოსახულებაში x -სა და y -ს ისე შეუცვალეთ ნიშნები, რომ მიღებული გამოსახულება $(x + y)^2$ გამოსახულების ტოლი იყოს.

9. ა) ორწევრის პირველი წევრია x^2 , მეორე წევრი კი 10. მათი სხვაობისა და ჯამის კვადრატი გადააქციეთ მრავალწევრად.

ბ) ორწევრის წევრების ჯამისა და სხვაობის კვადრატი გადააქციეთ სამწევრად, თუ ორწევრის პირველი წევრია 7, მეორე წევრი კი y^3 .

გ) რომელი ერთწევრი უნდა მივუმატოთ $(2a + b^4)^2$ გამოსახულებას, რომ მივიღოთ $(2a - b^4)^2$ გამოსახულება?

IV განყოფილება

10. მოცემული გამოსახულებები ჩაწერეთ მრავალწევრის სახით:

ა) $(x^2 - 3x)^2$;

ბ) $(c^2 - 0,7c^3)^2$;

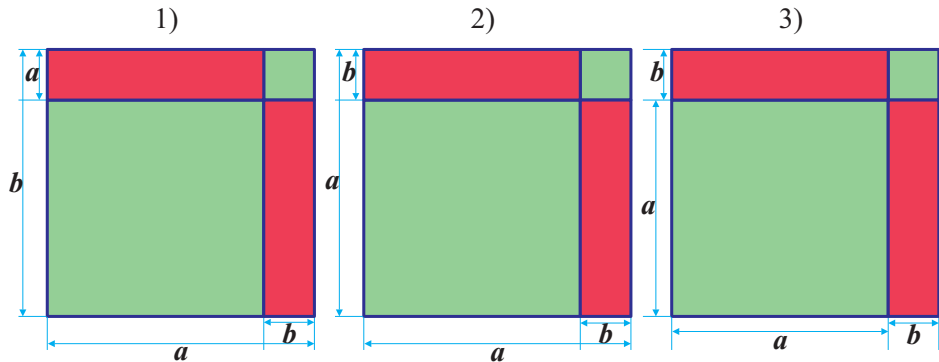
გ) $\left(1\frac{1}{2}a^5 + 8a^2\right)^2$;

დ) $\left(\frac{1}{2}x^3 + 6x\right)^2$;

ე) $(2y^3 - 0,5y^2)^2$;

ვ) $\left(\frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}\right)^2$.

11. სამირმა $(a - b)^2$ გამოსახულება კვადრატებისა და მართკუთხედების გამოყენებით დაამოდელირა. თქვენი აზრით, რომელია მისი მოდელი ქვემოთ მოცემულს შორის?



$(m - n)^2$; $(x - 2y)^2$; $(2x - y)^2$ გამოსახულებები დაამოდელირეთ იგივე სახით.

12. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

ა) $(12m - 1)^2 - 1$;

ბ) $121 - (11 - 7x)^2$;

გ) $a^2 + 49 - (a - 7)^2$;

დ) $(2a + 6b)^2 - 24ab$;

ე) $a^2b^2 - (ab - 9)^2$;

ვ) $a^4 - 81 - (a^2 + 9)^2$.

13. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

ა) $(x - 3)^2 + x(x + 9)$;

ბ) $(b - 4)^2 + (b - 1)(2 - b)$;

გ) $(2a + 5)^2 - 5(4a + 5)$;

დ) $9b(b - 1) - (3b + 2)^2$.

14. ამოხსნით განტოლებები:

ა) $(x - 6)^2 - x(x + 8) = 2$;

ბ) $(x - 5)^2 - x^2 = 3$;

გ) $9x^2 - 1 - (3x - 2)^2 = 0$;

დ) $16y(2 - y) + (4y - 5)^2 = 0$;

ე) $x + (5x + 2)^2 = 25(1 + x^2)$.

15. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

ბ) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

გ) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$;

დ) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$.

16. x -ის რა მნიშვნელობისათვისაა:

ა) $(x + 1)$ გამოსახულების კვადრატი $(x - 3)$ გამოსახულების კვადრატზე 120 ერთეულით მეტი?

ბ) $(2x + 10)$ გამოსახულების კვადრატი $(x - 5)$ გამოსახულების კვადრატზე 4-ჯერ მეტი?

17. რიცხვის კუბის მოძებნის წესის გამოყენებით, ქვემოთ მოცემული გამოსახულებების კუბი გადააქციეთ მრავალწევრად:

ა) $(a + 1)^3$;

ბ) $(a - 2)^3$;

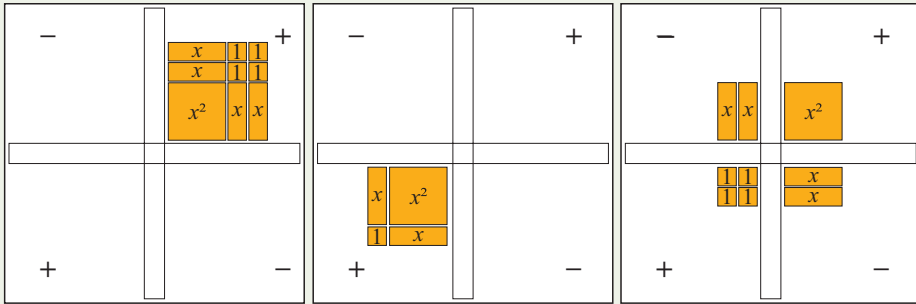
გ) $(2x + y)^3$;

დ) $(2a - 3)^3$.

4.2. ორი გამოსახულების ჯამის კვადრატისა და სხვაობის კვადრატის ფორმულების გამოყენებით მამრავლებად დაშლა

საქმიანობა

1. გამოიკვლიეთ რომელი ორწევრების კვადრატია ასახული მოდელებში.



2. მოდელის საფუძველზე სამწევრები ჩაწერეთ ორწევრების კვადრატების სახით.
3. $x^2 + 4x + 4$ მრავალწევრი ჩაწერეთ $x^2 + 2x + 2x + 4$. სახით და ჯუფთების გზით დაშალეთ მამრავლებად. მიღებული შედეგი შეადარეთ პირველ მოდელში მიღებულ შედეგთან.
4. განსაზღვრეთ $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2$ ჩანაწერი რომელი ორწევრის კვადრატის დაშლილი ფორმაა. როგორ შეიძლება დავშალოთ მამრავლებად იმავე წესით $x^2 - 6x + 9$ მრავალწევრი? განმარტეთ პასუხი.

ორი გამოსახულების ჯამისა და სხვაობის კვადრატი მხოლოდ ორწევრების კვადრატში აყვანისათვის არ გამოიყენება. ამ ფორმულის დახმარებით სამწევრის მამრავლებად დაშლაც შეიძლება:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \quad a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

როგორც ტოლობებიდან ჩანს, $a^2 + b^2 + 2ab$ მრავალწევრის $(a + b)(a + b)$ ნამრავლის სახით, $a^2 + b^2 - 2ab$ მრავალწევრის კი $(a - b)(a - b)$ ნამრავლის სახით წარმოდგენა შეიძლება.

ნიმუში

მაგალითად: $a^2 - 20ab^2 + 100b^4$ სამწევრი დაშალეთ მამრავლებად.

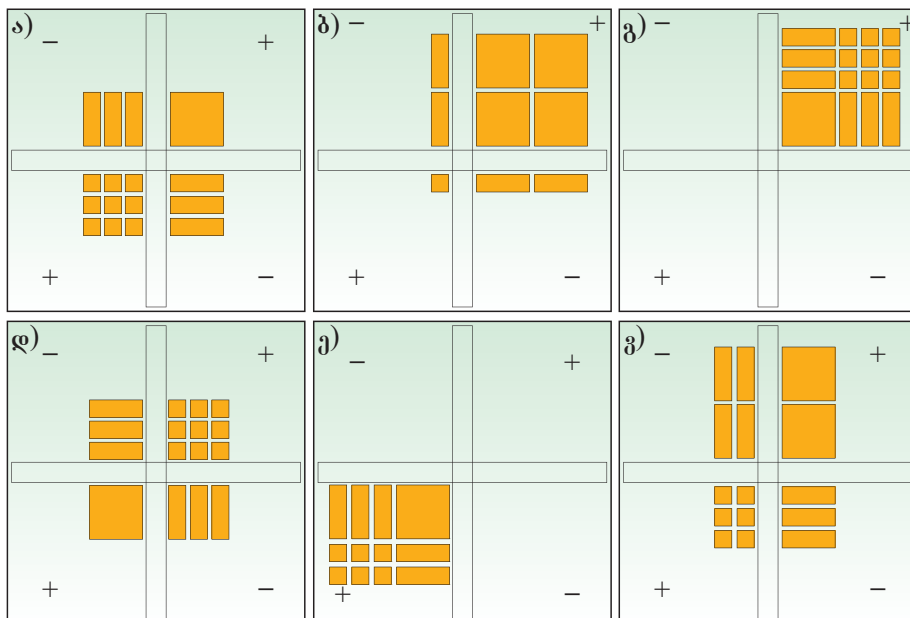
ამოხსნა: პირველი შესაკრები a -ს კვადრატია, ხოლო მესამე შესაკრები $10b^2$ -ის კვადრატი.

მეორე ერთწევრი a -ს და $10b^2$ -ის გაორმაგებული ნამრავლის ტოლია. მაშინ, ორი გამოსახულების სხვაობის კვადრატის ფორმულის საფუძველზე:

$$a^2 - 20ab^2 + 100b^4 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 10b^2 + (10b^2)^2 = (a - 10b^2)^2 = (a - 10b^2)(a - 10b^2)$$

საგარჯიშოები

1. განსაზღვრეთ მოდელებში ასახული მრავალწევრები (ნამრავლი), მათი წარმომქმნელი "მასალები" და ჩაწერეთ ისინი ტოლობების სახით:



2. მოცემული მრავალწევრები დაშალეთ მამრავლებად მოდელის აგებით:

ა) $x^2 + 8x + 16$; ბ) $x^2 - 8x + 16$; გ) $4x^2 - 12x + 9$; დ) $4x^2 + 12x + 9$.

3. შეავსეთ ცხრილი:

მრავალწევრი	პირველი წევრი	მეორე წევრი	პირველი და მეორე წევრის ნამრავლის ორმაგი	მამრავლები
$p^2 - 2pq + q^2$				$(p - q)(p - q)$
$64 + 16x + x^2$	8			
$1 - 2z + z^2$				
$a^2 + 36 + 12a$				
$\frac{1}{5}xp + \frac{1}{25}p^2 + \frac{1}{4}x^2$			$2 \cdot \frac{1}{5}p \cdot \frac{1}{2}x$	
$0,25m^2 - 2my + 4y^2$		2y		

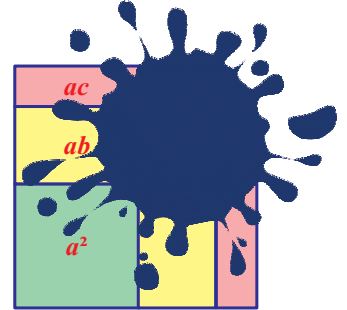
4. მეორე შესაკრებები წარმოადგინეთ ორი ერთნაირი ერთწევრის ჯამის სახით და ჯოფთების გზით მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $81a^2 + 18ab + b^2$; ბ) $100x^2y^2 - 20xy + 1$; გ) $49x^2 + 28xy + 4y^2$;
 დ) $25a^2 - 70ab + 49b^2$; ე) $9c^2 + 24cd + 16d^2$; ვ) $16 - 8a^2b^2 + a^4b^4$.

5. წერტილების ადგილას ჩაწერეთ ისეთი ერთწევრი, რომ მიღებული სამწევრის ორწევრების კვადრატის სახით წარმოდგენა იყოს შესაძლებელი.

ა) $\dots + 49 + 56a$; ბ) $36 - 12x + \dots$; გ) $0,01b^2 + \dots + 100c^2$;
 დ) $25a^2 + \dots + \frac{1}{4}b^2$; ე) $\dots - 6ab + \frac{1}{9}b^2$; ვ) $\frac{1}{16}y^2 - 2xy + \dots$.

6. ნიგარმა $(a + b + c)^2$ გამოსახულების მრავალწევრად გადაქცევისათვის ააგო მოდელი. თუმცა ფურცელს, რომელზეც მოდელი იყო ჩახაზული, ერთ ნაწილზე მელნის ლაქა დააჩნდა (სურათი 1). შეგიძლიათ დაასრულოთ ნიგარის ჩახაზული მოდელი? კიდევ რომელ ხერხს გამოიყენებდით ამ გამოსახულების მრავალწევრად გადასაქცევად?



სურათი 1

7. შესაძლებელია ქვემოთ მოცემული გამოსახულებები წარმოვადგინოთ ორწევრის კვადრატის სახით? თუ არ არის შესაძლებელი, რატომ? რომელი ერთწევრები უნდა მივუმატოთ ამ გამოსახულებებს, რომ მათი ორწევრის კვადრატის სახით წარმოდგენა იყოს შესაძლებელი?

ა) $25a^2 - 15ab + 9b^2$; ბ) $\frac{1}{4}y^2 - 6xy + 9x^2$; გ) $\frac{1}{9}c^2 - \frac{1}{15}xc + \frac{1}{25}x^2$.

8. ფიგურების ადგილას ჩაწერეთ ისეთი ერთწევრები, რომ იგივეობა მიიღოს.

ა) $(5x + \blacktriangle)^2 = \blacktriangledown + 70xy + \blacksquare$; ბ) $(9a - \blacktriangle)^2 = \blacktriangledown - \bullet + 100b^2$;
 გ) $(\blacktriangle + 10a)^2 = \blacktriangledown - 60an + \blacksquare$; დ) $(\blacktriangle - \blacksquare)^2 = 25m^2 + 80mn + \bullet$.

9. სემედი დაჟინებით ამბობს, რომ $x^2 + 6x + 10$ სამწევრის მისაღები მინიმალური მნიშვნელობაა 1. თქვენი აზრით, რა არის მიზეზი, რომ ის ამ დასკვნამდე მივიდა? მოცემული მრავალწევრების ორწევრების კვადრატებად დაშლით განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული სამწევრების დასაშვები უმცირესი ან უდიდესი მნიშვნელობა (შპმ ან უდმ).

ნიმუში: $a^2 + 14a + 10 = a^2 + 14a + 49 - 39 = (a + 7)^2 - 39$. უდმ: -39

ა) $a^2 - 16a + 69$; ბ) $125 + 22x + x^2$; გ) $-50 - 14b - b^2$;
 დ) $4y^2 - 4y + 6$; ე) $a^2 + b^2 - 2ab + 2$; ვ) $9x^2 + 4 - 12xy + 4y^2$.

10. გამოთვალეთ ორწევრის კვადრატის ფორმულის გამოყენებით:

ა) $15^2 + 2 \cdot 15 \cdot 11 + 11^2$; ბ) $71^2 - 2 \cdot 71 \cdot 25 + 625$;
 გ) $101^2 - 202 \cdot 81 + 81^2$; დ) $2 \cdot 55 + 25 + 121$;
 ე) $67^2 + 2 \cdot 67 \cdot 45 + 2015$; ვ) $-3600 - 2 \cdot 720 - 144$.

11. ედერმა დაწერა $16 - 36 = 25 - 45$ ტოლობა და ორივე მხარეს მიუმატა 20,25.

$16 - 36 + 20,25 = 25 - 45 + 20,25$

$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4,5 + 4,5^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4,5 + 4,5^2$

ამ ტოლობის ორივე მხარე ჩაწერა ორწევრის კვადრატის სახით:

$(4 - 4,5)^2 = (5 - 4,5)^2$.

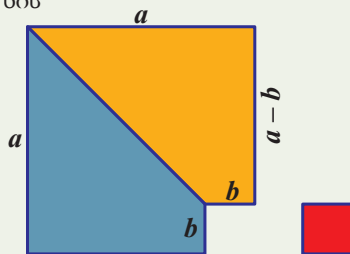
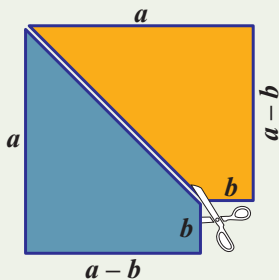
მან ჩათვალა, რომ რიცხვები, რომლების კვადრატებიც ტოლია, ერთმანეთის ტოლია

და ჩაწერა: $4 - 4,5 = 5 - 4,5$ და $4 = 5$. თქვენი აზრით, სად დაუშვა მან შეცდომა?

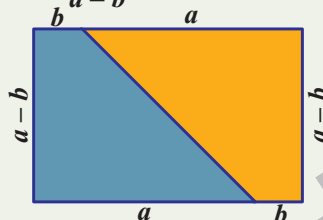
4.3. ორი გამოსახულების კვადრატების სხვაობა

საქმიანობა

1. მოცემულია ორი კვადრეტი, რომელთა გვერდების სიგრძეებია a და b . ჩახაზეთ ის რვეულის ფურცლებზე. a გვერდიანი კვადრატის ორი მოპირდაპირე წვეროს შეერთებით გაავლეთ დიაგონალი (a და b ნებისმიერი დადებითი რიცხვია).
2. ამ კვადრატების ფართობების სხვაობა იქნება $a^2 - b^2$. პატარა კვადრეტი მაკრატლით ამოჭერით და გამოაცალკევეთ.
3. მიღებული ფიგურა გაჭერით მაკრატლით შუა ხაზის (დიაგონალის) გასწვრივ.



4. გაჭრილი ფიგურები შეაერთეთ, როგორც მარჯვენა მხარეზეა ნაჩვენები. განსაზღვრეთ მიღებული მართკუთხედის ფართობი.
5. რა დასკვნამდე მიხვდით?



ორი გამოსახულების კვადრატების სხვაობა ამ გამოსახულებათა ჯამისა და სხვაობის ნამრავლის ტოლია: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ -ეს **კვადრატების სხვაობის ფორმულაა**.

ამ იგივეობაში მარჯვენა და მარცხენა მხარეებს თუ შევუცვლით ადგილებს, გვექნება: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. ორი გამოსახულების ჯამისა და სხვაობის ნამრავლი ამ გამოსახულებების კვადრატების სხვაობის ტოლია.

ნიმუში

მაგალითი 1: $25 - a^2$ ორწევრი დაშალეთ მამრავლებად.

ამოხსნა: $25 = 5^2$, ამიტომაც მოცემული ორწევრი წარმოვადგინოთ კვადრატების სხვაობის სახით და დავშალოთ მამრავლებად:

$$25 - a^2 = 5^2 - a^2 = (5 + a)(5 - a).$$

მაგალითი 2: $(2a + 3b)(2a - 3b)$ ნამრავლი გადააქციეთ მრავალწევრად.

ამოხსნა: როგორც გამოსახულებიდან ჩანს, მოითხოვება ორი ერთნაირი ერთწევრის ჯამისა და სხვაობის ნამრავლის მრავალწევრად გადაქცევა. კვადრატების სხვაობის ფორმულის თანახმად:

$$(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$$

საგარჯიშოები

1. მოცემული გამოსახულებები წარმოადგინეთ ერთწევრის კვადრატის სახით:

$4a^2$	$9x^2b^2$	$16m^4$	$81a^6x^4$	$0,64n^8$	$1,21x^2p^4$	$0,01a^8b^2$	$\frac{9}{64}m^2n^4$	$1\frac{11}{25}a^{12}$
		$(4m^2)^2$						

2. სურათი 1-ზე ნაჩვენებ ფიგურაზე ისეთი გადანაცვლება მოახდინეთ, რომ მიღებული ფიგურა $a^2 - b^2$ ორწევრის მოდელი გახდეს.

3. იპოვეთ ორწევრების ნამრავლი და გადააქციეთ მრავალწევრად:

ა) $(x - y)(x + y)$;

ბ) $(a + 3)(a - 3)$;

გ) $(p + q)(p - q)$;

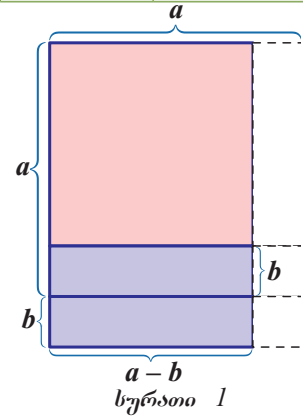
დ) $(n - 3m)(3m + n)$;

ე) $(7 + 4y)(4y - 7)$;

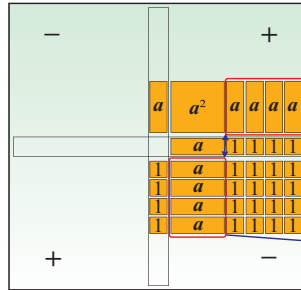
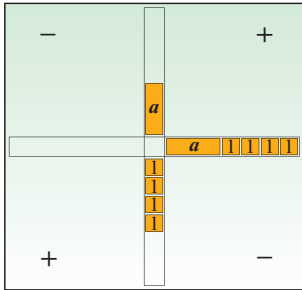
ვ) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)$;

ზ) $(8c + 9d)(8c - 9d)$;

თ) $\left(10x + 1\frac{2}{7}\right)\left(10x - 1\frac{2}{7}\right)$.



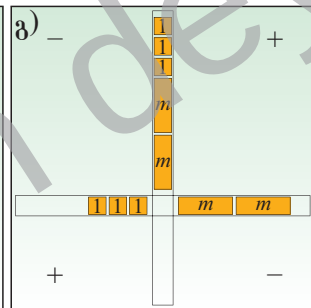
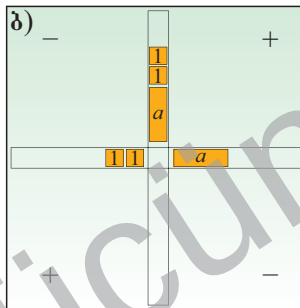
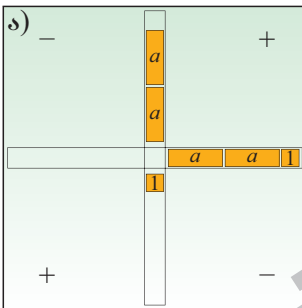
4. იპოვეთ ორწევრების ნამრავლები მოდელების მიხედვით:



$+4a$

$$(a + 4)(a - 4) = a^2 - 4^2 = a^2 - 16$$

$-4a$



5. ნამრავლი ჩაწერეთ მრავალწევრის სახით:

ა) $(x^2 - 7)(x^2 + 7)$;

ბ) $(a^4 - b^3)(a^4 + b^3)$;

გ) $(c^5 + k^7)(c^5 - k^7)$;

დ) $(9x - b^2)(9x + b^2)$;

ე) $(0,7a^3 + b)(0,7a^3 - b)$;

ვ) $(5c^8 + 3k)(5c^8 - 3k)$;

ზ) $(10p^2 - 0,3q^2)(10p^2 + 0,3q^2)$;

თ) $(1,4a^5 + 0,1b^4)(1,4a^5 - 0,1b^4)$.

IV განყოფილება

6. ფიგურების ადგილას ისეთი ერთწევრები ჩაწერეთ, რომ მიიღოთ იგივეობა:

ა) $(3a + \blacktriangle)(\blacksquare - 6b) = 9a^2 - \blacktriangleright$;

ბ) $(\blacksquare - 3x)(\blacksquare + 3x) = 25m^2 - \blacktriangle$;

გ) $(1,1a + \blacktriangle)(\blacktriangle - \blacktriangledown) = \bullet - 1,44n^4$;

დ) $m^4 - 324n^8 = (\blacktriangle - \blacktriangledown)(\blacktriangledown + \blacktriangledown)$.

7. ჩაწერეთ მრავალწევრის სახით:

ა) $\left(\frac{5}{7}m^3 + \frac{1}{4}n^2\right)\left(\frac{5}{7}m^3 - \frac{1}{4}n^2\right)$;

ბ) $\left(1\frac{1}{9}a^5 + 1\frac{1}{2}n^7\right)\left(1\frac{1}{9}a^5 - 1\frac{1}{2}n^7\right)$;

გ) $\left(\frac{4}{13} + \frac{1}{7}n^4\right)\left(\frac{4}{13} - \frac{1}{7}n^4\right)$;

დ) $\left(\frac{10}{17} - 0,02n^7\right)\left(\frac{10}{17} + 0,02n^7\right)$.

8. გამოთვალეთ გამოსახულებების მნიშვნელობები ნამრავლში მოცემული მამრავლების ორი ერთნაირი რიცხვის ჯამისა და სხვაობის სახით წარმოდგენით:

ა) $99 \cdot 101$;

გ) $52 \cdot 48$;

ე) $1,05 \cdot 0,95$;

ზ) $17,3 \cdot 16,7$;

ი) $29,8 \cdot 30,2$;

ლ) $103 \cdot 97$;

$$\begin{aligned} 50,2 \cdot 49,8 &= \\ &= (50 + 0,2) \cdot (50 - 0,2) = \\ &= 50^2 - 0,2^2 = \\ &= 2500 - 0,04 = 2499,96 \end{aligned}$$

ბ) $37 \cdot 43$;

დ) $201 \cdot 199$;

ვ) $2,03 \cdot 1,97$;

თ) $1002 \cdot 998$;

კ) $699 \cdot 701$;

მ) $305 \cdot 295$.

9. გაამარტივეთ მოცემული გამოსახულებები შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით:

ა) $(-y + x)(y + x)$;

ბ) $(x + y)(-x - y)$;

გ) $(-a + b)(b - a)$;

დ) $(x - y)(y - x)$;

ე) $(-b - c)(b - c)$;

ვ) $(-a - b)(-a - b)$.

10. ჩაწერეთ გამოსახულებები მრავალწევრის სახით:

ა) $(-5xy + a)(5xy + a)$;

ბ) $(-10p^4 + 9)(9 - 10p^4)$;

გ) $(-3 - 2a^2b)(3 - 2a^2b)$;

დ) $(0,2x + 10y)(10y - 0,2x)$;

ე) $(17a^3 - 9x)(-17a^3 - 9x)$;

ვ) $(1,1y - 0,3)(0,3 + 1,1y)$;

ზ) $(7 - 6x)(7 + 6x)$;

თ) $\left(\frac{1}{3} - 2y\right)\left(\frac{1}{3} + 2y\right)$;

ი) $\left(4 - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}b + 4\right)$;

კ) $\left(4a + 1\frac{1}{7}\right)\left(1\frac{1}{7} - 4a\right)$.

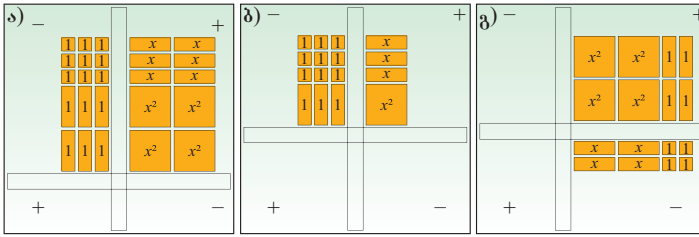
11. ა) როდის იღებს უმცირეს მნიშვნელობას $a^2 - b^2$ გამოსახულება? რა რიცხვის ტოლი უნდა იყოს ამისათვის a^2 ?

ბ) როდის იღებს უდიდეს მნიშვნელობას $a^2 - b^2$ გამოსახულება? რა რიცხვის ტოლი უნდა იყოს ამისათვის b^2 ?

12. შეზნეში დაჟინებით ამოიღეს, რომ $(13a - 0,3)(0,3 + 13a)$ გამოსახულების შესაძლო უმცირესი მნიშვნელობაა 0,09. მართალია ის? დაასაბუთეთ პასუხი: განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული გამოსახულებების შესაძლო დასაშვები უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა.

ა) $(5a - 0,2)(0,2 + 5a)$; ბ) $(7a - 15)(15 + 7a)$; გ) $(1,2 - 7y)(7y + 1,2)$.

13. რომელი ორწევრის ნამრავლია დამოდეირებული სურათზე?



14. ორწევრები დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $16a^2 - 4b^2$; ბ) $64 - 81k^2$; გ) $m^2n^2 - 25$; დ) $x^2 - 1\frac{7}{9}$;

ე) $y^2 - 0,04$; ვ) $0,64 - 0,49x^2$; ზ) $\frac{16}{25}n^2 - 625$; თ) $1,69x^2 - 3\frac{1}{16}$.

15. ორწევრები დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $36a^2 - b^2$; ბ) $16m^2 - 9n^2$; გ) $k^2 - a^2b^2$;
 დ) $-x^2 + 25n^2$; ე) $64x^2 - 121y^2$; ვ) $4a^2b^2 - 1$;
 ზ) $81a^2 - 49$; თ) $-49m^2 + 144b^2$; ი) $p^2 - a^2b^2$;
 კ) $0,01n^2 - 9m^2$; ლ) $0,09x^2 - 0,49y^2$; მ) $a^2x^2 - 1,21m^4$.

16. გამოთვლები შეასრულეთ ზეპირად კვადრატების სხვაობის ფორმულის გამოყენებით. შეამოწმეთ პასუხები.

ა) $63^2 - 53^2$; ბ) $126^2 - 125^2$; გ) $0,899^2 - 0,111^2$;
 დ) $47^2 - 67^2$; ე) $41,7^2 - 41,6^2$; ვ) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

17. იპოვეთ წილადების მნიშვნელობა:

ა) $\frac{36}{13^2 - 11^2}$; ბ) $\frac{26^2 - 12^2}{54^2 - 16^2}$; გ) $\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2}$; დ) $\frac{67^2 - 17^2}{83^2 - 77^2}$.

18. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

ა) $(0,8x + 15)(0,8x - 15) + 0,36x^2$; ბ) $(3a - 1)(3a + 1) - 17a^2$;
 გ) $5b^2 + (3 - 2b)(3 + 2b)$; დ) $100x^2 - (5x - 4)(4 + 5x)$;
 ე) $2x^2 - (x - 1)(x + 1)$; ვ) $6x^2 - (x - 0,5)(x + 0,5)$.

19. შეასრულეთ გამრავლება:

ა) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$; ბ) $(2x + y)(4x^2 + y^2)(2x - y)$;
 გ) $(m^3 + b)(m^3 - b)(m^6 + b^2)$; დ) $(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$.

20. ქვემოთ მოცემული დებულებებიდან რომელია სწორი?

- ა) ნამრავლი რომ ნულის ტოლი იყოს, მამრავლებიდან სულ მცირე ერთი მაინც უნდა იყოს ნულის ტოლი;
 ბ) ნამრავლი რომ ნულის ტოლი იყოს, მამრავლებიდან ორივე უნდა იყოს ნულის ტოლი;
 გ) ნამრავლი რომ ნულის ტოლი იყოს, მამრავლებიდან არცერთი არ უნდა იყოს ნულის ტოლი.

21. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $(a-8)(a+12)=0$;

ბ) $m^2-0,25=0$;

გ) $9x^2-64=0$;

დ) $b^2+36=0$;

ე) $4x^2-9=0$;

$$a^2 - 1\frac{9}{16} = 0$$

$$a^2 - \frac{25}{16} = 0$$

$$\left(a - \frac{5}{4}\right)\left(a + \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$a - \frac{5}{4} = 0; a + \frac{5}{4} = 0$$

$$a = \frac{5}{4}; a = -\frac{5}{4} \quad \text{პასუხი: } 1\frac{1}{4}; -1\frac{1}{4}.$$

ვ) $x^2-16=0$;

ზ) $\frac{1}{9}-y^2=0$;

თ) $x^2-\frac{9}{25}=0$;

ი) $81a^2+1=0$;

კ) $\frac{49}{81}m^2-1=0$.

22. ისმაილი ამბობს, რომ, თუ m რიცხვი 3-ზე მეტი რომელიმე მარტივი რიცხვია, მაშინ m^2-1 ორწევრი უნაშთოდ იყოფა 12-ზე. თქვენი აზრით, სწორია ეს დებულება?

ა) დებულების სისწორე შეამოწმეთ m -ის ადგილას რომელიმე მარტივი რიცხვის ჩაწერით.

ბ) m^2-1 ორწევრი დაშალეთ მამრავლებად. გამოიკვლიეთ რატომ იყოფა 4-ზე მიღებული ნამრავლი. როგორ შეიძლება დავასაბუთოთ, რომ ეს ნამრავლი იყოფა 3-ზე? წარმოადგინეთ მიღებული შედეგი.

23. **ჯგუფური სამუშაო:** შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული ალგორითმი.

1. ჩაწერეთ რაიმე სამი მიმდევრობითი მთელი რიცხვი;
2. იპოვეთ მათი ნამრავლი;
3. იპოვეთ მიღებული რიცხვისა და შუაში მდგომი რიცხვის ჯამი;
4. გამოთვალეთ შუაში მდგომი რიცხვის კუბი;
5. შეადარეთ მე-3 და მე-4 ბრძანების შედეგები;
6. გამოიტანეთ დასკვნა.

ამ მიმდევრობითი სამი რიცხვიდან მეორე რიცხვი აღნიშნეთ a ასოთი და შეადგინეთ ალგებრული გამოსახულება. გაამარტივეთ მიღებული გამოსახულება. რა დასკვნამდე მიხვედით?

24. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

ა) $5a(a-8)-3(a+2)(a-2)$;

ბ) $(1-2b)(1+2b)+4b(b-2)$;

გ) $(3x-y)(3x+y)-(x-y)(x+y)$;

დ) $(11a+3b)(11a-3b)-(11a-3b)(3b-11a)$.

25. გამოსახულებები დაშალეთ მამრავლებად

კვადრატების სხვაობის ფორმულის გამოყენებით:

ა) $(x+3)^2-4^2$;

ბ) $(4a-1)^2-25$;

გ) $81-(2x-5)^2$;

დ) $9y^2-(1+7y)^2$;

ე) $49x^2-(2+3x)^2$;

ვ) $(a+11)^2-121$;

ზ) $(a+b)^2-(b-a)^2$;

თ) $(m+n)^2-(m-n)^2$;

ი) $(2x-5)^2-(5+2x)^2$;

კ) $(4c-x)^2-(2c+3x)^2$.

$$\begin{aligned} (a-2b)^2 - (2b+a)^2 &= \\ &= ((a-2b) - (2b+a)) \cdot \\ &\cdot ((a-2b) + (2b+a)) = \\ &= (a-2b-2b-a) \cdot \\ &\cdot (a-2b+2b+a) = \\ &= -4b \cdot 2a = -8ab. \end{aligned}$$

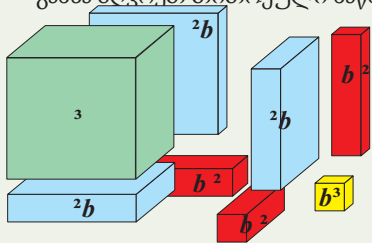
4.4. ორი გამოსახულების ჯამის კუბი და სხვაობის კუბი

საქმიანობა

1. მოცემულია $a + b$ სიგრძის გვერდის მქონე კუბი.

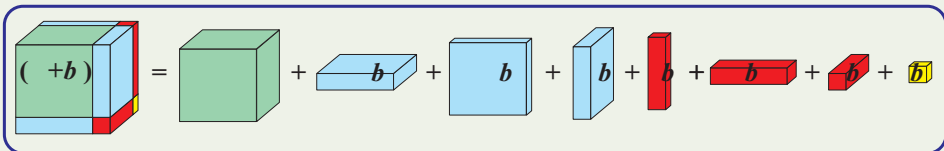
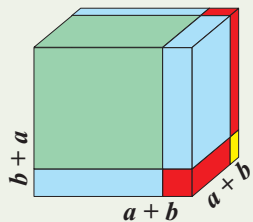
2. კუბის მოცულობა: $V = (a + b)^3$.

3. კუბი დავშალოთ a ან b წიბოს მქონე კუბებად ან მართკუთხა პარალელებიპედედად, ისე როგორც სურათზეა ნაჩვენები. განსაზღვრეთ თითოეული ნაწილი რა ფიგურაა.



4. იპოვეთ თითოეული ფიგურის მოცულობა და ჩაწერეთ ჯამის სახით. რა გამოსახულება მიიღეთ?

5. გაუტოლეთ ერთმანეთს მთლიანი კუბის მოცულობა და ნაწილების მოცულობების ჯამი. ჩაწერეთ მიღებული ალგებრული გამოსახულება.



ორი გამოსახულების ჯამის კუბი ტოლია: პირველის კუბი, პლიუს გასამკვეცებული ნამრავლი პირველის კვადრატისა მეორეზე, პლიუს გასამკვეცებული ნამრავლი პირველისა მეორის კვადრატზე, პლიუს მეორის კუბი:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

ეს, ორი გამოსახულების ჯამის კუბის ფორმულაა.

საქმიანობა

1. $(a + b)^3$ გამოსახულება ჩაწერეთ სამი ტოლი ორწევრის ნამრავლის სახით.

2. პირველი და მეორე ორწევრების ნამრავლი გადააქციეთ მრავალწევრად.

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times a + b \\ \hline a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline ? \end{array}$$

3. მიღებული მრავალწევრი ჩაწერეთ სტანდარტული სახით და გაამრავლეთ მესამე ორწევრზე.

4. შედეგი ჩაწერეთ ფორმულის სახით.

5. $(a - b)^3$ გამოსახულება ჩაწერეთ სამი ტოლი ორწევრის ნამრავლის სახით.

6. პირველი და მეორე ორწევრების ნამრავლი გადააქციეთ მრავალწევრად.

7. მიღებული მრავალწევრი ჩაწერეთ სტანდარტული სახით და გაამრავლეთ მესამე ორწევრზე.

8. შედეგი ჩაწერეთ ფორმულის სახით.

$$\begin{array}{r} a \quad b \\ \times a \quad b \\ \hline a^2 \quad ab \\ ab \quad b^2 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ \times a + b \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 \quad 2ab + b^2 \\ \times a \quad b \\ \hline ? \end{array}$$

IV განყოფილება

ორი გამოსახულების სხვაობის კუბი ტოლია: პირველის კუბს, მინუს გასამკვეცებული ნამრავლი პირველის კვადრატისა მეორეზე, პლიუს გასამკვეცებული ნამრავლი პირველისა მეორის კვადრატზე, მინუს მეორის კუბი:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

ეს, ორი გამოსახულების სხვაობის კუბის ფორმულაა.

ნიმუში

მაგალითი 1: $(x + 3y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3y + 3 \cdot x \cdot (3y)^2 + (3y)^3 = x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3.$

მაგალითი 2: $\left(2a - \frac{1}{2}b\right)^3 = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot \frac{1}{2}b + 3 \cdot 2a \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^3 =$
 $= 8a^3 - 6a^2b + 1,5ab^2 - \frac{1}{8}b^3.$

საგარჯიშოები

- განმარტეთ $(I - II)^3 = I^3 - 3 \cdot I^2 \cdot II + 3 \cdot I \cdot II^2 - II^3$ ჩანაწერი. რა შეიცვლება მარცხენა მხარეს I-ისა და II-ის ადგილების გადანაცვლებით? ამ შემთხვევაში რა ცვლილებების განხორციელება საჭირო მოცემულ ტოლობაში?
- გამოსახულებები ჩაწერეთ მრავალწევრის სახით:

ა) $(x + y)^3$;	ბ) $(m - n)^3$;	გ) $(x + 2)^3$;	დ) $\left(\frac{2}{3}a + 3b\right)^3$;
ე) $(m + 0,2)^3$;	ვ) $(5 - x)^3$;	ზ) $(2p - 1)^3$;	თ) $\left(k + \frac{1}{3}\right)^3$.
- მოცემული გამოსახულებები ჩაწერეთ ნამრავლის სახით, გადააქციეთ მრავალწევრად ქვეშიწერით გამრავლების მეთოდით:

ა) $(5a - 2b)^3$;	ბ) $(m + 4n)^3$;	გ) $(1 - ab)^3$;	დ) $(3x + 1)^3$.
--------------------	-------------------	-------------------	-------------------
- მოცემული რიცხვების კუბის გამოსათვლელად ხარისხის ფუძე წარმოადგინეთ ჯამის სახით და გამოიყენეთ ჯამის კუბის ფორმულა:

ა) 35^3 ;	ბ) $12,1^3$;	გ) 52^3 ;	დ) 43^3 ;	ე) $20,01^3$.
-------------	---------------	-------------	-------------	----------------
- $(1 \pm a)^3 \approx 1 \pm 3a$ ($0 < a < 1$) დაახლოებით ტოლობის გამოყენებით იპოვეთ ქვემოთ მოცემული კუბების მიახლოებითი მნიშვნელობა. აბსოლუტური ცდომილების გამოთვლით გამოიტანეთ დასკვნა.

ა) $(1 + 0,01)^3$;	ბ) $1,04^3$;	გ) $0,99^3$;	დ) $1,1^3$;	ე) $0,996^3$.
---------------------	---------------	---------------	--------------	----------------
- X და Y-ის ადგილას ჩაწერეთ ისეთი ერთწევრი, რომ მიიღოთ იგივეობა.

ა) $(a^3 + X)^3 = a^9 + 3a^7b + 3a^5b^2 + Y$;
ბ) $(3a^2 - X)^3 = 27a^6 - 54a^5 + 36a^4 - 8a^3$;
გ) $(X + 2a^3)^3 = 8a^9 + 24a^6b + 24a^3b^2 + 8b^3$;

დ) $(a^2 - X)^3 = a^6 - 9a^5 + 27a^4 - Y$;

ე) $(a^3 + X)^3 = a^9 + 3a^7b^4 + 3a^5b^8 + Y$.

7. გამოსახულებები ჩაწერეთ მრავალწევრის სახით:

ა) $(x^2 - y^4)^3$;

ბ) $-(a^5 + b^7)^3$;

გ) $(3x^2 - 7y^2)^3$;

დ) $-(4m^4 + n^5)^3$;

ე) $\left(\frac{2}{3}a + b^8\right)^3$;

ვ) $\left(1\frac{1}{2}a^6 - 2\frac{1}{2}b^2\right)^3$;

ზ) $\left(ab^3 - \frac{3}{4}\right)^3$;

თ) $-\left(\frac{1}{5}m + \frac{3}{2}n\right)^3$;

ი) $(0,5xy^2 - 0,2x^2y)^3$.

8. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3$ გამოსახულება გადააქციეთ მრავალწევრად, იპოვეთ $a^3 + \frac{1}{a^3}$ გამოსახულების მნიშვნელობა მიღებული იგივეობის გამოყენებით, თუ $a + \frac{1}{a} = 5$. განმარტეთ, თუ როგორ გააკეთეთ ეს.

9. შეავსეთ ცხრილი Microsoft Excel-ის პროგრამის გამოყენებით:

№	A	B	C
1	0,324	1,23	= (A2 + B2)^3
2	8,92	4,001	= (A3 + B3)^3
3	7,152	0,992	= (A1 + B5)^3
4	78	156	= (A4 + B1)^3
5	19,8	243	= (A5 + B4)^3

Microsoft Excel პროგრამაში
ახარისხების მოქმედება
წარმოდგენილია ^ ნიშნით.
 $(1,2 + 3,1)^3 \rightarrow = (1.2 + 3.1)^3$

10. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

ა) $(a + b)^3 - (a - b)^3$;

ბ) $(3m - n)^3 - (n + 3m)^3$;

გ) $(x + y)^3 - 3xy(x + y)$;

დ) $3ab(a + b) - (a + b)^3$;

ე) $(a - b)^3 + 3ab(a - b)$;

ვ) $(m - n)^3 - (m - n)(m^2 + mn + n^2)$.

11. ა) რომელი ნატურალური რიცხვები შეიძლება იყოს a და b , თუ $a + b = 9$, $ab = 8$?
ნატურალური რიცხვია $a^3 - b^3$ გამოსახულების მნიშვნელობა?

ბ) რომელი ნატურალური რიცხვები შეიძლება იყოს a და b , თუ $a - b = 9$, $ab = 10$?
იპოვეთ $a^3 + b^3$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

გ) მოცემულია $a - b = 52$, $ab = 1260$, a და b ნატურალური რიცხვებია.
 $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$ იგივეობის გამოყენებით იპოვეთ $2(a^3 - b^3)$
გამოსახულების მნიშვნელობა.

12. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

ა) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)^3$;

ბ) $\left(\frac{5}{7}x - 1\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{7}x + 1\frac{1}{4}\right)^3$;

გ) $5 \cdot (2x + y)^3 - 2 \cdot (3y - x)^3$;

დ) $6 \cdot \left(\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^3$.

13. გამოსახულებები გადააქციეთ მრავალწევრად:

ა) $(3ab^2 + a^3b^2)^3$;

ბ) $(m^4n^5 - 3mn)^3$;

გ) $\left(\frac{2}{5}x^4y^3 + \frac{1}{2}xy^7\right)^3$;

დ) $(7abc^3 - 3a^2bc)^3$;

ე) $(0,1x^6y^2c^{10} - 0,2)^3$;

ვ) $(ab^5c^4 + 1,2abc)^3$.

4.5. ორი გამოსახულების კუბების ჯამის მამრავლებად დაშლა

საქმიანობა

1. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ იგივეობაში შერჩეული ერთწევრების საერთო მამრავლი გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ და მიღებული გამოსახულება გადაიტანეთ ტოლობის მარჯვენა მხარეს. რომელი იგივეობა მიიღეთ?

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$
2. იგივეობის მარჯვენა მხარეს $(a + b)$ მამრავლი გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ. რომელი გამოსახულება მიიღეთ?

$$a^3 + b^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab)$$
3. გაამარტივეთ მეორე ფრჩხილები. რომელი გამოსახულება მიიღეთ? რომელ მამრავლებად დაიშალა $a^3 + b^3$ გამოსახულება? შეეცადეთ გამოთქვათ მოსაზრება იგივეობის მარჯვენა მხარეს მეორე ფრჩხილებში მყოფი გამოსახულების შესახებ.

$a^2 - 2ab + b^2$ სამწევრი $(a - b)$ ორწევრის, $a^2 + 2ab + b^2$ სამწევრი კი $(a + b)$ ორწევრის სრული კვადრატია. $a^2 - ab + b^2$ სამწევრს კი $(a - b)$ ორწევრის არასრული კვადრატია ეწოდება. იგივე წესით $a^2 + ab + b^2$ სამწევრი $(a + b)$ ორწევრის არასრული კვადრატია.

ორი გამოსახულების კუბების ჯამი ამ წევრების ჯამისა და მათი სხვაობის არასრული კვადრატის ნამრავლის ტოლია:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

ეს ტოლობა ორი გამოსახულების კუბების ჯამის ფორმულაა.

ნიმუში

მაგალითი 1: $8a^3 + 27b^3$ გამოსახულება დამალეთ მამრავლებად.

ამოხსნა: $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)((2a)^2 - 2a \cdot 3b + (3b)^2) = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

მაგალითი 2: $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ ნამრავლი გადააქციეთ მრავალწევრად.

ამოხსნა: როგორც გამოსახულებიდან ჩანს, პირველი მამრავლი $(x + 4y)$ ორწევრის, მეორე მამრავლი კი $(x^2 - 4xy + 16y^2)$ ორწევრის არასრული კვადრატია. მაშინ კუბების ჯამის ფორმულის მიხედვით ვწერთ:

$$(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2) = x^3 + (4y)^3 = x^3 + 64y^3.$$

საგარჯიშოები

1. შეავსეთ ცხრილი. განმარტეთ როგორ იცვლება ხარისხები და კოეფიციენტები.

ერთწევრი	$3ab^6$	$-2m^4n^2$	$1, 1x^7yz^4$	$\frac{3}{5}abc^9$	$1\frac{3}{5}xp^4$	$-\frac{4}{7}m^8n^{11}$	$11m^5n$
ერთწევრის კუბი	$27a^3b^{18}$						
ხარისხები	7 და 21						
კოეფიციენტები	3 და 27						

2. დაწერეთ მოცემული ორწევრების სრული და არასრული კვადრატები. განმარტეთ მათი სხვაობა:

ა) $a + b$; ბ) $n - 2m$; გ) $\frac{1}{2}x + y$; დ) $0,1b - a$;
 ე) $3a + b$; ვ) $7mn - 2m$; ზ) $\frac{2}{9}x + 1,5y$; თ) $1,3ab - 1$.

თითოეულ გამოსახულებაში რომელი ერთწევრი უნდა მივუმატოთ სრულ კვადრატს, რომ მივიღოთ არასრული კვადრატი?

3. შეასრულეთ გამრავლება ქვეშმოწერით:

ა) $(2p + 3)(4p^2 - 6p + 9)$;
 ბ) $(3n + m^2)(9n^2 - 3m^2n + m^4)$;
 გ) $(1 + 4b)(1 - 4b + 16b^2)$;
 დ) $(3a + d^8)(9a^2 - 3ad^8 + d^{16})$;
 ე) $(5mn + 1)(25m^2n^2 - 5mn + 1)$.

$$\begin{array}{r} 25a^2 + 10a + 4 \\ \times \quad 5a + 2 \\ \hline 125a^3 + 50a^2 \\ + \quad 50a^2 + 20a \\ \hline 125a^3 + 100a^2 + 20a + 8 \end{array}$$

რა შეგიძლიათ თქვათ მიღებული მრავალწევრის საფუძველზე? როგორ შეიძლება ვიპოვოთ მარტივი გზით მოცემული მრავალწევრების ნამრავლი?

4. ნამრავლი მარტივი გზით გადააქციეთ მრავალწევრად:

ა) $(-a - b)(a^2 - ab + b^2)$; ბ) $(a + b)(-a^2 + ab - b^2)$;
 გ) $(-a - b)(-a^2 + ab - b^2)$; დ) $(-a - b)((a + b)^2 - 3ab)$.

5. მოცემული გამოსახულებები გადააქციეთ მრავალწევრებად კუბების ჯამის ფორმულის საფუძველზე:

ა) $(x^3 + y^5)(x^6 - x^3y^5 + y^{10})$; ბ) $(3d^2 + 2c)(9d^4 - 6cd^2 + 4c^2)$;
 გ) $(25 - 5y^6 + y^{12})(5 + y^6)$; დ) $(9r^8 - 12r^4s^5 + 16s^{10})(3r^4 + 4s^5)$.

6. გამოთვალეთ შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით:

ა) $\frac{31^3 + 19^3}{50} - 31 \cdot 19$; ბ) $\frac{127^3 + 67^3}{194} - 127 \cdot 67$;

გ) $\frac{39^3 + 41^3}{80} - (39^2 + 41^2)$; დ) $\frac{48^3 + 52^3}{100} - (48^2 + 52^2)$.

7. A ასოს მაგივრად ჩაწერეთ ისეთი ერთწევრი, რომ მოცემული ტოლობა იგივეობად იქცეს.

ა) $(2x + A)(4x^2 - 2xA + A^2) = 8x^3 + 27y^3$;
 ბ) $(-A - 3c)(A^2 - 3cA + 9c^2) = -27c^3 - 8d^9$.

8. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 3)(x + 3) = 26$;
 ბ) $6(y + 1)^2 + 2(y + 1)(y^2 - y + 1) - 2(y + 1)^3 = -22$;
 გ) $(a + 2)^3 - a(3a + 1)^2 + (2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) = 53$;
 დ) $5x(x + 3)^2 - 5(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 30(x + 2)(x - 2) = 75$.

IV განყოფილება

9. ორწევრი დაშალეთ მამრავლებად:
- ა) $x^3 + y^3$; ბ) $m^3 + n^3$; გ) $8a^3 + 1$; დ) $27x^3 + y^3$;
 ე) $\frac{1}{64}a^3 + 0,008$; ვ) $64m^3 + 27n^3$; ზ) $-a^3b^3 - b^6$; თ) $125 + k^6$;
 ი) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{64}{125}y^3$; კ) $p^3q^3r^3 + 125p^9$; ლ) $0,027 + 64a^3$; მ) $343 + x^{12}$.
10. სევილი ვარაუდობს, რომ $75^3 + 44^3$ გამოსახულება იყოფა 7-ზე. როგორ შეგიძლიათ დაამტკიცოთ, რომ ის მართალია? იგივე წესით შეგიძლიათ დაამტკიცოთ, რომ : ა) $97^3 + 93^3$ გამოსახულება იყოფა 19-ზე? ბ) $215^3 + 94^3$ გამოსახულება იყოფა 3-ზე?
11. დაამტკიცეთ, რომ q -ს ნებისმიერი მთელი მნიშვნელობისათვის მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობა უნაშთოდ იყოფა a -ზე:
- ა) $(11-q)^3 + q^3, a = 11$; ბ) $(4-2q)^3 + 8q^3, a = 4$;
 გ) $8q^3 + (17-2q)^3, a = 17$; დ) $3q^3 + 3(4-q)^3, a = 12$.
12. შეადარეთ მოცემული რიცხვითი გამოსახულებების მნიშვნელობები:
- ა) $25^3 + 11^3$ და $(25 + 11)^3$; ბ) $\frac{29^3 + 31^3}{60}$ და 904.
13. იპოვეთ $a^3 + b^3$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ: ა) $a + b = 6$ და $ab = 8,75$;
 ბ) $a + b = -2$ და $ab = -8$.
14. რომელი გამოსახულებებით უნდა ჩაანაცვლოთ A, B, C და D ასოები, რომ ქვემოთ მოცემული ტოლობები იგივეობად იქცეს?
- ა) $(2x + A)(B + 9y^2) = C^3 + D^3$; ბ) $(3m + A)(B + C) = n^6 + D$.
15. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მოცემული მნიშვნელობისათვის:
- ა) $2a^3 + 9a - 2(a+1)(a^2 - a + 1), a = 11,7$;
 ბ) $b(b+2)(b-2) - (b+3)(b^2 - 3b + 9), b = 2,5$;
 გ) $3(c-1)^2 + (c+2)(c^2 - 2c + 4) - (c+1)^3, c = -3$.
16. მოცემული გამოსახულებები ჩაწერეთ ნამრავლის სახით:
- ა) $(x+1)^3 + x^3$; ბ) $(a-b)^3 + b^3$; გ) $1000 + (a-b)^3$;
 დ) $8x^3 + (x-y)^3$; ე) $(y-2)^3 + 27$; ვ) $27m^3 + (m+n)^3$.
17. გამოსახულების მნიშვნელობა გამოთვალეთ ყველაზე ხელსაყრელი გზით:
- ა) $51^3 + 3 \cdot 51^2 \cdot 49 + 3 \cdot 51 \cdot 49^2 + 49^3$;
 ბ) $2,56^3 + 3 \cdot 2,56^2 \cdot 5,44 + 3 \cdot 2,56 \cdot 5,44^2 + 5,44^3$;
 გ) $\left(2\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 7\frac{3}{4} + \left(7\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 2\frac{1}{4} + \left(7\frac{3}{4}\right)^3$;
 დ) $(-0,78)^3 + 2,22 \cdot (-0,78)^2 + (-2,34) \cdot 0,74^2 + 0,74^3$.
18. ერთი ნატურალური რიცხვის 4-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთია 1, მეორის კი 4-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი კი-3-ია. რა იქნება ნაშთი ამ რიცხვების კუბების ჯამის 4-ზე გაყოფისას?

4.6. ორი გამოსახულების კუბების სხვაობის მამრავლებად დაშლა

საქმიანობა

1. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$ იგივეობაში შერჩეული ერთწევრების საერთო მამრავლი გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ და მიღებული გამოსახულება გადაიტანეთ ტოლობის მარჯვენა მხარეს. რომელი იგივეობა მიიღეთ? $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
2. იგივეობის მარჯვენა მხარეს $(a-b)$ მამრავლი გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ. რა გამოსახულება მიიღეთ? $a^3 - b^3 = (a-b)((a-b)^2 + 3ab)$
3. გაამარტივეთ მეორე ფრჩხილები, რომელ მამრავლებად დაიშალა $a^3 - b^3$ გამოსახულება?

ორი გამოსახულების კუბების სხვაობა ამ გამოსახულებათა სხვაობისა და მათი ჯამის არასრული კვადრატის ნამრავლის ტოლია:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

ეს ტოლობა ორი გამოსახულების კუბების სხვაობის ფორმულაა.

ნიმუში

მაგალითი 1: $0,125a^3 - 64b^3$ გამოსახულება დაშალეთ მამრავლებად.

ამოხსნა: $0,125a^3 - 64b^3 = (0,5a)^3 - (4b)^3 = (0,5a - 4b)((0,5a)^2 + 0,5a \cdot 4b + (4b)^2) =$
 $= (0,5a - 4b)(0,25a^2 + 2ab + 16b^2).$

მაგალითი 2: $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$ ნამრავლი გადააქციეთ მრავალწევრად.

ამოხსნა: როგორც გამოსახულებიდან ჩანს, პირველი მამრავლი $(2x - 3y)$ ორწევრის, მეორე მამრავლი კი $(2x+3y)$ ორწევრის არასრული კვადრატია. მაშინ კუბების სხვაობის ფორმულის მიხედვით:

$$(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = (2x)^3 - (3y)^3 = 8x^3 - 27y^3.$$

საგარჯიშოები

1. განსაზღვრეთ რა შეცდომებია ქვემოთ მოცემულ იგივეობებში:

ა) $(a + 2b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

ბ) $(2x - 3y)^2 = 2x^2 + 12xy + 3y^2$;

გ) $(m + n^3)^3 = m^3 + 2mn^3 + 3mn^6 - n^9$;

დ) $27a^6 + 8b^9 = (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$.

2. შეასრულეთ გამრავლება:

ა) $(b - 1)(b^2 + b + 1)$;

ბ) $(4m - 3n^2)(16m^2 + 12mn^2 + 9n^4)$;

გ) $(3 - d)(9 + 3d + d^2)$;

დ) $(0,64x^{12} + 0,48x^6y^7 + 0,36y^{14})(0,8x^6 - 0,6y^7)$;

ე) $(-7p + 5k)(25k^2 + 35pk + 49p^2)$;

ვ) $\left(\frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{6}x^3y^4 + \frac{1}{3}y^8\right)\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}y^4\right).$

IV განყოფილება

3. იპოვეთ $a^3 - b^3$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ:
 - ა) $a - b = 4$; $ab = -1,75$;
 - ბ) $a - b = -5$; $ab = -6$;
4. A, B, C და D ასოების ადგილას ისეთი მრავალწევრი ჩაწერეთ, რომ მოცემული ტოლობები იგივეობები გახდეს:
 - ა) $(A - 4x)(25y^2 + B) = C^3 - D^3$; ბ) $(5p - A)(B + C) = D^3 - 8c^{12}$.
5. გამოსახულება დაშალეთ მამრავლებად:
 - ა) $a^3 - 64$; ბ) $27c^3 - 1000$; გ) $27p^3 - 8k^3$; დ) $-125a^6 + 1$;
 - ე) $216 - 0,001q^3$; ვ) $-x^9 + 64y^6$; ზ) $343a^{12} - b^9$; თ) $a^3b^6b^9 - d^6$.
6. დაამტკიცეთ, რომ:
 - ა) $68^3 - 24^3$ გამოსახულების მნიშვნელობა იყოფა 11-ზე;
 - ბ) $424^3 - 318^3$ გამოსახულების მნიშვნელობა იყოფა 53-ზე.
7. გამოთვალეთ ქვემოთ მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობა შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით:
 - ა) $\frac{93^3 - 57^3}{36} + 93 \cdot 57$; ბ) $\frac{79^3 - 51^3}{28} - (79^2 + 51^2)$.
8. მოცემული გამოსახულებები ჩაწერეთ ნამრავლის სახით:
 - ა) $(a + 7)^3 - 64$; ბ) $(9b + 5)^3 - 27$; გ) $c^6(c - 6)^3 - 125c^9$;
 - დ) $(2x + y)^3 - (2x - y)^3$; ე) $(4x + 5y)^3 - (4x - 5y)^3$; ვ) $x^9y^9 - 64x^3$.
9. გამოთვალეთ სხვაობის კუბის ფორმულის გამოყენებით:
 - ა) $101^3 - 3 \cdot 101^2 \cdot 88 + 3 \cdot 101 \cdot 88^2 - 88^3$;
 - ბ) $9,6^3 - 3 \cdot 9,6^2 \cdot 2,4 + 3 \cdot 9,6 \cdot 2,4^2 - 2,4^3$;
 - გ) $3 \cdot \left(17\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 8\frac{1}{3} + \left(8\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(8\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 17\frac{5}{6} - \left(17\frac{5}{6}\right)^3$;
 - დ) $8,9^3 - 16,5 \cdot 8,9^2 + 26,7 \cdot 30,25 - 5,5^3$.
10. $(x^2 - 10x + 6)(2x + b)$ ნამრავლი გადააქციეთ სტანდარტული სახის მრავალწევრად. b -ს რა მნიშვნელობისათვის:
 - ა) x^2 მამრავლი არ იქნება მრავალწევრში?
 - ბ) იქნება ტოლი x^2 -ისა და x -ის კოეფიციენტები?
11. $(x^2 + x - 1)(x - a)$ ნამრავლი გადააქციეთ სტანდარტული სახის მრავალწევრად. a -ს რა მნიშვნელობისათვის მრავალწევრში არ იქნება:
 - ა) x^2 მამრავლი;
 - ბ) x მამრავლი;
12. დაამტკიცეთ, რომ $111111 - 222$ სხვაობა ნატურალური რიცხვის კვადრატია. იპოვეთ ეს რიცხვი.

4.7. გამოსახულებათა გარდაქმნა

განვიღოთ გავითვლით გავცანით მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის რამდენიმე ხერხს: საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანას, დაჯგუფების ხერხს, შემოკლებული გამრავლების ფორმულებს. ზოგჯერ მრავალწევრის მამრავლებად დაშლისათვის გამოვიყენებთ ყველა შესაძლო ხერხი, ახლა სხვადასხვა ხერხების გამოყენებით შევასრულოთ რამდენიმე მრავალწევრის მამრავლებად დაშლასთან დაკავშირებული ნიმუშები.

საქმიანობა

მაგალითი: $a^4 + ax^2 - a^2x - x^4$ მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად.

ამოხსნა: ამოხსნის სტრატეგიის მომზადება:

რადგანაც $a^4 = (a^2)^2$ და $x^4 = (x^2)^2$, პირველი და მეოთხე შესაკრებების დაჯგუფებით $a^4 - x^4 = (a^2)^2 - (x^2)^2 = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$ სახის მამრავლებად შეგვიძლია დავშალოთ. ავღნიშნოთ, რომ რადგანაც $a^2 - x^2 = (a - x)(a + x)$ მივიღებთ ქვემოთ მოცემულ ტოლობას: $a^4 - x^4 = (a - x)(a + x)(a^2 + x^2)$.

ახლა კი დავაჯგუფოთ მეორე და მესამე შესაკრებები და საერთო მამრავლი გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ: $ax^2 - a^2x = ax(x - a) = -ax(a - x)$.

მაშასადამე, გარდაქმნების შედეგად ორივე ჯგუფში მივიღეთ $(a - x)$ მამრავლი.

ამოხსნის სტრატეგიის განხორციელება:

$$\begin{aligned} a^4 + ax^2 - a^2x - x^4 &= a^4 - x^4 + ax^2 - a^2x = (a^2)^2 - (x^2)^2 + ax(x - a) = \\ &= (a - x)(a + x)(a^2 + x^2) - ax(a - x) = \\ &= (a - x)((a + x)(a^2 + x^2) - ax) \end{aligned}$$

მეორე ფრჩხილებში მყოფი გამოსახულება ჩავწეროთ სტანდარტული მრავალწევრის სახით:

$$(a + x)(a^2 + x^2) - ax = a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax.$$

შედეგად მივიღებთ ქვემოთ მოცემულ გამოსახულებას:

$$a^4 + ax^2 - a^2x - x^4 = (a - x)(a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax).$$

საქმიანობა

მაგალითი: $x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3$ მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად.

ამოხსნა:

ამოხსნის სტრატეგიის მომზადება:

მრავალწევრს თუ შევხედავთ, დავინახავთ, რომ აქ მონაწილე $2xy^2$ შესაკრები x და y^2 ერთწევრების გაორკეცებული ნამრავლის ტოლია. თუ ჩვენს მაგალითში x^2 და y^4 შესაკრებები იქნებოდა, მაშინ გამოვიყენებდით ჯამის კვადრატის ფორმულას. თუმცა, აქ ეს შესაკრებები მონაწილეობას არ იღებენ.

მოცემული მრავალწევრის გამოკვლევისას დავინახავთ, რომ პირველ, მეოთხე და მეხუთე შესაკრებებში საერთო მამრავლია y . თუ მას ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ, ფრჩხილებს შიგნით მივიღებთ x და y ერთწევრების ჯამის კვადრატის გაშლილ ფორმას:

$$x^2y + 2xy^2 + y^3 = y(x^2 + 2xy + y^2).$$

ფრჩხილებში მყოფი მრავალწევრი ჩავწეროთ ორწევრის კვადრატის სახით და დავშალოთ მთელ მამრავლებად:

$$x^2y + 2xy^2 + y^3 = y(x^2 + 2xy + y^2) = y(x + y)^2 = y(x + y)(x + y).$$

დარჩენილი პირველი და მესამე შესაკრებები ერთი და იგივე x მამრავლს შეიცავენ. გავიტანოთ ის ფრჩხილებს გარეთ: $x^4 + xy^3 = x(x^3 + y^3)$.

მეორე ფრჩხილებში გამოვიყენოთ კუბების ჯამის ფორმულა:

$$x^4 + xy^3 = x(x^3 + y^3) = x(x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

მაშასადამე, ორივე ჯგუფში მივიღეთ $(x + y)$ მამრავლი, რომლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა შეიძლება.

ამოხსნის სტრატეგიის განხორციელება:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3 &= x^2y + 2xy^2 + y^3 + x^4 + xy^3 = \\ &= y(x + y)^2 + x(x^3 + y^3) = y(x + y)(x + y) + \\ &+ x(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[y(x + y) + x(x^2 - xy + y^2)]. \end{aligned}$$

გავამარტივოთ კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფი გამოსახულება:

$$y(x + y) + x(x^2 - xy + y^2) = xy + y^2 + x^3 - x^2y + xy^2.$$

შედეგად მივიღებთ: $x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3 = (x + y)(xy + y^2 + x^3 - x^2y + xy^2)$.

საქმიანობა

მაგალითი: $x^4 + 4$ ორწევრი დაშალოთ მამრავლებად.

ამოხსნა:

ამოხსნის სტრატეგიის მომზადება:

როგორც ვხედავთ, მოცემული გამოსახულება შეგვიძლია ჩავწეროთ $x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2$ სახით. კვადრატების ჯამის მამრავლებად დაშლის ფორმულა არ არსებობს. თუმცა, თუ ამ გამოსახულებაში $4x^2$ შესაკრები გვექნება, მაშინ შევძლებთ მის ჯამის კვადრატის სახით ჩაწერას. ამიტომაც მოცემულ გამოსახულებას მივუმატოთ და გამოვაკლოთ $4x^2$ ერთწევრი:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2.$$

ეს გამოსახულება კვადრატების სხვაობის ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავშალოთ მამრავლებად.

ამოხსნის სტრატეგიის განხორციელება:

როგორც დავგეგმეთ, ამ გამოსახულებას ვუმატებთ და ვაკლებთ $4x^2$ ერთწევრს, შემდეგ ვიყენებთ კვადრატების სხვაობის ფორმულას:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x).$$

მაშასადამე, $x^4 + 4 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$.

საქმიანობა

მაგალითი: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად.

ამოხსნა:

ამოხსნის სტრატეგიის მომზადება:

ბოლო სამი შესაკრების ჯამს მივუმატოთ x და მამრავლი 6 გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ, სადაც დავინახავთ, რომ მიღებულ სამწევრში $(x + 1)^2$ გამოსახულება “იმალება”. რადგანაც გამოსახულებას x მივუმატეთ, ამიტომაც x -ის გამოკლებაც საჭიროა. ამ შეთხვევაში $x^3 - x$ ჯგუფიდან x -ის ფრჩხილებს გარეთ გატანა საჭიროა. $x^3 - x = x(x^2 - 1)$. ფრჩხილების შიგნით მყოფი კვადრატების სხვაობა დავშალოთ მამრავლებად.

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

მაშასადამე, თითოეულ ჯგუფში წარმოიქმნა $(x + 1)$ მამრავლი, მის ფრჩხილებს გარეთ გატანა შეიძლება.

ამოხსნის სტრატეგიის განხორციელება:

როგორც დავგეგმეთ, მოცემულ გამოსახულებას მივუმატოთ და გამოვაკლოთ x :

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 11x + 6 + x - x &= x^3 - x + 6x^2 + 12x + 6 = x(x^2 - 1) + 6(x^2 + 2x + 1) = \\ &= x(x - 1)(x + 1) + 6(x + 1)^2 = (x + 1)[x(x - 1) + 6(x + 1)]. \end{aligned}$$

გავამარტივოთ კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფი გამოსახულება:

$$\begin{aligned} x(x - 1) + 6(x + 1) &= x^2 - x + 6x + 6 = x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = \\ &= x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3). \end{aligned}$$

მაშასადამე, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

მრავალწევრების მამრავლებად დაშლისათვის საკმარისი არ არის შემოკლებული გამრავლების ფორმულების ზუსტი ცოდნა, აქ საჭიროა საერთო მამრავლის დანახვა და წარმატებით ჯუფთების უნარი. ამ გარდაქმნების დროს ყალიბდება განსაკუთრებული დანახვის უნარი, “დამალული” გამოსახულებების, ფორმულების განსაზღვრის უნარი. მრავალწევრის მამრავლებად დაშლისათვის საჭიროა ქვემოთ მოცემული რჩევების გათვალისწინება:

1. თუ მრავალწევრის ყველა წევრი საერთო მამრავლს შეიცავს, გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ ეს მამრავლი;
2. მოცემულ მრავალწევრში ეძებეთ შემოკლებული გამრავლების ფორმულების ელემენტები: რიცხვის კვადრატი, კუბი, რიცხვების ნამრავლის ორმაგი ან სამმაგი;
3. საერთო მამრავლის მქონე შესაკრებების დაჯგუფებით ეს მამრავლი გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ;
4. თუ რომელიმე ჯუფთება გარკვეულ შედეგს არ გამოიღებს, შესაკრებების სხვა გზით დაჯგუფებას შეეცადეთ;
5. მიუმატეთ და გამოაკლოთ შესაკრები, რომელიც აკლია ნებისმიერ ფორმულას და ჯუფთებას, თუ საჭირო გახდება ნებისმიერი შესაკრები დაშალოთ რამოდენიმე შესაკრებად;
6. თუ რომელიმე ხერხით მამრავლებად დაშლა ვერ ხერხდება, გამოიყენეთ სხვა ხერხები. საბოლოოდ, ამოცანის გადაჭრა, რომელზეც მუშაობთ, დიდი სიხარულის შეგრძნებასა და სიამოვნებას მოგანიჭებთ.

1. მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $4x^4 + x^5$; ბ) $ab - ac + 2b - 2c$; გ) $9m^2 - 16n^2$; დ) $25a^2 - 30ab + 9b^2$.

რომელი ხერხები გამოიყენეთ მამრავლებად დაშლისათვის?

2. ა) თქვენი აზრით, რომელი უფრო სასარგებლოა თემის ახსნისას მოცემული რჩევებიდან?

ბ) $a^4 + ax^2 - a^2x - x^4$ მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად. რომელი ხერხი გამოიყენეთ ამ მრავალწევრის დაშლისათვის?

3. მრავალწევრები დაშალეთ მამრავლებად და განმარტეთ რომელი ხერხები გამოიყენეთ:

ა) $5a^2b - 5b^2$; ბ) $7ab^2 - 7ac^2$; გ) $2a^4c - 16b^4c$;
 დ) $4c^3d - 9cd^3$; ე) $-64m^2n - 27n$; ვ) $9mn^6 - 117m$;
 ზ) $6x^2y^2 - 24x^2z^2$; თ) $2x^2y - 16y$; ი) $7p^6q - 7q^7$.

4. მრავალწევრები გადააქციეთ ნამრავლად. განმარტეთ, თუ რომელში გამოიყენეთ ფრჩხილებს გარეთ გატანის ხერხი, რომელში შემოკლებული მამრავლების ფორმულა, რომელში ორივე ერთად და რატომ გადაწყვიტეთ ამ ხერხების გამოყენება.

ა) $3x^2y + 6xy^2 + 3y^3$; ბ) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$; გ) $a^2 - b^2 - a + b$;
 დ) $5a^2 - 10ab + 5b^2$; ე) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$; ვ) $c + d + c^2 - d^2$;
 ზ) $7xy^2 + 28xy + 28x$; თ) $9 - m^2 + 4mn - 4n^2$; ი) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$;
 კ) $2z - 4zt + 2zt^2$; ლ) $4p^2 - 20pq + 25q^2 - 36$; მ) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$.

5. ამოხსენით განტოლებები ნამრავლის ნულთან ტოლობის თვისების გამოყენებით:

ა) $x(x - 4) = 0$; ბ) $6m^4 - 54m^2 = 0$; გ) $a^4 - a^3 - a^2 + a = 0$;
 დ) $y^2 + 8y = 0$; ე) $100b^2 - 4b^4 = 0$; ვ) $p^3 - 5p^2 - 9p + 45 = 0$;
 ზ) $z^2 - 11z = 0$; თ) $a^3 - 2a^2 + a = 0$; ი) $n^3 - 12 + 3n^2 - 4n = 0$.

6. გამოსახულებები (მესამე სვეტი) ისე გარდაქმენით, რომ შესაძლებელი გახდეს მონაცემების მიხედვით მათი მნიშვნელობის პოვნა.

ცვლადების ჯამი ან სხვაობა	ცვლადების ნამრავლი	გამოსახულება
$a + b = 2$	$ab = 5$	$a^2 + b^2$
$c - d = 7$	$cd = -3$	$cd^2 - c^2d$
$m + n = -9$	$mn = 10$	$m^3n + 2m^2n^2 + mn^3$
$p + q = -6$	$pq = -11$	$pq^3 + p^3q$
$r + s = -7$	$rs = 20$	$r^3s^2 + r^2s^3$
$x - y = 21$	$xy = 4$	$x^3 - y^3$

7. სევინჯმა, როცა $a = \frac{2}{7}$; $b = -\frac{7}{5}$; $7a^2b + 5ab^2$ გამოსახულების მნიშვნელობის საპოვნელად a და b ცვლადების მნიშვნელობები შეიტანა გამოსახულებაში და იპოვა გამოსახულების მნიშვნელობა. სელიმმა კი, გამოსახულება ჯერ მამრავლებად დაშალა და მიღებულ გამოსახულებაში ცვლადების მნიშვნელობის შეტანით იპოვა გამოსახულების მნიშვნელობა. თქვენი აზრით, რომელმა მათგანმა უფრო ხელსაყრელი გზით მიიღო შედეგი? ქვემოთ მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობას რომელი ხერხით გამოთვლიდით, სევინჯის მიერ გამოყენებული თუ სელიმის მიერ გამოყენებული ხერხით?

ა) $x^4 - x^3 + 11x - 11$, თუ $x = 11$;

ბ) $(5m - 3n)^2 - (4m - 2n)^2$, თუ $m = \frac{2}{9}$, $n = \frac{3}{5}$;

გ) $(3c - 4d)^2 - (2d - 3c)^2$, თუ $c = 0,75$, $d = -1,25$;

დ) $y^3 - 2y^2z - 4yz + 8z^2$, თუ $y = 5,5$, $z = 0,25$;

ე) $p^3 + p^2q - pq^2 - q^3$, თუ $p = 1,3$, $q = 0,8$.

8. გამოთვალეთ გამოსახულებების გამარტივებით. განმარტეთ, თითოეული გამოსახულება რომელი ხერხით გაამარტივეთ.

ა) $15,4^2 - 7,6^2 + 23 \cdot 2,2$;

ბ) $46,8^2 - 12 \cdot 51,6 - 34,8^2$;

გ) $43 \cdot 8,4 + 27,3^2 - 15,7^2$;

დ) $18 \cdot 62,4 - 35,2^2 + 17,2^2$;

ე) $\frac{3^{12} + 3^{14}}{3^{12} + 3^{14} + 3^{15}}$;

ვ) $\frac{2^{16} - 2^{18} + 2^{19}}{16^4 - 16^6}$;

ზ) $\frac{36^2 + 36^3}{6^4 - 6^5 + 6^6 - 6^7}$.

9. დაამტკიცეთ, რომ:

ა) ორი მიმდევრობით მოცემული ნატურალური რიცხვის ნამრავლს თუ მიეუმატებთ რიცხვს, რომელიც მათ შორის მეტია, მივიღებთ ამ დიდი რიცხვის კვადრატს;

ბ) ორი მიმდევრობით მოცემული მთელი რიცხვის კუბების სხვაობა არ იყოფა 3-ზე;

გ) კენტი რიცხვის კვადრატის 8-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთია 1.

თითოეული დებულების დამტკიცება დაასაბუთეთ ნიმუშით.

10. $3a^2 + 6a - 9$ მრავალწევრი დაშალეთ მამრავლებად ქვემოთ მოცემული ალგორითმის შესრულებით:

1. სამივე ერთწევრიდან მამრავლი 3 გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ;

2. ფრჩხილებში მიღებულ გამოსახულებას მიუმატეთ და გამოაკელით 1. განმარტეთ რატომ მოიქცით ასე;

3. ფრჩხილებში მიღებულ გამოსახულებაში ჩაწერეთ ორწევრის კვადრატი.

4. მე-3 საფეხურზე მიღებული გამოსახულებისათვის გამოიყენეთ კვადრატების სხვაობა.

5. განსაზღვრეთ რომელი მამრავლები მიიღეთ.

11. შეადგინეთ ალგორითმი სრული კვადრატების გამოყოფით მრავალწევრების ნამრავლად გარდაქმნისათვის. შეამოწმეთ მიღებული პასუხების სისწორე ნამრავლის მრავალწევრად გარდაქმნით:

ა) $a^2 + 4a - 5$;

ბ) $b^2 - 10b + 9$;

გ) $2x^2 + 16x - 40$;

დ) $x^2 + 1,5x - 1$;

ე) $y^2 - 2,5y - 6$;

ვ) $a^2 - 3,5a + 1,5$.

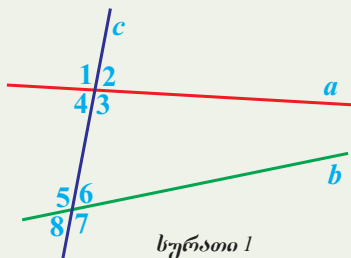
4.8. ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეები

საქმიანობა

ჯვარედინი, ცალმხრივი და შესაბამისი კუთხეები

ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთით მიღებული კუთხეები

1. გაავლეთ ნებისმიერი a და b წრფეები და ამ წრფეების გადაკვეთით ნებისმიერი მესამე c წრფე.
2. აჩვენეთ a და c წრფეებს შორის წარმოქმნილი მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეები. ჩამოთვალეთ მათი თვისებები.
 $\angle 1 + \angle 2 = ?$ $\angle 3 + \angle 2 = ?$ $\angle 1 = ?$
3. წარმოადგინეთ b და c წრფეებს შორის წარმოქმნილი მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეები.
 $\angle 8 + \angle 7 = ?$ $\angle 6 + \angle 7 = ?$ $\angle 7 = ?$



ნებისმიერი a და b წრფეებსა და მათ გადაკვეთით c წრფეს შორის მდებარე კუთხეები ხასიათდება ქვემოთ მოცემული სახით (სურათი 1).

შიგა ჯვარედინი კუთხეები: $\angle 4$ და $\angle 6$; $\angle 3$ და $\angle 5$.

გარე ჯვარედინი კუთხეები: $\angle 1$ და $\angle 7$; $\angle 2$ და $\angle 8$.

შიგა ცალმხრივი კუთხეები: $\angle 4$ და $\angle 5$; $\angle 3$ და $\angle 6$.

გარე ცალმხრივი კუთხეები: $\angle 2$ და $\angle 7$; $\angle 1$ და $\angle 8$.

შესაბამისი კუთხეები: $\angle 1$ და $\angle 5$; $\angle 2$ და $\angle 6$; $\angle 4$ და $\angle 8$; $\angle 3$ და $\angle 7$.

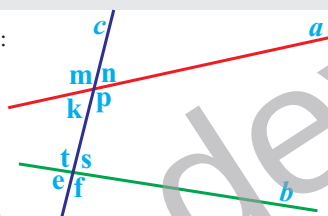
სადაც c წრფეს a და b წრფეების მკვეთი ეწოდება.

საგარჯიშოები

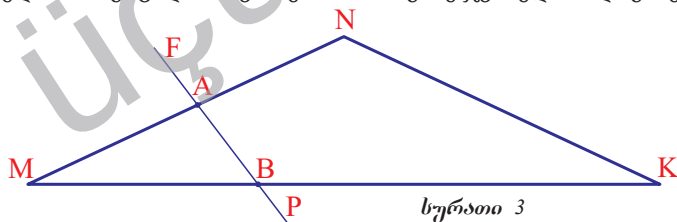
1. სურათი 2-ზე მოცემული კუთხეებიდან აჩვენეთ:

- ა) შიგა ჯვარედინი კუთხეები;
- ბ) გარე ჯვარედინი კუთხეები;
- გ) შიგა ცალმხრივი კუთხეები;
- დ) გარე ცალმხრივი კუთხეები;
- ე) შესაბამისი კუთხეები.

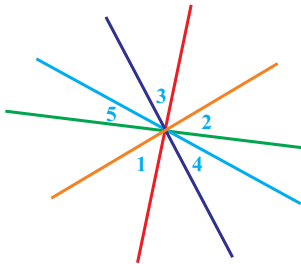
დაასაბუთეთ რატომ იწოდებიან ეს კუთხეები ასე.



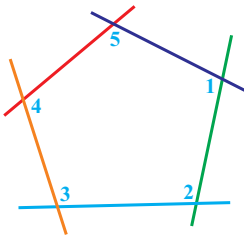
2. MNK სამკუთხედის MN გვერდზე მოცემულია A წერტილი, ხოლო MK გვერდზე B წერტილი. გაავლეთ AB წრფე. წარმოადგინეთ MN და MK წრფეების AB მკვეთით წარმოქმნილი შიგა ჯვარედინი, შიგა ცალმხრივი, შესაბამისი, გარე ჯვარედინი და გარე ცალმხრივი კუთხეები (სურათი 3).



3. ეცადეთ დაამტკიცოთ ქვემოთ მოცემული დებულებები, თუ სურათი 1-ზე მოცემული შიგა ჯვარედინი კუთხეები $\angle 4 = \angle 6$:
 - ა) ჯვარედინი კუთხეების მეორე წყვილიც ტოლია;
 - ბ) შესაბამისი კუთხეები ტოლია;
 - გ) შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180° -ია.
4. დაამტკიცეთ ქვემოთ მოცემული დებულებები, თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივი კუთხეებიდან $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ (სურათი 1):
 - ა) $\angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$;
 - ბ) შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია;
 - გ) შესაბამისი კუთხეები ტოლია.
5. თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთით მიღებული შესაბამისი კუთხეების რომელიმე წყვილი ტოლია, მაშინ
 - ა) შესაბამისი კუთხეების მეორე წყვილიც ტოლია;
 - ბ) შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია;
 - გ) შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180° -ია.
6. AB და MN წრფეები იკვეთებიან. წარმოადგინეთ AN და BM წრფეების ა) MN მკვეთით, ბ) AB მონაკვეთით წარმოქმნილი შიგა ჯვარედინი კუთხეები, გარე ჯვარედინი კუთხეები, შიგა ცალმხრივი კუთხეები.
7. ხუთი წრფე იკვეთება ერთ წერტილში (სურათი 4). იპოვეთ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ ჯამი.
8. ხუთი წრფე იკვეთება წყვილ-წყვილად (სურათი 5). იპოვეთ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ ჯამი, თუ მიღებული ხუთკუთხედის წვეროების გარეთ წარმოქმნილი ყველა კუთხის ჯამი 1260° -ია.



სურათი 4



სურათი 5



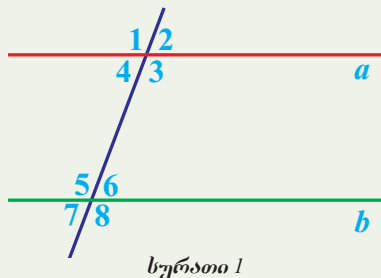
სურათი 6

9. ოთხი წრფე იკვეთება ისე, როგორც სურათი 6-ზეა ასახული. იპოვეთ ჯამი, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$, თუ $\angle 2 + \angle 3 = 88^\circ$.
10. ერთმანეთის გადამკვეთი a , b და c წრფეები ადგენენ სამკუთხედს. რამდენი გრადუსია ამ წრფეებს შორის წარმოქმნილი ყველა კუთხის ჯამი? რა შემთხვევაში მოხდება ისე, რომ მიუხედავად მათი წყვილ-წყვილად გადაკვეთისა, ვერ შეადგენენ სამკუთხედს?

4.9. წრფეთა პარალელურობის ნიშნები

საქმიანობა

- გაავლეთ პარალელური a და b წრფეები და მათი გადაკვეთი c წრფე.
- დაახასიათეთ a და b წრფეების გადაკვეთის შედეგად წარმოქმნილი კუთხეები (სურათი 1).
- ტრანსპორტირის საშუალებით გაზომეთ $\angle 1$ და $\angle 5$. რა შედეგი მიიღეთ? რა ეწოდებათ ამ კუთხეებს?
- ტრანსპორტირის საშუალებით გაზომეთ $\angle 4$ და $\angle 6$. რა შედეგი მიიღეთ? რა ეწოდებათ ამ კუთხეებს?
- ტრანსპორტირის საშუალებით გაზომეთ $\angle 2$ და $\angle 8$. წარმოადგინეთ შედეგი. რა ეწოდებათ ამ კუთხეებს? რა შეგიძლიათ თქვათ $\angle 2$ -სა და $\angle 8$ -ის გრადუსული ზომის შესახებ?
- განსაზღვრეთ $\angle 1$ -ისა და $\angle 8$ -ის გრადუსული ზომები. რა შედეგი მიიღეთ?
- გამოთქვით მოსაზრებები a და b პარალელური წრფეების c წრფით გადაკვეთით წარმოქმნილი კუთხეების შესახებ.



თეორემა

წრფეთა პარალელურობის ნიშანი

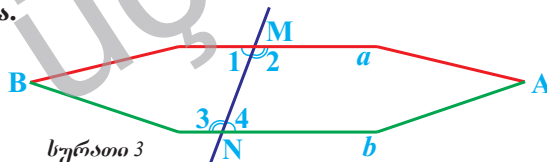
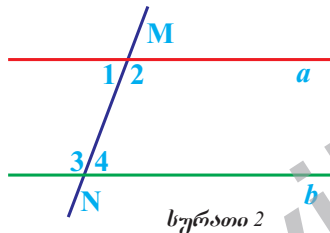
თუ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

თეორემის პირობა: ორი a და b წრფეები იკვეთება მესამე MN წრფით და შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია: $\angle 1 = \angle 4$.

თეორემის დასკვნა: a და b წრფეები პარალელურია: $a \parallel b$ (სურათი 2).

თეორემის დამტკიცება: როგორც ვიცით, სიბრტყეზე მდებარე ორი წრფე ან იკვეთება ან პარალელურები არიან. დავუშვათ, რომ a და b წრფეები იკვეთებიან რაიმე A წერტილში (სურათი 3) და AMN სამკუთხედიან. MN მკვეთი სიბრტყეს ყოფს ორ ნახევარ სიბრტყედ. AMN სამკუთხედი ამ ნახევარსიბრტყეებიდან ერთ-ერთში მდებარეობს. მეორე ნახევარსიბრტყეში ავაგოთ AMN სამკუთხედის ტოლი BMN სამკუთხედი. პირობის თანახმად: $\angle BMN = \angle ANM$ და $\angle BNM = \angle AMN$. მაშინ კუთხის BM გვერდი a წრფეზე მდებარეობს, ხოლო BN გვერდი კი b წრფეზე. მაშასადამე, B წერტილი a და b წრფეების მეორეჯერ გადაკვეთის წერტილია. რადგანაც ორი წრფე არ შეიძლება იკვეთებოდეს ორ სხვადასხვა წერტილში, ამიტომაც ჩვენი დამტკიცება არ არის სწორი. ე.ი. a და b წრფეები პარალელურია: $a \parallel b$.

თეორემა დამტკიცებულია.



თეორემა წრფეთა პარალელურობის ნიშანი

თუ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180° -ია, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

თეორემის პირობა: $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ (სურათი 1).

თეორემის დასკვნა: $a \parallel b$

დაამტკიცეთ.

დაამტკიცეთ შიგა ჯვარედინი კუთხეების ტოლობის საფუძველზე.

თეორემა წრფეთა პარალელურობის ნიშანი

თუ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას შესაბამისი კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

თეორემის პირობა: $\angle 1 = \angle 5$ (სურათი 1).

თეორემის დასკვნა: $a \parallel b$

დაამტკიცეთ.

დაამტკიცეთ შიგა ჯვარედინი კუთხეების ტოლობის საფუძველზე.

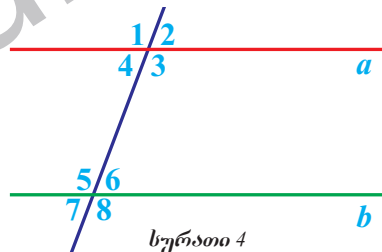
საქმიანობა

1. გაავლეთ ნებისმიერი a წრფე და აღნიშნეთ მასზე A და B წერტილები.
2. ააგეთ b წრფე, რომელიც A წერტილზე გადის და a წრფის მართობულია.
3. ააგეთ c წრფე, რომელიც B წერტილზე გადის და a წრფის მართობულია.
4. განსაზღვრეთ b და c წრფეების ურთიერთმდებარეობა.
5. დაახასიათეთ b და c წრფეებსა და a მკვეთს შორის წარმოქმნილი კუთხეები და დაამტკიცეთ b და c წრფეების ურთიერთმდებარეობა.

დასკვნა: ერთი და იგივე წრფის მართობული ორი წრფე ერთმანეთის პარალელურია.

საგარჯიშოები

1. სურათი 4-ზე a და b წრფეები c წრფით იკვეთებიან. დაამტკიცეთ, რომ $a \parallel b$ (სურათი 4), თუ:
 - ა) $\angle 1 = \angle 8$;
 - ბ) $\angle 2 = 43^\circ$, $\angle 8 = 137^\circ$;
 - გ) $\angle 4 = 55^\circ$, $\angle 1$ კი $\angle 6$ -ზე 70° -ით მეტია.

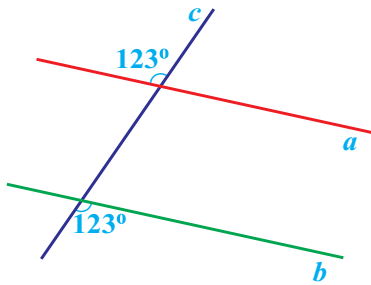


IV განყოფილება

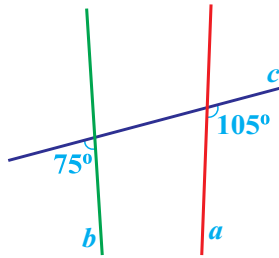
2. AB წრფე MN წრფეს A წერტილში, ხოლო CD წრფეს კი B წერტილში კვეთს. შეიძლება დასკვნის გაკეთება, რომ MN და CD წრფეები პარალელურია, თუ:

- ა) თუ $\angle MAB = 45^\circ$, $\angle CBA = 135^\circ$;
- ბ) თუ $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle CBA = 60^\circ$;
- გ) თუ $\angle MAB = 90^\circ$, $\angle CBA = 90^\circ$;

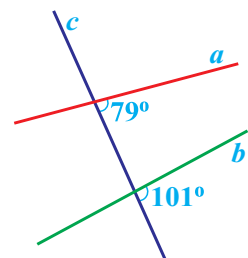
3. სურათი 5-ის საფუძველზე შეიძლება დასკვნის გაკეთება, რომ a და b წრფეები პარალელურია? რატომ?



სურათი 5 a

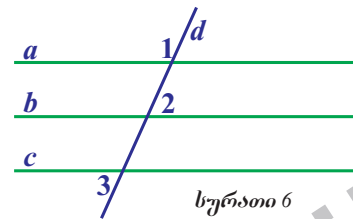


სურათი 5 b



სურათი 5 c

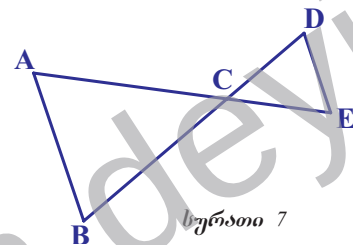
4. სურათი 6-ზე a , b და c წრფეები d წრფით იკვეთებიან. a , b და c წრფეებიდან რომლები იქნება პარალელური, თუ $\angle 1 = 132^\circ$, $\angle 2 = 48^\circ$, $\angle 3 = 58^\circ$. რატომ? მოსაზრება დაასაბუთეთ.



სურათი 6

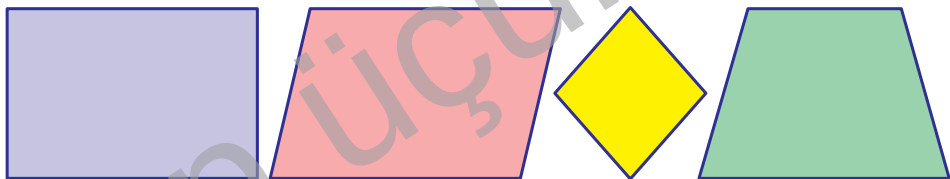
5. სურათი 7-ზე $AB=AC$ და $CE=DE$. რო-მელი წრფეების პარალელურობის შესახებ შეიძლება დასკვნის გაკეთება? რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.

6. ABC სამკუთხედში $\angle ACB=38^\circ$ და $\angle BAC=71^\circ$. ააგეთ ACB კუთხის მოსაზღვრე კუთხის CK ბისექტრისა. შეიძლება დასკვნის გაკეთება, რომ CK და AB პარალელურებია?



სურათი 7

7. დაასახელეთ სურათი 8-ზე მოცემული ოთხკუთხედები და პარალელური გვერდები. გამოთქვით მოსაზრებები ოთხკუთხედების კუთხეების შესახებ.

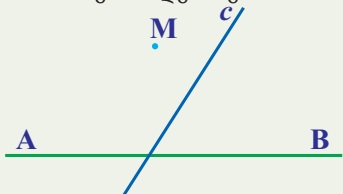


სურათი 8

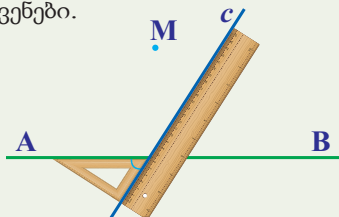
4.10. პარალელობის აქსიომა. პარალელურ წრფეთა თვისებები

საქმიანობა

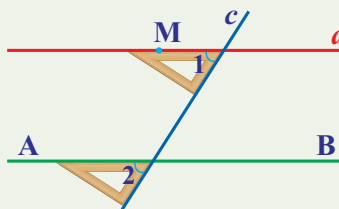
1. გაავლეთ AB წრფე და მისი გადამკვეთი c წრფე. აღნიშნეთ M წერტილი, რომელიც მათზე არ მდებარეობს.



2. კუთხედი და სახაზავი ისე განალაგეთ, როგორც სურათზეა ნაჩვენები.



3. კუთხედი c წრფის გასწვრივ ისე ამოძრავეთ, რომ M წერტილი სახაზავთან მიმართებაში ისე მდებარეობდეს, როგორც სურათზეა ნაჩვენები. გაავლეთ M წერტილზე გამავალი a წრფე.



4. როგორ შეიძლება დავასაბუთოთ AB და a წრფის პარალელობა? რა ეწოდება სურათზე ნაჩვენებ 1 და 2 კუთხეებს? ტოლია ისინი?

პარალელობის აქსიომა: წრფეზე არამდებარე წერტილზე ამ წრფის პარალელური ერთი და მხოლოდ ერთი წრფის გაგდება შეიძლება.

თეორემა

პარალელური წრფეების გადაკვეთით მიღებული კუთხეების თვისებები

ორი პარალელური წრფის გადაკვეთით მიღებული შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია.

თეორემის პირობა: $AB \parallel CD$ და AC მკვეთია.

თეორემის დასკვნა: $\angle BAC = \angle ACD$.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, რომ $\angle BAC \neq \angle ACD$ (სურათი 1).

ავიღოთ ისეთი M წერტილი, რომ $\angle MAC = \angle ACD$

(კუთხეების გადადების აქსიომის თანახმად).

მაშინ, წრფეთა პარალელობის ნიშნის თანახმად

მივიღებთ: $AM \parallel CD$. მაგრამ, პირობის მიხედვით

$AB \parallel CD$. მაშასადამე გამოდის, რომ A წერტილზე

CD წრფის მიმართ ორი სხვადასხვა პარალელური

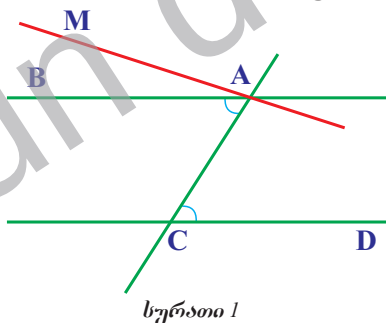
წრფე გავავლეთ. ეს კი პარალელობის აქსიომის

თანახმად შეუძლებელია.

ასე რომ, საწინააღმდეგო დაშვება არასწორია.

როცა $AB \parallel CD$, შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია.

თეორემა დამტკიცებულია.



IV განყოფილება

თეორემა პარალელური წრფეების გადაკვეთით მიღებული კუთხეების თვისება

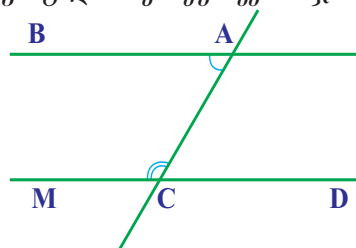
ორი პარალელური წრფის გადაკვეთით მიღებული შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180° -ია.

თეორემის პირობა: $AB \parallel CD$ და AC მკვეთია (სურათი 2).

თეორემის დასკვნა: $\angle BAC + \angle MCA = 180^\circ$.

დაამტკიცეთ.

დაამტკიცეთ შიგა ჯვარედინი კუთხეების ტოლობის საფუძველზე



სურათი 2

თეორემა პარალელური წრფეების გადაკვეთით მიღებული კუთხეების თვისება

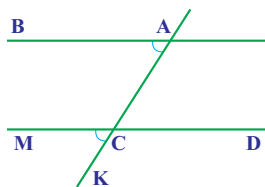
ორი პარალელური წრფის გადაკვეთით მიღებული შესაბამისი კუთხეები ტოლია.

თეორემის პირობა: $AB \parallel CD$ და AC მკვეთია (სურათი 3).

თეორემის დასკვნა: $\angle BAC = \angle MCK$.

დაამტკიცეთ.

დაამტკიცეთ შიგა ჯვარედინი კუთხეების ტოლობის საფუძველზე.



სურათი 3

დასკვნა: თუ წრფე პარალელური წრფე-ბიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ მეორის მართობულიც იქნება.

თუ $a \parallel b$ და $c \perp a$, c მკვეთია (სურათი 4).

მაშინ $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$, ე.ი. $c \perp a$. რატომ? დაასაბუთეთ.



სურათი 4

თეორემა ერთი და იგივე წრფის პარალელური წრფეების თვისება

ერთი და იგივე წრფის პარალელური წრფეები ასევე ერთმანეთის პარალელურებია.

თეორემის პირობა: $a \parallel c$ და $b \parallel c$.

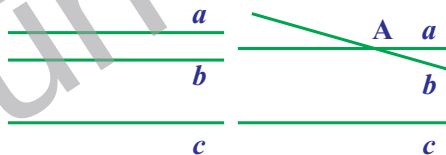
თეორემის დასკვნა: $a \parallel b$ (სურათი 5 ა).

თეორემის დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, რომ a და b წრფეები

იკვეთებიან A წერტილში (სურათი 5 ბ). მაშინ

c წრფეზე არამდებარე A წერტილზე ამ წრფის ორ პარალელურ წრფეს გავავლებთ. ეს კი შეუძლებელია. ე.ი. $a \parallel b$.

თეორემის დამტკიცებულია.



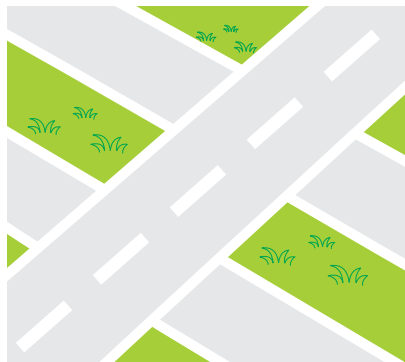
სურათი 5 ა

სურათი 5 ბ

საგარჯიშოები

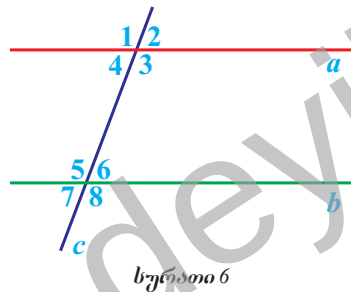
1. გაავლეთ ნებისმიერი a წრფე და აღნიშნეთ მასზე არამდებარე A წერტილი. გაავლეთ b წრფე, რომელიც გადის A წერტილზე და a წრფის პარალელურია.
2. ABC სამკუთხედის C წვეროზე გაავლეთ AB გვერდის პარალელური წრფე. C წერტილზე AB გვერდის რამდენი პარალელური წრფის გავლებაა შესაძლებელი? რატომ?
3. a და b წრფეები პარალელურია. m წრფე a წრფეს კვეთს. განსაზღვრეთ m წრფისა და b წრფის ურთიერთმდებარეობა. პასუხი დაასაბუთეთ.

4. სატრანსპორტო მომსახურების სამმართველოს ავტობუსით მომსახურების გაფართოება სურს. მათ მკვეთრი მოსახვევების არმქონე გზების გამოსაკვლევადაც განსაზღვრეს სხვადასხვა გზაჯვარედინებზე გზებს შორის კუთხეები. როგორც სურათზე ხედავთ, ორი პარალელური გზა იკვეთება მესამე გზით. აქ გზებს შორის წარმოქმნილია რვა კუთხე და ცნობილია, რომ თითოეული კუთხე 130° -ია. როგორ შეიძლება განსაზღვროს სატრანსპორტო მომსახურების სამმართველომ დანარჩენი კუთხეები გაზომვის გარეშე?

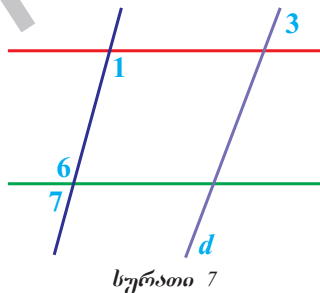


5. მოცემულია a , b და c წრფეები: ცნობილია, რომ $a \parallel b$ და c მკვეთია (სურათი 6). განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული კუთხეები.

- ა) თუ $\angle 4 = 50^\circ$, $\angle 6 = ?$
- ბ) თუ $\angle 1 = 172^\circ$, $\angle 5 = ?$ $\angle 7 = ?$
- გ) თუ $\angle 5 - \angle 2 = 44^\circ$, $\angle 8 = ?$
- დ) თუ $\angle 3 = 5 \cdot \angle 7$, $\angle 3 = ?$ და $\angle 7 = ?$



6. თუ ორი პარალელური წრფის გადაკვეთით მიღებული ორი შიგა ჯვარედინი კუთხეების ჯამი 150° -ია, მაშინ რამდენი გრადუსია თითოეული კუთხე? რამდენი გრადუსია ამ კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეები?
7. გაავლეთ ნებისმიერი ორი პარალელური და მათი გადამკვეთი ერთი წრფე. ერთ-ერთი კუთხე გაზომეთ ტრანსპორტირის საშუალებით. განსაზღვრეთ დანარჩენი კუთხეები. დაასაბუთეთ, რომელი თვისების მიხედვით დაადგინეთ თითოეული კუთხე.
8. მოცემულია a , b , c და d წრფეები. იპოვეთ $\angle 6$, თუ $\angle 1 = 103^\circ$, $\angle 7 = 77^\circ$ $\angle 3 = 65^\circ$ (სურათი 7). განსაზღვრეთ a , b , c და d წრფეების ურთიერთმდებარეობა.



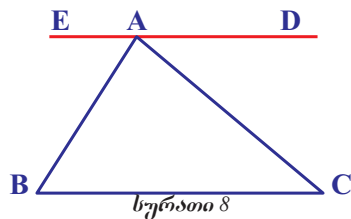
9. ABC სამკუთხედის A წვეროდან გავლებულია BC

IV განყოფილება

გვერდის პარალელური წრფე (სურათი 8). იპოვეთ

ქვემოთ მოცემული კუთხეები:

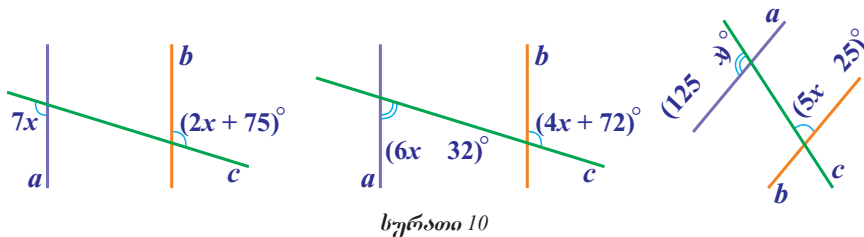
- თუ $\angle BCA = 53^\circ$, $\angle DAC = ?$
- თუ $\angle ABC = 71^\circ$, $\angle DAB = ?$
- თუ $\angle ABC = 71^\circ$ და $\angle DAC = 30^\circ$, $\angle CAB = ?$
- თუ $\angle CAB = 65^\circ$ და $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle DAC = ?$
- განსაზღვრეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ $\angle EAB = 69^\circ$ და $\angle DAC = 54^\circ$.



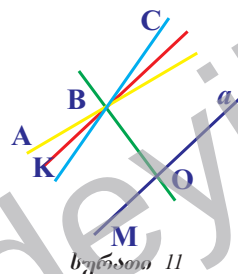
- მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი (სურათი 9). დაადგინეთ პარალელოგრამის დანარჩენი კუთხეები, თუ $\angle A = 88^\circ$. პასუხი დაასაბუთეთ.



- a და b წრფეები პარალელურია, c წრფე კი მკვეთია. სურათი 10-ის მოცემულობის მიხედვით დაადგინეთ ამ წრფეებს შორის მდებარე კუთხეები.



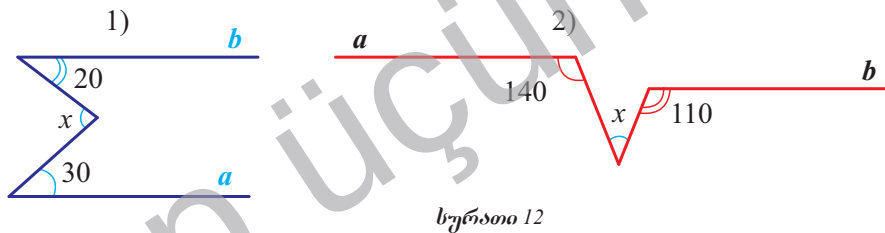
- სურათი 11-ზე მოცემულია a წრფეზე არამდებარე B წერტილზე გამავალი რამდენიმე წრფე. ამ წრფეებიდან რომელია a წრფის პარალელური, თუ $\angle ABO = 86,8^\circ$, $\angle KBO = 63,5^\circ$, $\angle OBC = 111,4^\circ$, $\angle MOB = 93,2^\circ$?



- AB და CD მონაკვეთები O წერტილზე იკვეთებიან და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან. დამტკიცეთ, რომ $AC \parallel BD$.

- $MNKL$ ტრაპეციაში, $\angle M = 135^\circ$ და $\angle L = 45^\circ$, დაასახელეთ ტრაპეციის პარალელური და არაპარალელური გვერდები.

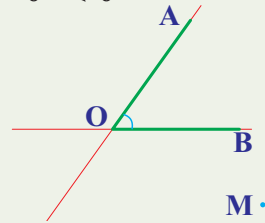
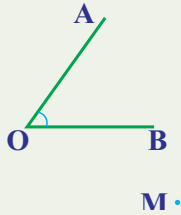
- სურათი 12-ზე მოცემული a და b წრფეები პარალელურია. იპოვეთ x .



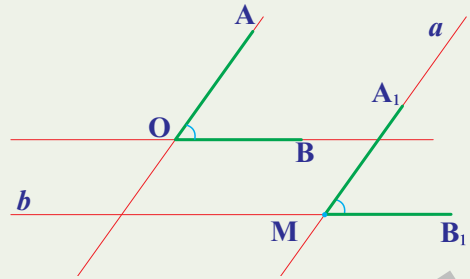
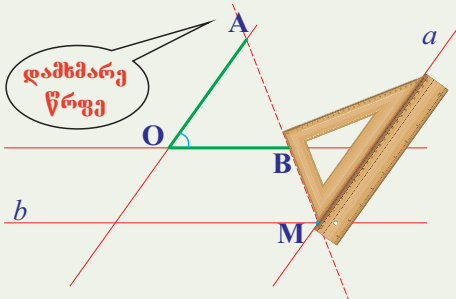
4.11. კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები პარალელურია

საქმიანობა

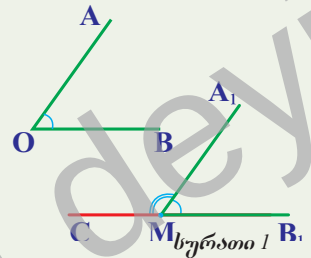
1. დახაზეთ გაშლილი კუთხისგან განსხვავებული AOB კუთხე. მის გარეთ აღნიშნეთ ნებისმიერი M წერტილი.
2. გაავლეთ AO და BO წრფეები ისე, რომ OA და OB გვერდები ამ წრფეებზე მდებარეობდნენ.



3. კუთხედისა და სახაზავის დახმარებით M წერტილზე გაავლეთ OA და OB გვერდების პარალელური a და b წრფეები.
4. აღნიშნეთ A₁MB₁ კუთხე, რომლის წვეროც M წერტილზე, გვერდები კი a და b წრფეზე მდებარეობს.



5. რა შეგიძლიათ თქვათ AOB და A₁MB₁ კუთხეების შესახებ? როგორი კუთხეები ეწოდებათ ამ კუთხეებს? გაზომეთ AOB და A₁MB₁ კუთხეები ტრანსპორტირით. რა შედეგი მიიღეთ (სურათი 1)?
6. როგორი კუთხეებია A₁MB₁ კუთხის მოსაზღვრე $\angle A_1MC$ და $\angle AOB$? რა შეგიძლიათ თქვათ მათი ჯამის შესახებ? (სურათი 1).



თეორემა

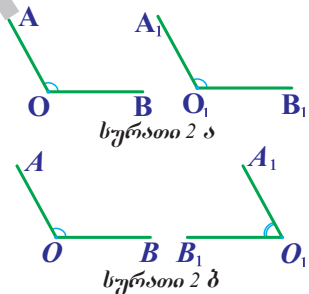
კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები პარალელურია

თუ კუთხეების შესაბამისი გვერდები პარალელურია, მაშინ ეს კუთხეები ან ერთმანეთის ტოლია, ან მათი ჯამი 180° -ია.

თეორემის პირობა: $\angle AOB$ და $\angle A_1O_1B_1$, $OA \parallel O_1A_1$; $OB \parallel O_1B_1$

თეორემის დასკვნა: $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (სურათი 2 ა) ან $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180^\circ$ (სურათი 2 ბ).

დაამტკიცეთ.



IV განყოფილება

თუ კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები პარალელურია და ორივე მახვილია ან ორივე ბლაგვი, მაშინ ეს კუთხეები ტოლია.

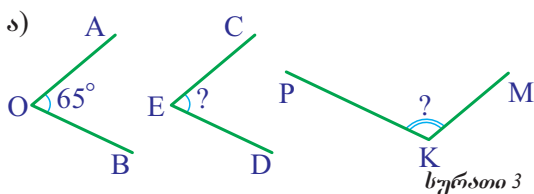
თუ კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები პარალელურია, ერთი მახვილია და მეორე კი-ბლაგვი, მაშინ ამ კუთხეების ჯამი 180° -ია.

თუ კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები პარალელურია, ორივე მართია, მაშინ მათი ჯამი 180° -ია.

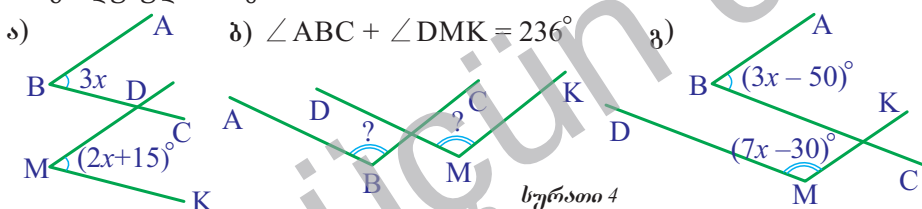
საგარჯიშოები

- ა) დახაზეთ AOC გაშლილი კუთხე, ააგეთ BOD კუთხე, რომლის გვერდებიც შესაბამისად OA და OC გვერდების პარალელურია. რა შეიძლება ითქვას AOC და BOD კუთხეების შესახებ? პასუხი განმარტეთ.
ბ) დახაზეთ MNK მართი კუთხე. განსაზღვრეთ PSR კუთხის სახე, რომლის გვერდებიც შესაბამისად NM და NK გვერდების პარალელურია.
- დახაზეთ 60° -იანი კუთხე. ააგეთ MNK კუთხე, რომლის გვერდებიც შესაბამისად ამ კუთხის გვერდების ტოლია. რამდენი გრადუსი შეიძლება იყოს MNK კუთხე? რატომ?
- სამირი ამბობს, რომ თუ AOB და MCD კუთხეების გრადუსული ზომა ტოლია ე.ი. ამ კუთხეების შესაბამისი გვერდები პარალელურია. სწორია მისი მოსაზრება? თუ ორი კუთხის ჯამი 180° -ია, შეიძლება ვთქვათ, რომ ამ კუთხეების შესაბამისი გვერდები პარალელურია?

- სურათი 3-ზე მოცემული AOB, CED და MKP კუთხეების შესაბამისი გვერდები პარალელურია. იპოვეთ ამ კუთხეების გრადუსული ზომები:



- მოცემულია ABC და DMK კუთხეები: $BA \parallel MD$ და $BC \parallel MK$. განსაზღვრეთ ამ კუთხეების გრადუსული ზომები:

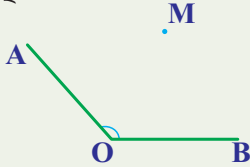


- ა) პარალელური გვერდების მქონე კუთხეებიდან ერთი მეორის 20% -ს შეადგენს. იპოვეთ ამ კუთხეების გრადუსული ზომები.
ბ) კუთხეების, რომელთა შესაბამისი გვერდები პარალელურია, თანაფარდობაა 3:6. იპოვეთ ამ კუთხეების გრადუსული ზომების კვადრატების სხვაობა.

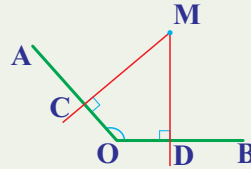
4.12. კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები მართობულია

საქმიანობა

1. დახაზეთ გაშლილი კუთხისაგან განსხვავებული $\angle AOB$ კუთხე. აღნიშნეთ მის გვერდებზე არამდებარე წერტილი M წერტილი.

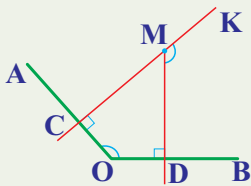


2. M წერტილზე გაავლეთ OA და OB გვერდების მართობული წრფეები.



3. ტრანსპორტირის საშუალებით განსაზღვრეთ $\angle AOB$ და $\angle CMD$. რამდენი გრადუსია მათი ჯამი?

4. MC სხივი შეავსეთ წრფით. შეადარეთ მიღებული $\angle AOB$ და $\angle DMK$ კუთხეების გრადუსული ზომები. რა შედეგი მიიღეთ?



5. შეაჯამეთ მოსაზრებები $\angle AOB$, $\angle CMD$ ან $\angle AOB$, $\angle DMK$ კუთხეების შესახებ. როგორი იქნება ამ კუთხეების შესაბამისი გვერდების ურთიერთმდებარეობა? რა დასკვნა გამოიტანეთ კუთხეების ზომების შესახებ თითოეულ შემთხვევაში?

თეორემა

კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები მართობულია

კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდები მართობულია ან ერთმანეთის ტოლია, ან მათი ჯამი 180° -ია.

თეორემის პირობა: $\angle AOB$ და $\angle A_1O_1B_1$, $OA \perp O_1A_1$; $OB \perp O_1B_1$.

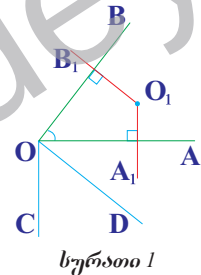
თეორემის დასკვნა: $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ ან $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180^\circ$.

თეორემის დამტკიცება:

დავუშვათ, რომ $\angle AOB$ და $\angle A_1O_1B_1$ მოცემული კუთხეებია. თუ $\angle AOB$ გაშლილი ან მართი კუთხეა, მაშინ $\angle A_1O_1B_1$ კუთხეც გაშლილი ან მართი კუთხეა, ანუ ამ შემთხვევაში:

$\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. დავუშვათ, რომ $\angle AOB < 180^\circ$ (90° -საგან განსხვავებული). ამ დროს ორი შემთხვევაა შესაძლებელი.

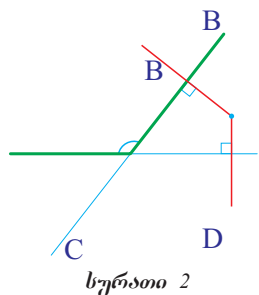
I შემთხვევა: $\angle AOB < 90^\circ$ (სურათი 1). OC სხივი ისე გავავლოთ, რომ $OA \perp OC$, B და C წერტილები კი OA წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობდეს. შემდეგ OD სხივი ისე გავავლოთ, რომ $OD \perp OB$, C და D წერტილები კი OA წრფის ერთ მხარეს მდებარეობდნენ. რადგან $\angle AOB = 90^\circ - \angle AOD$ და $\angle COD = 90^\circ - \angle AOD$, ამიტომ $\angle AOB = \angle COD$. რადგან $\angle COD$ და $\angle A_1O_1B_1$ კუთხეების შესაბამისი გვერდები პარალელურია (განმარტეთ რატომ არის პარალელური), ეს კუთხეები ან ტოლია ან მათი ჯამი 180° -ია.



II შემთხვევა: $\angle AOB > 90^\circ$ (სურათი 2). OC სხივი ისე გავავლოთ, რომ $\angle AOB$ და $\angle AOC$ მოსაზღვრე კუთხეები იყოს. $\angle AOC$ მახვილი კუთხეა და მისი გვერდები $\angle A_1O_1B_1$ -ის შესაბამისი გვერდების მართობულია. ე.ი. ან $\angle AOC + \angle A_1O_1B_1 = 180^\circ$ ან $\angle AOC = \angle A_1O_1B_1$.

მაშინ პირველ შემთხვევაში, რადგან AOC და $A_1O_1B_1$ კუთხეები მოსაზღვრე კუთხეებია $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ ან

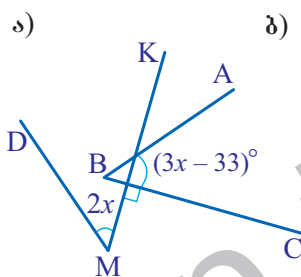
$\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180^\circ$. **თეორემა დამტკიცებულია.**



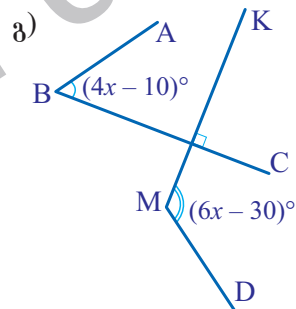
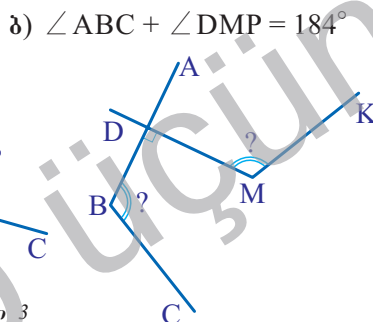
სურათი 2

საგარჯიშოები

- ა) დახაზეთ AOC გაშლილი კუთხე. ააგეთ BOD კუთხე, რომლის გვერდები შესაბამისად OA და OC გვერდების მართობულია. რისი თქმა შეიძლება AOC და BOD კუთხეების შესახებ? პასუხი განმარტეთ.
ბ) დახაზეთ ABC მართი კუთხე. განსაზღვრეთ MNK კუთხის სახე, რომლის გვერდები შესაბამისად BA და BC გვერდების მართობულია.
- დახაზეთ 105° -იანი MOK კუთხე. ააგეთ ამ კუთხის გვერდების მართობული გვერდების მქონე AOB კუთხე. იპოვეთ AOB კუთხის გრადუსული ზომა და განსაზღვრეთ მისი სახე.
- მოცემულია AOB და CED კუთხეები, რომელთა შესაბამისი გვერდებიც მართობულია.
ა) თუ $\angle AOB = 56^\circ$, $\angle CED = ?$
ბ) თუ $\angle AOB : \angle CED = 2:7$, $\angle AOB = ?$ $\angle CED = ?$
გ) თუ $\angle AOB = 3 \cdot \angle CED$, $\angle AOB = ?$ $\angle CED = ?$
დ) თუ $\angle AOB = 20x + 44^\circ$, $\angle CED = 10x + 46^\circ$, $\angle AOB = ?$ $\angle CED = ?$
- დახაზეთ ნებისმიერი AOB კუთხე და OA გვერდზე აღნიშნეთ M წერტილი. ააგეთ CMD კუთხე, რომლის წვერო M წერტილი, ხოლო გვერდები-AOB კუთხის შესაბამისი გვერდების მართობული იქნება.
- მოცემულია ABC და DMK კუთხეები: $BA \perp MD$ და $BC \perp MK$. განსაზღვრეთ ამ კუთხეების გრადუსული ზომები (სურათი 3).



სურათი 3



ოჯითშემოწმება

1. მოცემული ორწევრის კვადრატი გადააქციეთ მრავალწევრად:

ა) $(m-4)^2$; ბ) $(7+2b)^2$;
 გ) $(-3a-0,4)^2$; დ) $\left(\frac{3}{4}n+1\frac{1}{2}\right)^2$;
 ე) $(3a^4-1,2b^2)^2$; ვ) $(m^2n^3+k^3)^2$;
 ზ) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$; თ) $\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2$.

2. გამოთვალეთ მოცემული რიცხვების კვადრატი ორწევრების კვადრატის ფორმულის გამოყენებით:

ა) $3,9^2$; ბ) $100,1^2$; გ) 2999^2 .

3. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

ა) $(5a^2-2b)^2+20a^2b$;
 ბ) $x^4-121-(x^4+11)^2$;
 გ) $16m(m-1)-(4m-1)^2$.

4. x -ის რა მნიშვნელობისთვის არის $(4x-1)$ ორწევრის კვადრატი $(2x-3)$ ორწევრის გაოთხმაგებული კვადრატზე 10 ერთეულით მეტი?

5. მრავალწევრები დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $16a^2+56ab+49b^2$;
 ბ) $-c^2-4cd-4d^2$;
 გ) $x^2-9x+14$.

6. $(3a-b)$ ორწევრის რომელ გამოსახულებებთან ნამრავლი მოგვცემს ქვემოთ მოცემულ მრავალწევრებს?

ა) $9a^2-b^2$; ბ) $9a^2-3ab$;
 გ) $-9a^2+6ab-b^2$;
 დ) $9a^2-6ab+b^2$;
 ე) $27a^3-b^3$; ვ) b^4-3ab^3 ;
 ზ) $3ax+3ay-bx-by$.

7. წერტილების ადგილას ჩაწერეთ საჭირო გამოსახულებები:

ა) $\dots^2-\dots=(2a-\dots)(2a+7)$;
 ბ) $(n+\dots)^2=\dots+\dots+16$;
 გ) $(\dots-2n)^2=k^2-\dots+\dots$;

დ) $(\dots+\dots)^2=1+\dots+49x^2$.

8. c წრფე კვეთს a და b პარალელურ წრფეებს. დაადგინეთ ამ წრფეებს შორის წარმოქმნილი კუთხეების გრადუსული ზომები, თუ:

ა) შიგა ჯვარედინი კუთხეების ჯამი 156° -ია;
 ბ) შესაბამისი კუთხეების ჯამი 240° -ია;
 გ) გარეცალმხრივი კუთხეების სხვაობა 40° -ია.

9. იპოვეთ x , თუ $a \parallel b$.

10. იპოვეთ წილადების მნიშვნელობები:

ა) $\frac{48^2-45^2}{74^2-19^2}$; ბ) $\frac{88^2-53^2}{20^2-15^2}$;
 გ) $\frac{89^2-61^2}{89^2-2 \cdot 89 \cdot 61+61^2}$.

11. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $121a^2-25=0$; ბ) $1\frac{9}{16}-x^2=0$;
 გ) $(1-2b)(1+2b)+4b(b-2)=49$;
 დ) $(x-2)^3+(x+2)^3=2(x-3)(x^2+3x+9)$.

12. მოცემულია $a-b=25$, $ab=144$, a და b ნატურალური რიცხვებია. იპოვეთ (a^3-b^3) გამოსახულების მნიშვნელობა.

13. თუ ორი კუთხის, რომელთა შესაბამისი გვერდებიც პარალელურია, სხვაობა 48° -ია, იპოვეთ ამ კუთხეების კვადრატების სხვაობა.

14. კუთხეებიდან , რომელთა შესაბამისი გვერდები მართობულია, ერთ-ერთი მეორის $\frac{2}{3}$ ნაწილის ტოლია. იპოვეთ ამ კუთხეების გრადუსული ზომების ჯამის არასრული კვადრატი.

V განყოფილება. განტოლებათა სისტემები. სამკუთხედის გვერდები და კუთხეები. სტატისტიკა და ალგებრა

5.1. ფუნქციის მოცემის ხერხები

საქმიანობა

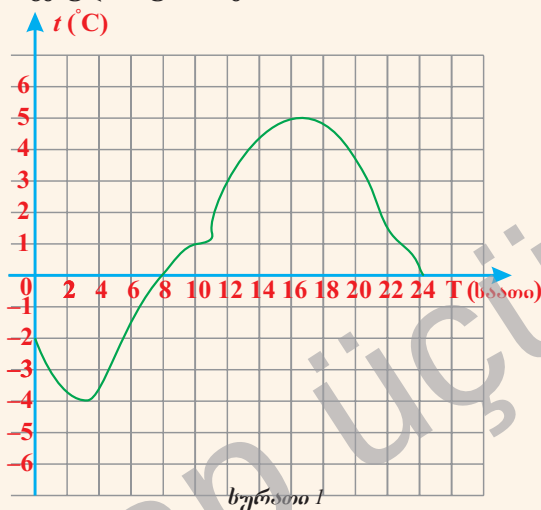
ფორმულა, ცხრილი, გრაფიკი

- როგორ გესმით, როდესაც ამბობენ: მუდმივი სიდიდე ან ცვლადი სიდიდე? როგორი სიდიდეა ჰაერის ტემპერატურა? და როგორ სიდიდეს უწოდებდით წრეწირის სიგრძის თანაფარდობას მის დიამეტრთან: მუდმივს თუ ცვლადს? როგორ დაასაბუთებთ თქვენს მოსაზრებას?
- აჩვენეთ ცვლადები $y = 2x + 1$ სახით მოცემულ ტოლობაში. განსაზღვრეთ y -ის მნიშვნელობა, როცა $x = 1$ და რა მნიშვნელობას მიიღებს y , როცა $x = -3$? განსაზღვრეთ, ამ ცვლადებიდან რომელია დამოუკიდებელი და რომელი დამოკიდებული ცვლადი. $y = 2x + 1$ ტოლობა ფუნქციის რომელი სახით მოცემულობას გვიჩვენებს? გამოთქვით მოსაზრებები.
- კვირის მანძილზე ჰაერის ტემპერატურის ცვლილება მოცემულია ცხრილის სახით.

კვირის დღეები	ორშაბათი	სამშაბათი	ოთხშა- ბათი	ხუთშა- ბათი	პარას- კეფი	შაბათი	კვირა
საშუალო ტემპერა- ტურა	25°C	22°C	23°C	24°C	20°C	21°C	17°C

რამდენი იყო კვირის მანძილზე საშუალო ტემპერატურა? განსაზღვრეთ პარასკევის ჰაერის საშუალო ტემპერატურა ცხრილის მიხედვით.

- დღის მანძილზე ტემპერატურის დროსთან დამოკიდებულება უფრო დეტალურად მოცემულია სურათზე.



სურათის მიხედვით განსაზღვრეთ:

- რამდენი გრადუსი იყო ჰაერის ტემპერატურა 8 საათზე?
- როგორ შეიცვალა ჰაერის ტემპერატურა დღის განმავლობაში?
- განსაზღვრეთ ყველაზე მაღალი და ყველაზე დაბალი ტემპერატურა. შეიძლება ვუწოდოთ ფუნქცია ტემპერატურასა და დროს შორის ამ დამოკიდებულებას?

- რომელი ხერხითაა მოცემული ფუნქცია ზემოთ მოცემულ ნიმუშებში? თქვენი აზრით, რომელი უფრო ხელსაყრელია მოცემის ხერხებს შორის? რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.

“**ფუნქცია**“ მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. მისი მოცემისათვის გამოიყენება მუდმივი ან ცვლადი სიდიდეები. სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობის მიმღებ სიდიდეს ცვლადი სიდიდე, ხოლო შესაბამისი რიცხვითი მნიშვნელობის მიმღებ სიდიდეს-მუდმივი სიდიდე ეწოდება. მაგალითად, ჰაერის ტემპერატურა, ავტომობილის სიჩქარე, ზღვის წყლის დონე და სხვა ცვლადი სიდიდეებია. წლის დროების რაოდენობა, წრეწირის სიგრძის თანაფარდობა მის დიამეტრთან და სხვა, მუდმივი სიდიდეებია. ხშირ შემთხვევაში რაიმე სიდიდის ერთი მნიშვნელობა მეორე სიდიდის გარკვეული წესით მისი შესაბამისი რომელიმე მნიშვნელობის მიღების მიზეზი ხდება. მაშინ მეორე ცვლადი სიდიდე პირველზე დამოკიდებული ხდება. პირველ ცვლადს თავისუფალი (დამოუკიდებელი), მეორე ცვლადს კი დამოკიდებული ცვლადი ეწოდება.

თავისუფალ ცვლადს **არგუმენტი**, დამოკიდებულ ცვლადს კი-მისი **ფუნქცია** ეწოდება. არგუმენტის შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლეს ფუნქციის **განსაზღვრის არე** ეწოდება. არგუმენტზე დამოკიდებულად ფუნქციის მიერ მიღებულ მნიშვნელობათა ერთობლიობას მისი **მნიშვნელობათა სიმრავლე** ეწოდება.

ფუნქცია ზოგადად $y = f(x)$ სახით აღინიშნება, სადაც x არის არგუმენტი, $f(x)$ კი-ფუნქციაა.

ფუნქციის მოცემის ხერხები

ანალიტიკური ხერხი ცხრილური ხერხი გრაფიკული ხერხი

1. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს **ანალიტიკური ხერხით** (ფორმულით).

მაგალითად, $y(x) = x^2 + 1$ ან $y = x^2 + 1$

როცა $x = 3$, $y(3) = 3^2 + 1 = 10$. $y = 2$ როცა $x = 1$ ან $x = -1$.

2. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს **ცხრილის** სახით, მაგალითად:

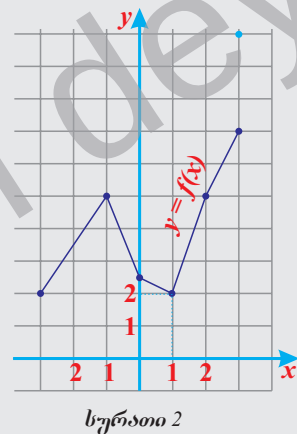
x	-3	-1	0	1	2	3
y	2	5	2,5	2	5	7

ცხრილის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $y=2$, როცა $x=-3$. $y = 2$, როცა $x = 1$. ეს ცხრილი x -ის -3; -1; 0; 1; 2; 3 მთელი მნიშვნელობებისათვის რაიმე ფუნქციის მნიშვნელობების ცხრილია.

3. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს **გრაფიკის** სახით. ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცხადი სახით წარმოსახვისათვის გამოიყენება გრაფიკი.

ზემოთ ცხრილში მოცემული კოორდინატა წყვილი აღნიშნეთ საკოორდინატო სისტემაზე და შეაერთეთ ისინი მიმდევრობით.

გრაფიკის თანახმად, როცა, $x = 1$, $y = 2$ (სურათი 2).



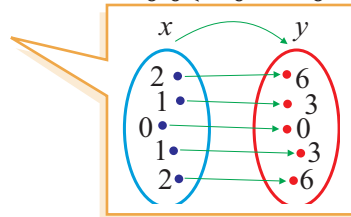
სურათი 2

1. წაკითხეთ მოცემული გამოსახულებები, დაასახელეთ არგუმენტი (დამოუკიდებელი ცვლადი) და ფუნქცია (დამოკიდებული ცვლადი):

ა) $s(t) = 90t$; ბ) $p(x) = 17,8x$; გ) $C(R) = 2\pi R$;
 დ) $y(x) = \frac{3}{5}x + 2$; ე) $t(s) = \frac{s}{60}$; ვ) $f(x) = 2 - 5x^2$.

2. გამოთვალეთ y -ის მნიშვნელობა x ცვლადის -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 მნიშვნელობებისათვის:

ა) $y = 8x$; ბ) $y = -2x$; $y = 3x$
 გ) $y = -x - 3$; დ) $y = 10x + 8$.

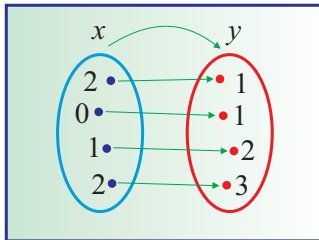


3. ფუნქცია მოცემულია $y(x) = 2x - 1$ ფორმულით.

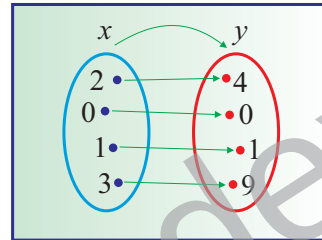
- ა) გამოთვალეთ y -ის მნიშვნელობა x -ის 10 ; $-4,5$; 15 ; -21 მნიშვნელობებისათვის. x -ისა და y -ის მნიშვნელობებს შორის შესაბამისობა აჩვენეთ ისრით.

- ბ) x ცვლადის რა მნიშვნელობები მიიღება y -ის -19 ; 205 ; $-3\frac{1}{2}$ -მნიშვნელობებისათვის?

4. მოცემულია x და y ცვლადებს შორის ქვემოთ მოცემული შესაბამისობა (სურათი 3 ა, ბ). წარმოადგინეთ ეს შესაბამისობა ფორმულით.



სურათი 3 ა



სურათი 3 ბ

5. ფუნქცია მოცემულია $f(x) = \frac{1}{3}(2x + 1)$ ფორმულით.

- ა) რას აჩვენებს $f(3)$, $f(-12)$, $f(2, 1)$ ჩანაწერები? x -ის ადგილას რა მნიშვნელობა უნდა ჩაწეროთ მოცემულ $f(x)$ -ის ფორმულაში, რომ ვიპოვოთ ისინი?

- ბ) $f(x) = 0$; $f(x) = 2,4$; $f(x) = -0,9$ იპოვეთ x ტოლობების მიხედვით.

6. ფუნქცია მოცემულია $p(x) = 2 - 5x^2$ ფორმულით. განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული ტოლობებიდან სწორი ტოლობები:

ა) $p(-2) = -18$; ბ) $p\left(-\frac{1}{5}\right) = 1\frac{4}{5}$; გ) $p(4) = 78$; დ) $p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

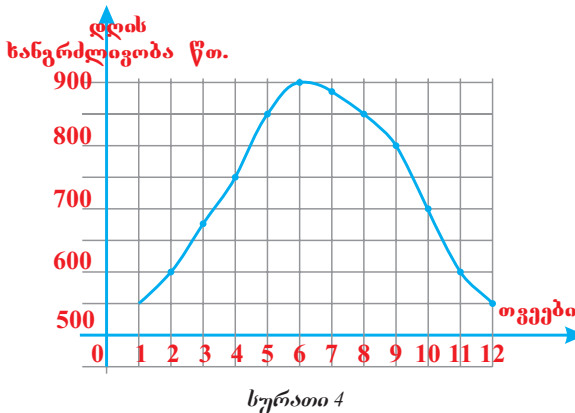
7. ქვემოთ მოცემული ცხრილი აჩვენებს p ატმოსფეროს წნევის დამოკიდებულებას h სიმაღლეზე ზღვის დონიდან.

h , კმ	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20
p , მმ ვერცხლისწყლის სვეტი	760,0	716,0	674,0	596,1	525,7	462,2	404,8	198,1	40,9

- ა) განსაზღვრეთ ატმოსფეროს წნევა 1 კმ-ის, 3 კმ-ის, 5 კმ-ის, 10 კმ-ის სიმაღლეზე.
 ბ) ატმოსფეროს წნევა ზღვის დონიდან რა სიმაღლეზეა 760,0 მმ ვერცხლისწყლის სვეტის, 674,0 მმ ვერცხლისწყლის სვეტის, 40,9 მმ ვერცხლისწყლის სვეტის ტოლი?
8. შეავსეთ ცხრილი და მიღებული კოორდინატა წყვილი აღნიშნეთ მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში, მიღებული წერტილების მიმდევრობით შეერთებით ააგეთ გრაფიკი. რა ფიგურა მიიღეთ? რა დამოკიდებულებაა წერტილების კოორდინატებს შორის?

x				4	0	-2
$y = \frac{1}{2}x + 3$	5	7	-3			

9. სურათი 4-ზე მოცემულია დღის ხანგრძლივობის წლის დროებზე დამოკიდებულების გრაფიკი. ორდინატა ღერძზე მოცემულია ყოველი თვის 1-ლი რიცხვისათვის დღის ხანგრძლივობა, აბსცისა ღერძზე კი-თვეების რიგითი ნომრები.



- ა) რომელი თვის 1-ელ რიცხვში იყო დღის ხანგრძლივობა 10 საათი, 700 წუთი, 850 წუთი?
 ბ) წლის რომელ დროში იყო დღის ხანგრძლივობა 700 წუთზე მეტი, 10 საათზე ნაკლები?
 გ) რამდენი საათი იყო დღის ხანგრძლივობა იანვრის, მარტის, მაისის, ივლისის, ოქტომბრის 1-ლი რიცხვისათვის?

10. მოცემულია $y(x)$ ფუნქციის გრაფიკი (სურათი 5). გრაფიკის მიხედვით:

- ა) იპოვეთ მნიშვნელობები: $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$, $y(-1)$.
 ბ) x -ის რა მნიშვნელობისათვის მიიღებს ფუნქცია 1,2,0 მნიშვნელობას?
 გ) ჩამოთვალეთ x -ის რამდენიმე ისეთი მნიშვნელობა, რომ ამ მნიშვნელობისათვის y -ს დადებითი ნიშანი ჰქონდეს.
 დ) დაასახელეთ x -ის რამდენიმე ისეთი მნიშვნელობა, რომ ამ მნიშვნელობისათვის y -ს მინუსი ნიშანი ჰქონდეს.
 ე) დაასახელეთ x -ის რამდენიმე ისეთი მნიშვნელობა, რომ ამ მნიშვნელობისათვის y 0-ის ტოლი იყოს.
 ვ) $(2; 0)$; $(4; 1)$; $(0; 1)$; $(0; -1)$; $(-1; 0)$ წერტილებიდან რომელი ეკუთვნის მოცემულ გრაფიკს? რატომ?

5.2. წრფივი ფუნქცია და მისი გრაფიკი

საქმიანობა

$$y = kx + b$$

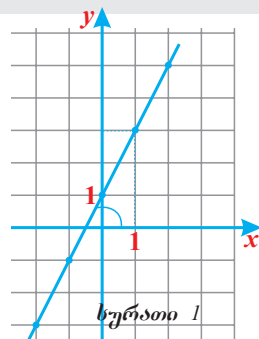
1. $y = -3x + 2$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციაში რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს x -მა? და რისი თქმა შეიძლება y -ის შესაძლო მნიშვნელობების შესახებ?
2. x -სათვის მნიშვნელობების მინიჭებით განსაზღვრეთ y და ჩაწერეთ ცხრილის სახით.
3. ააგეთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ცხრილში მოცემული კოორდინატების შესაბამისი წერტილები აღნიშნეთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. მიღებული წერტილები შეაერთეთ მიმდევრობით. რა ფიგურა მიიღეთ? ამ გრაფიკის ასაგებად საკმარისია თუ არა ორი წერტილის კოორდინატების ცოდნა? რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.

ნამუში

1. ააგეთ $y = 2x + 1$ ფუნქციის გრაფიკი.
2. დაადგინეთ y , x -ისათვის რამდენიმე მნიშვნელობის მინიჭებით. არგუმენტის (x -ის) და ფუნქციის (y -ის).

x	y	მნიშვნელობები განათავსეთ ცხრილში. მოცემული კოორდინატების წყვილის შესაბამისი წერტილები აღნიშნეთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. მიღებული წერტილები შეაერთეთ მიმდევრობით. მიღებული გრაფიკი წრფეა. ეს წრფე Ox ღერძის მიმართულებასთან მახვილ კუთხეს ადგენს (სურათი 1).
-2	-3	
-1	-1	
0	1	
1	3	
2	5	

შენიშვნა. რადგანაც შესაძლებელია ორ წერტილზე ერთი წრფის გავლება, ამიტომაც საკმარისია ცხრილის შედგენისას x -სათვის ორი მნიშვნელობის მინიჭება.



მოცემული k და b რიცხვებისათვის $y = kx + b$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას **წრფივი ფუნქცია** ეწოდება. როცა $b = 0$, მაშინ $y = kx$, ეს პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების ფორმულაა. როცა $k = 0$ მაშინ $y = b$, ასეთ ფუნქციას **ჰუდშივი ფუნქცია** ეწოდება.

წრფივი ფუნქციის გრაფიკი წრფეა, სადაც k -ს წრფის **კუთხური კოეფიციენტი** ეწოდება. როცა $k < 0$ წრფე Ox ღერძის მიმართულებასთან ზღაგვ კუთხეს ადგენს, ხოლო როცა $k > 0$ მახვილ კუთხეს.

$y = kx + b$ ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს:

- 1) I, II და III მეოთხედებში, როცა $k > 0$, $b > 0$;
- 2) I, III და IV მეოთხედებში, როცა $k > 0$, $b < 0$;
- 3) I, II და IV მეოთხედებში, როცა $k < 0$, $b > 0$;
- 4) II, III და IV მეოთხედებში, როცა $k < 0$, $b < 0$.

$y = kx + b$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი $(0; b)$ წერტილზე გადის. $y = b$ წრფე $(0; b)$ წერტილზე გამავალი და Ox ღერძის პარალელური წრფეა; $x = a$ წრფე კი $(a; 0)$ წერტილზე გამავალი და Oy ღერძის პარალელური წრფეა.

x -ის ადგილას ნებისმიერი რიცხვის ჩაწერით, მისი მოცემულ k რიცხვზე გამრავლებით და შედეგის მოცემულ b რიცხვთან შეკრებით, მიიღება გარკვეული რიცხვი ე.ი. წრფივი ფუნქციის განსაზღვრის არე მთელი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

რადგანაც ნებისმიერი x რიცხვისათვის $kx + b$ გამოსახულების მნიშვნელობაც ნებისმიერი რიცხვია, ამიტომაც $y = kx + b$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეც მთელი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

საგარჯიშოები

1. (ზეპირად) რომლებია წრფივი ფუნქციები ქვემოთ მოცემული ფორმულებით მოცემული ფუნქციებიდან? რატომ? განსაზღვრეთ k და b თითოეულ წრფივ ფუნქციაში.

ა) $y = -x - 2$; ბ) $y = x^2 + 6$; გ) $y = \frac{x}{4}$;
 დ) $y = 10$; ე) $y = \frac{5}{x} + 7$; ვ) $y = -\frac{x}{3} + 8$.

2. ცხრილში მოცემული კოორდინატების შესაბამისი წერტილები აღნიშნეთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში და მიმდევრობით შეაერთეთ. რა ფიგურაა მიღებული გრაფიკი? ფორმულებით როგორ შეიძლება ჩაიწეროს ამ გრაფიკების შესაბამისი ფუნქციები? განსაზღვრეთ k -ს მნიშვნელობები.

x	-2	0	2	3	4	7
y	5	5	5	5	5	5

x	-2	0	2	3	4	7
y	0	0	0	0	0	0

x	0	0	0	0	0	0
y	-3	-2	-1	0	3	5

x	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	-2	0	2	3	4	7

3. ა) მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში წერტილები, რომლების აბსცისებიც 6-ია, რომელ ფიგურას ადგენენ? რომელი ფორმულით შეიძლება მოცემული იქნეს ამ შემთხვევაში მიღებული წრფე?
 ბ) რომელ ფიგურას ადგენენ $y = -3$ მუდმივი ფუნქციის გრაფიკის წერტილები?
 გ) ჩაწერეთ რამდენიმე მუდმივი ფუნქცია და ააგეთ მათი გრაფიკები. განსაზღვრეთ ამ გრაფიკების ურთიერთმდებარეობა OX და OY ღერძებთან მიმართებაში.
4. შეადგინეთ ფორმულით მოცემული ფუნქციების შესაბამის მნიშვნელობათა ცხრილები და ააგეთ გრაფიკები. რა ფიგურაა თითოეული ამ ფუნქციის გრაფიკი? სულ მცირე რამდენი წერტილის კოორდინატების ცოდნაა საკმარისი წრფივი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად? რატომ?

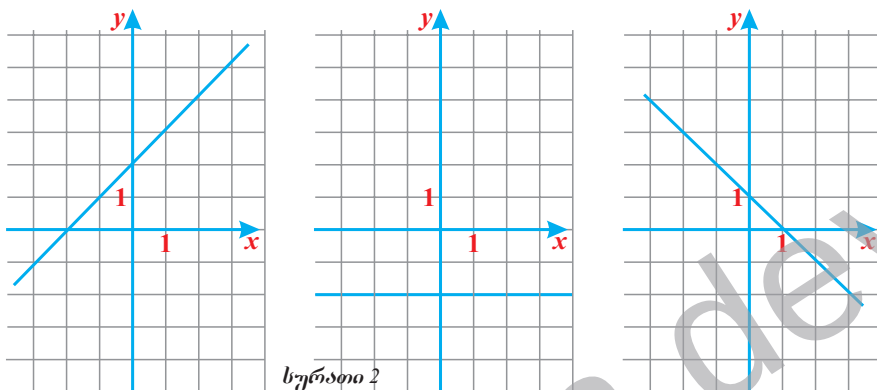
ა) $y = 2x - 1$; ბ) $y = -2x + 1$; გ) $y = 3x - 4$;
 დ) $y = 0,5x - 2$; ე) $y = \frac{1}{4}x - 3$; ვ) $y = \frac{1}{2}x + 3$.

5. ინაიეთმა და ულურმა ააგეს $y(x) = 2x + 3$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. ულურის აგებულ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აბსცისის და ორდინატის ღერძებზე შერჩეული ერთეული მონაკვეთი ერთი უჯრის, ინაიეთის აგებულ კოორდინატთა სისტემაში კი აბსცისის და ორდინატის ღერძებზე შერჩეული ერთეული მონაკვეთი ორი უჯრის ტოლი იყო. რითი განსხვავდებიან მათ მიერ აგებული გრაფიკები? მერხის მეგობართან ერთად, თქვენც მათნაირად ააგეთ გრაფიკები, განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობები და განიხილეთ მიღებული შედეგები:

ა) $y(0) = ?$ $y(1) = ?$ $y(-3) = ?$
 ბ) x -ის რა მნიშვნელობისათვის არის $y(x) = 1$; $y(x) = 4$; $y(x) = 0$; $y(x) = -1$?
 გ) რომელ წერტილში კვეთს OX ღერძს $y(x)$ ფუნქციის გრაფიკი? და რომელ წერტილში იყ ღერძს?

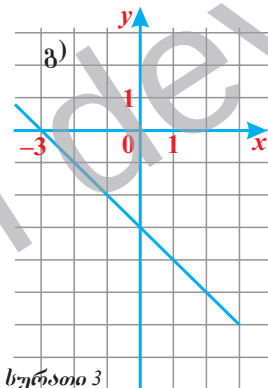
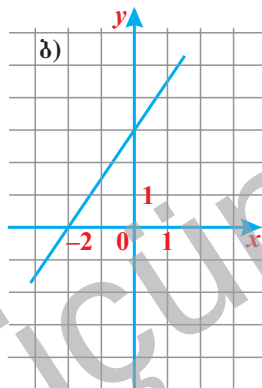
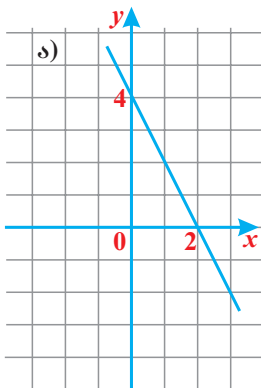
► V განყოფილება

6. ააგეთ $y = x + 2$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის საფუძველზე განსაზღვრეთ მდებარეობს თუ არა ამ გრაფიკზე $M(0; 2)$, $N(1; 3)$, $A(-1; 1)$, $B(-4; 7)$, $C(-2\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ წერტილები. გრაფიკის აუგებლად როგორ შეიძლება განვსაზღვროთ, ეკუთვნის თუ არა ეს წერტილები $y = x + 2$ ფუნქციის გრაფიკს?
7. გრაფიკის აუგებლად განსაზღვრეთ $y = 2x - \frac{1}{3}$ ფუნქციის გრაფიკი $A(0; -\frac{1}{3})$, $B(1; -2)$, $C(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $D(2; 3)$ წერტილებიდან რომელზე გაივლის.
8. ააგეთ $y = -0,5x - 2$ ფუნქციის გრაფიკი და მასზე აჩვენეთ x -ის ისეთი მნიშვნელობები, რომ ამ მნიშვნელობებზე y დადებითი ან უარყოფითი ნიშნის მატარებელი იყოს. ამ წრფეზე აჩვენეთ რამდენიმე ისეთი წერტილი (თუ არსებობს), რომ მათი: ა) აბსცისა დადებითი, ორდინატა-უარყოფითი იყოს; ბ) აბსცისა უარყოფითი, ორდინატა-დადებითი იყოს; გ) აბსცისა და ორდინატა უარყოფითი იყოს; დ) აბსცისა და ორდინატა დადებითი იყოს. დაადგინეთ რომელ მეთოდში მდებარეობს გრაფიკი.
9. სურათი 2-ზე მოცემული გრაფიკის საფუძველზე შეადგინეთ x და y ცვლადების მნიშვნელობათა ცხრილი და დაადგინეთ ფუნქციის ფორმულა. როგორ კუთხეს ადგენს OX ღერძის მიმართულებასთან თითოეულ შემთხვევაში გრაფიკი?



10. ფერიდმა მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში, მოცემულ შუალედებში ააგო მუდმივი ფუნქციების გრაფიკები და მიიღო რომელიღაც ფიგურა. დაადგინეთ, რომ ამ ფიგურის პერიმეტრი 20 სმ-ია. თქვენც ჩახაზეთ ფერიდის აგებული ფიგურა და განსაზღვრეთ, რომ პერიმეტრი სწორად არის ნაპოვნი.
- 1) როცა x ცვლადი -3 -სა და 2 -ს შორის მდებარეობს, $y = -2$;
 - 2) როცა y ცვლადი -2 -სა და 2 -ს შორის მდებარეობს, $x = 3$;
 - 3) როცა x ცვლადი -3 -სა და 3 -ს შორის მდებარეობს, $y = 2$;
 - 4) როცა y ცვლადი -2 -სა და 2 -ს შორის მდებარეობს, $x = -3$.

11. განსაზღვრეთ რომელ ფიგურას წარმოქმნიან $y = 0$; $y = 3$; $x = 0$; $x = 2$ წრფეები. სად მდებარეობს $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ წერტილი? გამოთვალეთ ფიგურის ფართობი.
12. ჯამალმა გამოიკვლია წრფივი ფუნქციის გრაფიკი და განსაზღვრა ქვემოთ მოცემული დებულებები. გამოთქვით თქვენი დამოკიდებულება მის მოსაზრებასთან დაკავშირებით. დაასაბუთეთ, რომელი დებულებაა სწორი და რომელი არასწორი.
- ა) $y = 9x + 1$ ფუნქციის გრაფიკი ორდინატა ღერძს $(0;1)$ წერტილში კვეთს;
- ბ) $y = -5x - 7$ ფუნქციის გრაფიკი აბსცისათა ღერძის მიმართულებასთან ადგენს პარალელურ კუთხეს და არ კვეთს ორდინატის ღერძს;
- გ) $y = \frac{3x-4}{2}$ და $y = 1,5x - 2$ ფუნქციების გრაფიკები ემთხვევა ერთმანეთს;
- დ) $y = \frac{7x+12}{10}$ და $y = \frac{6-4x}{5}$ ფუნქციების გრაფიკები OY ღერძს ერთსა და იმავე წერტილში კვეთენ.
13. იპოვეთ k -კუთხური კოეფიციენტის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $y = kx + 2$ ფუნქციის გრაფიკი ა) M(-2; 4), ბ) N(5; 2) წერტილზე გაივლის.
14. დაადგინეთ b -ს მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $y = -3x + b$ ფუნქციის გრაფიკი გაივლის ა) A(-7; -12), ბ) B(3; -7) წერტილზე.
15. ერთი და იგივე მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში ააგეთ $y = 10 - 2x$ და $y = 2x + 2$ ფუნქციების გრაფიკები. დაადგინეთ როგორ კუთხეს ადგენს თითოეული გრაფიკი OX ღერძის მიმართულებასთან. განსაზღვრეთ ამ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისა და ორდინატა.
16. განსაზღვრეთ სურათი 3-ზე მოცემული გრაფიკების კოორდინატა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედების ფართობები.



17. ააგეთ $y = 13 - x$ ფუნქციის გრაფიკი და დაადგინეთ მისი კოორდინატა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები. გამოთვალეთ მიღებული მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი.

5.3. პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი

საქმიანობა

$$y = kx$$

1. რომლებია პირდაპირპროპორციული სიდიდეები? რომელი ფორმულით მოიცემა პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება?
2. როგორ ჩაიწერება $y = kx + b$ ფორმულა, თუ ამ ფორმულაში $b = 0$? როგორ დამოკიდებულებას აჩვენებს ეს ფორმულა?
3. მართუთხა კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ $y = 3x$ ფუნქციის გრაფიკი. რა მნიშვნელობას მიიღებს y , თუ $x = 0$? რომელი წერტილის კოორდინატებია $(0; 0)$ წვეთი? რას აჩვენებს $\frac{y}{x} = 3$ ტოლობა?
4. ააგეთ $y = -3x$ ფუნქციის გრაფიკი. $\frac{y}{x} = -3$ ტოლობის საფუძველზე შეგიძლიათ დაასაბუთოთ, რომ $A(-2; 6)$, $B(12; -36)$, $C(-100; 300)$ წერტილები გრაფიკზე მდებარეობს?
5. განსაზღვრეთ, რომელ მეოთხედებში მდებარეობს $y = 3x$ და $y = -3x$ ფუნქციების გრაფიკები. რა კავშირია გრაფიკების შემცველ მეოთხედებსა და k კუთხური კოეფიციენტს შორის? განსაზღვრეთ ორივე წრფის OX ღერძის მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის სახე. გამოთქვით მოსაზრებები.

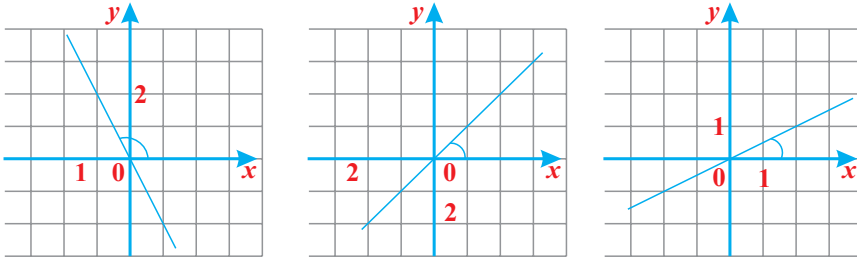
$y = kx$ ($k \neq 0$) ფორმულით მოცემულ დამოკიდებულებას პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება ეწოდება. პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი $O(0; 0)$ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფეა. როცა $k > 0$, პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი I და III მეოთხედებში მდებარეობს და როცა $k < 0$, -II და IV მეოთხედებში.

საგარჯიშოები

1. (ზეპირად) ქვემოთ ფორმულებით მოცემული ფუნქციებიდან რომლებშია პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება? რატომ? დაადგინეთ k -ს ნიშანი პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებაში.
ა) $y = -x$; ბ) $y = x^3$; გ) $y = \frac{x}{12}$; დ) $y = 10 + x$; ე) $y = \frac{1}{x}$; ვ) $y = -\frac{x}{7}$.
2. განსაზღვრეთ k კუთხური კოეფიციენტი: ა) $y = -2x$; ბ) $y = \frac{2}{5}x$; გ) $y = 5x$ მოცემულ ფორმულებში x -ისა და y -ის ისეთი რიცხვები ჩაწერეთ, რომ თანაფარდობა k -ს ტოლი იყოს.
3. რომელი წერტილი მდებარეობს ყოველთვის $y = kx$ ფუნქციის გრაფიკზე k -ს მნიშვნელობისაგან დამოუკიდებლად? რამდენი წერტილის კოორდინატების ცოდნა საკმარისი პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკის აგებისას? თქვენი აზრით, ამ წერტილებიდან ერთ-ერთის რომლის აღება უფრო მიზანშეწონილი?
4. მართუთხა კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ $y = 4x$ და $y = \frac{1}{4}x$ ფუნქციების გრაფიკები. ერთი და იგივე მეოთხედებში მდებარეობს მიღებული გრაფიკები? რატომ? იმავე კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ $y = -4x$ ფუნქციის გრაფიკი. რომელ მეოთხედში მდებარეობს მისი გრაფიკი?

5. განსაზღვრეთ k , თუ $y = kx$ ფუნქციის გრაფიკი: ა) $M(5; 12)$; ბ) $N\left(-4; \frac{1}{2}\right)$ წერტილზე გადის. ეს წრფე აბსცისთა ღერძის მიმართ როგორი კუთხითაა დახრილი?

6. განსაზღვრეთ k -ს ნიშანი მოცემული გრაფიკის (სურათი 1) საფუძველზე და დაასაბუთეთ მოსაზრება. ჩაწერეთ ამ ფუნქციების ფორმულები.

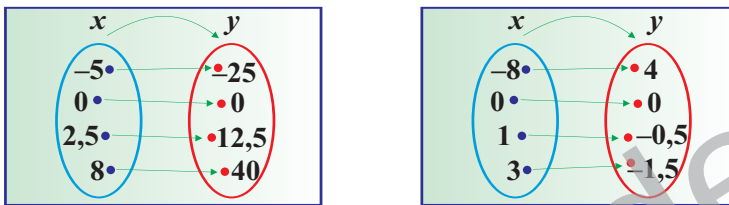


სურათი 1

7. რომელ წრფეებს წარმოქმნიან 0-ის ტოლი აბსცისის მქონე წერტილები? და შეგიძლიათ თქვათ, რომელ წრფეებს წარმოქმნიან 0-ის ტოლი ორდინატის მქონე წერტილები? წარმოადგინეთ ეს წრფეები ფორმულებით.

8. რომელ პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებების გრაფიკს ეკუთვნის მოცემული $A(-1; 7)$, $B(4; -28)$, $C\left(-\frac{1}{2}; 3,5\right)$, $D(5,1; -35,7)$ წერტილები? დაასაბუთეთ, თუ როგორ განსაზღვრეთ ეს.

9. სურათი 2-ზე მოცემული შესაბამისობის მიხედვით დაადგინეთ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკის კუთხური კოეფიციენტი და ფორმულა. განსაზღვრეთ, რომელ მეოთხედში მდებარეობს გრაფიკი.

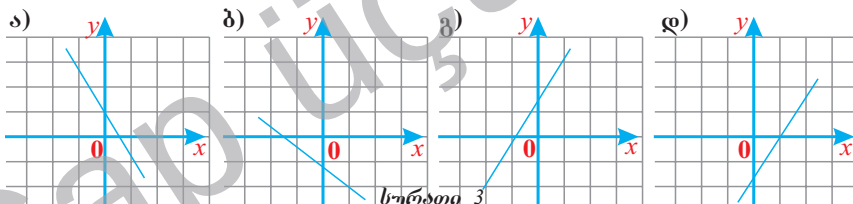


სურათი 2

10. ა) $y=kx$ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი, როდის ადგენს აბსცისის ღერძის მიმართულებასთან 1) მახვილ კუთხეს; 2) ბლაგვ კუთხეს?

ბ) რომელი წრფის გრაფიკია ორდინატთა ღერძის პარალელური? 2) მართობული? მოიყვანეთ ასეთი წრფეების ნიმუშები.

11. სურათი 3-ზე მოცემული წრფივი ფუნქციებისათვის განსაზღვრეთ k -ს და b -ს ნიშანი:



სურათი 3

5.4. წრფივი ფუნქციების გრაფიკების ურთიერთდგომარეობა

საქმიანობა

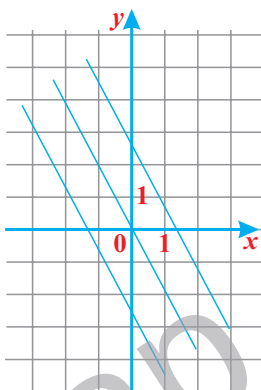
1. გაიხსენეთ სიბრტყეზე წრფეების ურთიერთდგომარეობის შესახებ შესწავლილი. როგორ იწოდებიან საერთო წერტილის არმქონე, ერთი საერთო წერტილის მქონე ან უსასრულო რაოდენობის საერთო წერტილის მქონე წრფეები?
2. ერთი და იგივე მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში ააგეთ $y = 2x$, $y = 2x + 1$ და $y = 2x - 1$ ფუნქციების გრაფიკები. განსაზღვრეთ მათი ურთიერთდგომარეობა და გამოთქვით მოსაზრებები, თუ რატომ არიან განლაგებულნი ასეთ მდგომარეობაში. გაიხსენეთ წრფეების პარალელურობის ნიშანი.
3. ერთი და იგივე მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში ააგეთ $y = -x + 2$ და $y = 3x + 2$ ფუნქციების გრაფიკები. განსაზღვრეთ მათი ურთიერთდგომარეობა და გამოთქვით მოსაზრებები, თუ რატომ არიან განლაგებულნი ასე. განსაზღვრეთ k კუთხური კოეფიციენტი ორივე ფუნქციისათვის.
4. ერთი და იგივე მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში ააგეთ $y = 0,5x - 2$ და $y = \frac{x - 4}{2}$

ფუნქციების გრაფიკები. განსაზღვრეთ მათი ურთიერთდგომარეობა და გამოთქვით მოსაზრებები, თუ რატომ არიან განლაგებულნი ასე.

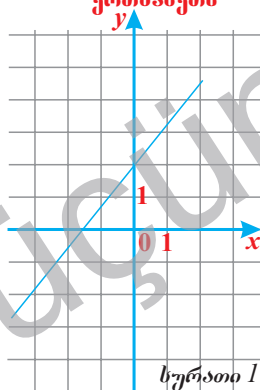
$y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$ ფორმულებით მოცემული წრფეებისათვის შესაძლებელია სამი სახის ურთიერთდგომარეობა:

1. როცა $k_1 \neq k_2$, $y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$ წრფეები ერთ წერტილში იკვეთებიან.
2. როცა $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$, $y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$ წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა.
3. როცა $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, $y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$ წრფეები პარალელურია.

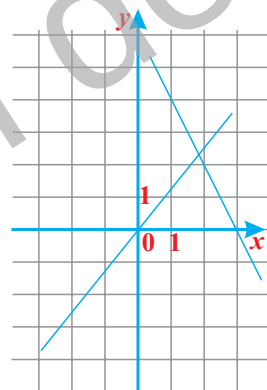
წრფეები პარალელურია



წრფეები ემთხვევა ერთმანეთს



წრფეები იკვეთება



საგარჯიშოები

1. განსაზღვრეთ ფუნქციების გრაფიკების ურთიერთმდებარეობა:

ა) $y = 4x$ და $y = 4x + 5$;

ბ) $y = x + 9$ და $y = -3x + 1$;

გ) $y = 10x + 1$ და $y = -10x - 1$;

დ) $y = x - 11$ და $y = \frac{2x - 22}{2}$.

2. ჯავიდი ამბობს, რომ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები პარალელურებია. თქვენი აზრით, მართალია ჯავიდი?

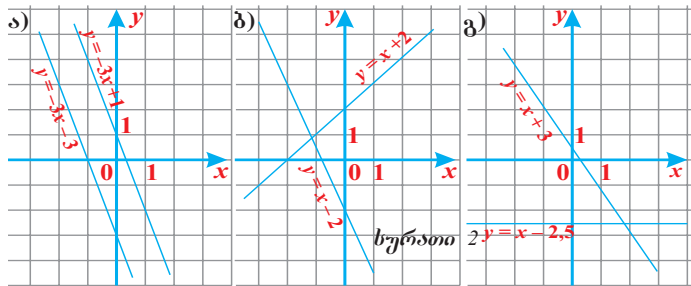
ა) $y = \frac{15}{3}x + 6$ და $y = 5x + 6$;

ბ) $y = \frac{10}{25}x - 1$ და $y = \frac{12}{30}x + \frac{3}{4}$;

გ) $y = x + 7$ და $y = 7 + x$;

დ) $y = \frac{7}{9}x + 6$ და $y = \frac{9}{7}x + 6$.

3. არის თუ არა დამუშავებული შეცდომა მოცემული გრაფიკების აგებისას (სურათი 2)? თქვენი აზრით, როგორ უნდა განთავსებულიყო ეს გრაფიკები? თქვენი პასუხი დაასაბუთეთ წრფეების სწორი განთავსებით.



4. ქვემოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები ააგეთ ერთი და იგივე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში და განსაზღვრეთ მათი ურთიერთმდებარეობა. შეადარეთ k კუთხური კოეფიციენტები თითოეული შემთხვევისათვის.

ა) $y = -2x + 7$ და $y = 0,5x - 5,5$;

ბ) $y = x + 7$ და $y = x - 5$;

გ) $y = 1 - 2x$ და $y = x - 3$;

დ) $y = -x + 5$ და $y = 0,2 - x$.

როგორ მდებარეობენ წრფეები, რომელთა კუთხური კოეფიციენტებიც განსხვავებულია? და რა შეგიძლიათ თქვათ იმ წრფეების ურთიერთმდებარეობის შესახებ, რომელთა კუთხური კოეფიციენტებიც ტოლია?

5. მოცემულ ტოლობებში ვარსკვლავის ადგილას ისეთი რიცხვი ჩაწერეთ, რომ მიღებული ფუნქციების გრაფიკები:

1) პარალელურები იყოს; 2) იკვეთებოდნენ; 3) ერთმანეთს ემთხვეოდნენ (თუ შესაძლებელია).

ა) $y = *x$ და $y = *x + 5$;

ბ) $y = *x + 19$ და $y = -*x + 9$;

გ) $y = *x + 0,1$ და $y = -*x + 0,1$;

დ) $y = *x - 1,5$ და $y = x - 1,5$;

ე) $y = \frac{5}{*} + 6$ და $y = *x - 6$;

ვ) $y = *x - 7$ და $y = \frac{*}{3}x + \frac{1}{4}$.

6. ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები. განსაზღვრეთ წრფეების გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები:

ა) $y = 5x - 7$ და $y = 5 + 2x$;

ბ) $y = -x - 6$ და $y = 3 + x$;

გ) $y = x - 4$ და $y = 1 - 2x$;

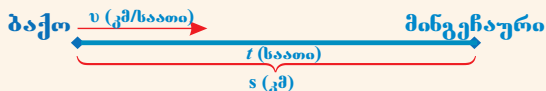
დ) $y = 7x$ და $y = 5 + 3x$.

5.5. მანძილი, დრო და სიჩქარე

საქმიანობა

$$s = v t$$

1. მატარებელი v კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობს ბაქოდან მინგეჩაურის მიმართულებით. რამდენ კოლომეტრ მანძილს დაფარავს მატარებელი t საათში?
2. ბაქოდან მინგეჩაურამდე მანძილი აღნიშნეთ s (კმ)-ით. რომელი ფორმულით შეიძლება განვსაზღვროთ მატარებლის განვლილი მანძილი? დაწერეთ ფორმულა.



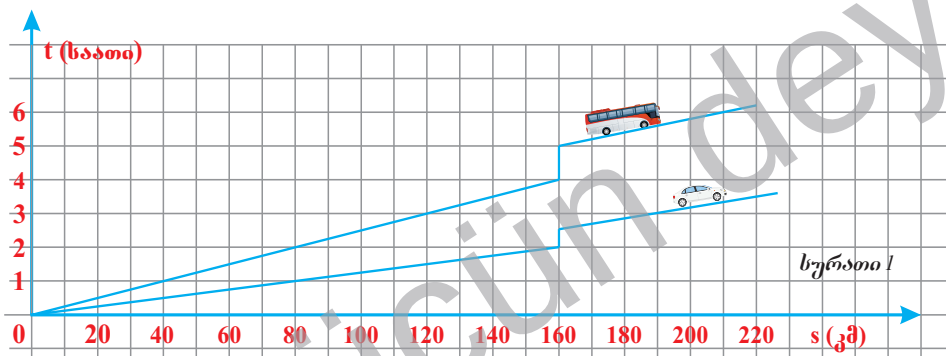
3. ამავე ფორმულით გამოთვალეთ s მანძილი თუ $t = 0,5$ სთ, $t = 2$ სთ, $t = 2,5$ სთ.
4. როგორ იცვლება s -ისა და t -ს მნიშვნელობა მოძრაობის დროს? თქვენი აზრით, ამ სიდიდეებიდან რომელია დამოკიდებული და რომელი დამოუკიდებელი?

s ცვლადის მნიშვნელობა t და v ცვლადების მნიშვნელობასთან პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებასა, s ცვლადის t (ან v) ცვლადთან დამოკიდებულება ფუნქციურ დამოკიდებულებად ითვლება და $s(t)$ -თი აღინიშნება (იკითხება ეს ტე).

$$s(t) = v \cdot t$$

საგარჯიშოები

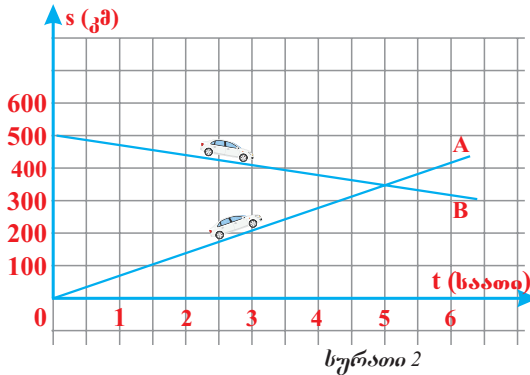
1. სურათი 1-ზე ასახულია ავტომობილისა და ავტობუსის მოძრაობის გრაფიკი. სურათის გამოყენებით გაცით კითხვებზე პასუხი.



- ა) რამდენი კილომეტრი გაიარა პირველი 3 საათის განმავლობაში ავტობუსმა? რა მანძილი გაიარა ავტომობილმა?
- ბ) რა მანძილი გაიარა გაჩერებამდე თითოეულმა სატრანსპორტო საშუალებამ?
- გ) რამდენი საათი მოძრაობდა თითოეული სატრანსპორტო საშუალება გაჩერებამდე?

- დ) რამდენი იყო თითოეული სატრანსპორტო საშუალების სიჩქარე გაჩერებამდე?
 ე) რამდენ ხანს გაჩერდა თითოეული ავტომობილი გაჩერებაზე?
 ვ) რამდენი იყო ავტობუსისა და ავტომობილის სიჩქარე გაჩერების შემდეგ?

2. ქვეითი 3 კმ/სთ თანაბარსიჩქარით წრფივად მოძრაობს. ქვეითის განვლილი s მანძილი გამოსახეთ t -თი. ააგეთ მანძილის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ ქვეითის 0,5 საათში, 1 საათში, 1 საათსა და 30 წუთში განვლილი მანძილი.



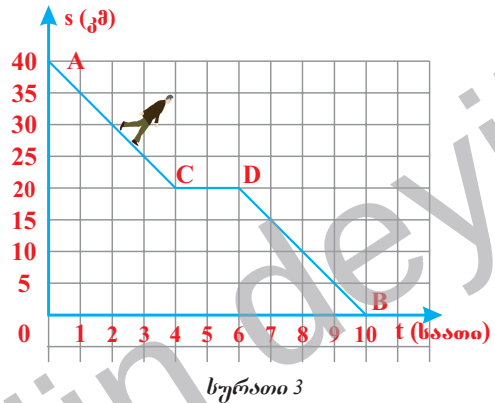
3. A და B ავტომობილებმა ერთ-დროულად დაიწყეს მოძრაობა. მოცემული მოძრაობის გრაფიკის (სურათი 2) მიხედვით განსაზღვრეთ:

- ა) რა დრო გავიდა ავტომობილების მოძრაობის დაწყებიდან მათ შეხვედრამდე?
 ბ) რა მანძილი გაიარა თითოეულმა ავტომობილმა შეხვედრამდე?

- გ) რამდენი კილომეტრი მანძილი იყო ავტომობილებს შორის მოძრაობის დაწყებისას?
 დ) რამდენი იყო თითოეული ავტომობილის სიჩქარე?

4. სურათი 3-ზე მოცემულია ქვეითის A პუნქტიდან და B პუნქტამდე მოძრაობის გრაფიკი. გრაფიკის გამოყენებით განსაზღვრეთ:

- ა) რა მანძილზე მდებარეობს B პუნქტი A პუნქტიდან?
 ბ) რა საშუალო სიჩქარით მოძრაობდა ქვეითი?
 გ) B პუნქტიდან რა მანძილზე შეისვენა ქვეითმა?
 დ) რამდენ ხანს გაგრძელდა შესვენება?
 ე) შეჩერებიდან რამდენი ხნის შემდეგ მიაღწია ქვეითმა B პუნქტს?



დაწერეთ $s(t)$ მანძილის ფორმულა AC, CD და BD მონაკვეთებისათვის.

5.6. ტემპერატურის გაზომვა

საქმიანობა

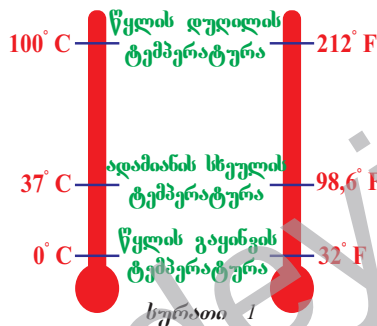
ცელსიუსი (°C), ფარენგეიტი (°F)

1. რომელი ხელსაწყოთი იზომება ტემპერატურა? გამოთქვით მოსაზრება, თუ როგორ გამოიყენება ეს ხელსაწყო.
2. რამდენი გრადუსია წყლის გაყინვისა და დუღილის ტემპერატურა?
3. რამდენი გრადუსია ადამიანის ორგანიზმის ნორმალური ტემპერატურა? ნორმალურ ტემპერატურასთან შედარებით რამდენი გრადუსით მეტია, როცა ადამიანის ტემპერატურის გაზომვისას თერმომეტრი 39°C-ს უჩვენებს?
4. როგორ იზომება ჰაერის ტემპერატურა?



ტემპერატურა, ძირითადად, ცელსიუსით (°C), ზოგჯერ კი ფარენგეიტით (°F) იზომება. ცელსიუსსა და ფარენგეიტს შორის კავშირი ასახულია სურათი 1-ზე. ტემპერატურის ამ ორ საზომ ერთეულს შორის არის კავშირი: ცელსიუსის ფარენგეიტად გადასაქცევად გამოიყენება ფორმულა: $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$, ხოლო ფარენგეიტის ცელსიუსად გადასაქცევად $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$ ფორმულა.

ინგლისისა და აშერის შერთოებულ შტატებში ტემპერატურის გაზომვად გამოიყენება ფარენგეიტის სკალა. ითვლება, რომ $0^\circ C = 32^\circ F$, $100^\circ C = 212^\circ F$. ფარენგეიტის სკალის თითოეულ დანაყოფად აღებულია $1^\circ F = \frac{1}{180}$, ხადაც $180^\circ F = 212^\circ F - 32^\circ F$ (წყლის დუღილისა და გაყინვის ტემპერატურებს შორის სხვაობა). ფარენგეიტის სკალა 1724 წელს გერმანელი ფიზიკოსის, დანიელ გაბრიელ ფარენგეიტის მიერ იქნა შექმნილი.



ნიმუში

მაგალითი 1: $25^\circ C$ გადააქციეთ ფარენგეიტად.

ამოხსნა: ცელსიუსის ფარენგეიტად გადასაქცევად გამოვიყენოთ $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$
 ფორმულა: აიღება $C = 25$, $F = \frac{9}{5} \cdot 25 + 32 = 77$. **პასუხი:** $77^\circ F$.

მაგალითი 2: $68^\circ F$ გადააქციეთ ცელსიუსად.

ამოხსნა: ფარენგეიტის ცელსიუსად გადასაქცევად გამოვიყენოთ $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$
 ფორმულა: აიღება $F = 68$, $C = \frac{5}{9} \cdot (68 - 32) = 20$. **პასუხი:** $20^\circ C$.

საგარჯიშოები

- $0^{\circ} \text{C} = 32^{\circ} \text{F}$; $37^{\circ} \text{C} = 98,6^{\circ} \text{F}$ და $100^{\circ} \text{C} = 212^{\circ} \text{F}$ ტოლობების სისწორე შეამოწმეთ ფორმულების გამოყენებით.
- თერმომეტრის საშუალებით იპოვეთ რამდენი ფარენგეიტია ჰაერის ტემპერატურა საკლასო ოთახში ან სახლში.
- განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული გრადუსების მნიშვნელობა ფარენგეიტებში:
 - 60°C ; ბ) 15°C ; გ) 50°C ; დ) 85°C ; ე) 30°C ; ვ) 55°C ;
 - 63°C ; თ) 5°C ; ი) 53°C ; კ) 47°C ; ლ) 122°C ; მ) 18°C .
- განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული გრადუსების მნიშვნელობა ცელსიუსებში:
 - 41°F ; ბ) 113°F ; გ) 59°F ; დ) 149°F ; ე) 239°F ; ვ) 194°F ;
 - 95°F ; თ) 104°F ; ი) 80°F ; კ) 34°F ; ლ) 87°F ; მ) 100°F .
- ცხრილში მოცემულია აზერბაიჯანის ზოგიერთი ქალაქებისა და რაიონების იანვრის თვის ჰაერის ტემპერატურა. შეავსეთ ცხრილი.

ქალაქებისა და რაიონების სახელები	ბაქო	განჯა	სუმგაითი	მინგეჩაურში	შექი	აღდაში
$^{\circ} \text{C}$	14°		20°		16°	
$^{\circ} \text{F}$		$64,4^{\circ}$		$75,2^{\circ}$		$62,6^{\circ}$

- ნამიკს უყვარს გულადმა ცურვა ღია აუზში, სადაც წყლის ტემპერატურა 20°C -სა და 30°C -ს შორისაა, გაცურავს თუ არა ნამიკი აუზში, თუ წყლის ტემპერატურა 120°F იქნება? სულ მცირე რამდენი და ყველაზე მეტი რამდენი $^{\circ} \text{F}$ უნდა იყოს წყლის ტემპერატურა, რომ ნამიკი აუზში შევიდეს?
- გლობალურ დათბობასთან დაკავშირებული კვლევების საფუძველზე მეცნიერები ვარაუდობენ, რომ მომავალი 60-70 წლის მანძილზე, საშუალო ტემპერატურამ, და 9°F -ით შეიძლება მოიმატოს. ეს იმას ნიშნავს, რომ მაგალითად, იანვრის საშუალო ტემპერატურამ 65°F -ის ნაცვლად, 69°F -დან 74°F -მდე შეიძლება მიაღწიოს. რამდენი გრადუსი ცელსიუსია იანვრის თვისათვის პროგნოზირებადი საშუალო ტემპერატურა?
- პრაქტიკული სამუშაო:** მოსწავლეები იყოფიან 3 ჯგუფად. თითოეული ჯგუფი ჟურნალებიდან ან ინტერნეტ გვერდებიდან საყვარელი სპორტის სახეობების შესახებ სურათებს იღებენ და რვეულებში აწებებენ. შერჩეული სპორტის სახეობის სურათის ჩაწებებისას, ამინდის მდგომარეობის შესაბამის ტემპერატურას გრადუს ცელსიუსები სურათის ქვეშ წერენ. თითოეული ჯგუფი თავის ნამუშევარს მეზობელ ჯგუფს აწვდის და ავალებს ცელსიუსის ფარენგეიტში გადაყვანას. შემდეგ თითოეული ჯგუფი ამოწმებს პასუხის სისწორეს თავისი სურათის შესაბამისად.
- კალკულატორის საშუალებით ცელსიუსის ფარენგეიტად ან ფარენგეიტის ცელსიუსად გადაქცევა შემდეგნაირად ხდება:

1) $60^{\circ} \text{C} = ?$  $9 \div 5 \times 60 + 32 = 140$

2) $140^{\circ} \text{F} = ?$  $140 - 32 = 108 \times 5 \div 9 = 60$

კალკულატორის საშუალებით შეავსეთ ტოლობები:

- ა) $32^{\circ} \text{C} = ?^{\circ} \text{F}$; ბ) $70^{\circ} \text{C} = ?^{\circ} \text{F}$; გ) $99^{\circ} \text{F} = ?^{\circ} \text{C}$; დ) $159^{\circ} \text{F} = ?^{\circ} \text{C}$.

5.7. ორცვლადიანი წრფივი განტოლება და მისი გრაფიკი

საქმიანობა	$ax + by = c$
1. $y = -3x + 2$ ფორმულით მოცემული ტოლობის ორივე მხარეს მიუმატეთ $3x$ ერთწევრი. რა ტოლობა მიიღეთ? რამდენი ცვლადი მონაწილეობს ამ ტოლობაში? 2. რას დაარქმევდით $3x + y = 2$ განტოლებას? რა მნიშვნელობას მიიღებს y ამ განტოლებაში, თუ $x=0$ და რა მნიშვნელობას მიიღებს x, თუ $y=-4$?	
$ax + by = c$ სახით მოცემულ განტოლებას ორცვლადიანი წრფივი განტოლება ეწოდება, სადაც a, b და c მოცემული რიცხვებია, x და y კი-ცვლადები. მაგალითად, $2x - 3y = 5$ განტოლებაში $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$. ცვლადების მნიშვნელობათა წყვილს, რომელიც ორცვლადიან წრფივ განტოლებას სწორ ტოლობად გადააქცევს, ამ განტოლების ფესვი ეწოდება. განტოლებებს, რომელთაც ერთნაირი ფესვთა სიმრავლე აქვთ, ტოლფასი განტოლებები ეწოდებათ. თვისება 1. თუ განტოლებაში ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ ერთი და იგივე რიცხვს, მივიღებთ ტოლფას განტოლებას. თვისება 2. თუ განტოლებაში ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთი და იგივე რიცხვზე, ტოლფას განტოლებას მივიღებთ.	

ნიმუში

მაგალითი 1: $5x - 2y = 8$ განტოლებაში y ცვლადი გამოსახეთ x -ის საშუალებით:

ამოხსნა: ტოლობის ორივე მხარეს გამოვაკლოთ $5x$:

$$5x - 2y - 5x = 8 - 5x$$

$$-2y = 8 - 5x \text{ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ } (-2)\text{-ზე: } y = -4 + 2,5x$$

ეს ტოლობა არის y -ის x -ით გამოსახვა.

თვისება 1-ისა და თვისება 2-ის თანახმად $5x - 2y = 8$ და $y = -4 + 2,5x$ განტოლებები ტოლფასია.

მაგალითი 2: $5x - 2y = 8$ განტოლებაში x ცვლადი გამოსახეთ y -ის საშუალებით.

ამოხსნა: ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატოთ $2y$:

$$5x - 2y + 2y = 8 + 2y$$

$$5x = 8 + 2y \text{ ამ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ } 5\text{-ზე:}$$

$$x = \frac{8+2y}{5} \text{ ან } x = \frac{8}{5} + \frac{2y}{5} \text{ - ეს ტოლობა } x\text{-ის } y\text{-ით გამოსახვა.}$$

თვისება 1-ისა და თვისება 2-ის თანახმად $5x - 2y = 8$ და $x = \frac{8}{5} + \frac{2y}{5}$ განტოლებები ტოლფასია.

მაგალითი 3: რომელი რიცხვების წყვილია $5x - 2y = 8$ განტოლების ფესვი?

ამოხსნა: $5x - 2y = 8$ განტოლებაში თუ $x = 1$ მაშინ, $5 \cdot 1 - 2y = 8$ და $y = -1,5$ ე.ი. $(1; -1,5)$ წყვილი $5x - 2y = 8$ განტოლების ფესვია.

ვინაიდან x -ის თითოეულ მნიშვნელობას y -ის ერთი მნიშვნელობა შეესაბამება, განტოლების სწორ ტოლობად გადაქცევი ნებისმიერი $(x; y)$ წყვილი განტოლების ფესვია.

საქმიანობა

1. თუ $ax + by = c$ განტოლებაში $a = 0$, რა სახეს მიიღებს განტოლება? მიღებულ განტოლებაში დავუშვათ, რომ $b = 3$ და $c = 6$. განსაზღვრეთ y და ააგეთ გრაფიკი.
2. თუ $ax + by = c$ განტოლებაში $b = 0$, რა სახეს მიიღებს განტოლება? მიღებულ განტოლებაში დავუშვათ, რომ $a = -2$ და $c = 4$. განსაზღვრეთ x და ააგეთ გრაფიკი.
3. თუ $ax + by = c$ განტოლებაში $a = 0$ და $b = 0$, რა სახეს მიიღებს განტოლება? როდის იქნება სწორი ტოლობა $0 = c$? მაგალითად, რას გვიჩვენებს ტოლობა $0 = 5$? პასუხი დაასაბუთეთ.
4. $ax + by = c$ განტოლებაში y გამოსახეთ x -ით. რა სახეს მიიღებს წრფივი ფუნქცია, როცა $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$? ააგეთ მისი გრაფიკი.

საკოორდინატო სიბრტყეზე $ax + by = c$ განტოლების ფესვების კოორდინატების წერტილთა სიმრავლისაგან შექმნილ წრფეს ამ განტოლების **გრაფიკი** ეწოდება.

$ax + by = c$ ორცვლადიან განტოლებაში

- ა) თუ a და b კოეფიციენტებიდან თუნდაც ერთი ნულის ტოლია, მისი გრაფიკი წრფეა.
- ბ) თუ $a = b = 0$, $c \neq 0$ განტოლებას ფესვები არ აქვს. ამ შემთხვევაში მისი ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა.
- გ) თუ $a = b = c = 0$ მაშინ, ვინაიდან საკოორდინატო სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები განტოლების ფესვია, მისი ფესვი ყველა წერტილთა სიმრავლეა.

საგარჯიშოები

1. $ax + by = c$ განტოლებაში x და y ცვლადები ჩანაცვლეთ m და n ცვლადებით. რა განტოლებას მიიღებთ? ამ შემთხვევაში მიღებული განტოლება ორცვლადიანი წრფივი განტოლებაა? აქვს რაიმე აზრი ცვლადების სხვა ასოებით ჩანაცვლებას?
2. ა) ორცვლადიანი წრფივი განტოლებებია თუ არა მოცემული განტოლებები?

$3x - y = 11$	$xy + x = -8$	$m - n = 9$	$2 = 3x + 10y$
$x^2 - 7y = 5$	$a + 8b = 0$	$s + 3t = -92$	$8x^2 - 4y = 5$
$12x + 6y = 19$	$a^3 - 5y = 10$	$0,6x - 2,4y = -3$	$9a - 18 = 7$

განმარტეთ მიზეზი, თუ განტოლებებიდან ზოგიერთი რატომ არ არის ორცვლადიანი წრფივი განტოლება.

ბ) ცხრილში შერჩეულ ორცვლადიან წრფივ განტოლებებში აჩვენეთ a , b და c კოეფიციენტები.

3. ცხრილში მოცემულია x და y ცვლადების მნიშვნელობები.

► V განყოფილება

x	-5	-4	-3	-1	0	4	5
y	0	3	4	-3	-5	-3	0

- მათგან რომელი წყვილია ა) $2x + y = -5$; ბ) $x + 3y = -5$ განტოლების ფესვი?
4. $(3; -10)$; $(-3; 12)$; $(0, 1; 11)$; $(1; 2)$; $(2; 1)$ წყვილებიდან რომელია $10x + y = 12$ განტოლების ფესვი?
5. შეადგინეთ რაიმე ორცვლადიანი წრფივი განტოლება, რომლის ფესვიცაა:
- ა) $x = 3$; $y = 1,5$; ბ) $x = 0,7$; $y = -5$
6. ჯგერძა $4x - 5y = 20$ განტოლებაში x ცვლადის y -ით გამოსახვით $x = \frac{20 + 5y}{4}$ გამოსახულება, სამიზმა კი $-x = 1,25y + 5$ გამოსახულება მიიღო. რომელი იყო მართალი მათ შორის? დაასაბუთეთ პასუხი.
7. $3u + v = 4$ განტოლებაში გამოსახეთ ა) u ცვლადი v -თი ბ) v ცვლადი u -თი. ორივე შემთხვევისათვის განსაზღვრეთ v -ს მნიშვნელობა, თუ $u = 2$.
8. მოცემულ განტოლებებში y ცვლადი გამოსახეთ x -ით. იპოვეთ თითოეული განტოლების რომელიმე ფესვი.
- ა) $4x + 2y = 7$; ბ) $-5x + y = -12$; გ) $x + 15y = -30$; დ) $3y - 14x = 21$.
9. განსაზღვრეთ $x + 2y = 18$ განტოლების ორი ტოლი რიცხვისაგან შემდგარი ფესვი.
10. განსაზღვრეთ $ax + 2y = 8$ განტოლების a კოეფიციენტი, თუ ამ განტოლების ფესვებიდან ერთ-ერთი $(2; 1)$ წყვილია, ამავე განტოლებაში გამოთვალეთ y -ის მნიშვნელობა, როცა $x = 5$.
11. ეკუთვნის თუ არა $3x + 4y = 12$ განტოლების გრაფიკს ქვემოთ მოცემული წერტილები?
- ა) $A(1; 3)$; ბ) $B(0,4; 0)$; გ) $C(0; 3)$; დ) $D(3; 1)$; ე) $E(-6; 7,5)$.
12. შეიძლება თუ არა ერთი წერტილის კოორდინატები რამდენიმე განტოლების ფესვი იყოს? ამ შემთხვევაში როგორ არიან განლაგებული ამ განტოლებების გრაფიკები?
- ა) $3x - y = -5$; $-x + 10y = 21$; $11x + 21y = 31$ განტოლებებიდან სამივეს გრაფიკი გაივლის თუ არა $A(-1; 2)$ წერტილზე? რატომ?
- ბ) არსებობს წერტილი, რომელიც $0,2x + 3y = 15,2$; $-x + 4y = 19$; $5x - 3y = -10$ განტოლებებიდან სამივეს გრაფიკს ეკუთვნის? თუ არსებობს, იპოვეთ, ეს წერტილი.
13. ააგეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების გრაფიკები:
- ა) $2x - y = 6$; ბ) $x + 6y = 0$; გ) $1,6x = -6,4$;
 დ) $1,5x + 2y = 3$; ე) $0,5x - y = 1$; ვ) $5,4y = 10,8$.
14. ააგეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების გრაფიკები:
- ა) $x - y - 2 = 0$; ბ) $2(x - y) + 3y = 4$;
 გ) $2x = y + 4$; დ) $(x + y) - (x - y) = 4$.
15. ა) იპოვეთ y , თუ ცნობილია, რომ $24x - 15y = 42$ განტოლების გრაფიკი $A(3; 2a)$ წერტილზე გადის.

5.8. ორცვლიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა და მისი ამოხსნა გრაფიკული ხერხით

საქმიანობა

გრაფიკული ხერხი

1. დაწერეთ რამდენიმე რიცხვთა წყვილი, რომლებიც $x + y = 3$ განტოლების ფესვებია. არის თუ არა ამ განტოლების ფესვები $(0; 3); (3; 0); (1; 2); (2; 1)$ წყვილები?
2. დაწერეთ რამდენიმე რიცხვთა წყვილი, რომლებიც $x - y = 1$ განტოლების ფესვებია. $(0; 3); (3; 0); (1; 2); (2; 1)$ წყვილებიდან რომელია ასევე $x - y = 1$ განტოლების ფესვიც? გამოთქვით მოსაზრებები.
3. ააგეთ $x + y = 3$ და $x - y = 1$ განტოლებების გრაფიკები. განსაზღვრეთ მათი გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები. რომელი რიცხვების წყვილია ამ წერტილის კოორდინატები? გამოთქვით მოსაზრებები ამ რიცხვების წყვილის შესახებ.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ სახით მოცემულ განტოლებებს } \textbf{ორცვლიანი წრფივ განტო-}$$

ლებათა სისტემა ეწოდება, სადაც $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ რიცხვები კოეფიციენტებია, x და y კი-ცვლადები.

$(x; y)$ წყვილის რიცხვით მნიშვნელობას, რომელიც სისტემის ორივე განტოლებას სწორ რიცხვით ტოლობად გადააქცევს, ამ **სისტემის ფესვი** ეწოდება.

სისტემის ამოხსნა ნიშნავს მისი ფესვის პოვნას ან იმის დამტკიცებას, რომ ფესვი არ აქვს.

რადგანაც სიბრტყეზე ორი წრფის სამი სახის ურთიერთმდებარეობაა შესაძლებელი, ამიტომაც განტოლებათა სისტემის განტოლებების გრაფიკებისთვისაც შესაძლებელია სამი ურთიერთმდებარეობა: წრფეები ან იკვეთებიან, ან პარალელურებია, ან კიდევ ერთმანეთს ემთხვევა.

კოეფიციენტების თანაფარდობა	განმარტება	ფესვების რაოდენობა	გრაფიკების ურთიერთგანლაგება
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	სისტემის განტოლებების გრაფიკები ერთ წერტილში იკვეთება.	განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ფესვი.	
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	სისტემის განტოლებების გრაფიკები პარალელურია.	განტოლებათა სისტემას ფესვები არ აქვს.	
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	სისტემის განტოლებების გრაფიკები ერთმანეთს ემთხვევა.	განტოლებათა სისტემას აქვს უსასრულო რაოდენობის ფესვი.	

ნიმუში

მაგალითი 1: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემა ამოხსენით გრაფიკული ხერხით.

ამოხსნა: სისტემის ორივე განტოლებაში y გამოვსახოთ x -ით.

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 5 - x \end{cases} \quad \text{ავაგოთ მიღებული განტოლებების გრაფიკები.}$$

1) $y = 2x - 4$

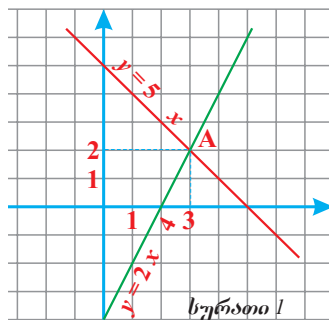
x	y
0	-4
2	0

2) $y = 5 - x$

x	y
0	5
5	0

როგორც სურათი 1-ზე ჩანს, $y = 2x - 4$ და $y = 5 - x$ განტოლებების გრაფიკები A (3; 2) წერტილში იკვეთებიან. ე.ი. განტოლებათა სისტემის ფესვია (3; 2).

პასუხი: (3; 2).

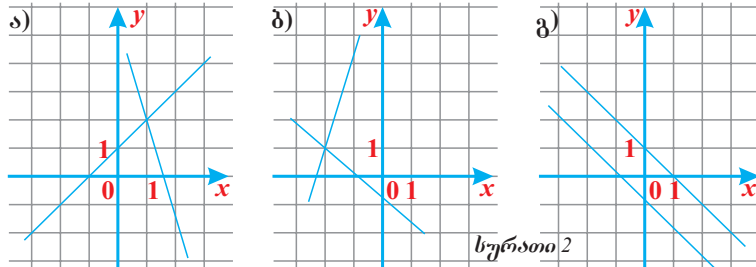


ნიმუშში მოცემული ორცვლიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა **გრაფიკული ხერხით** არის ამოხსნილი. განტოლებათა სისტემის გრაფიკული ხერხით ამოხსნა ყოველთვის არ არის ხელსაყრელი, რადგანაც გრაფიკის მიხედვით გადაკვეთის წერტილის კოორდინატების ზუსტი განსაზღვრა ზოგჯერ რთულია.

საგარჯიშოები

1. A(1; 3) წერტილი გადააქცევს თუ არა სწორ ტოლობად $\begin{cases} 3x - 4y = -9 \\ 2y + 5x = 17 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის ორივე განტოლებას? რა იქნება წერტილის კოორდინატები, რომელიც ამ განტოლებებიდან ორივეს ეკუთვნის? პასუხი დაასაბუთეთ.
2. $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია: ა) $x = 3; y = 1$; ბ) $x = 2; y = 2$ რიცხვების წყვილი? ახსენით როგორ შეამოწმეთ ეს.
3. როგორ უნდა შეამოწმოს ხედიჯემ $(-3; 4)$, $(-2; -6)$, $(-4; 3)$ რიცხვების წყვილიდან რომელია:
 - ა) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 3x + 4y = 0; \end{cases}$
 - ბ) $\begin{cases} 13x - y = 0, \\ 5x - y = -4 \end{cases}$
 განტოლებათა სისტემის ფესვი?
4. $u = 3, v = -1$ რიცხვების წყვილი არის თუ არა:
 - ა) $\begin{cases} 3u - v = 8, \\ 7u - 2v = 23; \end{cases}$
 - ბ) $\begin{cases} v + 2u = 5, \\ u + 2v = 1 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის ამონახსენი?

5. შეადგინე ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომლის ამონახსენიც: ა) $x = 5$, $y = -1$; ბ) $m = 0$, $n = 10$ რიცხვთა წყვილია.
6. განსაზღვრეთ განტოლებათა სისტემის ფესვი, რომელთა გრაფიკებიც მოცემულია სურათი 2-ზე.



7. შერჩევის გზით განსაზღვრეთ $y = 2x - 3$ და $x + y = 3$ განტოლებების დამაკმაყოფილებელი რიცხვთა წყვილი. პასუხის სისწორე შეამოწმეთ x და y ცვლადების ადგილას რიცხვების ჩაწერით. ააგეთ ამ განტოლებების გრაფიკები და განსაზღვრეთ მათი გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები. დაემთხვა თუ არა მიღებული რიცხვების წყვილი თქვენს მიერ შერჩეულ რიცხვებს?
8. მოცემული განტოლებათა სისტემა ამოხსენით გრაფიკული ხერხით:

ა) $\begin{cases} y = 4x, \\ y - x = 3; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = -3x, \\ y - x = -4; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = 2x, \\ x - y = -3; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} y = 3x, \\ 4x - y = 3. \end{cases}$

9. აღნიშნეთ სისტემაში შემავალი თითოეული განტოლების გრაფიკის OX და OY ღერძთან გადაკვეთის წერტილები და შეაერთეთ. გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ მიღებული წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

ა) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} x + 3y = 6, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

10. განტოლებათა სისტემის გრაფიკის აუგებლად ჯერ განსაზღვრეთ, რამდენი ფესვი აქვს მას. გრაფიკის აგებით შეამოწმეთ პასუხის სისწორე.

ა) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 3y = 9; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x + y = 0, \\ -3x + 4y = 14; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ -2x + 5y = 10; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 3x + 10y = -12. \end{cases}$

11. აგების გარეშე დაადგინეთ რამდენი ფესვი აქვს განტოლებათა სისტემას:

ა) $\begin{cases} 4y - x = 12, \\ 3y + x = -3; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 1,5x = 1, \\ -3x + 2y = -2; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 2x = 11 - 2y, \\ 6x = 22 - 4y; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ 3y - x = 6; \end{cases}$ ე) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ y = -0,5x; \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} -x + 2y = 8, \\ x + 4y = 10. \end{cases}$

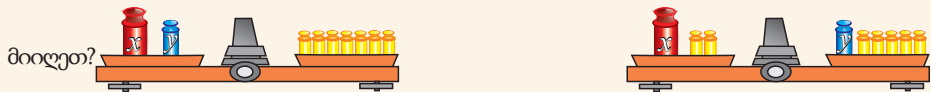
▶ V განყოფილება

12. შეადგინეთ ისეთი ორცვლადიანი წრფივი განტოლება, რომ მისი ფესვებიდან ერთ-ერთი $4x + y = 7$ განტოლების გრაფიკის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები იყოს.
13. შეადგინეთ ისეთი ორცვლადიანი წრფივი განტოლება, რომ მისი ფესვებიდან ერთ-ერთი $5x - 7y = 14$ განტოლების გრაფიკის OY ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები იყოს.
14. შეადგინეთ ისეთი ორცვლადიანი წრფივი განტოლება, რომ ამავე განტოლების $-x - y = 4$ განტოლებასთან ერთად შედგენილ სისტემას:
- ა) ერთადერთი ფესვი ჰქონდეს; ბ) უსასრულო რაოდენობის ფესვი ჰქონდეს; გ) ფესვი არ ჰქონდეს.
15. შეადგინეთ ისეთი ორცვლადიანი წრფივი განტოლებები, რომ მათი გრაფიკები:
- ა) პარალელურები იყოს; ბ) იკვეთებოდნენ; გ) ერთმანეთს ემთხვეოდნენ.
16. a -ს რა მნიშვნელობებისათვის არ აქვს ფესვი განტოლებათა სისტემას?
- ა) $\begin{cases} ax - y = 2, \\ 3x - 2y = -5; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 7x + 8y = 12, \\ 6x - ay = 2; \end{cases}$
- ბ) $\begin{cases} 5x + ay = -6, \\ 9x - 18y = 20; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} 9y - 3x = 0, \\ ax - 8y = -10. \end{cases}$
17. k -ს რა მნიშვნელობებისათვის აქვს უსასრულო რაოდენობის ფესვი განტოლებათა სისტემას?
- ა) $\begin{cases} 5x + 3y = 2, \\ 10x - ky = 4; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{7}y = 3, \\ kx + \frac{1}{28}y = \frac{3}{4}; \end{cases}$
- ბ) $\begin{cases} 12x + ky = 15, \\ 4x + 8y = 5; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} 9y + kx = 2, \\ 0,5x + 7,2y = 1,6. \end{cases}$
18. b -ს რა მნიშვნელობებისათვის აქვს ერთადერთი ფესვი განტოლებათა სისტემას?
- ა) $\begin{cases} bx + 8y = 12, \\ 18x - 3y = -1; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} \frac{7}{15}x + \frac{4}{5}y = 12, \\ bx + \frac{3}{8}y = 1,2; \end{cases}$
- ბ) $\begin{cases} 5x + ay = -6, \\ 9x - 18y = 20; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} 24y + 8x = -3, \\ 3x + 2by = 6. \end{cases}$
19. a -ს და b -ს რა მნიშვნელობებისათვის $ax + y = b$ და $3x - 7y = 4$ წრფეები:
- ა) პარალელურია, ბ) ემთხვევა ერთმანეთს, გ) იკვეთებიან?
20. m -ის რა მნიშვნელობებისათვის $\begin{cases} 7x + my = 5, \\ 28mx + y = 10 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემას:
- ა) ფესვი არ აქვს, ბ) უსასრულო რაოდენობის ფესვი აქვს, გ) ერთადერთი ფესვი აქვს?

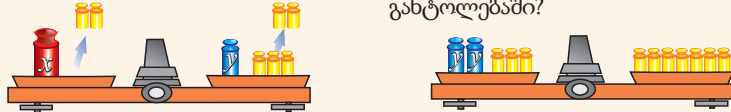
5.9. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჩასმის ხერხით

საქმიანობა

1. $\text{წითელი} = x$, $\text{ლურჯი} = y$, $\text{ყვითელი} = 1$ ჩათვალეთ მასის ერთეულად და სურათზე მოცემული სასწორის წონასწორობის საფუძველზე დაწერეთ ორცვლადიანი განტოლებები. რა განტოლებები



2. მეორე სასწორის ორივე მხარეს მოაცი-
ლეთ ყვითელი გირი. რა განტოლება მიიღეთ ამ
შემთხვევაში?
3. პირველ სასწორზე წითელი გირი ჩაანაცვლეთ
 ლურჯი და ყვითელი -ით. რა განტოლება მიიღეთ?
რამდენი ცვლადი მონაწილეობს ამ
განტოლებაში?



4. ბოლო სასწორის ორივე მხრიდან მოაშორეთ ყვითელი გირი. დაწერეთ მიღებული განტო-
ლება. განსაზღვრეთ y ცვლადის მნიშვნელობა.
5. y ცვლადის მიღებული მნიშვნელობა ჩაწერეთ პირველ ან მეორე განტოლებაში
 x -ის ადგილას და მიღებული განტოლებიდან განსაზღვრეთ x . პასუხი ჩაწერე ($x; y$)
წყვილის სახით.
6. ახსენით, როგორ მიიღეთ პასუხი. რა შეიძლება დავარქვათ ამ ხერხს?

ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას, ხშირ შემთხვევაში, გამოიყენება ჩასმის ხერხი. ჩასმის ხერხი ქვემოთ მოცემული თანმიმდევრობით სრულდება:

- განტოლებებიდან ერთ-ერთში ერთი ცვლადი გამოისახება მეორეთი.
- მიღებული გამოსახულება მეორე განტოლებაში ჩასანაცვლებელი ცვლადის ადგილას ისმება.
- მიღებული ერთცვლადიანი წრფივი განტოლების ამოხსნით ვპოულობთ ცვლადის მნიშვნელობას.
- ნაპოვნი ცვლადის მნიშვნელობას ვწერთ პირველ განტოლებაში (ერთი ცვლადის მეორით გამოსახულ განტოლებაში) და ვპოულობთ მეორე ცვლადის მნიშვნელობას.
- პასუხი იწერება წყვილის სახით.

ნამუში

მაგალითი 1: $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემა ამოხსენით ჩასმის ხერხით.

ამოხსნა: პირველ განტოლებაში y გამოვსახოთ x -ით: $y = 6 - 3x$. ეს გამოსახულება მეორე განტოლებაში y -ის ადგილას ჩავწერთ: $2x + 3(6 - 3x) = 11$.

განტოლების ამოხსნით ვიპოვოთ x : $2x + 18 - 9x = 11$, ანუ $x = 1$.

x ცვლადის მიღებული მნიშვნელობა შევცვანით $y = 6 - 3x$ გამოსახულებაში და ვიპოვოთ y : $y = 6 - 3 \cdot 1 = 3$. მაშასადამე, $x = 1$ და $y = 3$. პასუხი: $(1; 3)$.

შემოწმება: $(1; 3)$ წყვილის ორივე განტოლებაში ადგილებზე ჩაწერით შემოწმება შეიძ-
ლება: $3 \cdot 1 + 3 = 6$ და $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$.

მაგალითი 2: $\begin{cases} 3x + 4y = 3, \\ 2x - 3y = 19 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემა ამოხსენით ჩასმის ხერხით.

ამოხსნა: პირველ განტოლებაში x ცვლადი გამოვსახოთ y -ით. მიღებულ განტოლებათა სისტემებს შორის იწერება იმპლიკაციის $\Leftrightarrow$ ნიშანი (ნიშნავს, რომ მიღებული ყველა განტოლებათა სისტემა თავის წინა სისტემის ტოლფასია).

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 4y = 3, \\ 2x - 3y = 19 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 - 4y, \\ 2x - 3y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - 4y}{3}, \\ 2 \cdot \frac{3 - 4y}{3} - 3y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - 4y}{3}, \\ 6 - 8y - 9y = 57 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - 4 \cdot (-3)}{3}, \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

პასუხი: $(5; -3)$.

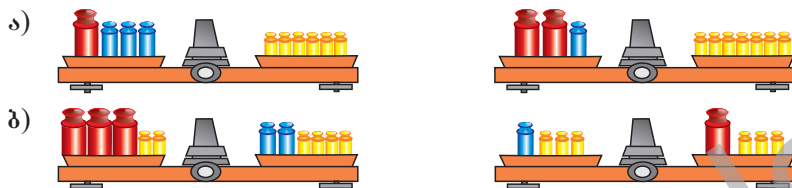
საგარჯიშოები

1. მოცემულ ორცვლადიან წრფივ განტოლებებში: 1) x ცვლადი გამოსახეთ y -ით; 2) y ცვლადი გამოსახეთ x -ით.

ა) $5x - y = 12$; ბ) $x + 7y = -9$; გ) $8x - 15y = 10$; დ) $5y - 3x = 3$.

თითოეული განტოლებისათვის განმარტეთ, რომელი ცვლადის ჩანაცვლებაა უფრო ხელსაყრელი. პასუხი დაასაბუთეთ.

2. სურათის საფუძველზე დაწერეთ ორცვლადიანი წრფივი განტოლებები. ჩაწერეთ ისინი სისტემის სახით და ამოხსენით გრაფიკული და ჩასმის ხერხით. იმისათვის, რომ დარწმუნდეთ შედეგის სისწორეში, პასუხი შეამოწმეთ.



განტოლებათა სისტემები ამოხსენით ჩასმის ხერხით: (№ 3-№ 8):

3. ა) $\begin{cases} x = 2 + y, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 5x + y = 4, \\ x = 3 + 2y; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = 11 - 2x, \\ 5x - 4y = 8; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x - 2y = 11, \\ y = 2x - 5; \end{cases}$ ე) $\begin{cases} y = 2 - 4x, \\ 8x = 5 - 3y; \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} 2x - 5y = 8, \\ x = -y. \end{cases}$

4. ა) $\begin{cases} a + 5b = 7, \\ 3a - 2b = 4; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} u - 3v = 17, \\ u - 2v = -13; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} p + 12q = 11, \\ 5p - 3q = 3; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y - 2x = 4, \\ 7x - y = 1; \end{cases}$ ე) $\begin{cases} 2m = n + 0,5, \\ 3m - 5n = 12; \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} 25 - x = -4y, \\ 3x - 2y = 30. \end{cases}$

$$5. \text{ ა) } \begin{cases} 3(x-y)+5x=2(3x-2), \\ 4x-2(x+y)=4-3y; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} 10+5(x-5y)=6(x-4y), \\ 2x+3(y+5)=-5-2(y-2x); \end{cases}$$

$$\text{ბ) } \begin{cases} 2-5(0,2y-2x)=3(3x+2)+2y, \\ 4(x-2y)-(2x+y)=2-2(2x+y); \end{cases}$$

$$6. \text{ ა) } \begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5, \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=0,5; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{8}{3}; \end{cases}$$

$$\text{ბ) } \begin{cases} \frac{5x}{2}+\frac{y}{5}=-4, \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{6}; \end{cases} \quad \text{დ) } \begin{cases} \frac{2x}{3}-\frac{5y}{4}=-3, \\ \frac{5x}{6}+\frac{7y}{8}=6; \end{cases}$$

$$\text{ე) } \begin{cases} \frac{2m}{5}+\frac{n}{3}=1, \\ \frac{m}{10}-\frac{7n}{6}=4; \end{cases} \quad \text{ვ) } \begin{cases} \frac{6x}{5}+\frac{y}{15}=2,3, \\ \frac{x}{10}-\frac{2y}{3}=1,2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{v}{4}-\frac{u}{5}=6, \\ \frac{u}{15}+\frac{v}{12}=0. \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას თავდაპირველად განტოლებებიდან უნდა მოვაშოროთ წილადები.

ამისათვის პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ 20-ზე, მეორე განტოლების ორივე მხარე კი 60-ზე (რატომ?):

$$\begin{cases} 5v-4u=120, \\ 4u+5v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5v-4u=120, \\ u=-\frac{5v}{4}. \end{cases}$$

შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გრძელდება ჩასმის ხერხის გამოყენებით.

პასუხი: $(-15; 12)$.

$$7. \text{ ა) } \begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8, \\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11; \end{cases}$$

$$\text{ბ) } \begin{cases} \frac{7m-2n}{2}+2m=6, \\ \frac{5n-8m}{3}-n=-2; \end{cases}$$

$$\text{ბ) } \begin{cases} \frac{x+y}{9}-\frac{x-y}{3}=2, \\ \frac{2x-y}{6}-\frac{3x+2y}{3}=-20; \end{cases}$$

$$\text{დ) } \begin{cases} \frac{1}{2}(2a-b)-1=b-2, \\ \frac{1}{4}(3a-7)=\frac{1}{5}(2b-3)+1. \end{cases}$$

$$8. \text{ ა) } \begin{cases} 2x+y-8=0, \\ 3x+4y-7=0; \end{cases}$$

$$\text{ბ) } \begin{cases} \frac{7y-x}{3}=-2, \\ \frac{x+14y}{3}=4,5; \end{cases}$$

$$\text{ბ) } \begin{cases} 3x-4y-2=0, \\ 5y-x-6=0; \end{cases}$$

$$\text{დ) } \begin{cases} \frac{7x-y}{2}=-3, \\ \frac{-8x+5y}{2}=3,5; \end{cases}$$

$$\text{ე) } \begin{cases} \frac{y-3x}{2}=1-\frac{7x+3y}{5}, \\ \frac{x+5y}{3}=1+\frac{x+3y}{4}; \end{cases}$$

$$\text{ვ) } \begin{cases} \frac{2a-5b}{4}-1=\frac{2a+2b}{3}, \\ \frac{7}{a-3b}+2=\frac{7a-8b}{5}. \end{cases}$$

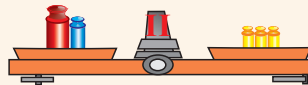
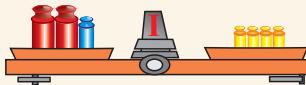
$$9. \begin{cases} (2-m)x+4my-6=0, \\ 3mx+(4m-1)y+2=0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსენთა წყვილი მდებარეობს აბსცისათა ღერძზე. განსაზღვრეთ m და განტოლებათა სისტემის ფესვი.

5.10. ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შეკრების ხერხით

საქმიანობა

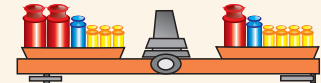
1. $\text{წითელი} = x$, $\text{ლურჯი} = y$, $\text{ყვითელი} = 1$ ჩათვალეთ და სურათზე მოცემული სასწორების წონასწორობის მდგომარეობის საფუძველზე დაწერეთ ორცვლადიანი წრფივი განტოლებები. რა განტოლებები მიიღეთ?



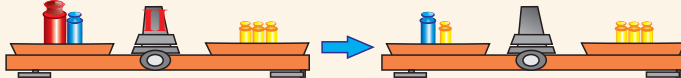
2. მეორე სასწორის მარჯვენა და მარცხენა მხარეებს ადგილები შეუცვალეთ: რა განტოლება მიიღეთ ამ შემთხვევაში?



3. შეკრბეთ I და III სასწორების ერთ მხარეს მდებარე გირები: სასწორის თითოეული მხრიდან მოაშორეთ ტოლი გირები. რას უდრის x -ის მნიშვნელობა?



4. x -ის შესაბამისი გირები დადეთ მეორე სასწორზე წითელი გირის ადგილას. რა რიცხვი შეესაბამება y ცვლადს? დაწერეთ $(x; y)$ პასუხი.



ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას შეკრების ხერხიც გამოიყენება. შეკრების ხერხი სრულდება შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. თუ სისტემის განტოლებებში რომელიმე ცვლადის კოეფიციენტები მოპირდაპირე რიცხვებია, მაშინ განტოლებები წევრ-წევრად იკრიბება.
2. თუ განტოლების კოეფიციენტებს შორის მოპირდაპირე რიცხვები არ არის, მაშინ განტოლებები მრავლდება ნულისაგან განსხვავებულ ისეთ რიცხვებზე, რომ ცვლადებიდან ერთ-ერთის კოეფიციენტები მოპირდაპირე რიცხვები გახდეს. მიღებული ახალი სისტემის განტოლებები წევრ-წევრად იკრიბება.
3. მიღებული ერთცვლადიანი წრფივი განტოლების ამოხსნით ვპოულობთ ცვლადის მნიშვნელობას.
4. ნაპოვნი ცვლადის მნიშვნელობას ჩავსვამთ მოცემული განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთ განტოლებაში და ვპოულობთ მეორე ცვლადის მნიშვნელობას.
5. პასუხი იწერება წყვილის სახით.

ნიმუში

მაგალითი 1: $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 2x - y = 11 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემა ამოხსენით შეკრების ხერხით:

ამოხსნა: პირველ განტოლებაში y -ის კოეფიციენტი არის 2, მეორეში კი -1. ე.ი. თუ მეორე განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ 2-ზე, მიღებულ განტოლებაში y -ის კოეფიციენტი იქნება -2.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 2x - y = 11 \end{cases} \quad (\text{ორივე მხარე გავამრავლოთ 2-ზე}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 4x - 2y = 22 \end{cases} \quad (\text{წევრ-წევრად შევკრიბოთ}) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 28, \\ 4x - 2y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ 4 \cdot 4 - 2y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -3 \end{cases}$$

პასუხი: $(4; -3)$.

ნიმუში

მაგალითი 2: $\begin{cases} 4a + 3b = 17, \\ 5a - 2b = 4 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემა ამოხსენით შეკრების ხერხით.

ამოხსნა: პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ 2-ზე, ხოლო მეორე განტოლების ორივე მხარე 3-ზე (ან პირველი განტოლების 5-ზე, მეორე განტოლების -4-ზე გამრავლება შეიძლება).

$$\begin{cases} 4a + 3b = 17, & (\text{ორივე მხარე გავამრავლოთ } 2\text{-ზე}) \\ 5a - 2b = 4 & (\text{ორივე მხარე გავამრავლოთ } 3\text{-ზე}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 6b = 34, \\ 15a - 6b = 12 \end{cases} \quad (\text{წევრ-წევრად შევკრიბოთ}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23a = 46, \\ 5a - 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ 5 \cdot 2 - 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 3 \end{cases}$$

პასუხი: (2; 3).

საგარჯიშოები

1. მოცემული ორცვლადიანი წრფივი განტოლების ორივე მხარის: 1) 3-ზე; 2) -5-ზე; 3) $\frac{1}{2}$ -ზე; 4) 0,7-ზე გამრავლებით დაწერეთ მისი ტოლფასი განტოლება.

ა) $3x - 4y = 18$; ბ) $8x + 0,4y = -1$; გ) $-11x - 1,9y = 0$; დ) $5y + \frac{7}{15}x = -7$.

განმარტეთ, რატომ არიან ეს განტოლებები ტოლფასი.

2. მოცემული ორცვლადიანი წრფივი განტოლებათა სისტემა ამოხსენით გრაფიკული და შეკრების ხერხით. შედეგში ერთი და იგივე რიცხვთა წყვილი მიიღეთ? რატომ?

ა) $\begin{cases} x + y = 11, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 5x - 2y = 1, \\ 3x + 2y = 7; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x - y = 6; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} 2x + 4y = 8, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

3. განტოლებათა სისტემა ამოხსენით შეკრების ხერხით:

ა) $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 2x - y = 9; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 5x - 2y = 6, \\ 7x + 2y = 6; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 4x + 7y = 40, \\ -4x + 9y = 24; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x + 3y = 17, \\ 2y - x = 13; \end{cases}$ ე) $\begin{cases} 4x + 3y = -15, \\ 5x + 3y = -3; \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ 4x - 5y = 7; \end{cases}$

ზ) $\begin{cases} x + 5y = 3, \\ x + 4y = 2; \end{cases}$ თ) $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ y - 3x = 9; \end{cases}$ ი) $\begin{cases} 4x + 3y = -4, \\ 6x + 5y = -7; \end{cases}$

კ) $\begin{cases} 4x - 5y = -22, \\ 3x + 2y = 18; \end{cases}$ ლ) $\begin{cases} 7x = 9y, \\ 5x + 3y = 66; \end{cases}$ მ) $\begin{cases} 5x + 6y = 0, \\ 3x + 4y = 4. \end{cases}$

4. სისტემის თითოეული განტოლება წარმოადგინეთ $ax + by = c$ სახით და ამოხსენით შეკრების ხერხით:

ა) $\begin{cases} x + 5y - 7 = 0, \\ x - 3y = -1; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x - 3y - 4 = 0, \\ 5x + 3y + 1 = 0; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 36x + 33y + 3 = 0, \\ 12x - 13y + 25 = 0. \end{cases}$

V განყოფილება

5. $y = kx + b$ სახით მოცემული განტოლების გრაფიკი გადის ქვემოთ მოცემულ წერტილებზე:

ა) $A(5; 5)$ და $B(-2; -2)$;

ბ) $M(8; -1)$ და $B(-4; 17)$;

გ) $K(4; 1)$ და $B(3; -5)$;

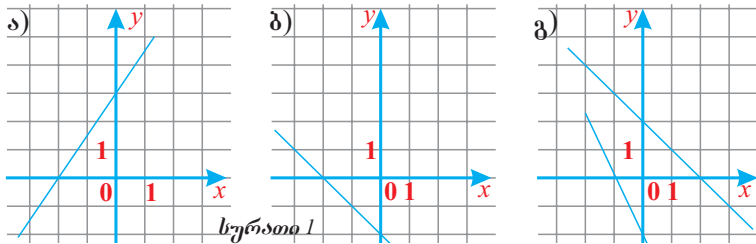
დ) $C(-19; 31)$ და $B(1; -9)$.

დაწერეთ ამ წრფეების განტოლებები.

6. $y = kx + b$ განტოლების გრაფიკი კოორდინატა ღერძებს $(-2; 0)$ და $(0; 6)$ წერტილებში კვეთს. მოსწავლე ამბობს, რომ ამ წრფის განტოლება $y = 3x - 6$ სახისაა. თქვენი აზრით, მართალია ის?

7. წრფივი ფუნქციის გრაფიკი OX ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის აბსცისაც არის 6, ხოლო OY ღერძს წერტილში, რომლის ორდინატიც -2 -ია. დაწერეთ ამ წრფის განტოლება.

8. სურათი 1-ზე მოცემული გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ რომელიმე წრფის განტოლება.



9. გაამარტივეთ განტოლებათა სისტემა და ამოხსენით შეკრების ხერხით:

ა)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 8; \end{cases}$$

ბ)
$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 2, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 2; \end{cases}$$

გ)
$$\begin{cases} 2x + \frac{x-y}{4} = 11, \\ 3y - \frac{x+y}{3} = 1; \end{cases}$$

დ)
$$\begin{cases} 5x - \frac{x-y}{5} = 11, \\ 2y - \frac{x+y}{3} = 11; \end{cases}$$

ე)
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}y = 4, \\ 6x + 5y = 150; \end{cases}$$

ვ)
$$\begin{cases} \frac{1}{3}v - \frac{1}{8}u = 3, \\ 7u + 9v = -2; \end{cases}$$

ზ)
$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, \\ 2x + 3y = -12; \end{cases}$$

თ)
$$\begin{cases} 4a - 5b - 10 = 0, \\ \frac{a}{5} - \frac{b}{3} + \frac{1}{3} = 0; \end{cases}$$

ი)
$$\begin{cases} \frac{5x}{6} - y = -\frac{5}{6}, \\ \frac{2x}{3} + 3y = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

10. გაამარტივეთ გამოსახულებები ორწევრების ნამრავლის პოვნით და იპოვეთ სისტემის ფესვი შეკრების ხერხით:

ა)
$$\begin{cases} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8), \\ (2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1); \end{cases}$$

ბ)
$$\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1), \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4); \end{cases}$$

გ)
$$\begin{cases} (x+4)(6-y) = (x+2)(9-y), \\ (2x-1)(12-5y) = 2(5x-1)(2-y). \end{cases}$$

5.11. ამოცანების ამოხსნა ორცვლადიანი წრფივი განტოლებების სისტემის შედგენით

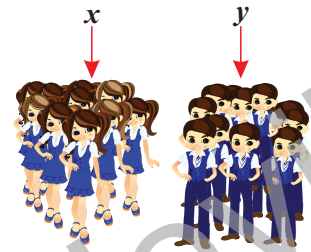
თქვენ უკვე იცით ცხოვრებისეული საკითხების მათემატიკური გამოსახულებებისა და განტოლებების შედგენით ამოხსნის შესაძლებლობის შესახებ. ცხოვრებისეულ საკითხებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელია ასევე ორცვლადიანი წრფივი განტოლებების შედგენითაც. ამოცანის შინაარსის შესაბამისი განტოლებათა სისტემის ასაგებად საჭიროა ქვემოთ მოცემული თანმიმდევრობის დაცვა:

1. უნდა განვსაზღვროთ ამოცანაში არსებული უცნობები და ავღნიშნოთ ისინი ასოებით. ავაგოთ პირობის შესაბამისი განტოლებები.
2. მიღებული განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ რომელიმე ხერხით.
3. შევამოწმოთ აკმაყოფილებს თუ არა ამოცანის მოთხოვნას მიღებული შედეგი.

ნიმუში

ამოცანა 1: ორშაბათს მე-7 კლასელი გოგონებიდან 1, ბიჭებიდან კი-5 არ მოვიდა მეცადინეობაზე და მეცადინეობაზე მყოფი გოგონების რაოდენობა ორჯერ მეტი იყო ბიჭების რაოდენობაზე. ოთხშაბათს 1 ბიჭი და 9 გოგონა არ ესწრებოდა მეცადინეობას. ამ დროს ბიჭების რაოდენობა 1,5-ჯერ მეტი იყო გოგონების რაოდენობაზე. პარასკევს კი ყველა იყო მეცადინეობაზე. რამდენი ბავშვი იყო პარასკევს მე-7 კლასში?

ამოხსნა: მე-7 კლასელი გოგონების რაოდენობა ავღნიშნოთ x -ით, ბიჭების რაოდენობა კი y -ით. პირობის თანახმად, ორშაბათს გოგონების რაოდენობა იყო $(x-1)$, ბიჭების რაოდენობა $(y-5)$ და რადგან გოგონები ორჯერ მეტნი იყვნენ ბიჭებზე, ამიტომ: $(x-1)=2(y-5)$. ოთხშაბათს გოგონების რაოდენობა $(x-9)$, ბიჭების რაოდენობა $(y-1)$ იყო და რადგან ბიჭები გოგონებზე 1,5-ჯერ მეტნი იყვნენ, ამიტომაც: $y-1=1,5(x-9)$.



განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x-1=2(y-5), \\ y-1=1,5(x-9) \end{cases}$$

გავამარტივოთ სისტემის ორივე განტოლება:

$$\begin{cases} x-1=2(y-5), \\ y-1=1,5(x-9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-9, \\ y-1,5x=-12,5 \end{cases} \quad (\text{ორივე მხარე})$$

$$\text{გავამრავლოთ 2-ზე)} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-9, \\ 2y-3x=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=-34, \\ x-2y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17, \\ 17-2y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17, \\ y=13 \end{cases}$$

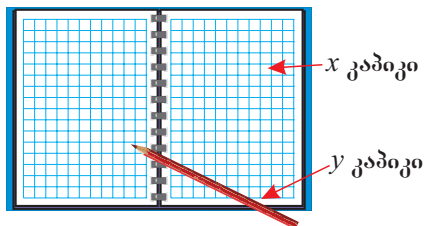
მაშასადამე, სისტემის ამონახსენია: $x=17$, $y=13$, ე.ი. პარასკევს მეცადინეობაზე იყო 17 გოგონა და 13 ბიჭი. მაშასადამე, სულ $17+13=30$ მოსწავლეა.

პასუხი: 30.

ნამუში

ამოცანა 2: სამი რვეული და ორი კალამი 80 კაპიკი, სამი კალამი და ორი რვეული კი 70 კაპიკი ღირს. რა ღირს ხუთი კალამი და ექვსი რვეული?

ამოხსნა: პირობის თანახმად, არ არის ცნობილი ერთი რვეულისა და ერთი კალამის ღირებულება. ისინი შესაბამისად ავლენიშნოთ x -ით და y -ით:



რადგანაც პირობის თანახმად „სამი რვეული და ორი კალამი 80 კაპიკია“ სისტემის პირველი განტოლება იქნება: $3x + 2y = 80$. მეორე მხრივ,

„სამი კალამი და ორი რვეული 70 კაპიკია“, ე.ი. მეორე განტოლებას: $2x + 3y = 70$.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 80 & (\text{ორივე მხარე გავამრავლოთ } 3\text{-ზე}) \\ 2x + 3y = 70 & (\text{ორივე მხარე გავამრავლოთ } -2\text{-ზე}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 6y = 240, \\ -4x - 6y = -140 \end{cases} \Leftrightarrow$$

ეს განტოლებები შევკრიბოთ ნაწილ-ნაწილ.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 100, \\ 3x + 2y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ 3 \cdot 20 + 2y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 10. \end{cases}$$

სისტემის ამონახსენია $x = 20$ და $y = 10$. ე.ი. ერთი რვეული 20 კაპიკი, ერთი კალამი 10 კაპიკი ღირს. მაშინ ხუთი კალამი და ექვსი რვეული: $5 \cdot 10 + 6 \cdot 20 = 170$ (კაპიკი) = 1 მანათი და 70 კაპიკი.

პასუხი: 1 მანათი და 70 კაპიკი.

საგარჯიშოები

- ა) ორი რიცხვის ჯამი 45-ია, სხვაობა კი 9. ამ რიცხვებს შორის მეტი 45-ისა და 9-ის ჯამის ნახევრის ტოლია, ხოლო ნაკლები კი, 45-ისა და 9-ის სხვაობის ნახევრის ტოლი. თქვენი აზრით, შესაძლებელია ეს? ამოცანის პირობის შესაბამისად შეადგინეთ განტოლებათა სისტემა და მისი ამოხსნით დაასაბუთეთ თქვენი პასუხი.

ბ) იპოვეთ რიცხვების ნამრავლი, რომელთა ჯამიც 118-ია, სხვაობა კი 83.6. მიღებული რიცხვი დაამრგვალეთ ერთეულებამდე.

გ) იპოვეთ ისეთი ორი რიცხვი, რომ მათი სხვაობა ჯამის ნახევრის ტოლი იყოს. განსაზღვრეთ ამ შემთხვევაში, მეტი რიცხვი ნაკლების რამდენმაგს შეადგენს და პატარა რიცხვი დიდი რიცხვის რა ნაწილს შეადგენს? პასუხი დაასაბუთეთ რამდენიმე ნიმუშით.
- ა) 14 მ ქსოვილით 4 მამაკაცისა და 2 ბავშვის პალტოს, 15 მ იგივე ქსოვილით კი 2 მამაკაცისა და 6 ბავშვის პალტოს შეკერვა შესაძლებელი. რამდენი მეტრი ქსოვილია საჭირო ერთი მამაკაცისა და ერთი ბავშვის პალტოსათვის?

ბ) 5 დიდ და 11 პატარა ყუთში 156 კალამია. დიდ ყუთში პატარა ყუთთან შედარებით 12 კალმით მეტი თავსდება. რამდენი კალამია თითოეულ ყუთში?
- ორი წლის წინათ ძმა დაზე 2-ჯერ, 8 წლის წინათ კი 5-ჯერ უფროსი იყო. რამდენი წლის არიან ახლა ძმა და და?

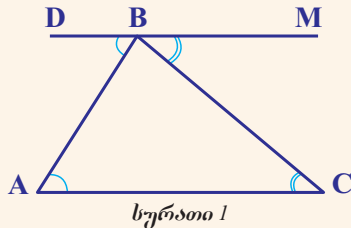
4. **ამოცანა-ზღაპარი:** აქლემსა და ცხენზე დატვირთეს ტოლი მასის სხვადასხვა რაოდენობის ტომრები. ცხენმა ტვირთის სიმძიმე დაიჩივლა. აქლემმა კი თქვა: "შენ რატომ ჩივი? თუ შენი ტომრებიდან ერთს ჩემზე გადმოვიტანთ, მე შენზე ორჯერ მეტი ტვირთი მექნება. მე თუ შენ 1 ტომარას მოგცემ, მაშინ ჩვენი ტვირთები ტოლი იქნება." განსაზღვრეთ, რამდენ ტომარა ტვირთს ეზიდებოდა თითოეული ცხოველი.
5. თუ ეკმედი ელჩინს 100 მანეთს გამოართმევს, ეკმედის ფული მასზე ორჯერ მეტი იქნება. თუ ეკმედი ელჩინს მისცემს 10 მანეთს, მაშინ ელჩინის ფული ეკმედის ფულზე 6-ჯერ მეტი იქნება. რამდენი მანეთი ფული აქვს თითოეულ ბიჭს?
6. ყოველ დღეს 8 ცხენსა და 15 ძროხას 162 კგ საკვებს აძლევენ. 5 ცხენისათვის მიცემული საკვები 7 ძროხისათვის მიცემულზე 3 კგ-ით მეტია. განსაზღვრეთ, რამდენ კგ საკვებს ჭამს დღის მანძილზე თითოეული ცხენი და ძროხა.
7. ორ ავზში 140 ლ წყალი იყო. როდესაც პირველი ავზიდან 26 ლ, მეორე ავზიდან კი 60 ლ წყალი მოიხმარეს პირველ ავზში მეორესთან შედარებით 2-ჯერ მეტი წყალი დარჩა. რამდენი ლიტრი წყალი იყო თითოეულ ავზში თავდაპირველად?
8. შეადგინეთ მოცემული განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ამოცანები და ამოხსენით სხვადასხვა ხერხის გამოყენებით.

ა) $\begin{cases} 3x + 2y = 66, \\ 2x + 2y = 46; \end{cases}$	ბ) $\begin{cases} x + y = 55, \\ x + \frac{1}{2}y = 44. \end{cases}$
---	--
9. წონასწორობაში მყოფი სასწორის მარცხენა თევზზე დევს 9 ერთნაირი ოქროს მაინც, ხოლო მარჯვენა თევზზე - 11 ერთნაირი ვერცხლის ზოდი. თუ შევუცვლით ადგილებს ერთ ოქროსა და ერთ ვერცხლის, მონეტას, მაშინ მარცხენა თევზში იქნება 13 გრ-ით მსუბუქი. რამდენ გრამს იწონის ერთი ოქრო, და ერთი ვერცხლის მონეტა?
10. პირველმა მუშამ 15 დღე, მეორე მუშამ კი-14 დღე იმუშავა და ორივემ ერთად 234 მანათი აიღო. ცნობილია, რომ პირველი მუშის 4 დღეში აღებული ფული მეორე მუშის 3 დღეში აღებულ ფულზე 22 მანათით მეტია. განსაზღვრეთ თითოეული მუშის ერთ დღეში აღებული თანხა.
11. ერთ ბიდონში მეორეზე 5 ლიტრით მეტი რძე ასხია. თუ პირველი ბიდონიდან მეორეში 8 ლ რძეს გადავცლით, მეორე ბიდონში პირველზე ორჯერ მეტი რძე იქნება. რამდენი ლიტრი რძე იყო თითოეულ ბიდონში?
12. რამდენით უნდა შევამციროთ რიცხვი 100, რომ მიღებული სხვაობის 5-ზე და 7-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი იყოს 1 და პირველი გაყოფით მიღებული არასრული განაყოფი მეორე გაყოფით მიღებულ არასრულ განაყოფზე 4 ერთეულით მეტი იყოს?
 - ა) ამოცანის ამოუხსნელად რისი უცნობად ჩათვლაა ხელსაყრელი?
 - ბ) შეადგინეთ განტოლებათა სისტემა და ამოხსენით.
 - გ) შეამოწმეთ პასუხის სისწორე.

5.12. სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი

საქმიანობა

1. რაიმე ABC სამკუთხედის B წვეროზე გაავლეთ AC გვერდის პარალელური DM წრფე (სურათი 1).
2. როგორი კუთხეებია ABD და BAC კუთხეები? რომელი თვისება აქვს ამ კუთხეებს?
3. რა შეგიძლიათ თქვათ $\angle MBC$ -სა და $\angle ACB$ -ს შესახებ? ტოლია მათი გრადუსული ზომები? რატომ?
4. როგორი კუთხეა $\angle DBM$? რომელი კუთხეების ჯამის სახით შეიძლება ვაჩვენოთ $\angle DBM$? რამდენი გრადუსის ტოლია $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$?



თეორემა სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი

სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია.

თეორემის პირობა: $\triangle ABC$ -ში $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ შიგა კუთხეებია.

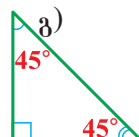
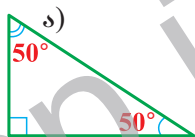
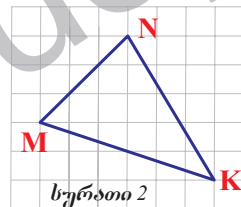
თეორემის დასკვნა: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

დაამტკიცეთ.

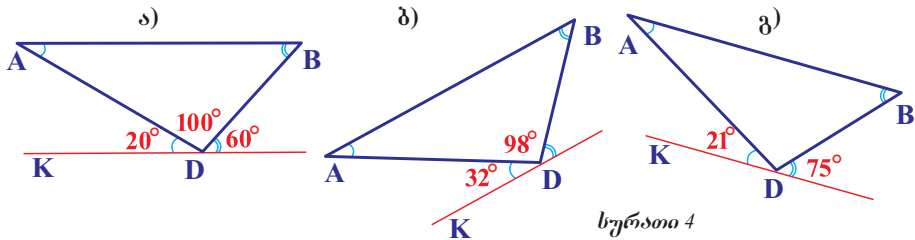
დაამტკიცეთ შიგა ჯვარედინი კუთხეების ტოლობისა და გაშლილი კუთხის მნიშვნელობის საფუძველზე.

საგარჯიშოები

1. სამკუთხედს შეიძლება ჰქონდეს: ა) ორი მახვილი კუთხე? ბ) ორი მართი კუთხე? გ) ორი ბლაგვი კუთხე? დ) ერთი ბლაგვი და ერთი მართი კუთხე? რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.
2. ა) დაასახელეთ მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეების სახეები. რა შეგიძლიათ თქვათ მართკუთხა სამკუთხედის არამართი ორი კუთხის ჯამის შესახებ? ამ ჯამისათვის რომელი დებულებაა სწორი: 1) 90° -ზე მეტია; 2) 90° -ზე ნაკლებია; 3) 90° -ის ტოლია.
ბ) რამდენი გრადუსია ტოლგვერდა სამკუთხედის კუთხეები?
3. უჯრებიან რვეულში ჩახაზეთ სამკუთხედი, როგორც სურათი 2-ზეა მოცემული. ტრანსპორტირის საშუალებით გაზომეთ მისი კუთხეები. რამდენი გრადუსია ამ კუთხეების მნიშვნელობების ჯამი?
4. რომელი სურათია სწორად მოცემული? რატომ?

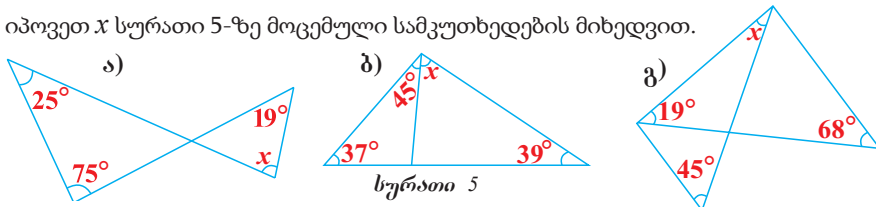


5. განსაზღვრეთ სურათი 4 (ა, ბ, გ)-ზე მოცემული ABD სამკუთხედის შიგა კუთხეების გრადუსული ზომები, სადაც $DK \parallel AB$.



6. მოცემულია სამკუთხედის შიგა კუთხეებიდან ორი. იპოვეთ მესამე კუთხის გრადუსული ზომა.
 ა) 65° და 43° ; ბ) 90° და 29° ; გ) 5° და 55° ; დ) 145° და 12° .
7. მოცემული კუთხეები შეიძლება იყოს სამკუთხედის კუთხეები? რატომ? პასუხი განმარტეთ.
 ა) 21° , 35° და 103° ; ბ) 56° , 90° და 24° ; გ) 72° , 15° და 55° .

8. იპოვეთ x სურათი 5-ზე მოცემული სამკუთხედების მიხედვით.



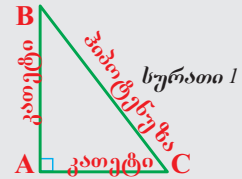
9. იპოვეთ $\triangle ABC$ -ს კუთხეები ცხრილის მონაცემების მიხედვით:

$\angle A$	30°	54°	x	b	$3m$
$\angle B$	n	a	$x + 72^\circ$	$b + 72^\circ$	$2m$
$\angle C$	$n + 20^\circ$	$a - 40^\circ$	$2x$	$2b$	50°

10. ა) სამკუთხედის სიმაღლე კუთხეს, რომლიდანაც ის გამოდის, 30° და 42° -იან კუთხეებად ყოფს. განსაზღვრეთ ამ სამკუთხედის კუთხეების გრადუსული ზომები.
 ბ) თუ ტოლფერდა სამკუთხედის კუთხეებიდან ერთ-ერთი: 1) 68° ; 2) 136° ; 3) 100° -ია, იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.
11. სამკუთხედის კუთხეებიდან ერთ-ერთი 60° -ია. რამდენი გრადუსი იქნება დანარჩენი ორი კუთხის ბისექტრისებს შორის მდებარე მახვილი კუთხე?
12. ABC სამკუთხედის B და C კუთხეების ბისექტრისებს შორის კუთხე 118° -ია. იპოვეთ A კუთხის გრადუსული ზომა.
13. ABC სამკუთხედში $\angle A = 70^\circ$ და $\angle C = 60^\circ$. BD ბისექტრისა ABC სამკუთხედს ჰყოფს ABD და BCD სამკუთხედებად. იპოვეთ ამ სამკუთხედების კუთხეები.
14. ABC სამკუთხედში $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 50^\circ$ და AD სიმაღლეა. დაამტკიცეთ, რომ $\angle CAD = 2\angle BAD$.

5.13. მართკუთხა სამკუთხედი

თუ სამკუთხედის კუთხეებიდან ერთი მართია, ასეთ სამკუთხედს **მართკუთხა სამკუთხედი** ეწოდება. მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის შემდგენ გვერდებს **კათეტები**, მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს კი **ჰიპოტენუზა** ეწოდება (სურათი 1).



საქმიანობა

1. გაიხსენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობის ბმბ ნიშანი. როგორ შეიძლება ჩამოყალიბდეს ეს ნიშანი მართკუთხა სამკუთხედისათვის?
2. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები შესაბამისად მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ტოლია, შეიძლება ითქვას, რომ ეს სამკუთხედები კონგრუენტულია? რატომ?
3. გაიხსენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობის კმპ ნიშანი. როგორ შეიძლება ჩამოყალიბდეს ეს ნიშანი მართკუთხა სამკუთხედებისათვის?
4. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და მასთან მდებარე მახვილი კუთხე შესაბამისად მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტისა და მასთან მდებარე მახვილი კუთხის ტოლია, შეიძლება ითქვას, რომ ეს სამკუთხედები კონგრუენტულია? რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.
5. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და მასთან მდებარე მახვილი კუთხე შესაბამისად მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და მასთან მდებარე მახვილი კუთხის ტოლია, შეიძლება ითქვას, რომ ეს სამკუთხედები კონგრუენტულია? რა შეიძლება ითქვას ამ სამკუთხედების მეორე მახვილი კუთხეების შესახებ? გაიხსენეთ კონგრუენტული სამკუთხედების განსაზღვრება და პასუხი დაასაბუთეთ.

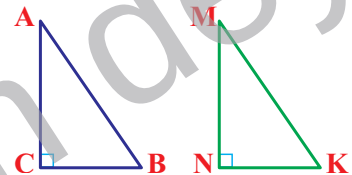
თეორემა

მართკუთხა სამკუთხედების კონგრუენტულობის ნიშანი

თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და კათეტი შესაბამისად მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და კათეტის ტოლია, მაშინ ეს მართკუთხა სამკუთხედები კონგრუენტულია.

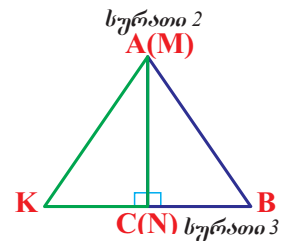
თეორემის პირობა: $\triangle ABC$ და $\triangle MNK$ მართკუთხა სამკუთხედებია (სურათი 2). $AB \equiv MK$ და $AC \equiv MN$.

თეორემის დასკვნა: $\triangle ABC \equiv \triangle MNK$.



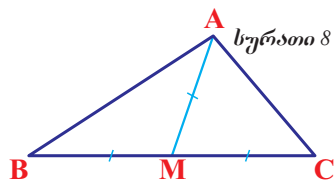
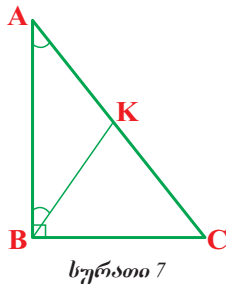
დაამტკიცეთ.

ABC და MNK სამკუთხედები ისე განათავსეთ, რომ AC და MN გვერდები ემთხვეოდეს ერთმანეთს. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული KAB სამკუთხედი ტოლფერდაა (სურათი 3).



▶ V განყოფილება

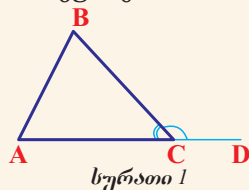
3. მართკუთხა სამკუთხედში 30° -იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის თვისების შესახებ თეორემის პირობასა და დასკვნას შეუცვალეთ ადგილები და დაწერეთ მიღებული დებულება. დაამტკიცეთ, რომ ეს დებულება სწორია.
4. ABC მართკუთხა სამკუთხედია და ცნობილია, რომ $\angle BAC = \angle ABK$ დაამტკიცეთ, რომ BK მონაკვეთი $\triangle ABC$ -ს მედიანა (სურათი 7).
5. A და B წერტილები CD წრფის სხვადასხვა მხარეს მისგან თანაბარ მანძილზე მდებარეობენ. ცნობილია, რომ $AC \perp CD$ და $BD \perp CD$. განსაზღვრეთ AD მონაკვეთისა და CK მედიანის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ B და C წერტილებს შორის მანძილია: ა) 7 მმ; ბ) 12 სმ; გ) 4,89 დმ.
6. AB და CD ტოლი სიგრძის მონაკვეთებია. ისინი BD მონაკვეთის ერთ მხარეს მდებარეობენ და მისი მართობულებია. განსაზღვრეთ BC მონაკვეთის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ A და D წერტილებს შორის მანძილია: ა) 0,15 მ; ბ) 34 სმ; გ) 8,5 დმ.
7. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში M წერტილი AC ფუძის შუაწერტილია. გავლებულია $MF \perp BC$ და $ME \perp AB$ მონაკვეთები. დაამტკიცეთ, რომ $MF=ME$.
8. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდებზე დაშვებული სიმაღლეები ტოლია.
9. დაამტკიცეთ, რომ კუთხის ბისექტრისაზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი კუთხის გვერდებიდან ტოლ მანძილზე მდებარეობს.
10. ა) იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა, თუ 30° -იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე 17 მმ-ია.
 ბ) მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 56 სმ-ია, ერთ-ერთი კუთხე 60° . ამ სამკუთხედის რომელი კათეტის პოვნა შესაძლებელი? განსაზღვრეთ ის.
 გ) მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებიდან ერთ-ერთის სიგრძე 24 სმ-ია, ჰიპოტენუზა 48 სმ. განსაზღვრეთ ამ სამკუთხედის კუთხეები.
11. მართკუთხა სამკუთხედის გარე კუთხეებიდან ერთ-ერთი 120° -ია. ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და მცირე კათეტის სხვაობა 15 სმ-ია. განსაზღვრეთ სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძე.
12. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდებს შორის კუთხე 120° -ია. იპოვეთ სამკუთხედის წვეროდან ფუძემდე მანძილი, თუ ფერდის სიგრძეა 44 მმ.
13. $\triangle ABC$ -ში AM მედიანა BM-ის ტოლია (სურათი 8).
 დაამტკიცეთ, რომ $\angle BAC = \angle B + \angle C$.



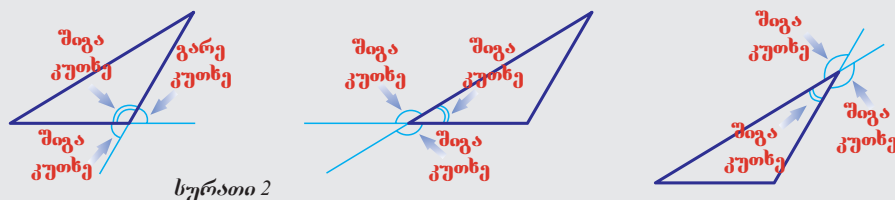
5.14. სამკუთხედის გარე კუთხე და მისი თვისება

საქმიანობა

- ჩახაზეთ რაიონში ABC სამკუთხედის ACB კუთხის მოსაზღვრე BCD კუთხე.
- როგორი კუთხეები ეწოდებათ $\angle ACB$ და $\angle BCD$? რამდენი გრადუსია მათი ჯამი (სურათი 1)?
- რამდენი გრადუსი იქნება $\angle BCD$, თუ $\angle ACB = 60^\circ$? როგორ დაადგინეთ ეს?
- სამკუთხედის შიგა კუთხეების საფუძველზე განსაზღვრეთ რამდენი გრადუსია $\angle A + \angle B$.
- დაადგინეთ, რა კავშირის არსებობს ($\angle A + \angle B$ და $\angle BCD$)-ს შორის?



სამკუთხედის თითოეული შიგა კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს გარე კუთხე ეწოდება. სამკუთხედის თითოეულ წვეროსთან ორი **გარე კუთხე** არსებობს. თუმცა, რადგანაც ისინი ტოლებია, თითოეულ წვეროსთან ერთი გარე კუთხე აიღება (სურათი 2).



თეორემა სამკუთხედის გარე კუთხის თვისება

სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე შიგა კუთხეების ჯამის ტოლია.

თეორემის პირობა: $\triangle ABC$ -ში $\angle A$, $\angle B$, და $\angle ACB$ შიგა კუთხეებია, $\angle BCD$ კი გარე კუთხეა.

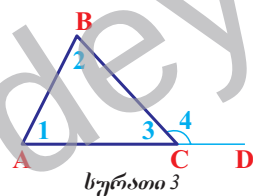
თეორემის დასკვნა: $\angle BCD = \angle A + \angle B$ (სურათი 3).

თეორემის დამტკიცება: სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის შესახებ თეორემის საფუძველზე: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

მეორე მხრივ, რადგან, $\angle 3$ და $\angle 4$ მოსაზღვრე კუთხეებია: $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ და $\angle 3 = 180^\circ - \angle 4$.

მაშასადამე, $\angle 1 + \angle 2 + 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ$ და $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$.

ანუ: $\angle BCD = \angle A + \angle B$. **თეორემა დამტკიცებულია.**



ნიმუში

მაგალითად: სამკუთხედის გარე კუთხე $\angle BCD = 110^\circ$, მისი არამოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთი $\angle A = 42^\circ$ (სურათი 3). იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი კუთხეები.

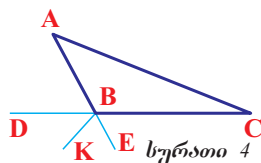
ამოხსნა: თეორემის თანახმად $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

მაშინ: $\angle B = \angle BCD - \angle A = 110^\circ - 42^\circ = 68^\circ$. მოსაზღვრე კუთხეების თვისების თანახმად: $\angle C = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. მაშასადამე, სამკუთხედის კუთხეებია 42° , 68° , 70° .

პასუხი: $\angle B = 68^\circ$, $\angle C = 70^\circ$.

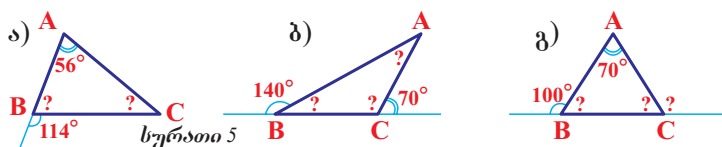
1. დახაზეთ ABC სამკუთხედი. მის თითოეულ წვეროსთან გამოსახეთ გარე კუთხე. ჩაწერეთ თითოეული გარე კუთხე რომელი შიგა კუთხეების ჯამის ტოლია.

2. სურათი 4-ზე ასახულია $\triangle ABC$, გულნარი ამბობს, რომ B წვეროს გარე კუთხეა $\angle ABD$, ალი თვლის, რომ ეს არის $\angle CBE$, უსუფი კი ამბობს, რომ გარე კუთხეა $\angle ABK$. თქვენი აზრით, რომელმა მათგანმა სწორად გამოსახა B წვეროს გარე კუთხე? რა შეგიძლიათ თქვათ $\angle ABD$ -სა და $\angle CBE$ -ს შესახებ?



3. რამდენი გრადუსი იქნება MNK სამკუთხედის M წვეროს გარე კუთხე, თუ მისი შიგა კუთხეა: ა) 57° ; ბ) 43° ; გ) 124° ?

4. სურათი 5-ზე მოცემული სამკუთხედების საფუძველზე განსაზღვრეთ „?“ ნიშნით მოცემული კუთხე.



5. სამკუთხედის გარე კუთხე 80° -ია. სამკუთხედის ამ გარე კუთხისა და მისი არამოსაზღვრე შიგა კუთხეებიდან ერთ-ერთის თანაფარდობაა 5 : 3. განსაზღვრეთ სამკუთხედის კუთხეები.

6. BCD კუთხე $\triangle ABC$ -ს გარე კუთხეა. შეავსეთ ცხრილი.

$\angle A$	35°		10°	
$\angle B$	45°	67°		89°
$\angle C$		33°	143°	
$\angle BCD$				112°

7. ABC სამკუთხედის B წვეროდან გავლესულია BH სიმაღლე და BT ბისექტრისა. განსაზღვრეთ $\angle HBT$ და $\angle BTC$ -ს გრადუსული ზომები, თუ:

ა) $\angle A = 80^\circ$, $\angle C = 56^\circ$; ბ) $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 40^\circ$; გ) $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 70^\circ$

8. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის შიგა კუთხეები, თუ მისი გარე კუთხეებიდან ერთ-ერთი ა) 70° -ია ბ) 136° -ია.

9. ცნობილია, რომ ABC სამკუთხედში $\angle A = 32^\circ$, $\angle C = 58^\circ$. ABC სამკუთხედის წვეროებიდან გავლესულია მოპირდაპირე გვერდის პარალელური წრფეები. განსაზღვრეთ ამ წრფეებით შედგენილი სამკუთხედის შიგა და გარე კუთხეები.

10. საბირი ამბობს, რომ სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი მისი ყველა გარე კუთხეების (ერთ წვეროსთან აღებულია ორი გარე კუთხე) ჯამზე 4-ჯერ ნაკლებია. მართალია ის?

11. შესაძლებელია თუ არა სამკუთხედის რომელიმე კუთხის ბისექტრისა მისი გარე კუთხის ბისექტრის პარალელური იყოს? პასუხი დაასაბუთეთ.

5.15. დამოკიდებულებები სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის

საქმიანობა

1. დახაზეთ ABC ტოლფერდა სამკუთხედი: $AB = AC$.
2. რომელი კუთხე მდებარეობს AB გვერდის პირდაპირ და რომელი კუთხე AC გვერდის პირდაპირ?
3. რა შეგიძლიათ თქვათ $\angle B$ -სა და $\angle C$ -ს გრადუსული ზომების შესახებ?
4. „სამკუთხედში ტოლი გვერდების პირდაპირ ტოლი კუთხეები ძევს“-მოსაზრება განმარტეთ ტოლფერდა სამკუთხედის მაგალითზე.
5. დახაზეთ სხვადასხვა ზომის გვერდებიანი სამკუთხედი. გვერდები სახაზავით, კუთხეები კი ტრანსპორტირით გაზომეთ და თითოეული დაალაგეთ ზრდის როგორ მიხედვით. რა შედეგი მიიღეთ? განმარტეთ მოსაზრებები.

თეორემა

დამოკიდებულებები სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის

სამკუთხედში: 1) დიდი გვერდის პირდაპირ დიდი კუთხე ძევს;

2) დიდი კუთხის პირდაპირ დიდი გვერდი ძევს.

თეორემის პირობა: 1) $\triangle ABC$ -ში: $AB > AC$ (სურათი 1).

თეორემის დასკვნა: $\angle ACB > \angle ABC$

თეორემის დამტკიცება: .

სამკუთხედის AB გვერდზე აღნიშნეთ ისეთი D წერტილი, რომ $AD = AC$ (სურათი 2). მიღებული ADC სამკუთხედი ტოლფერდაა, ე.ი. $\angle 1 = \angle 2$. D წერტილი A და B წერტილებს შორის მდებარეობს. მაშასადამე, CD სხივი ACB კუთხის შიგა სხივია. მაშინ $\angle ACB > \angle 1$. $\angle 2$ BCD სამკუთხედის გარე კუთხეა, ე.ი. , $\angle 2 > \angle ABC$.

მაშასადამე , მივიღეთ: $\angle ACB > \angle 1 = \angle 2 > \angle ABC$ და $\angle ACB > \angle ABC$.

თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი:

თეორემის პირობა: 2) $\triangle ABC$ -ში $\angle ACB > \angle ABC$.

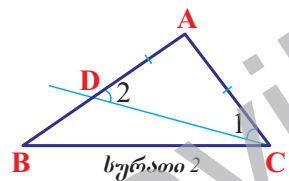
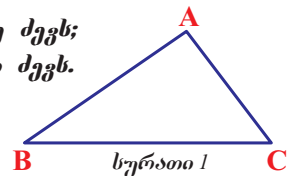
თეორემის დასკვნა: $AB > AC$ (სურათი 1).

თეორემის დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ $AB = AC$. მაშინ ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა და $\angle ACB = \angle ABC$. ეს კი თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. ე.ი. შეუძლებელია, რომ $AB = AC$.

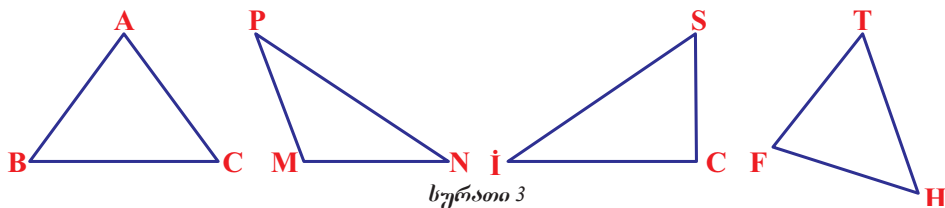
ახლა კი დავუშვათ, რომ $AB < AC$. თეორემის პირველი პირობის თანახმად, სამკუთხედში დიდი გვერდის პირდაპირ მეტი კუთხე ძევს. ანუ, $AB < AC$ რომ შესრულდეს, საჭიროა $\angle ACB < \angle ABC$. ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემის მეორე პირობას. მაშასადამე, $AB > AC$.

თეორემის მეორე ნაწილი დამტკიცებულია.

დასკვნა: სამკუთხედი, რომელსაც ორი კუთხე ტოლი აქვს, ტოლფერდაა (რატომ?).

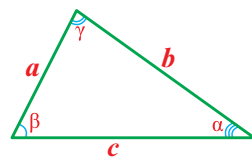


1. სურათი 3-ზე მოცემულ სამკუთხედებში აჩვენეთ თითოეული გვერდის მოპირდაპირე კუთხე და თითოეული კუთხის მოპირდაპირე გვერდი.



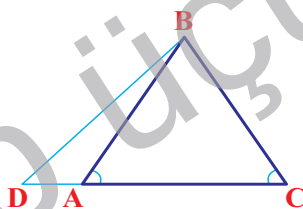
სურათი 3

2. როგორც სურათი 4-ზეა წარმოდგენილი, ABC სამკუთხედის გვერდები პატარა ლათინური ასოებით, ხოლო კუთხეები α (ალფა), β (ბეტა) და γ (გამა) ბერძნული ასოებით აღინიშნება. დაწერეთ თითოეული გვერდის მოპირდაპირე კუთხე და თითოეული კუთხის მოპირდაპირე გვერდი.

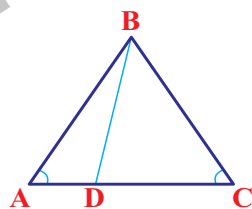


სურათი 4

3. დაადგინეთ ABC და MNK სამკუთხედებში კუთხეებსა და გვერდებს შორის დამოკიდებულება და განსაზღვრეთ მათი სახე, თუ ა) $AB > AC > BC$; ბ) $MN = MK < NK$
4. ა) შეადარეთ MNK სამკუთხედის გვერდები, თუ $MN < MK < NK$.
ბ) ABC სამკუთხედში კუთხეები დაალაგეთ ზრდის რიგის მიხედვით, თუ $AB = 9$ სმ, $AC = 14$ სმ, $BC = 8$ სმ.
5. რომელია უდიდესი გვერდი მართკუთხა სამკუთხედში? განსაზღვრეთ ამ სამკუთხედის უმცირესი გვერდი, თუ მახვილი კუთხეებიდან ერთ-ერთი 34° -ია.
6. ლეილამ და ფერიდმა დახაზეს ABC ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის A კუთხე 70° -ია. ლეილა ამბობს, რომ ამ სამკუთხედის BC გვერდი AB და AC გვერდებზე მეტია, ფერიდი კი ამბობს, რომ AB და BC გვერდები ტოლია და AC გვერდზე მეტია, რომელია მართალი მათ შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.
7. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის პარალელური წრფე AB გვერდს M წერტილში, AC გვერდს კი N წერტილში კვეთს. განსაზღვრეთ MAN სამკუთხედის სახე.
8. დაამტკიცეთ, რომ BD დახრილი (სურათი 5) ABC სამკუთხედის ფერდზე: ა) მეტია; ბ) ნაკლებია. პასუხი დაასაბუთეთ.



სურათი 5 ა



სურათი 5 ბ

5.16. სამკუთხედის უტოლობა

საქმიანობა

სახაზავი, ჩხირები

1. დახაზეთ ნებისმიერი ABC სამკუთხედი. მისი გვერდები გაზომეთ სახაზავით და დაწერეთ.
2. შეადარეთ:
 - ა) $AB + AC$ და BC ; ბ) $AB + BC$ და AC ; გ) $AC + BC$ და AB .
3. რა შედეგი მიიღეთ? გამოთქვით მოსაზრებები.
4. აიღეთ ჩხირები, რომელთა სიგრძეებიცაა 6 სმ, 4 სმ, 3 სმ და 2 სმ. 6 სმ-იანი ჩხირი დადეთ მაგიდაზე. დანარჩენი ჩხირებიდან ორის გამოყენებით ეცადეთ სამკუთხედის აგებას. რა შემთხვევაში მიიღება სამკუთხედი? რატომ?

თეორემა

სამკუთხედის უტოლობა

სამკუთხედის თითოეული გვერდის სიგრძე დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეების ჯამზე ნაკლებია.

თეორემის პირობა: ABC სამკუთხედი (სურათი 1).

თეორემის დასკვნა: $AB < AC + BC$.

თეორემის დამტკიცება: CA სხივის მოპირდაპირე სხივზე გადადევით CB გვერდის ტოლი CD მონაკვეთი (სურათი 2).

რადგანაც BCD სამკუთხედი ტოლფერდაა $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle ABD > \angle 1$ და მაშასადამე $\angle ABD > \angle 2$.

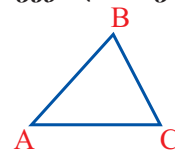
ბოლო უტოლობიდან ვიღებთ, რომ

$AB < AD$ და რადგან $AD = AC + CD = AC + BC$,

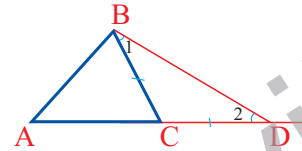
ამიტომაც $AB < AC + BC$.

თეორემა დამტკიცებულია.

დასკვნა: $\triangle ABC$ -ში $AB < AC + BC$, $AC < AB + BC$ და $BC < AC + AB$.



სურათი 1



სურათი 2

ნიმუში

მაგალითი: შესაძლებელია ავაგოთ სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია:

ა) 6 სმ, 12 სმ, 5 სმ; ბ) 3,5 სმ, 5,4 სმ, 7 სმ; გ) 3 სმ, 8 სმ, 5 სმ?

ამოხსნა: სამივე შემთხვევისათვის შევამოწმოთ აკმაყოფილებს თუ არა სამკუთხედის უტოლობას: ამ მონაკვეთებზე, სამკუთხედი რომ შეადგინონ, ნებისმიერი ორის ჯამი მესამეზე მეტი უნდა იყოს:

ა) $6 + 5 < 12$, პირველ შემთხვევაში რადგან ორი მათგანის ჯამი მესამეზე ნაკლებია, ეს მონაკვეთები არ შეიძლება იყოს რაიმე სამკუთხედის გვერდები.

ბ) რადგან $3,5 + 5,4 > 7$, ეს გვერდები შეიძლება იყოს სამკუთხედის გვერდები.

გ) რადგან $3 + 5 = 8$, ეს გვერდები არ შეიძლება იყოს სამკუთხედის გვერდები.

შენიშვნა. იმისათვის, რომ შევამოწმოთ აკმაყოფილებენ თუ არა მონაკვეთების სამკუთხედის უტოლობის პირობას, საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ორი მცირე მონაკვეთის ჯამი მეტია თუ არა უდიდეს მესამეზე.

1. ცხრილში მესამე გვერდის სიგრძის მაჩვენებელ უჯრაში ისეთი რიცხვი ჩაწერეთ, რომ ABC სამკუთხედის აგება ა) შესაძლებელი იყოს; ბ) შეუძლებელი იყოს.

AB	56 მმ		$1\frac{3}{4}$ სმ	400 სმ
AC	38 მმ	1,6 დმ		5,9 მ
BC		15 სმ	$6\frac{3}{4}$ სმ	

2. დახაზეთ სხვადასხვა სიგრძის გვერდების მქონე ა) მართკუთხა სამკუთხედი, ბ) ზღაგვ-კუთხა სამკუთხედი და გ) მახვილკუთხა სამკუთხედი. შეადარეთ ამ სამკუთხედის ნებისმიერი ორი გვერდის სიგრძის სხვაობა და მესამე გვერდის სიგრძე. რა დასკვნა გამოიტანეთ? გამოსახეთ ეს შედეგი უტოლობის სახით.

3. შესაძლებელია სამკუთხედის აგება, რომლის გვერდების სიგრძეები გაშლილი კუთხის გრადუსული ზომის ქვემოთ მოცემული ნაწილების ტოლია (სიგრძის ერთეული სანტიმეტრია)?

ა) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$; გ) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}$.

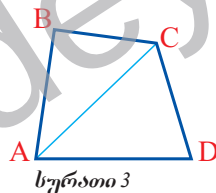
თუ შესაძლებელია, განსაზღვრეთ ამ სამკუთხედის სახე.

4. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ორი გვერდია: ა) 7 სმ და 15 სმ; ბ) 6 დმ და 30 სმ; გ) 120 მმ და 3,2 სმ

5. სამკუთხედის პერიმეტრი 145 სმ-ია. შესაძლებელია მისი გვერდებიდან ერთ-ერთის სიგრძე 8 დმ და 3 სმ იყოს? რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.

6. a, b და c სამკუთხედების გვერდებია. $a = 3,17$ სმ, $b = 0,75$ სმ, c ნატურალური რიცხვია. განსაზღვრეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

7. სურათი 3-ზე მოცემულია ABCD ოთხკუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ AC მონაკვეთის სიგრძე ABCD ოთხკუთხედის პერიმეტრის ნახევარზე ნაკლებია (სურათი 3).



8. სამკუთხედის a და b გვერდების სიგრძეები $8 < a < 12$, $10 < b < 15$ პირობას აკმაყოფილებენ. რომელ რიცხვებს შორის მდებარეობს ამ სამკუთხედის მესამე გვერდის სიგრძე?

9. სამკუთხედის a, b და c გვერდები $3,1 < a < 7,4$; $8,2 < b < 13$, $11 < c < 17,5$ პირობას აკმაყოფილებენ. რა უდიდესი ნატურალური რიცხვი შეიძლება იყოს ამ სამკუთხედის პერიმეტრი?

10. ცნობილია, რომ $AB = 3$ სმ, $AC = 14$ სმ, $DB = 5$ სმ და $DC = 6$ სმ. დაამტკიცეთ, რომ A, B, C და D წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

5.17. ინფორმაციის შეგროვების ხერხები

საქმიანობა

გამოკითხვა, დაკვირვება, ცდა

ყურადღებით გაეცანით მარჯვენა მხარეს მოცემულ გამოკითხვის ანკეტას. რა სახის ინფორმაციის შეგროვება დაი-სახა მიზნად ანკეტის შემდგენმა? ამ ანკეტის შედეგების გამოყენებით, როგორ შეიძლება ხარის-ხისა და მომსახურების გაზრდა? რომელი, სხვა კითხვის შეტანას ისურვებდით ანკეტაში? შეიტანეთ დამატებები და ისინი ამხანაგებთან ერთად განიხილეთ.

გამოკითხვის ანკეტა

მაღაზიაში მიცემული შეკვეთა რამდენ დღეში აღწევს თქვენამდე?

რამდენი მანათის საოჯახო ნივთების შეძენას ვარაუდობთ მორიგი 1 წლის განმავლობაში? _____

მაღაზიაში გაწეული მომსახურება გაკმაყოფილებთ?

უმაღლესი ☐ კარგი ☐ საშუალო ☐ დაბალი ☐ ძალიან დაბალი ☐

მაღაზიაში შეძენილმა საქონელმა დაგაკმაყოფილა?

უმაღლესი ☐ კარგი ☐ საშუალო ☐ დაბალი ☐ ძალიან დაბალი ☐

მომდევნო 1 წლის განმავლობაში ამ მაღაზიაში ისურვებდით რაიმეს შეძენას?

უმაღლესი ☐ კარგი ☐ საშუალო ☐ დაბალი ☐ ძალიან დაბალი ☐

სტატისტიკა არის მათემატიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ინფორმაციის დამუშავებისა და გაანალიზების გზებს. სტატისტიკა უზრუნველყოფს ინფორმაციის იმ სახეზე დაყვანას, რომელიც შეესაბამება გადაწყვეტილების მიღების მიზნებისათვის გამოყენებას. გადაწყვეტილების მიღება ეყრდნობა მრავალწლიან გამოცდილებასა და პრაქტიკას. სწორი გადაწყვეტილების მიღების მნიშვნელოვან ფაქტორს წარმოადგენს აუცილებელი ინფორმაციის შეგროვება. ინფორმაციის შეგროვება ხდება სხვადასხვა მეთოდებით და სხვადასხვა წყაროებიდან. გავეცნოთ მათ:

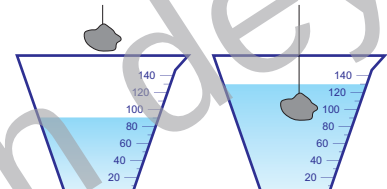
1. ინფორმაცია, რომელიც გრცელდება ორგანიზაციების ან ცალკეული პირების მიერ – ამ ინფორმაციის წყაროდ, მაგალითად, შეიძლება დავასახელოთ სა-ხელმწიფო სტატისტიკის კომიტეტის, გაზეთის, ჟურნალის, რადიოსა და ტელევიზიის მიერ მოწვდილი ინფორმაცია.

2. ცდა (ექსპერიმენტი) – ჩატარებული ექსპერიმენტები წარმოადგენენ ინფორ-მაციის შეგროვების ერთ-ერთ ძირითად წყაროს. მაგალითად, პრაქტიკულად გამო-იცდება სარეცხი ფხვნილები. შეიძლება განისაზღვროს რომელი მათგანი არის უფრო ეფექტიანი.

3. გამოკითხვა ან ინტერვიუ – ამ შემთხვევაში ადამიანების სხვადასხვა მოსაზრე-ბები შეგროვდება, შემდეგ ხდება ამ ინფორმაციების კოდირება, ეძლევა ცხრილის ფორმა და ხდება მისი მომზადება შემდგომი ანალიზისათვის. გამოკითხვა შეიძლება ჩატარდეს როგორც ზეპირი ისე წერილობითი ფორმით. გარკვეული ინფორმაციის მიღების მიზნით, გამოკითხვის დროს კითხვები დეგება ისეთი სახით, რომ პასუხები ამ კითხვებზე იყოს აუცილებელი შედეგის მიღების საფუძველი. ინტერვიუ არის პირისპირ ან ტელეფონით ჩატარებული გამოკითხვა.

4. დაკვირვება – ამ დროს დაკვირვება წარმოებს გამოსაკვლევი ადამიანების მდგომარეობაზე ბუნებრივ პირობებში და ხდება შეფასება. ეს ხერხი განსაზღვრული დროის განმავლობაში ობიექტებზე თვალყურის დევნებაა. მიზანი, რომლისთვისაც ხდება დაკვირვება, სწორი დასკვნის გამოტანაა მიზეზი ხდება. დაკვირვება წარმოებს გრძელხანის ორგანოების შემთხვევით.

საგარჯიშოები

1. ანკეტაში ისმება შეკითხვა შემოსავლების შესახებ. ზოგჯერ ეს კითხვა ფორმულირდება ასე: “რამდენს შეადგენს თქვენი ყოველწლიური შემოსავალი?“, ხოლო ზოგჯერ კი ასე: “აღნიშნეთ ინტერვალი, რომელიც შეესაბამება თქვენს შემოსავალს“.
 - ა) თქვენ რომ ადგენდეთ ანკეტას, რომელ ფორმულირებას მიანიჭებდით უპირატესობას?
 - ბ) ამ ფორმულირებიდან რომელი მოგცემთ უფრო ზუსტ ინფორმაციას? განმარტეთ თქვენი პასუხი.
2. გადმოეცით რაიმე ინფორმაცია, რომელიც მიიღეთ ბოლო ორი დღის განმავლობაში ტელევიზიისა და რადიოს “მომავლის“ პროგრამიდან. მოყევით, რა დასკვნა გამოიტანეთ ამ ინფორმაციიდან.
3. მაღაზიების ქსელის დირექტორს დედაქალაქში გამოკითხვის ჩატარებით სურს გაიგოს, თვის განმავლობაში რა დროს ხარჯავენ მომუშავე ქალები მარკეტებში საქონლის შესაძენად.
 - ა) განსაზღვრეთ იმ ინფორმაციის წყარო, რომლის მიღებაც სურს დირექტორს.
 - ბ) შეადგინეთ ანკეტა ისეთი სახით, რომ მიიღოთ აუცილებელი ინფორმაცია.
4. მოჭრეს რამდენიმე ფოთლიანი პატარა ტოტი და ჩადეს ფერადწყლიან ჭურჭელში. რამდენიმე დღეში გამოჩნდა რომ ფოთლებმა დაიწყეს გაფერადება.
 
 ტოტის ჯერ სიგანეზე, შემდეგ სიგრძეზე გაჭრით დაინახეს, რომ ფერადმა წყალმა შეღება მხოლოდ მისი ღეროს ნაწილი, კანი და შუაგული არ იყო შეღებილი. რას გვიჩვენებს ეს ცდა? ღეროს რომელი ნაწილების საშუალებით აღწევს მიწიდან მიღებული წყალი და მინერალური მარილები ფოთლებში, ყვავილებში, ხილში? თქვენც ჩაატარეთ ცდა და შედეგებს დააკვირდით.
5. შეაგროვეთ მასალები ისტორიული პიროვნებების შესახებ (ჯავანშირი, ბა-ბექი, იუსიფ აბუ საჯე, შამსედდინ ელდენიზი, იბრაჰიმ ხალილულლაჰ, კარა იუსუფი, უზუნ ჰასანი). გაანალიზეთ ისინი მსგავსი და განსხვავებული ნიშნების მიხედვით.
6. თითოეული მოსწავლე, კვირის განმავლობაში ოჯახში გამოყენებული სურსათის მასისა და ღირებულების განსაზღვრით, ბიუჯეტის შესაბამისად, ოჯახის მოთხოვნილების განსაზღვრის შესახებ ამზადებს ინფორმაციას. განმარტეთ, თქვენ რომელი ხერხით შეაგროვეთ ამ ინფორმაცია?
7. წრფივი ზომების არამეონე ნებისმიერი სხეულის მოცულობა შეიძლება გაიზომოს მენზურკის (სა-ზომი ცილინდრი) საშუალებით. ამისათვის სხეული ჩაშვებულ იქნება განსაზღვრული მოცულობის სითხეში. ამ დროს სხეულის მოცულობა ტოლია წყალში ჩაშვებული სხეულის მიერ გამოძევებული სითხის მოცულობისა. ორი ჩატარებული ცდის შედეგები შეტანილია ცხრილში. რა ინფორმაციის მიიღება შეგიძლიათ აქედან? რას უდრის სხეულის მოცულობა სურათზე.
 

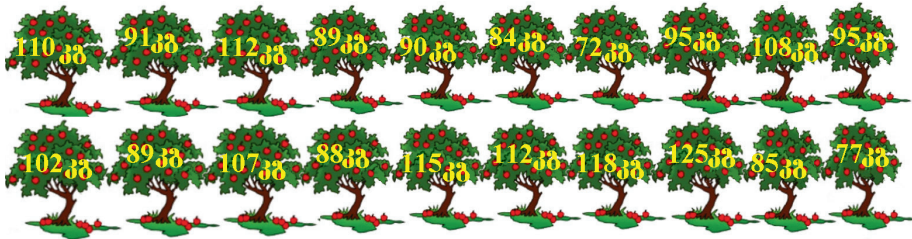
ცდის ნომერი №	სხეულის დასახელება	სითხის საწყისი მოცულობა, სმ ³	სითხის მოცულობა მასში სხეულის ჩაშვების შემდეგ, სმ ³	სხეულის მოცულობა სმ ³
1	ბურთულა	70	73,5	?
2	ქვა	65	71,02	?

5.18. ინფორმაციის წარდგენა.

დიაგრამა, ჰისტოგრამა, გრაფიკი

საგარჯიშოები

1. სემედი ცხოვრობს კუბაში და მისი ვაშლის ბაღში დგას 20 ხე. სემედმა ბაღში არსებული ვაშლის ხეებიდან ქვემოთ მოცემული მასის მოსავალი აიღო:



ნიმუშის შესაბამისად შეავსეთ ცხრილი 1 და გაეცით კითხვებზე პასუხები. **ცხრილი 1**

მასა (კგ)	ვაშლის ხეების რაოდენობა, რომელთა მოსავლის მასა ამ შუალედშია.	ეს ვაშლის ხეები, მთელი ხეების რამდენ პროცენტს შეადგენს?
70-79	2 ხე	$\frac{2}{20} = 0,1 = 10\%$
80-89		
90-99		
100-109		
110-119		
120-129		

- რამდენი ხე იძლევა მოსავალს: ა) 100 კგ-ზე ნაკლებს; ბ) 120 კგ-ზე ნაკლებს?
- მთელი ვაშლის ხეების რამდენ პროცენტს შეადგენენ ის ვაშლის ხეები, რომლების მოსავლის მასა 90 კგ-ზე ნაკლებია?

მესამე სვეტის მონაცემებზე დაყრდნობით შეადგინეთ ჰისტოგრამა.

2. ცხრილი 2-ში მოცემულია მუშების სამუშაო დრო :

ცხრილი 2

დრო (წუთი)	მუშების რაოდენობა
0-59	2
60-119	3
120-179	7
180-239	28
240-299	25
300-360	11

- რამდენმა მუშამ იმუშავა 2 საათზე ნაკლები?
- რამდენმა მუშამ იმუშავა 5 საათზე მეტი?
- ცხრილის საფუძველზე ააგეთ გრაფიკი. ამისათვის დახაზეთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომლის აბსცისთა ღერძი ასახავს დროს, ხოლო ორდინატთა ღერძი კი მუშების რაოდენობას და მიღებული წერტილები მიმდევრობით შეაერთეთ მრუდი წირით. გრაფიკის საფუძველზე გამოთქვით თქვენი მოსაზრება.

▶ V განყოფილება

3. სკოლაში მოსასვლელად მე-7 კლასის მოსწავლეები სარგებლობენ სხვადასხვა სახის ტრანსპორტით. მათი განაწილება ცხრილი 3-შია მოცემული განაწილებული. ამ ცხრილის საფუძველზე უპასუხეთ შეკითხვებს და წარმოადგინეთ მეორე სვეტის მონაცემები სვეტოვანი დიაგრამის, ხოლო მესამე სვეტის მონაცემები-გრავიკის სახით.

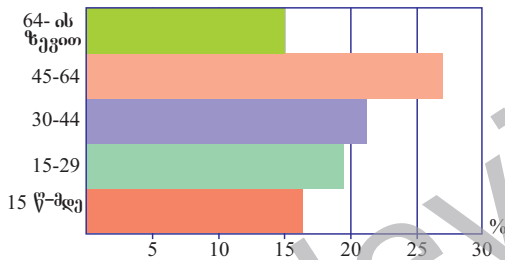
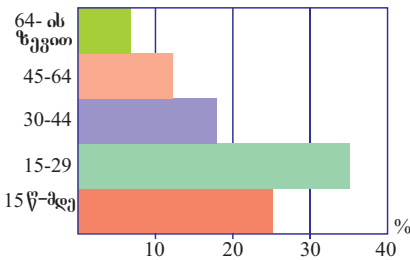
ცხრილი 3

ტრანსპორტის სახეობა	მოსწავლეთა რაოდენობა, რომლებიც ამ სახის ტრანსპორტით სარგებლობენ	შეფარდება საერთო რიცხვთან
ავტობუსი	23	0,50
მსუბუქი ავტომობილი	6	0,13
მატარებელი	1	0,02
ქვეითი	10	0,22
მეტრო	1	0,02
ველოსიპედი	5	0,11
ჯამი	46	1,00

ა) მოსწავლეთა მთელი რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მხოლოდ ავტობუსითა და მსუბუქი ავტომობილებით მოსარგებლებები?

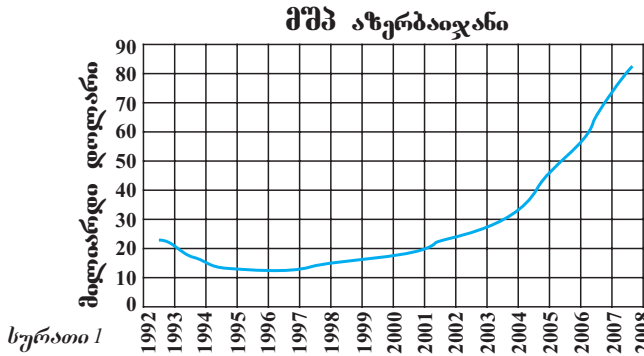
ბ) ავტობუსით მოსარგებლე მოსწავლეთა რიცხვის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მოსწავლეები, რომლებიც სარგებლობენ მატარებლითა და მეტროთი?

4. ქვემოთ აზერბაიჯანისა და ინდოეთის მოსახლეობის ასაკობრივი დაყოფა სვეტოვანი დიაგრამითაა გამო ასახული.



- ა) მოცემული ჰოსტოგრამებიდან რომელი შეიძლება მივაკუთვნოთ აზერბაიჯანის მოსახლეობის ასაკობრივ განაწილებას და რომელი ინდოეთის? პასუხი დაასაბუთეთ (სიცოცხლის ხანგრძლივობის საფუძველზე).
- ბ) რომელი ასაკობრივი ჯგუფი შეადგენს აზერბაიჯანის მოსახლეობის უმრავლესობას.
- გ) რომელი ასაკობრივი ჯგუფი შეადგენს ინდოეთის მოსახლეობის უმრავლესობას?
- დ) რომელი ორი მიმდევრობითი ასაკობრივი ჯგუფი შეადგენს თითოეული ქვეყნის მოსახლეობის 50%-ზე მეტს?
5. **მილიანა შიდა პროდუქტი (მშპ)**–ეს არის ერთი ქვეყნის საზღვრებში, გარეგნული დროის განმავლობაში ექსპორტის, შიდა სარგებლობისა და რეზერვის მიზნით წარმოებული საბოლოო პროდუქციისა და მომსახურების საერთო ღირებულება. მშპ, ერთ სულ მოსახლეზე გაანგარიშებული, მდიდრულია, როგორც სახელმწიფოში მცხოვრები ადამიანების ცხოვრების დონის ერთ-ერთი ძირითადი მაჩვენებელი.

სურათი 1-ზე მოცემულ გრაფიკზე ასახულია აზერბაიჯანის რესპუბლიკაში 1992 წლიდან 2008 წლამდე მშპ-ის ღირებულება. რა ინფორმაციების მიღება შეიძლება ამ გრაფიკიდან? უპასუხეთ შეკითხვებს, განმარტეთ, როგორ მიიღეთ შედეგი?

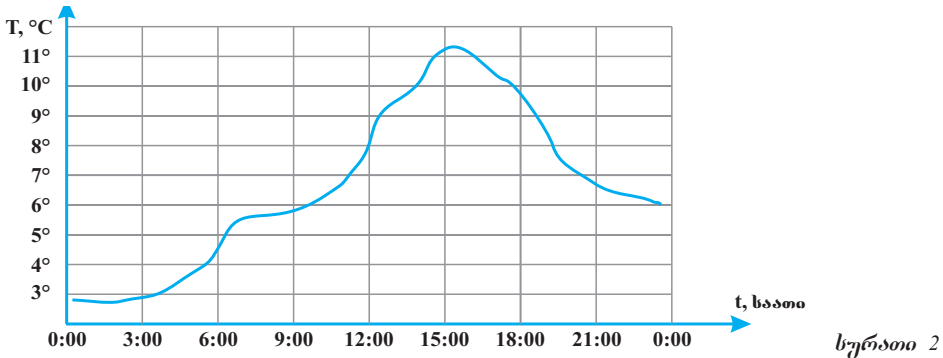


ა) რა თანხა შადგინა მშპ-მ 2007 წელს?

ბ) რამდენით განსხვავდებოდა 2002 წლის მშპ 1992 წლის მშპ-საგან?

გ) რამდენით აღემატებოდა 2006 წლის მშპ 1995 წლის მშპ-ს?

6. სურათი 2-ზე მოცემულია ჰაერის ტემპერატურის ცვლილების გრაფიკი.



გაარკვეით, რამდენი გრადუსი ცელსიუსი იყო ყველაზე მაღალი და ყველაზე დაბალი ტემპერატურა დღის განმავლობაში.

7. 50 სტუდენტის მიერ გამოცდის დროს მიღებული ქულების საფუძველზე ცნობილი გახდა, რომ არცერთ მათგანს არ მოუგროვებია 450 ქულაზე ნაკლები. ამ ინფორმაციის ცხრილის აგებისათვის აირჩიეს შემდეგი ინტერვალები: $[450; 500)$, $[500; 550)$, ..., $[650; 700]$. თუ 12 სტუდენტის ქულები არის ინტერვალში $[450; 500)$, 16 სტუდენტის ქულები ინტერვალში $[500; 550)$, 10 სტუდენტის - ინტერვალში $[550; 600)$, 8 სტუდენტისა - ინტერვალში $[600; 650)$, მაშინ:

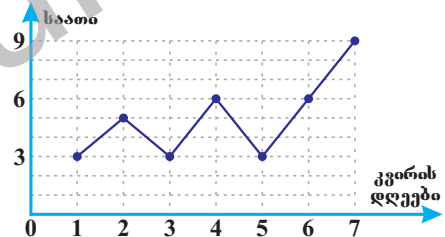
ა) სტუდენტების რამდენმა პროცენტმა მიიღო 500 ქულაზე ნაკლები?

ბ) სტუდენტების რამდენი პროცენტი მოხვდა $[500; 550)$ ინტერვალში?

გ) სტუდენტების რამდენმა პროცენტმა მიიღო 550 ქულაზე ნაკლები?

დ) სტუდენტების რამდენმა პროცენტმა მოაგროვა 700 ქულაზე ნაკლები?

8. მოსწავლის მიერ კვირის განმავლობაში მეცადინეობაზე დახარჯული დრო მოცემულია ხაზოვანი დიაგრამის სახით. მთელი კვირის განმავლობაში დახარჯული დროის რა ნაწილს შეადგენს ლუწ დღეებში დახარჯული დრო?



წრიული დიაგრამის აგება:

მოსამზადებელი ეტაპი:

1. იპოვეთ მონაცემთა ჯამი.
2. განსაზღვრეთ ჯამში შემავალ თითოეულ რიცხვს რა ნაწილი უჭირავს ჯამში.
3. განსაზღვრეთ ცენტრული კუთხე, რომელიც შეესაბამება თითოეულ ნაწილს (ამისათვის 360° გაამრავლეთ ნაწილის აღმნიშვნელ რიცხვზე).

აგების ეტაპი:

1. დახაზეთ ნებისმიერადიუსიანი წრე.
2. ააგეთ ცენტრული კუთხეები (ტრანსპორტირის დახმარებით).
3. თითოეული ცენტრული კუთხის შესაბამისი სექტორი სხვადასხვაფერად გააფერადეთ.
4. დამატებით აღნიშნეთ, რას შეესაბამება თითოეული ფერი.

ნიმუში

ცხრილში მოცემულია რიცხვები 2011 წელს აზერბაიჯანის ქალაქისა და სოფლის მოსახლეობის შესახებ:

ქალაქის მოსახლეობა (კაცი)	სოფლის მოსახლეობა (კაცი)
4 მლნ. 990 ათასი	4 მლნ. 316 ათასი

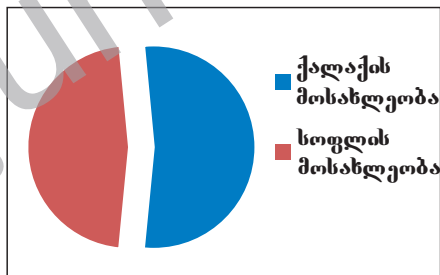
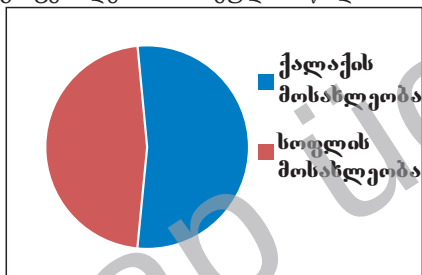
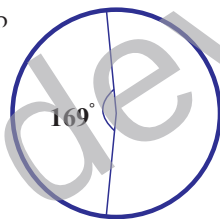
მოსამზადებელი ეტაპი:

1. აზერბაიჯანის მოსახლეობის რაოდენობა (ქალაქებისა და სოფლის მოსახლეობის ჯამი) შეადგენს 9 მლნ. 306 ათას კაცს.
2. ქალაქის მოსახლეობა: 4 მლნ. 990 ათასი: 9 მლნ. 306 ათასი $\approx 0,53$;
სოფლის მოსახლეობა: 4 მლნ. 316 ათასი: 9 მლნ. 306 ათასი $\approx 0,47$.
3. განსაზღვრეთ თითოეული ნაწილის შესაბამისი ცენტრული კუთხე:

$$360 \cdot 0,53 \approx 191^\circ \text{ და } 360 \cdot 0,47 \approx 169^\circ$$

აგების ეტაპი:

1. დახაზეთ ნებისმიერადიუსიანი წრე.
2. ააგეთ 191° -იანი და 169° -იანი ცენტრული კუთხეები.
3. გააფერადეთ თითოეული ნაწილი.



9. მსოფლიოს კონტინენტების ფართობები გამოსახეთ წრიული დიაგრამის სხით. (გამოთვლები კალკულატორზე შეასრულეთ.)

კონტინენტის დასახელება	კონტინენტის ფართობი (მლნ კმ ²)	ნაწილი	პროცენტი (%)	ცენტრული კუთხე (გრადუსებით)
ევროპა	11,5	$11,5 : 150 \approx 0,07$	$0,07 \cdot 100 = 7$	$360 \cdot 0,07 \approx 28$
აზია	43,4	$43,4 : 150 \approx 0,29$	$0,29 \cdot 100 = 29$	$360 \cdot 0,29 \approx 104$
აფრიკა	30,3			
ამერიკა	42			
ავსტრალია	8,7			
ანტარაქტიდა	14,1			
ჯამი	150	1,00	100	360

10. 150 კაცს შორის ჩატარებულმა გამოკვლევებმა გამოავლინა საერთო შეცდომები, რომლებსაც ყველაზე მეტად უშვებენ კანდიდატები შრომითი მოწყობის მიზნით გასაუბრების დროს. შედეგები ქვემოთაა მოცემული:

მიზეზი	პროცენტი (%)
არ ფლობს ინფორმაციას ფირმის შესახებ	46
არ არის მზად თავის კარიერულ გეგმებზე სასაუბროდ	22
არ არის საქმიან განწყობაზე	18
არ ჰყოფნის მხედველობითი კონტაქტი	5
ვერ ფლობს მეტყველების კულტურას	3
სხვა მიზეზები	6

ა) ააგეთ სვეტოვანი და წრიული დიაგრამა, გრაფიკი.

ბ) რომელი დიაგრამა ასახავს ყველაზე უკეთესად ამ ინფორმაციას? რა შეგიძლიათ თქვათ გრაფიკის შესახებ?

11. სხვადასხვა ოფისებში ჩატარდა გამოკითხვა კომპიუტერებზე ანტივირუსული პროგრამების გამოყენების შესახებ. ქვემოთ მოცემულ ცხრილში გამოკითხვის შედეგები ნაჩვენებია პროცენტების სახით:

ანტივირუსული პროგრამების გამოყენება ოფისებში	პროცენტი (%)
ზოგიერთი კომპიუტერი უზრუნველყოფილია ამ პროგრამით.	12
ყველა კომპიუტერი უზრუნველყოფილია ამ პროგრამით.	59
მომდევნო 12 თვეში არის გათვალისწინებული.	20
ანტივირუსულ პროგრამებზე საჭიროება არ არსებობს.	9

ა) ააგეთ სვეტოვანი და წრიული დიაგრამა

ბ) რომელი დიაგრამა უფრო სრულად ასახავს ამ ინფორმაციას?

5.19. პროგნოზირება

პროგნოზი– ეს არის ვარაუდი კვლევის ობიექტის მომავალი მდგომარეობის შესახებ. **პროგნოზირება**– ეს არის მეცნიერული მეთოდების საფუძველზე პროგნოზის დამუშავების მეთოდი. მიუხედავად იმისა, რომ შეუძლებელია ვამტკიცოთ, პროგნოზირებული მოვლენის 100%-იანი განხორციელება, პროგნოზირება მაინც იკავებს მნიშვნელოვან ადგილს ადამიანის საქმიანობაში. პროგნოზირების საფუძველზე მუშავდება სხვადასხვა ვადიანი პროგრამები (გეგმები).

საგარჯიშოები

- ქვემოთ მოცემულ ცხრილში 2011-2013 წლებში ზოგიერთი ქვეყნიდან თურქეთში შესულ ადამიანთა რაოდენობაა ნაჩვენები. წარმოადგინეთ ცხრილის მონაცემები სვეტოვანი დიაგრამის სახით.

წლები ქვეყნები	2011	2012	2013
იაპონია	150000	150000	200000
აზერბაიჯანი	460000	420000	490000
აშშ	680000	650000	640000

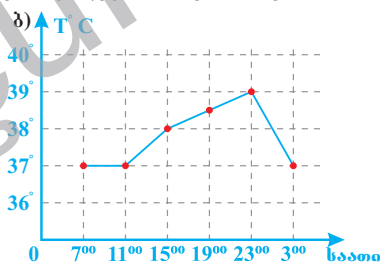
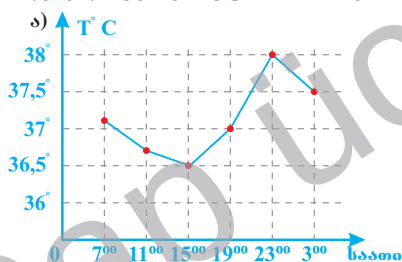
რა აზრის გამოთქმა და რა პროგნოზის გაკეთება შეიძლება დიაგრამის საფუძველზე?

- ცხრილში ნაჩვენებია 2 ფირმის მიერ 1 წლის განმავლობაში 3-თვიან ინტერვალზე ავტომობილების რეალიზაციის მაჩვენებლები. ცხრილის საფუძველზე ააგეთ ხაზოვანი დიაგრამა.

ფირმა თვეები	I ფირმა	II ფირმა
1-3	12	7
4-6	10	10
7-9	6	10
10-12	13	13

რა აზრის გამოთქმა და რა პროგნოზის გაკეთება შეიძლება დიაგრამის საფუძველზე?

- ქვემოთ ფატიმას (ა) და ნეზრინის (ბ) 1- დღიანი სხეულის ტემპერატურის მაჩვენებელი გრაფიკებია მოცემული. გრაფიკის საფუძველზე გაარკვიეთ, ამ ავადმყოფების ერთი და იგივე საათზე სხეულის ტემპერატურები და გამოთქვით მოსაზრება, რამდენად არის შესაძლებელი ტემპერატურათა პროგნოზირება შემდეგი საათებისათვის.



5.20. შედარებით რთული ხელსაყრელ შემთხვევებისათვის ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი

რაიმე მოვლენის მოხდენისათვის არსებულ ხელსაყრელ შემთხვევათა გამოკვლევისათვის სხვადასხვა ხერხი გამოიყენება. ამ ხერხების გამოყენებით შეუძლებელია გამოგვრჩეს რაიმე ვარიანტი. მაგალითად, რამდენიმე ციფრისაგან შემდგარი რიცხვის დასაწერად ყველა ხელსაყრელ შემთხვევათა გამოკვლევისათვის გამოიყენება ცხრილური ხერხი.

ნიმუში

მაგალითი 1: დაწერეთ ყველა ორნიშნა რიცხვი, რომლებშიც მონაწილეობენ ციფრები 3, 7 და 9.

ამოხსნა: მოთხოვნილი ორნიშნა რიცხვების დაწერისათვის აუცილებელია შევადგინოთ ცხრილი:

1-ლი ციფრი	მე-2 ციფრი		
	3	7	9
3	33	37	39
7	73	77	79
9	93	97	99

როგორც ცხრილიდან ჩანს, ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვია: $n = 3 \cdot 3 = 9$.

ნიმუში

მაგალითი 2: სეიმურს აქვს 3 შარვალი და 5 პერანგი. რამდენაირად შეუძლია მას ამ ტანსაცმლის ჩაცმა?

ამოხსნა: სეიმურს ყოველი შარვლის 5 პერანგიდან თითოეულთან ჩაცმა შეუძლია. ქვემოთ მოცემული ცხრილის საფუძველზე განვსაზღვროთ ყველა შემთხვევათა რიცხვი:

ტანსაცმელი	I პერანგი	II პერანგი	III პერანგი	IV პერანგი	V პერანგი
I შარვალი	I-I	I-II	I-III	I-IV	I-V
II შარვალი	II-I	II-II	II-III	II-IV	II-V
III შარვალი	III-I	III-II	III-III	III-IV	III-V

როგორც ცხრილიდან ჩანს, ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვია: $n = 3 \cdot 5 = 15$.

ასეთი ამოცანების ამოხსნისათვის არაა აუცილებელი ყოველთვის შევადგინოთ ცხრილები. ამისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ “გამრავლების წესი”.

ნიმუში

მაგალითი 3: დაწერეთ ორნიშნა კოდი, რომელიც შედგება A, B, C, D და E ასოებისაგან.

ამოხსნა: კოდის პირველი ასო შეიძლება იყოს ნებისმიერი ამ ასოთაგანი: $n = 5$. მეორე ასოც შეიძლება იყოს ნებისმიერი ამ ასოთაგანი. შესაბამისად: $m = 5$, მაშინ გამრავლების წესის თანახმად, კოდი, რომელიც შედგება ამ ასოებისაგან შეიძლება ჩაიწეროს $n \cdot m = 5 \cdot 5 = 25$ ხერხით. თუ მოითხოვება, რომ ასოები არ განმეორდეს, მაშინ ამ შემთხვევათა რიცხვი $5 \cdot 4 = 20$ იქნება.

1. ცხრილის შედგენის მეთოდის გამოყენებით დაწერეთ ყველა ორნიშნა რიცხვი ქვემოთ მოცემული ციფრების გამოყენებით:

ა) 1, 4, 5; ბ) 2, 0, 7, 6; გ) 0, 5, 7, 9.

2. ორხანი და სარხანი ტყუპები არიან. მათი დაბადების დღეზე სამირს სურს, რომ თითოეულ მძას განსხვავებული ფერის ბურთი აჩუქოს. მაღაზიაში მხოლოდ 3 ფერის ბურთია: თეთრი, შავი და კოპლებიანი. რამდენი ხერხით შეუძლია სამირს შეიძინოს ბურთები მძებისათვის?

3. 7^ა კლასის გაკვეთილების ცხრილში ორშაბათისათვის პირველი გაკვეთილი უნდა იყოს ფიზიკა ან მათემატიკა, ხოლო მეორე გაკვეთილი - აზერბაიჯანული ენა ან ლიტერატურა. რამდენი ხელსაყრელი შემთხვევა არსებობს ცხრილის პირველი და მეორე გაკვეთილების ასეთი შედგენისათვის?

4. A ქალაქიდან B ქალაქში მისასვლელად საჭიროა ჯერ მდინარემდე მისვლა და მეორე ნაპირზე გადასვლა. მდინარემდე მისვლა შეიძლება ქვეითად, ავტობუსით, ველოსიპედითა და ავტომობილით. მდინარეზე გადასვლა შეიძლება ნავით, კატერით ან გადაცურვით. რამდენი ხერხი არსებობს A ქალაქიდან B ქალაქში მისასვლელად?

5. ორხილიანი კომპოტის დასამზადებლად დედას 7 სახის ხილიდან რამდენი ხერხით შეუძლია შერჩევა?

6. ყუთში 8 სხვადასხვა ფერის ცარცია. ყუთიდან თითო ცარცი აიღო ჯერ რენამ, შემდეგ სეიმურმა. განსაზღვრეთ ასეთი ცარცის არჩევის რამდენი ხელსაყრელი შემთხვევა არსებობს?

7. 1, 2, 3, 4, 5 და 6 ციფრებისაგან შედგენილია ორნიშნა რიცხვები. განსაზღვრეთ ასეთი ორნიშნა რიცხვების შედგენის შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი, თუ: ა) ციფრები განმეორდება; ბ) არ განმეორდება. იპოვეთ თითოეული შემთხვევისათვის ხდომილობის ალბათობა.

8. ა) ენვერი, საჰიბი, ჯეიჰუნი და ელგიზი ჭადრაკს თამაშობენ. რამდენი პარტია იყო ნათამაშევი, თუ ცნობილია, რომ თითოეულმა მოთამაშემ თითოეულ მეტოქესთან ერთი პარტია ითამაშა?

ბ) თამაშის შემდეგ ენვერმა, საჰიბმა, ჯეიჰუნმა და ელგიზმა ერთმანეთს სურათები აჩუქეს. რამდენი სურათი აჩუქეს ერთმანეთს მეგობრებმა?

9. მენიუში წარმოდგენილია ცხელი და ცივი საჭმელების სია. მენიუდან სადილისათვის საჭმელების შერჩევის რამდენი შესაძლო შემთხვევა არსებობს?(ერთი ცხელი და ერთი ცივი საჭმლის შერჩევით).

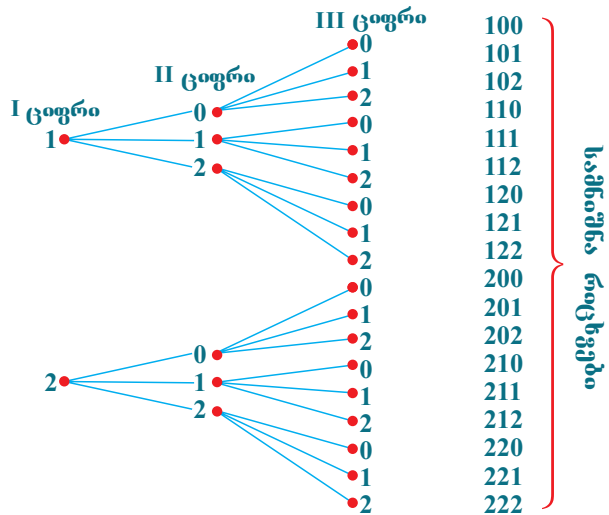


ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვის გამოთვლა მარტივია გრაფების საშუალებით. **გრაფი** წერტილებისაგან (წვეროები) და ამ წერტილების შემადგენელი მონაკვეთებისაგან (წიბოები) შემდგარი გეომეტრიული ფიგურაა. წვეროებზე ამოცანის პირობით მოცემული ელემენტები განთავსდება, წიბოები კი ამ ელემენტებს შორის კავშირს უჩვენებს.

ნამუში

მაგალითი: დაწერეთ 0, 1 და 2 ციფრებისაგან შემდგარი ყველა სამნიშნა რიცხვი.

ამოხსნა: სამნიშნა რიცხვის პირველი ციფრი შეიძლება იყოს ან 1 ან კიდევ 2. მეორე და მესამე ციფრები კი შეიძლება იყოს სამიდან ნებისმიერი, ამიტომ გრაფი იქნება მარჯვნივ მოცემული ფორმის. გრაფიდან ნათლად ჩანს, რომ 0, 1, და 2 ციფრებისაგან შემდგარი 18 სამნიშნა რიცხვი არსებობს.



10. ხუთი მეგობარი შეხვდება ერთმანეთს და ხელს ჩამოართმევნ. გრაფით გამოსახვის მეთოდით განსაზღვრეთ, რამდენი ხელჩამორთმევა მოხდა?
11. საქმიანი შეხვედრის შემდეგ, თითოეულმა ბიზნესმენმა დაურიგა სავიზიტო ბარათი დანარჩენებს. განსაზღვრეთ, სულ რამდენი სავიზიტო ბარათი დარიგდა, თუ შეხვედრაში მონაწილეობდა: ა) 3 კაცი; ბ) 4 კაცი; გ) 5 კაცი?
12. ცნობილია, რომ კაფის მენიუმში შედის 2 სახის ცხელი კერძი: ბორშჩი და სუპი; 3 სახის არაწვნიანი კერძები თევზი, ფლავი და ქათამი; ორი სახის სასმელი: კომპოტი და ჩაი: რამდენწაირად შეიძლება შეირჩეს ვახშამი სამი ასორტიმენტით (ერთი წვნიანი, ერთი არაწვნიანი და ერთი სასმელი)?
13. გულაის ხუთნიშნა ტელეფონის ნომრიდან დაავიწყდა მე-2 და მე-5 ციფრები, მაგრამ ახსოვდა, რომ ეს ციფრები იყო ლუწი. ყველაზე მეტი რამდენი ცდა დასჭირდება დაავიწყებული ნომრის აღსადგენად? რომ არ ხსომებოდა ციფრების ლუწობა, მაშინ მაქსიმუმ რამდენი ცდა იქნებოდა საჭირო?
14. ა) რამდენი განსხვავებული სამნიშნა რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს ციფრებისაგან ა) 1, 2, 4; ბ) 0, 2, 5, 8?
 1) თითოეული ციფრის ერთხელ გამოყენებისას;
 2) ციფრის განმეორებით გამოყენების შემთხვევაში.

5.21. ხდომილების ალბათობა

საქმიანობა

- კამათელი ერთხელ გააგორეთ. შეგიძლიათ შეუხედავად თქვათ, რა ციფრი მოვა კამათელის ზედაპირზე? დაახასიათეთ ქვემოთ მოცემული მოვლენის მოხდენის ხელსაყრელი შემთხვევები.



 - კამათელზე 6 ქულის მოსვლა შესაძლო შემთხვევაა? ბ) ზედაპირზე “1” ქულის მოსვლისა და 4 ქულის მოსვლის ალბათობების შესახებ რისი თქმა შეგიძლიათ? ისინი ტოლშესაძლებელი მოვლენებია? გ) 0 ქულის მოსვლის ხდომილება, როგორი ხდომილებაა?
- სათამაშო კამათელის ერთხელ გაგორებისას, რამდენი შესაძლო შემთხვევა შეიძლება მოხდეს? ზედაპირზე 5 ქულის მოსვლის რამდენი ხელსაყრელი შემთხვევა არსებობს?
- განსაზღვრეთ “5” ქულის მოსვლის ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვის შესაძლო შემთხვევათა რიცხვთან შეფარდება. რას გვატყობინებს ეს წილადი? პასუხის განმარტებით მოსაზრება დაასაბუთეთ.

ნებისმიერი ჩატარებული ექსპერიმენტის შედეგი არის **ელემენტარული ხდომილება**. მაგალითად, მონეტის აგდების შემთხვევაში მისი რომელიმე მხარეზე დაცემა ელემენტარული ხდომილებაა. ამის შემდეგ ელემენტარულის ნაცვლად, ვიტყვით უბრალოდ ხდომილობას.

რაიმე მოვლენის მოხდენის დროს “ეს ხდომილობა მაღალალბათიანია” ან “უფრო დაბალალბათიანია”, ზოგჯერ კი – “ტოლშესაძლებელია” – გამოთქმით მათი მოხდენის ალბათობის გამოთვლა ძნელია. ხშირ შემთხვევაში ეს ინფორმაცია საკმარისი არ არის, ამიტომ, ხდომილობის ალბათობა გამოისახება რიცხვებში.

მათემატიკაში ხდომილობის ალბათობა აღინიშნება P ასოთი (ინგლისური სიტყვის “probability”-ის პირველი ასო) A ხდომილობის ალბათობა აღინიშნება $P(A)$ -თი (ან იწერება როგორც $P_{\text{მოვლენის დასახელება ან აღნიშვნა}}$ მაგალითად: $P_{\text{წიმა}}$).

მოვლენის მოხდენის ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვის შეფარდებას შემთხვევათა საერთო რიცხვთან, ხდომილების **ალბათობა** ეწოდება.

$$P_{\text{ხდომილობის ალბათობა}} = \frac{\text{მოვლენის მოხდენის ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი}}{\text{მოვლენის ხდომილობის შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი}}$$

A ხდომილობისათვის ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი გამოვსახოთ $n(A)$ შესაძლო (ტოლშესაძლებელიანი) შემთხვევათა რიცხვი - n -ით. $P(A) = \frac{n(A)}{n}$

აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა 1-ის ტოლია. : $P_{\text{აუცილებელი}} = \frac{n}{n} = 1$. შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა 0-ია. $P_{\text{შეუძლებელი ხდომილობის}} = \frac{0}{n} = 0$.

ნიმუში

მაგალითი: 20 კაპიკიანი მონეტის ერთხელ აგდებისას იპოვეთ რუკის ან საფასურის მოსვლის ალბათობა.

ამოხსნა: მონეტის აგდებისას რუკის მხარის ან საფასურის მოსვლის ხდომილობა აუცილებელი ხდომილობაა. ორივე მათგანის მოსვლის ხდომილობის ტოლალბათობიანობის გამო: $P_{\text{რუკის}} = P_{\text{საფასურის}} = \frac{1}{2}$.



ნამუშეო

მაგალითი: იპოვეთ კამათელის ერთხელ გაგორებისას ზედაპირზე 4 ქულის მოსვლის ალბათობა.

ამოხსნა: კამათელის გაგორებისას ელემენტარული ხდომილობა შეიძლება იყოს 1, 2, 3, 4, 5 და 6 რიცხვებიდან ერთ-ერთის მოსვლა. ყველა ეს შემთხვევა ტოლალბათობიანია და რომელიმე ორი არ შეიძლება ერთდროულად მოხდეს. შესაბამისად შემთხვევითი ხდომილების ალბათობა (1) იყოფა მათ შორის თანაბრად. ამრიგად,

ამ მოვლენის მოხდენის ალბათობა: $\frac{1}{6} \cdot P_{4\text{-ის მოსვლის}} = \frac{1}{6}$.

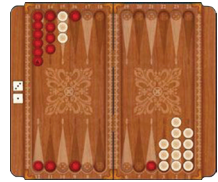


საგარჯიშოები

- განსაზღვრეთ მოცემული ხდომილობები შემთხვევითია თუ შეუძლებელი და იპოვეთ ალბათობა.
 - მათემატიკის მომდევნო მცირე შემაჯამებელ შეფასებაში ყველა მოსწავლის მიერ “ფრიადის” მიღება;
 - ყველა გაკვეთილის ექსკურსიით შეცვლა.
 - წელიწადის ბოლო სეზონი - ზამთარია.
 მოიყვანეთ შემთხვევითი და აუცილებელი ხდომილობების მაგალითები.
- იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათელის ერთხელ გაგორებისას მოვა ლუწი რიცხვი.
- განსაზღვრეთ კამათელის ზედიზედ 3-ჯერ გაგორებისას ყოველ ჯერზე 1 ქულის მოსვლის ალბათობა.
- თეფშზე 5 შაქარბურა, 7 ფახლავა და 4 ქადა ეწყო. როიამ ერთი მათგანი აიღო. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მან შეარჩია ფახლავა? რისი ტოლია ქადის არჩევის ალბათობა?
- ბებიის 5 ფინჯანი წითლადაა მოხატული, 12-მწვანედ. ბებიამ ერთ ფინჯანში დაასხა ჩაი. განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ფინჯანი მწვანედ არის მოხატული.
- ანარმა ჩაიფიქრა ორნიშნა რიცხვი. განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემულ ხდომილობათა ალბათობა.
 - ხდომილობა იმისა, რომ რიცხვი დამთავრდება ციფრი 3-ით;
 - ხდომილობა იმისა, რომ ციფრები იქნება ერთნაირი;
 - ხდომილობა იმისა, რომ ციფრების ჯამი 5-ის ტოლი იქნება;
 - ხდომილობა იმისა, რომ რიცხვი 6-ის ჯეოადია;
 - ხდომილობა იმისა, რომ ბოლო ციფრი იქნება 7;
 - ხდომილობა იმისა, რომ ათეულების თანრიგის ციფრისა და ერთეულების თანრიგის ციფრის სხვაობა 2-ია

▶ V განყოფილება

7. ნარდის თამაშისას ორი კამათელი გორდება და ზედა წახნაგზე მოსული ქულები იკრიბება. მოთამაშე სათამაშო ქვევით კამათელზე მოსული ქულების ჯამის ოდენობის მოძრაობას ასრულებს. იმისათვის, რომ არ აღმოჩნდეს “მარსის“ მდგომარეობაში, რაპიბს სჭირდება ქულები, რომლის ჯამი 10-ია. თქვენი აზრით, რისი ტოლია ჯამში 10 ქულის მოსვლის ალბათობა. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ ქულები 6-6 იქნება?.



8. პირველი 100 ნატურალური რიცხვიდან შეარჩიეთ ნებისმიერი რიცხვი. ამ რიცხვისათვის განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ:

- ეს რიცხვი იყოფა 10-ზე;
- ეს რიცხვი იყოფა 5-ზე;
- 12-ზე გაყოფისას ნაშთში რჩება 5;
- მისი ციფრების ჯამი 7-ის ტოლია.

9. **პრაქტიკული სამუშაო.** მერხის ამხანაგთან ერთად ჩატარეთ ცდა ორი კამათელის გაგორებაზე. ა) თითოეულმა თქვენთაგანმა კამათელები გააგოროს 36-ჯერ. თითოეული გაგორების შემდეგ, თითოეული იწერს მიღებულ შედეგს ისე, როგორც ნიმუშზეა ნაჩვენები.

ცდის ნომერი №	პირველი მოსწავლე	მეორე მოსწავლე
1	3 – 6	2 – 1
2		
3		
...		
36		

- ბ) თითოეული მოსწავლე პოულობს თანაფარდობას მოსულ ერთნაირ წყვილებსა და ჩატარებულ ცდათა რაოდენობას შორის:

$$\frac{\text{ერთნაირი წყვილების რიცხვი}}{36} (*)$$

(მაგალითად, თუ მეორე მოთამაშეს წყვილი 2-1 მოუვიდა 10-ჯერ, მაშინ $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$).

გამოთქვით მოსაზრება ქვემოთ მოცემულების შესახებ.

- თითოეული მიღებული წყვილისათვის (*) წილადის შედეგი შეადარეთ მერხის ამხანაგის მიღებულ შედეგთან;
- მიღებული შედეგი შეადარეთ $\frac{1}{6}$ წილადთან. თუ თქვენი მიღებული შედეგი განსხვავდება $\frac{1}{6}$ -საგან, შეძლებთ განმარტოთ ამის მიზეზი?
- იპოვეთ მთელი კლასის რაიმე წყვილისათვის მიღებული შედეგების ჯამის ყველა ცდის ჯამთან შეფარდება (მაგალითად, თუ კლასში 12 მოსწავლეა, თითოეულთან 2-1 წყვილის მოსვლის ხდომილობათა რაოდენობის $12 \cdot 36$ ნამრავლთან შეფარდება). შეადარეთ ეს შედეგი $\frac{1}{6}$ -თან.

5.22. ალბათობათა ჯამი

ხდომილობებს, რომლებიც შეუძლებელია, რომ ერთდროულად მოხდეს, არათავსებადი ხდომილობები ეწოდება.

არათავსებადი A და B მოვლენების ჯამის ხდომილობის ალბათობა A მოვლენის ხდომილობის ალბათობის და B მოვლენის ხდომილობის ალბათობის ჯამის ტოლია.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

ნამუშაო

მაგალითი: იპოვეთ ერთი კამათელის ერთხელ გაგორებისას 5-ის ან 2-ის მოსვლის ალბათობა.

ამოხსნა: ჩვენ ვიცით, რომ კამათელის ერთხელ გაგორებისას მოვა 6 ტოლშესაძლებლობიანი ქულიდან ერთ-ერთი. ჩვენ გვაინტერესებს 2-ის ან 5-ის მოსვლის ალბათობა. ავღნიშნოდ 2-ის მოსვლის ალბათობა A-თი, ხოლო 5-ის მოსვლის ალბათობა B-თი. მაშინ $P(A) = \frac{1}{6}$

და $P(B) = \frac{1}{6}$ -შესაბამისად $P(A+B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. **პასუხი:** $\frac{1}{3}$.

საგარჯიშოები

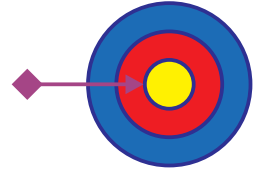
- განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათელის ერთხელ გაგორებისას:
 - ამოსული რიცხვი იქნება 2-ზე მეტი;
 - მოსული რიცხვი იქნება 5-ზე ნაკლები;
 - მოსული რიცხვი იქნება კენტი.
- ორი მონეტის (20-კაპიკიანები) ერთდროულად, ერთხელ აგდებისას, თუნდაც ერთზე რუკიანი მხარის მოსვლის ხდომილობის ალბათობის გაანგარიშებისას, ფაიკი მოსაზრებას ასე აყალიბებს: „თუნდაც ერთ მონეტაზე, რუკიანი მხარის მოსვლისათვის ორი შესაძლებლობა არსებობს: ან პირველ მონეტაზე უნდა მოვიდეს, ან კიდევ-მეორე მონეტაზე. თან პირველ, თანაც მეორე მონეტაზე რუკიანი მხარის მოსვლის ხდომილობის ალბათობა $\frac{1}{2}$ -ია. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. მაშასადამე, თუნდაც ერთ მონეტაზე რუკიანი მხარის მოსვლის ხდომილობა აუცილებელი ხდომილობაა“.

 - რა შეცდომა დაუშვა ფაიკმა საკუთხარი მოსაზრების დასაბუთებისას?
 - როგორ უნდა ჩამოეყალიბებინა ფაიკს სინამდვილეში თავისი მოსაზრება? რას უდრის მოცემული ცდის დროს ერთ-ერთ მონეტაზე რუკიანი მხარის მოსვლის ხდომილობის ალბათობა?

- ცნობილია, რომ 200 ლატარიის ბილეთიდან ორ ბილეთში არის 100 მანათიანი, ხუთში - 50 მანათიანი, შვიდში - 20 მანათიანი მოგება. გამოთვალეთ ელსეკარის მიერ შეძენილი ერთი ბილეთისათვის:
 - ალბათობა იმისა, რომ მოიგებს 100 მანათს;
 - ალბათობა იმისა, რომ მოიგებს 50 ან 20 მანათს;
 - ალბათობა იმისა, რომ მოიგებს;
 - ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს.

► V განყოფილება

4. პარკში 10 წითელი, 5 მწვანე, 25 ყვითელი და 20 თეთრი ბურთულაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პარკიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთულა ფერადი იქნება.
5. მსროლელი მიზანში იღებს სამიზნეს, რომელიც სამი ფერისაა. ისრის პირველ ნაწილში მოხვედრის ალბათობა 0,35-ია, მეორე ნაწილში მოხვედრის ალბათობა კი 0,45-ია. განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელის მიერ ნასროლი პირველი ისარი მოხვდება ან პირველ ან კიდევ მეორე ნაწილში.
6. **პრაქტიკული სამუშაო.** ქვემოთ მოცემული ცხრილი A3 ფორმატის ქაღალდზე (ან დაფაზე) დახატეთ და დაფაზე დაკიდეთ. კლასში მყოფმა თითოეულმა მოსწავლემ 20-კაპიკიანი მონეტის 10-ჯერ აგდებით ცდა ჩაატაროს. მიღებული შედეგები, ქვემოთ მოცემული ნიმუშს მსგავსად, თქვენთვის კუთვნილ სვეტში შეიტანეთ და შეავსეთ ცხრილი.



მოსწავლე	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	ჯამი
საფასურიანი მხარის მოსვლა(რაოდენობა)	4										
რუკიანი მხარის მოსვლა (რაოდენობა)	6										
საფასურიანი შედეგის ალბათობა											
საფასურიანი მხარის მოსვლის ალბათობა	$\frac{2}{5}$										
რუკიანი მხარის მოსვლის ალბათობა.	$\frac{3}{5}$										

ცხრილის საფუძველზე გამოიკვლიეთ შემდეგი საკითხები:

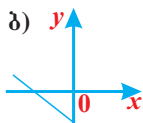
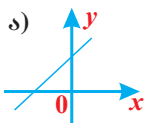
- ა) თითოეული მოსწავლის ჩატარებულ ცდაში საფასურიანი მხარის მოსვლის ხდომილობის ალბათობა შეადარეთ $\frac{1}{2}$ -თან. განმარტეთ, $\frac{1}{2}$ -ისაგან განსხვავებული შედეგები რატომ გვაქვს ცალკეულ შემთხვევებში?
- ბ) მოსწავლეთა მიერ ჩატარებული შედეგების შეჯამებით, განსაზღვრეთ საფასურიანი მხარის მოსვლის ხდომილობის ალბათობა და რუკიანი მხარის მოსვლის ხდომილობის ალბათობა. ეს შედეგები შეადარეთ თითოეული მოსწავლის მოცემულ შესაბამის ალბათობებთან. მათ შორის რომელი უფრო ახლოს დგას $\frac{1}{2}$ -თან?
- გ) მონეტის აგდებით ჩატარებულ ცდაში რუკიანი მხარის მოსვლის ხდომილობის ალბათობა $\frac{1}{2}$ -ის ტოლია. ნიშნავს თუ არა ეს იმას, რომ 10 ცდაში 5-ჯერ აუცილებლად მოვა რუკიანი მხარე? მოსაზრება დაასაბუთეთ.

თვითშეშოვნება

1. x -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $y(x)=3-4x^2$ ფუნქციის გრაფიკის მნიშვნელობა -13 -ის ტოლი?

2. ააგეთ $y = 3x - 4$ ფუნქციის გრაფიკი.

3. მოცემული $y = kx + b$ ფუნქციის გრაფიკის საფუძველზე განსაზღვრეთ k კოეფიციენტის ნიშანი.



4. $y = kx + 3$ ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $A(2; 5);$ ბ) $M\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ წერტილებზე გაივლის. იპოვეთ k -ს მნიშვნელობა.

5. $y = kx$ ფუნქციის გრაფიკი $B\left(-\frac{3}{4}; 5\right)$

წერტილზე გაივლის. იპოვეთ k -ს მნიშვნელობა და ააგეთ მიღებული ფუნქციის გრაფიკი.

6. აჩვენეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკებიდან პარალელურები და ერთმანეთის მკვეთები.

$$y = 3x - 7; y = \frac{1}{2} + 3x; y = \frac{-7 + 2x}{4};$$

$$y = \frac{5 + 3x}{2}; y = 7x - 4; y = \frac{3x - 35}{5};$$

$$y = \frac{-6 + 14x}{2}; y = \frac{3}{8} + 7x.$$

7. ა) გადააქციეთ ფარენგეიტად: $55^\circ\text{C}, 12^\circ\text{C}, 93^\circ\text{C}, 61^\circ\text{C}.$

ბ) გადააქციეთ ცელსიუსად: $125^\circ\text{F}, 42^\circ\text{F}, 35^\circ\text{F}, 112^\circ\text{F}.$

8. $5x - 6y = 7$ განტოლების გრაფიკი $A(-a; 3a)$ წერტილზე გაივლის. იპოვეთ x და y -ის მნიშვნელობა.

9. ამოხსენით მოცემული განტოლებათა

სისტემა გრაფიკული ხერხით:

$$\text{ა) } \begin{cases} x + y = 6, \\ 3x - y = 2; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} -2x = y - 3, \\ 3y = 5x - 2. \end{cases}$$

10. a -ს რა მნიშვნელობისათვის

$$\begin{cases} ax + 3y = 0, 5 \\ 2x - 4y = 0, 25 \end{cases} \quad \text{განტოლებათა სისტემას:}$$

ა) ფესვი არ აქვს, ბ) აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი, გ) უსასრულო რაოდენობის ფესვი აქვს?

11. სამკუთხედის გარე კუთხე 120° -ია. მასთან არამოსაზღვრე შიგა კუთხეების შეფარდებაა $10 : 14$. განსაზღვრეთ სამკუთხედის კუთხეები.

12. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ჩასმისა და შეკრების ხერხით:

$$\text{ა) } \begin{cases} 5x + 3y = -14 \\ -7x - 4y = -5 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} y - 8x = 22 \\ 9y - 4x = -30 \end{cases}$$

13. ABC სამკუთხედში თუ $AB = 7$ სმ, $AC = 90$ მმ, $BC = 0,036$ მ, მაშინ დაწერეთ კუთხეების სახელები გრადუსის მნიშვნელობის შემცირების რიგის მიხედვით:

14. რამდენი ხერხით შეიძლება მისცეს მასწავლებელმა ფარგალი, სახაზავი და ტრანსპორტირი ორ მოსწავლეს?

15. ზუთი დღე გზაში მყოფი ტურისტების მოძრაობის ცხრილი ქვემოთაა მოცემული.

დღე	I	II	III	IV	V
კმ	10	20	30	35	32

ააგეთ გრაფიკი ცხრილის მიხედვით.

16. ორ კალათაში 25 კგ ვაშლი იყო. თუ პირველი კალათიდან $3,5$ კგ ვაშლს ამოვიღებთ, მეორე კალათაში 5 კგ-ით მეტი ვაშლი იქნება ვიდრე პირველში. რამდენი კილოგრამი ვაშლი იყო თავდაპირველად თითოეულ კალათაში?

17. მოსწავლემ ჩაიფიქრა ერთნაირ ციფრებით დაწერილი ორნიშნა რიცხვი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვი კენტი იქნება.

I განყოფილება

გაკვეთილი 1.1. №1. ა) გ, ე) მდარია, ბ), დ), ვ) კუმარიტია; №4. ა) -2, ბ) -5, გ) 0; №6. ა) -15,5, ბ) 1, გ) $-\frac{7}{44}$, დ) -2,48, ზ) -14, ი) -5,4, კ) $-\frac{6}{7}$; №7. ა) 4,05, ბ) -2,7, გ) 1,855; №8. ა) 49, ბ) $\frac{3}{4}$, გ) 3,86, დ) 2, ე) -30; №9. ა) -0,5, ბ) 14,73.

გაკვეთილი 1.2. №2. A(-0,5), B(4), C(1,9), D(5,8), M(-3,6) N(-5), K(-2,1); №3. ა) 5,5, ბ) 1,5, გ) 12,2; №4. ა) 0,64 ან -6,44, ბ) -2,45 ან 11,15; №5. არა; №6. $8\frac{5}{6}$; №7. K(-11,41); №8. ა) A და B წერტილები O წერტილიდან ერთ მხარეს მდებარეობენ, ბ) M და N წერტილები O წერტილიდან სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ; №9. A(14) ან A(-14), B(3,5) ან B(-3,5), 10,5 ან 17,5.

გაკვეთილი 1.3. №1. $\frac{3}{16} = 0,1875$, $\frac{84}{200} = 0,42$, $\frac{7}{12} = 0,58(3)$, $\frac{11}{21} = 0,(523809)$, $\frac{10}{75} = 0,1(3)$, $\frac{465}{555} = 0,(837)$; №2. ა) {0,(7); 5,333...; 32,(56); 6,98(3); 0,(345); 11,43(12); 2,0(7)}; ბ) {0,(7); 5,333...; 32,(56); 0,(345)}; გ) {6,98(3); 11,43(12); 2,0(7)}; №5. 1,7(3), 3,58(3), 4,(09), 2,(41); №8. 0,25; 0,4; 3,5; 0,5; 2,2; №9. ა) 50 კმ, ბ) 73 კმ, გ) 14,(285714); 55,(6); დ) 18 კმ.

გაკვეთილი 1.4. №2. $\frac{13}{30}$; №3. ა) $\frac{2}{9}$; $1\frac{1}{3}$; $3\frac{6}{11}$; $21\frac{23}{99}$; $\frac{673}{999}$; $7\frac{256}{999}$; $16\frac{2}{999}$; $\frac{1}{9999}$; $5\frac{1}{99}$; ბ) $\frac{2}{15}$; $1\frac{23}{90}$; $7\frac{2}{45}$; $2\frac{107}{450}$; $10\frac{8}{55}$; $\frac{1279}{4950}$; $16\frac{497}{990}$; $\frac{1}{9000}$; №4. ა) $10\frac{2}{3}$; ბ) $2\frac{5}{9}$; გ) $15\frac{53}{99}$; დ) 118; ე) $3\frac{1}{6}$; ვ) $-2\frac{355}{999}$; №6. ა) $\frac{2}{165}$; ბ) $16\frac{1}{14}$; გ) 140; დ) $13\frac{19}{27}$; №7. $104\frac{4}{27}$; №9. ა) 8 თვე, ბ) 10000 გრ, გ) $287\frac{1}{3}$; №10. ა) $8\frac{m}{9}$, ბ) $\frac{nmk-n}{990}$; №11. $\frac{a}{9}$; $7\frac{9b+a}{90}$; №13. ა) 12, ბ) $-\frac{53}{99}$, გ) 5, დ) 11.

გაკვეთილი 1.5. №2. $-3,(5)$; $-3\frac{1}{32}$; $-\frac{15}{7}$; $-\frac{2}{5}$; $-\frac{4}{15}$; $\frac{2}{25}$; 0,3; $\frac{20}{7}$;

№3. $\frac{9}{4}$; $\frac{5}{24}$; 0,07; $\frac{-1}{12}$; $\frac{-5}{9}$; $-\frac{4}{3}$; -2,(6); $-7\frac{1}{2}$; №4. ა) (-5;-4), ბ) (-1; 0), გ) (4; 5), დ) (-92; -91) ე) (-1; 0), ვ) (9;10); №8. ბ) $\frac{1}{3}n > 3n$;

გ) $|0,5 m| < |m|$; №9. ბ) $b - a > b + a$; გ) $|b + a| < |b - a|$; №10. ა) არა, ბ) პირველი რიცხვი მეორეზე ნაკლებია;

№13. 1. ა) 21,6; ბ) 26,1; გ) 41,4; 2. ა) 27,8, ბ) $11\frac{166}{225}$; გ) $3\frac{4}{45}$; №14. $\frac{6}{35} < \frac{9}{10}$; №15. ა) -36,25, ბ) $\frac{4}{10}$; გ) -0,5, დ) $-\frac{33}{200}$; ე) 5,45.

გაკვეთილი 1.6. №5. ა) $|x| \leq 4$, ბ) $-1 \leq x \leq 1$, გ) $-20 \leq x \leq -1$, დ) $x \geq 2$, ე) $x \leq -9$, ვ) $|x| < -3$; №7. ა) -9 და 9, ბ) -7 და 7, გ) -27 და 27, დ) -1 და 9.

გაკვეთილი 1.7. №2. ა) 16,335, ბ) -8,246, გ) -3,56, დ) -27,99, ე) -1,95, თ) -0,004, ი) 60; №3. ა) $-2\frac{2}{3}$; ბ) -2, გ) $-2\frac{5}{7}$; დ) 0,09, ვ) -21, ზ) -2000, ი) -1,7, ლ) 5, მ) -9100; №4. დ) აზრი არ აქვს, ე) აზრი არ აქვს, ვ) აზრი აქვს; №5. ა) $2\frac{24}{25}$; ბ) $1\frac{11}{25}$; გ) $-2\frac{104}{313}$; №7. ა) 4,8; ბ) 0,8; გ) $1\frac{5}{19}$; დ) $-\frac{3}{74}$; ე) $11\frac{5}{8}$; №9. ა) 1) 5,9 - 5,5 =

MS 96,5*2 + 43,5/MR =; 9) 6*2,5 - 45 = MS 230 : 5 + 24/MR =; ბ) $3^2 - 63 + \frac{204}{3}$.

გაკვეთილი 1.8. №3. ა) {1; 8}, ბ) {8; a}, გ) {a; b; u; j; f; 2; 5; 8; 10}, დ) {8}, ი) {u; 10}; №5. 83; №6. ა) 18, ბ) 14, გ) 7; №7. 5; №8. 30; №10. 17; №11. 6; №12. ა) 32, ბ) 21, გ) 10.

გაკვეთილი 1.9. №7. 1,7 სმ, 0,9 სმ, 2,6 სმ.

გაკვეთილი 1.13. №2. 17,4 სმ; №3. 69 სმ; №4. 94 სმ.

გაკვეთილი 1.14. №6. ა) 30°, ბ) 4,9 სმ, გ) 90°; №8. AM - სიმაღლე, AP - მედიანა, AK - ბისექტრისა.

II განყოფილება

გაკვეთილი 2.1. №4. დ) $\frac{81}{256}$, ე) $\frac{1024}{243}$, ზ) $\frac{196}{81}$, ი) $-\frac{729}{64}$, მ) $\frac{4}{9}$; №6. ა) 69,9, ბ) -0,3, გ) 116,5; დ) 5,8, ე) 21,9, ვ) 2982,5, ზ) -1,2, თ) 4154,9; №8. 2^{18} ბოლო ციფრია 4; 3^{25} ბოლო ციფრია 3; 4^{89} ბოლო ციფრია 5^{100} ბოლო ციფრია 5; 10^{99} ბოლო ციფრია 0; 8^{54} ბოლო ციფრია 4; №10. ბ) $-\frac{63}{256}$; №14. ა) 0^n ; $0,6^n$; $(-1,7)^n$; $(-5)^n$; 7^n ; №15. ა) ლუწი, ბ) კენტი, გ) ლუწი, დ) კენტი, ე) ლუწი ან კენტი, ვ) ლუწი ან კენტი; №17. დ) $(-0,(1))^2$; $(-0,(1))^7$; $(-0,(1))^2$.

გაკვეთილი 2.2. №3. ა) 1024, ბ) 10^{10} , გ) 59049; დ) $\frac{1024}{9765625}$; №6. ა) 2^8 ; ბ) 2^7 ; გ) 2^{10} ; დ) 2^8 ; ე) 2^{14} ; ვ) 2^{13} ; №7. ბ) 3^7 ; გ) 3^{10} ; №8. ა) 3, ბ) 6; გ) 3; დ) 5; ე) 3; №9. ა) 5^{2n-2} ; ბ) 17^{2m} ; გ) 6^4 .

გაკვეთილი 2.3. №3. ა) 27, ბ) 1000; გ) -8; დ) $\frac{1}{343}$; №6. ა) $\frac{361}{49}$; გ) 0,49; დ) 27; ე) 2; ზ) 5^9 ; თ) 1; ი) 0,7; №8. ა) c^6 ; ბ) c^7 ; გ) c^{10} ; ზ) c^{25} ; №10. 1) 105,12; 2) -16; 3) $\frac{164}{125}$; №12. ა) x^4 ; ბ) $\frac{1}{k^5}$; ე) 2; №13. ა) 7; ბ) a ; გ) 11^3 ; დ) 3^{19} ; ე) 4^7 ; ვ) m^3 .

გაკვეთილი 2.4. №7. ა) $3^8 < 27^3$; გ) $25^3 = 125^2$; №9. ა) 2; ბ) 81; გ) 13.

გაკვეთილი 2.5. №2. ფერდის პასუხი; №3. ზ) $-0,125b^3d^3$; №5. კვადრატის ფართობი გვერდის ზრდის კვადრატის ჯერადობით იზრდება, კუბის მოცულობა წიბოს ზრდის რიცხვის კუბის ჯერადობით იზრდება; №7. ბ) $\left(\frac{7}{8}am\right)^2$; დ) $(-3b^2k^3)^3$; ზ) $(4a)^3$; ი) $\left(\frac{5}{8}x^8y^6\right)^2$.

გაკვეთილი 2.6. №2. ა) $14a^4b^5c^2$; ბ) $-15x^3y^5$; №3. ე) $-0,36m^3n$; №4. ვ) $-0,1b^4n^7$; №6. ბ) $\left(\frac{5}{2}a^9b^3\right)^2$; გ) $\left(-\frac{1}{5}mnk^2\right)^3$; ვ) $(0,2p^3k^7)^3$; №11. ა) $4a^4b^3c^2$; ბ) $-0,5bc^5k^5$; გ) $1,5x^4y$; ვ) $3x^4y^5$; №12. 1) $2ab$; 2) $6xy$; 3) $11\frac{2}{3}bc$; №13. ა) $4a^4bc$ ბ) $219,8x^5$; გ) $\frac{729}{64}m^{18}$.

გაკვეთილი 2.7. №6. ა) 0,47; ბ) -1167; გ) 600; დ) 0; №7. გ) 63; დ) -28; ვ) 34,1; ზ) -468; თ) 300; ი) 1,12; მ) 240100; №8. ა) 2; ბ) 1968; გ) 1993; დ) 1995.

გაკვეთილი 2.8. №1. ა) 1; ბ) 1; დ) a^{80} ; №2. ა) 3^7 ; ბ) 1; გ) 5^5 ; დ) 4096; №3. ა) $1,2 \cdot 2^n$; ბ) $\frac{5}{6}$; გ) $1\frac{2}{3}$; დ) $\frac{k}{m}$; №4. ა) 0; ბ) $\frac{7}{9}$; №5. ბ) a^{n-1} ; გ) a^{n+3} ; დ) a^3 ; ვ) a^{2n+5} ; №6. ა) $1\frac{1}{49}$; ბ) $-\frac{4}{9}$; №7. რიცხვის ბოლო ციფრი უნდა იყოს 1.

გაკვეთილი 2.9. №2. 750 მან.; №3. ა) 12,5 %; ბ) 6200 მან. და 8680 მან.; №4. 1) 14%; 2) 2000 მან.; 3) 3 წწ; 4) 15050 მან.; ა) 3420 მან.; ბ) 7535,5 მან.; გ) 3600 მან.; №5. 30000 მან.; №7. 4800 მან. 13,3%; №8. ა) 8 წწ; ბ) 16 წწ; №9. ა) 4 თვე; ბ) 6 თვე; გ) 12 თვე; დ) 18 თვე.

გაკვეთილი 2.10. №1. 847 მან.; №2. 60500 მან.; №3. 51200 მან.; №4. ა) 3037,5 მან. და 3345 მან.; ბ) 6305,645 მან. და 14815,44 მან.; გ) 5200 მან. და 5290 მან.; №7. ა) 5312,5 მან.; ბ) 5781,25 მან. №8. $1,15^5 \approx 2$.

გაკვეთილი 2.11. №3. ა) $\triangle ABC \cong \triangle FED$, ბ) $\triangle CBA \cong \triangle DEF$, გ) $\triangle BAC \cong \triangle CDB$; №6. $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, $\triangle ADC \cong \triangle MKP$.

გაკვეთილი 2.12. №3. $AB \cong KL \cong DE$, $AC \cong KM \cong DF$, $BC \cong LM \cong EF$, $\angle A \cong \angle K \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle L \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle M \cong \angle F$.

გაკვეთილი 2.13. №12. ა) $73^{\circ}24'$; $66^{\circ}12'$; $125^{\circ}6'$; $41^{\circ}55'48''$; $12^{\circ}30'$; ბ) $12,6^{\circ}$; $\approx 44,3^{\circ}$; $\approx 54,1^{\circ}$; $\approx 136^{\circ}$. №13. ა) $29^{\circ}24'1''$; გ) $201^{\circ}38'3''$; დ) $16^{\circ}59'50''$; ე) $74^{\circ}12'17''$; ვ) $44^{\circ}15'15''$; ზ) $47^{\circ}12'$; თ) $50^{\circ}29'$; ი) $20^{\circ}55'$. №14. $119^{\circ}19'$.

გაკვეთილი 2.14. №11. ა) 55° , 55° , 70° ; ბ) 44° , 44° , 92° ; გ) 32° , 74° , 74° ; №13. 12 სმ; №17. 58° , 61° , 61° ან 64° , 58° , 58° .

გაკვეთილი 2.16. №13. 25° , 3 სმ.

III განყოფილება

გაკვეთილი 3.1. №2. ა) $3a^3+2a^2+3a+5$; №4. ბ) $-3x^4+9x^2+x$; დ) $6a^3+3a^2-a-42$; №5. ა) $3a^2+12b$; ბ) $12a^3-9a^2-2b$; დ) $3a^2+b$; №6. ა) $21p^3-p^2$ თავისუფალი წევრია 0, ხარისხი 3; გ) $8x^6-2x^5-6x^3$, თავისუფალი წევრია 0, ხარისხი 6; დ) $14ab^2-0,2b^3-1$, თავისუფალი წევრია -1 , ხარისხი 3; №7. ა) 7, ბ) 3, გ) 1; დ) 3; ე) 5; ვ) 2; №8. ა) $a^2-3a+4,23$; ბ) არა, $100x-x^2$; დიახ, $x^3+2x-12$.

გაკვეთილი 3.2. №1. $5x^3-13x-7$, შესაგვრების გადანაცვლებადობის თვისება; №2. ა) $5x-6$; ბ) $3x^2+7x-1$; გ) $3x^3+6x-3$; დ) $2a^3+5a^2-27$; №3. ა) $12a-b$; ბ) $-2a^2+16a-1$; დ) $0,27x^2-0,06y^2$; №4. ა) a^2 ; ბ) $-a^2+6ab-9b^2$; №5. $5(n+2)$, 5-ზე იყოფა; $4n+6$, 4-ზე არ იყოფა.

გაკვეთილი 3.3. №1. ა) $6a^3-4a+3$ და ბ) $-6a^3+4a-3$ მრავალწევრები ერთმანეთის მოპირდაპირეა;

№2. ა) $(6x^2+4x+5)-(2x^2+2x+4)=4x^2+2x+1$; ბ) $(2x^3+3x^2+x-3)-(x^3+2x^2)=x^3+x^2+x-3$.

№3. ა) $4m+2$; ბ) 2; გ) $2a^3+2a+2$; №4. ბ) $6x^3+6x^2-8x-4$; №5. დ) 473,46 მან., 538,2 მან., 938,34 მან., 333,06 მან.;

№6. (x^2-4) სმ²; №8. ა) $-12y^2-16y+10$, ხარისხი 2; ბ) $-8x^2+5x-10$, ხარისხი 2; დ) $-10x^5+13x^3-13x^2-7$ ხარისხი 5.

№10. ა) $5a-b-11c$; ბ) $8x^3+2x^2-4x$; დ) $1,4a^3-3b^3+2$; №11. ა) $-1\frac{3}{4}b^3-5\frac{3}{5}b$; ბ) $\frac{1}{4}b^3+10\frac{4}{5}b$; გ) $2\frac{1}{4}b^3+2\frac{2}{5}b$; დ) $1\frac{3}{4}b^3+5\frac{3}{5}b$.

გაკვეთილი 3.4. №1. ა) $x(x+4)=x^2+4x$; ბ) $2x(x+3)=2x^2+6x$; გ) $x(2x+5)=2x^2+5x$; №2. ა) $2x^2+8x$; ბ) $3x^2+x$; გ) $3x^2+6x$; №3. ვ) $-20c^7-4c^5$, ხარისხი 7, თავისუფალი წევრი 0; თ) $40x^8+30x^7-50x^5$, ხარისხი 8, თავისუფალი წევრი 0; ი) $7n^5+11n^4-n^2$; კ) $8a^3b^4+10a^2b^4-4,2a^2b^2$, ხარისხი 7, თავისუფალი წევრი 0; ლ) $3,3xy^3+6xy^2-1,5xy^3+6,9xy^2$, ხარისხი 8, თავისუფალი წევრი 0; №4. $3a^2b+6ab^2+3abc$; №5. 156 სმ² და 624 მ²; №6. ა) $10x^5+6x^4-10x^3-6x^2$; ბ) $14a^8b+42a^6b^2+35a^4b+21a^3b^2$; №7. ვ) $-2a^3y^7+\frac{1}{5}a^4by^5+\frac{1}{3}a^5y^5$; №8. ა) 7; გ) 24; №9. ა) 0,5; ბ) -2; გ) 1,6; დ) -2; №10. 8სმ, 16სმ, 20სმ.

გაკვეთილი 3.5. №1. ა) $(2x+2)(x+1)=2x^2+4x+2$; ბ) $(x+2)(x+2)=x^2+4x+4$; გ) $(3x+2)(x+1)=3x^2+5x+2$; დ) $(2x+1)(x+3)=2x^2+7x+3$; №2. ა) $(x+3)(x+3)=x^2+6x+9$; ბ) $(x+4)(x+1)=x^2+5x+4$; გ) $(2x+1)(x+3)=2x^2+7x+3$; დ) $(2x+3)(x+4)=2x^2+11x+12$; № 4. $x^2+70x+1200$; № 5. $(2x+1)(x+2)=(x+2)(2x+1)$, გამრავლების გადანაცვლებადობის თვისება; № 6. ა) x^3-x-6 ; დ) $30x^4-61x^2y^2+30y^4$; ზ) $p+pq-q-q^2$; № 7. ე) $\frac{3}{4}a^2b+2\frac{1}{2}ab^2-12b^3+\frac{1}{2}a+3b$; № 9. ა) $a+9$; ბ) $a-9$; გ) $-\frac{a+2}{2}$; დ) $4-a$.

გაკვეთილი 3.6. № 2. ა) $(a+b)(a+c)$; ბ) $(2a+b)(a+d)$; № 4. ა) $(a+6)(b+x)$; ბ) $(n-k)(m-x)$; გ) $(x+y)(a-2d)$; დ) $(1-x)(1+b)$; № 5. ა) $(x+1)(x^2+1)$; ბ) $(a-b)(a-8)$; გ) $(y^2-1)(y^3-1)$; დ) $(a+b)(b-5)$; ე) $(a+2)(a^3-1)$; ვ) $(x+y)(7-x)$; ზ) $(b^2-3)(b^4-2)$; თ) $(m+n)(k-n)$; № 7. $(x+1)(x+5)$; № 8. ა) $(a-1)(a-4)$; ბ) $(a-8)(a+2)$; გ) $(x+y)(x+8y)$; დ) $(a+b)(a+6b)$; ე) $(y-x)(y-8x)$; ვ) $(m-n)(m-4n)$; № 9. ორივე დაჯგუფება სწორია, $(m+n)(2a-3b)=(2a-3b)(m+n)$; № 10. ა) 91; ბ) $-0,625$; გ) $-30,8$; დ) $-0,33$; № 11. ა) 15600; ბ) 12500; გ) 550; დ) 28; № 12. ერთი მამრავლი მაინც უნდა იყოს, “0”; № 13. ა) $x_1=8, x_2=-2$; ბ) $y_1=12, y_2=-1$; გ) $a=-4, a_2=1$; დ) $x_1=4, x_2=-7$; ვ) $x_1=2, x_2=-0,2$; № 14. ა) $-35b^2, 3a^2, 7b$; ბ) $10xy^2, 2x, 7y$; გ) $3n^3, 6m^3, n^3, 4m, 3$; დ) 15, 2y, 3, 18y⁴, 5.

გაკვეთილი 3.9. №6. 8 სმ.

გაკვეთილი 3.11. № 4. $(a-m)(b-m)=ab-am-bm+m^2$, $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$, $n-m=-(m-n)$; № 6. ა) $+7a$; ბ) $+1$; გ) $+m$; დ) $+5$; № 7. ა) 25; ბ) 78; გ) 16.

გაკვეთილი 3.12. №1 ა) 0,13; ბ) -2; გ) $1\frac{2}{3}$; დ) -1; ე) 2; ვ) 4; ზ) $\frac{2}{11}$; თ) 7; ი) 13; №2. ა) 2,4; ბ) -12; გ) 3; დ) $\frac{1}{2}$; ე) 0,5; ვ) 1; №3. ა) -2; ბ) 0; გ) 1,75; დ) 0,8; №4. ა) $-5\frac{6}{7}$; ბ) $7\frac{11}{5}$; გ) 15; დ) 24; №5. ა) 41; ბ) 13; გ) 0; დ) -153; ე) 6; ვ) 1,1; №6. ა) 10; ბ) 8; გ) 1,6; დ) 7; №7. ა) 5,-5; ბ) $\emptyset$; გ) 3,3 და 2,7; დ) $-5\frac{2}{5}$; ე) 6 და -6; ვ) 28 და -12; ზ) $\emptyset$; თ) 3 და -3; №8. ა) 2,3 და 0,5; ბ) 7; გ) $\emptyset$; დ) -1 და 3; ე) $7\frac{7}{8}$ და $6\frac{1}{8}$; ვ) 1 და $-\frac{5}{7}$;

გაკვეთილი 3.13. №3. 12,4 და 12,6.

გაკვეთილი 3.14. №1. 0,345 და 0,0431; №2. 2% და 0,0204; №7. 0,049.

IV განყოფილება

გაკვეთილი 4.1. №4. ა) b, a, a ; ბ) 10, 100; გ) $a, 25, 10a$; დ) 140; №5. ა) $25y^2 - 30xy + 9x^2$; ბ) $0,09a^2 - 2,4ax + 16x^2$; გ) $100c^2 + 2bc + 0,01b^2$; დ) $49p^2 - 14pk + k^2$; ე) $144 + 192k + 64k^2$; ვ) $x^2 - 2xy + 9y^2$; ზ) $0,36 + 2,4x + 4x^2$; თ) $16a^2 + 8ab + b^2$; ი) $144a^2 - 7,2ac + 0,09c^2$; კ) $0,04m^2 + 2mn + 25n^2$; №6. ა) 10201; ბ) 9801; გ) 3721; დ) 39601; ე) 998001; ვ) 494209; ზ) 98,01; თ) 104,04; ი) 93025; კ) 1002001; ლ) 358801; №9. ა) $x^4 + 20x^2 + 100$; ბ) $x^4 - 20x^2 + 100$; გ) $49 - 14y^3 + y^6$; დ) $49 + 14y^3 + y^6$; ე) $-8ab^4$; №10. ა) $x^4 - 6x^3 + 9x^2$; ბ) $c^4 - 1,4c^5 + 0,49c^6$; გ) $\frac{9}{4}a^{10} + 24a^7 + 64a^4$; დ) $\frac{1}{4}x^6 + 6x^4 + 36x^2$; ე) $4y^6 - 2y^5 + 0,25y^4$; ვ) $\frac{9}{16}x^6 + x^3 + \frac{4}{9}$; №12. ა) $144m^2 - 24m$; ბ) $154x - 49x^2$; გ) $14a$; დ) $4a^2 + 36b^2$; ე) $18ab - 81$; ვ) $-18a^2 - 162$; №13. ა) $2x^2 + 3x + 9$; ბ) $-5b + 14$; გ) $4a^2$; დ) $-21b - 4$; №14. ა) 1,7; ბ) 2,2; გ) $\frac{5}{12}$; დ) 3,125; ე) 1; №17. ა) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; ბ) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$; გ) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$; დ) $8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$.

გაკვეთილი 4.2. №1. ა) $x^2 - 6x + 9$; ბ) $4x^2 - 4x + 1$; გ) $x^2 + 6x + 9$; დ) $x^2 - 6x + 9$; ე) $x^2 + 5x + 6$; ვ) $2x^2 - 7x + 6$; №4. ა) $(9a+b)^2$; ბ) $(10xy-1)^2$; გ) $(7x+2y)^2$; დ) $(5a-7b)^2$; ე) $(3c+4d)^2$; ვ) $(4-a^2b^2)^2$; №5. ა) $16a^2$; ბ) x^2 ; გ) $2bc$; დ) $5ab$; ე) $81a^2$; ვ) $16y^2$; №6. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$; №7. ა) $-15ab$ ნაცვლად $-30ab$; ბ) $-6xy$ ნაცვლად $-3xy$; გ) $-\frac{1}{15}xc$ ნაცვლად $-\frac{2}{15}xy$; №8. ა) $7y, 25x^2, 49y^2$; ბ) $10b, 81a^2, 18ab$; გ) $-3n, 9n^2$;

$100a^2$; დ) $-5m, 8n, 64n^2$; №9. ა) უმ: 5; ბ) უმ: 4; გ) უდ: -1; დ) უმ: 5; ე) უმ: 2; ვ) უმ: 4; №10. ა) 676; ბ) 2116; გ) 400; დ) 256; ე) 12544; ვ) -5184.

გაკვეთილი 4.3. № 3. ა) $x^2 - y^2$; ბ) $a^2 - 9$; გ) $p^2 - q^2$; დ) $n^2 - 9m^2$; ე) $16y^2 - 49$; ვ) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9}y^2$; ზ) $64c^2 - 81d^2$; თ) $100x^2 - \frac{81}{49}$; №4. ა) $4a^2 - 1$; ბ) $a^2 - 4$; გ) $4m^2 - 9$; №5. ა) $x^4 - 49$; ბ) $a^8 - b^6$; გ) $c^{10} - k^{14}$; დ) $81x^2 - b^4$; ე) $0,49a^6 - b^2$; ვ) $25c^{16} - 9k^2$; ზ) $100p^4 - 0,09q^4$; თ) $1,96a^{10} - 0,01b^8$; №8. ა) 9999; ბ) 1591; გ) 2496; დ) 39999; ე) 0,75; ვ) 3,75; ზ) 288,91; თ) 899,96; კ) 489999; ლ) 9991; მ) 89975; №9. ა) $x^2 - y^2$; ბ) $-x^2 - 2xy - y^2$; გ) $b^2 - 2ab + a^2$; დ) $-x^2 + 2xy - y^2$; ე) $c^2 - b^2$; №10. ა) $a^2 - 25x^2y^2$; გ) $4a^2b^2 - 9$; ე) $81x^2 - 289a^6$; დ) $100y^2 - 0,04x^2$; ვ) $1,21y^2 - 0,09$; ზ) $49 - 36x^2$; თ) $\frac{1}{9} - 4y^2$; ი) $16 - \frac{1}{9}b^2$; კ) $\frac{64}{49} - 16a^2$; №12. უმ: -0,09; ა) უმ: -0,04; ბ) უმ: -225; გ) უდ: 1,44; №13. ა) $(2x-3)(2x+3)$; ბ) $(x-3)(x+3)$; გ) $(2x+2)(2x-2)$; №15. ა) $(6a-b)(6a+b)$; ბ) $(4m-3n)(4m+3n)$; გ) $(k-ab)(k+ab)$; დ) $(5n-x)(5n+x)$; ე) $(8x-11y)(8x+11y)$; ვ) $(2ab-1)(2ab+1)$; ზ) $(9a-7)(9a+7)$; თ) $(12b-7m)(12b+7m)$; ი) $(p-ab)(p+ab)$; კ) $(0,1n-3m)(0,1n+3m)$; ლ) $(0,3x-0,7y)(0,3+0,7y)$; მ) $(ax-1,1m^2)(ax+1,1m^2)$; №16. ა) 1160; ბ) 251; გ) 0,788; დ) -2280; ე) 8,33; ვ) $13\frac{1}{3}$; №17. ა) $\frac{3}{4}$; ბ) 0,2; გ) $\frac{4}{7}$; დ) $4\frac{3}{8}$; №18. ა) $x^2 - 225$; ბ) $-1 - 8a^2$; გ) $b^2 + 9$; დ) $75x^2 + 16$; ე) $x^2 + 1$; ვ) $5x^2 + 0,25$; №19. ა) $a^4 - b^4$; ბ) $16x^4 - y^4$; გ) $m^{12} - b^4$; დ) $a^4 - 1$; №20. ა) სწორია; №21. ა) -12; ბ) -4; გ) -0,5; დ) -0,5; ე) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$; ვ) $-2\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}$;

3) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$; ზ) $\emptyset$; თ) $\emptyset$; ი) $-1,5; 1,5$; 3) $-\frac{9}{7}, \frac{9}{7}$; №24. ა) $2a^2 - 40a + 12$; ბ) $1 - 8b$; გ) $8x^2$; დ) $242a^2 - 66ab$;

№25. ა) $(x-1)(x+7)$; ბ) $8(2a-3)(a+1)$; გ) $4(7-x)(2+x)$; დ) $-(1+4y)(1+10y)$; ე) $4(2x-1)(5x+1)$;
ვ) $a(a+22)$; ზ) $4ab$; თ) $4mn$; ი) $-40x$; 3) $4(c-2x)(3c+x)$.

გაკვეთილი 4.4. №4. ა) 42875; ბ) 1771,561; გ) 140608; დ) 79507; ე) 8012,006001; №5. ა) 1,03 (მ.ხ. 0,000301);
ბ) 1,12 (მ.ხ. 0,004864); გ) 0,97 (მ.ხ. 0,000299); დ) 1,3 (მ.ხ. 0,031); ე) 0,988 (მ.ხ. 0,000047936); №6.

ა) $X = ab, Y = a^3b^3$; ბ) $X = 2a$; გ) $X = 2a^3$; დ) $X = 3a, Y = 27a^3$; ე) $X = ab^4, Y = a^3b^{12}$; №7. ა) $x^6 - 3x^4y^4 + 3x^2y^8 - y^{12}$; ბ) $-a^{15} - 3a^{10}b^7 - 3a^5b^{14} - b^{21}$; გ) $27x^6 - 189x^4y^2 + 441x^2y^4 - 343y^6$; დ) $-64m^{12} - 48m^8n^5 - 12m^4n^{10} - n^{15}$;
ე) $\frac{8}{27}a^3 + \frac{4}{3}a^2b^8 + 2ab^{16} + b^{24}$; ზ) $a^3b^9 - \frac{9}{4}a^2b^6 + \frac{27}{16}ab^3 - \frac{27}{64}$; თ) $-\frac{1}{125}m^3 - \frac{9}{50}m^2n - \frac{27}{20}mn^2 - \frac{27}{8}n^3$;

№8. 110; №10. ა) $6a^2b + 2b^3$; ბ) $-54m^2n - 2n^3$; გ) $x^3 + y^3$; დ) $-a^3 - b^3$; ე) $3mn^2 - 3m^2n$; №11. ბ) 1001;
გ) 674336; №12. ა) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{27}{8}x + \frac{189}{64}$; ბ) $\frac{18}{49}x^3 - \frac{435}{196}x^2 + \frac{615}{112}x - \frac{91}{64}$; გ) $42x^3 + 48x^2y + 84xy^2 - 49y^3$;

დ) $\frac{7}{72}x^3 + 3\frac{1}{4}x^2 + 13\frac{1}{3}x + 20\frac{31}{108}$; №13. ა) $27a^3b^6 + 27a^2b^6 + 9a^7b^6 + a^9b^6$; ბ) $m^{12}n^{15} - 9m^9n^{11} + 27m^6n^7 - 27m^3n^3$;

გ) $\frac{8}{125}x^{12}y^9 + \frac{6}{25}x^9y^{13} + \frac{3}{10}x^6y^{17} + \frac{1}{8}x^3y^{21}$; დ) $343a^3b^3c^9 - 441a^4b^3c^7 + 189a^3b^3c^5 - 27a^6b^3c^3$; ე) $0,001x^{18}y^6c^{30} - 0,006x^{12}y^4c^{20} + 0,012x^6y^2c^{10} - 0,008$; ვ) $a^3b^{15}c^{12} + 3,6a^3b^{11}c^{13} + 4,32a^3b^7c^6 + 1,728a^3b^3c^3$.

გაკვეთილი 4.5. №3. ა) $8p^3 + 27$; ბ) $27n^3 + m^6$; გ) $1 + 64b^3$; დ) $27a^3 + d^{24}$; ე) $125m^3n^3 + 1$; №4. ა) $-a^3 - b^3$; ბ) $-a^3 - b^3$; გ) $a^3 + b^3$; დ) $-a^3 - b^3$; №5. ა) $x^9 + y^{15}$; ბ) $27d^6 + 8c^3$; გ) $125 + y^{18}$; დ) $27r^{12} + 64s^{15}$;
№6. ა) 144; ბ) 3600; გ) -1599 ; დ) -2496 ; №7. ა) $3y$; ბ) $2d^3$; №8. ა) 2; ბ) $-4\frac{3}{2}$; გ) 4; დ) 2; №9. ა) $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$;

ბ) $(m+n)(m^2 - mn + n^2)$; ე) $(2a+1)(4a^2 - 2a + 1)$; დ) $(3x+y)(9x^2 - 3xy + y^2)$; ე) $\left(\frac{3}{4}a + 0,2\right)\left(\frac{1}{16}a^2 - 0,05a + 0,04\right)$;

ვ) $(4m+3n)(16m^2 - 12mn + 9n^2)$; ზ) $-(ab+b^2)(a^2b^2 - ab^3 + b^4)$; თ) $(5+k^2)(25 - 5k^2 + 5)$;

ი) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}y\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{15}xy + \frac{16}{25}y^2\right)$; 3) $(pqr+5p^3)(p^2q^2r^2 - 5p^4qr + 25p^6)$; ლ) $(0,3+4a)(0,09 - 1,2a + 16a^2)$; მ)

$(7+x^4)(49 - 7x^4 + x^8)$; №10. 4) $(72^2 + 72 \cdot 44 + 44^2)$; ბ) $103 \cdot (215^2 - 215 \cdot 94 + 94^2)$; №12. ბ) $903 < 904$; №13. ა) 58,5;

ბ) -56 ; №14. ა) $A = 3y, B = 4x^2 + 6xy, D = 27y^3, C = 8x^3$; ბ) $A = n^2, B = 9m^2 + 3mn^2, C = n^4, D = 27m^3$; №15. ა) 103,3;

ბ) -37 ; გ) 37; №16. ა) $(2x+1)(x^2 + x + 1)$; ბ) $a(a^2 - 3ab + 3b^2)$; გ) $(x-y)(3x^2 + y^2)$; ე) $(y+1)(y^2 - 7y + 19)$; ვ) $(4m+n)$;

$(7m^2 - mn + n^2)$; №17. ა) 10^6 ; ბ) 512; გ) 1000; დ) $-0,000064$; №18. 7, ნამთხი არ დარჩება

გაკვეთილი 4.6. №2. ა) $b^3 - 1$; ბ) $64m^3 - 27n^6$; გ) $27 - d^3$; დ) $0,512x^{18} - 0,216y^{21}$; ე) $125k^3 - 343p^3$; ვ) $\frac{1}{8}x^9 - \frac{1}{27}y^{12}$;

ზ) 43; ბ) -35 ; №4. ა) $A = 5y; B = 20xy + 16x^2; C = 125y^3; D = 64x^3$; ბ) $A = 2c^4; D = 5p; B = 25p^2 + 10pc^4$;

$C = 4c^8$; №5. ა) $(a-4)(a^2 + 4a + 16)$; ბ) $(3c-10)(9c^2 + 30c + 100)$; გ) $(3p-2k)(9p^2 + 6pk + 4k^2)$; დ) $(1-5a^2)$;

$(1+5a^2+25a^4)$; ე) $(6-0,1q)(36+0,6q+0,01q^2)$; ვ) $(4y^2-x^3)(16y^4+4x^3y^2+x^6)$; ზ) $(7a^4-b^3)(49a^8+7a^4b^3+b^6)$; თ) $(ab^2c^3-d^2)$;

$(a^2b^4c^6+ab^2c^4d^4+d^4)$; №7. ა) 22500; ბ) 4029; №8. ა) $(a+3)(a^2 + 18a + 93)$; ბ) $(9b+2)(81b^2 + 117b + 49)$; გ) $-2c^6(2c+3)$;

$(31c^2 - 42c + 36)$; დ) $2y(12x^2 + y^2)$; ე) $10y(48x^2 + 25y^2)$; ვ) $(x^2y^3 - 4x)(x^3y^6 + 4x^3y^3 + 16x^2)$; №9. ა) 2197; ბ) 389,017; გ)

$-857\frac{3}{8}$; დ) 39,304; №12. 333.

გაკვეთილი 4.7. №1. ა) $x^4(4+x)$; ბ) $(b-c)(a+2)$; გ) $(3m-4n)(3m+4n)$; დ) $(5a-3b)^2$; №2. $(a-x)$;

$(a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax)$; №3. ა) $5b(a^2 - b)$; ბ) $7a(b-c)(b+c)$; გ) $2c(a^4 - 8b^4)$; დ) $cd(2c-3d)(2c+3d)$;

ე) $-n(64m^2 + 27)$; ვ) $9m(n^6 - 13)$; ზ) $6x^2(y-2z)(y+2z)$; თ) $2y(x^2 - 8)$; ი) $7q(p-q)(p+q)(p^2 + pq + q^2)(p^2 - pq + q^2)$;

№4. ა) $3y(x+y)^2$; ბ) $(a-b-c)(a-b+c)$; გ) $(a-b)(a+b-1)$; დ) $5(a-b)^2$; ე) $(x+y+z)(x+y-z)$; ვ) $(c+d)$;

$(1+c-d)$; ზ) $7x(y+2)^2$; თ) $(3-m+2n)(3+m-2n)$; ი) $(x-y)^2(x+y)$; 3) $2z(1^2 - t^2)$; ლ) $(2p-5q-6)(2p-5q+6)$;

მ) $(m+n)^2(m-n)$; №5. ა) 0 და 4; ბ) 0, ± 3 ; გ) 0, ± 1 ; დ) 0, -8 ; ე) 0, ± 5 ; ვ) 5, ± 3 ; ზ) 0; 11; თ) 0; 1;

ი) $-3, \pm 2$; №6. ა) -6 ; ბ) 21; გ) 810; დ) -638 ; ე) -2800 ; ვ) 9513; №7. ა) 13420; ბ) ; გ) 30; დ) 146,25;

ე) 2,205; №8. ა) 230; ბ) 360; გ) 860; დ) 180; ე) $\frac{10}{37}$; ვ) $-\frac{1}{51}$; თ) $-\frac{1}{5}$; №9. ა) $(x+1)^2$; №10. $3(a-1)(a+3)$;

№11. ა) $(a-1)(a+5)$; ბ) $(b-9)(b-1)$; გ) $2(x-2)(x+10)$; დ) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$; ე) $(y-4)(y+1,5)$; ვ) $(a-3)\left(a-\frac{1}{2}\right)$.

გაკვეთილი 4.8. №7. 180°; №8. 540°; №9. 264°.

გაკვეთილი 4.9. №2. ა) $MN \parallel CD$; ბ) MN და CD პარალელური არაა; დ) MN და CD პარალელურია; №3. ა) შეიძლება; ბ) შეიძლება; გ) არ შეიძლება; №4. $a \parallel b$, b და c პარალელური არაა, a და c პარალელური არაა; №6. $CK \parallel AB$; №7. მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია, მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია. ერთ გვერდთან შექმნილი კუთხეების ჯამი 180°-ია.

გაკვეთილი 4.10. №5. ა) 50°; ბ) 172°, 8°; გ) 112°; დ) 30°, 150°; №6. 75° და 105°; №9. ა) 53°; ბ) 109°; გ) 79°; დ) 70°; ე) 69°, 54°, 57°; №10. 88°, 92°; №11. 1) 105° და 75°; 2) 52° და 128°; 3) 75° და 105°; №12. $AB \parallel a$; №13. $AC \parallel BD$; №15. 1) 50°; 2) 70°.

გაკვეთილი 4.11. №5. ა) 45°; ბ) 118°; გ) 28° და 152°; №6. ა) 150° და 30°; ბ) 10800.

გაკვეთილი 4.12. №3. ა) 56° ან 124°; ბ) 40° და 140°; გ) 135° და 45°; დ) I შემთხვევა 48° და 48°; II შემთხვევა 104° და 76°; №5. ა) 66°; ბ) 92°; გ) 78° და 102°.

V განყოფილება

გაკვეთილი 5.1. №2. ა) -16; -8; 0; 8; 16; დ) -12; -2; 8; 18; 28; №3. ბ) -9; 103; $-\frac{1}{4}$; №4. ა) $y = x+1$; ბ) $y = x^2$; №5. ა) $2\frac{1}{3}$; $-7\frac{2}{3}$; $1\frac{11}{15}$; ბ) $-\frac{1}{2}$; 3,1; -1,85; №6. ა) ჭეშმარიტია; ბ) ჭეშმარიტია; გ) მცდარია; დ) მცდარია; №9. ე) (4;1); (0; 1); (-1;0) ეკუთვნის; (2;0); (0;-1) არ ეკუთვნის.

გაკვეთილი 5.2. №5. გ) (0;3) და (-1,5;0); გრაფიკები ზომებით განსხვავდება; №6. M,N,A,B გრაფიკზეა; C გრაფიკზე არაა; №7. A, C გრაფიკზეა; B, D გრაფიკზე არაა; №9. ა) მახვილი კუთხე, $y = x+2$; ბ) $y = -2$; 0°; გ) $y = -x+1$; ზღაგვი კუთხე; №10. 20 სმ; №11. 6 კვ.ე; №12. ა) სწორი; ბ) $k < 0$, სწორი; გ) სწორი; დ) სწორი; №13. ა) $k = -1$; ბ) $k = 0$; №14. ა) $b = -33$; ბ) $b = 2$; №15. ა) ზღაგვი კუთხე; ბ) მახვილი კუთხე; (12; 6); №16. ა) 4 კვ.ე; ბ) 3 კვ.ე; გ) 4,5 კვ.ე; №17. 84,5 კვ.ე;

გაკვეთილი 5.3. №5. ა) $k = 2,4$; ზღაგვი კუთხე; ბ) $k = -\frac{1}{8}$; ზღაგვი კუთხე; №6. ა) $y = -2x$; ბ) $y = x$; გ) $y = \frac{1}{2}x$; №7. $x = 0$; $y = 0$; №9. ა) $y = 5x$; ბ) $y = -0,5x$; №11. ა) $k < 0$; $b > 0$; ბ) $k < 0$; $b < 0$; გ) $k > 0$; $b > 0$; დ) $k > 0$; $b < 0$;

გაკვეთილი 5.4. №2. ა) ერთმანეთს ეთხვევა; ბ) პარალელურია; გ) ერთმანეთს ეთხვევა; დ) იკვეთება; №3. ა) ჭეშმარიტია; ბ) მცდარია; გ) მცდარია; №6. ა) (4; 13); ბ) (-4,5; -1,5); გ) $\left(1\frac{2}{3}; -2\frac{1}{3}\right)$; დ) (1,25; 8,75).

გაკვეთილი 5.5. №1. ა) 120 კმ, 190 კმ; ბ) 160 კმ; გ) 4 საათი, 2 საათი; დ) 40კმ/სთ; 80 კმ/სთ; ე) 1 საათი, 30 წუთი; ვ) 50 კმ/სთ, 60 კმ/სთ; №3. ა) 5 საათი; ბ) 350 კმ, 150 კმ; გ) 500 კმ; დ) 70 კმ/სთ, 30 კმ/სთ; №5. 2 საათი; 2 საათი 40 წუთი; 2 საათი 24 წუთი.

გაკვეთილი 5.6. №3. ა) 140°F; ბ) 59°F; გ) 122°F; დ) 185°F; ე) 86°F; ვ) 132°F; ზ) 145,4°F; თ) 41°F; ი) 127,4°F; კ) 116,6°F; ლ) 251,6°F; მ) 64,4°F; №4. ა) 5°C; ბ) 43°C; გ) 15°C; დ) 65°C; ე) 115°C; ვ) 90°C; ზ) 35°; თ) 40°C; ი) 26°C; კ) 1°C; ლ) 30°C; მ) 37°C; №5. 57,2°F; 18°C; 68°F; 24°C; 60,8°F; 17°C; №6. 68°F; 86°F; №7. 20°C; 23°C.

გაკვეთილი 5.7. №4. (3; -10), (-3; 12), (2; 1) ამონახსნი არაა; (1; 2), (0,1; 11) ამონახსნია. №6. ორივე მართალია;

№7. ა) $u = 1\frac{1}{3} - \frac{1}{3}v$; $v = -2$; ბ) $v = 4 - 3u$; $v = -2$; №8. ა) $y = 3,5 - 2x$; დ) $y = 7 + 4\frac{2}{3}x$; №10. $a = 3$, $y = -3,5$;

№12. ა) (-1; 2); ბ) (1; 5); №15. ა) 2.

გაკვეთილი 5.8. №4. ა) ამონახსნი არაა; ბ) ამონახსნია; №6. ა) (1; 2); ბ) (-2; 1); გ) ∅; №8. ა) (1; 4); ბ) (1; -3); გ) (3; 6); დ) (3; 9); №9. ა) (3; 2); ბ) (1; -1); გ) (3; 1); დ) (3; 1); №10. ა) (3; 2); ბ) (-2; 2); გ) (0; 2); დ) (1; -1,5);

№16. ა) 1,5; ბ) $-6\frac{6}{7}$; გ) -10; დ) $2\frac{2}{3}$; №17. ა) -6; ბ) 0,1; გ) 24; დ) 0,625; №18. ა) $b \neq -48$; ბ) $b \neq \frac{7}{32}$; გ) $b \neq -10$;

დ) $b \neq 4,5$; №19. ა) $a = -\frac{3}{7}$; $b \neq -\frac{3}{7}$; ბ) $a = -\frac{3}{7}$; $b = \frac{4}{7}$; გ) $a \neq -\frac{3}{7}$; №20. ა) როცა $m = -0,5$ ფესვი არ აქვს; ბ) როცა $m = 0,5$ უსასრულო რაოდენობის ამონახსნი აქვს; გ) როცა $m \neq \pm 0,5$ ერთი ფესვი აქვს.

გაკვეთილი 5.9. №2. ა) $\begin{cases} x+3y=6, \\ 2x+y=7 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 3x+2=2y+4, \\ y+3=x+3 \end{cases}$ №3. ა) (5; 3); ბ) (0,8; -1,1); გ) (4;3);
დ) $\left(-\frac{1}{3}; -5\frac{2}{3}\right)$ ე) (0,25; 1); ვ) $\left(\frac{8}{7}; -\frac{8}{7}\right)$; №4. ა) (2; 1); ბ) (-73;-30); გ) $\left(1\frac{2}{21}; \frac{52}{63}\right)$;
დ) (1; 6); ე) $\left(-\frac{19}{14}; -\frac{45}{14}\right)$; ვ) (7; -4,5); №5. ა) (1; 2); გ) (-2; -2); დ) (-17; 5); №6. ა) (10; 6);
ბ) (4,4; 2,4); გ) $\left(-1\frac{9}{29}; -3\frac{18}{29}\right)$; დ) (3; 4); ე) (5; -3); ვ) (2; -15); №7. ა) (18; 6); ბ) (15; 12);
გ) (2; 5); დ) (5; 4); №8. ა) (5; -2); ბ) $\left(3\frac{1}{11}; 1\frac{9}{11}\right)$; გ) $\left(8\frac{1}{2}; \frac{5}{14}\right)$; დ) $\left(-\frac{23}{27}; \frac{1}{27}\right)$; ე) (1; 1); ვ) (1; -1);
№9. $m = -0,25; \left(2\frac{2}{3}; 0\right)$.

გაკვეთილი 5.10. №2. ა) (5; 6); ბ) (1; 2); გ) (2; -4); №3. ა) (5; 1); ბ) (1; -0,5); გ) (3; 4); დ) (-1; 6); ე) (12; -21);
ვ) (3; 1); ზ) (-2; 1); თ) (-4; -3); ი) (0,5; -2); კ) (2; 6); ლ) (9; 7); მ) (-12; 10); №4. ა) (2; 1);
ბ) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{6}\right)$; გ) (-1; 1); №5. ა) $y = x$; ბ) $y = -1,5x + 11$; გ) $y = 6x - 23$; დ) $y = -2x - 7$; №7. $y = \frac{1}{3}x - 2$;
№9. ა) (8; 9); ბ) (4; 4); გ) (5; 1); დ) (2; 7); ე) (15; 12); ვ) (-8; 6); ზ) (12; -12); თ) (15; 10); ი) (-1; 0); №10. ა) (3;
1); ბ) (7; 5); გ) (2; 0).

გაკვეთილი 5.11. №1.ბ) ≈ 1734 ; №2. 1,6მ, 2,7მ; №3. 10 საკვი, 18 საკვი; №4. 5 ტომარა, 7 ტომარა; №5. 40 მან, 170 მან;
№6. 6 კვ, 9 კვ; №7. 62 ლ, 78 ლ; №8. ა) (20; 3); ბ) (33; 22); №9. 35,75 გრ, 29,25 გრ; №10. 6 მან, 10 მან;
№11. 19 ლ, 14 ლ; №12. 29.

გაკვეთილი 5.12. №1. ა) შეიძლება; ბ) არ შეიძლება; გ) არ შეიძლება; დ) არ შეიძლება; №2. ა) არ შეიძლება; ბ) არ
შეიძლება; გ) შეიძლება; №5. ა) 20°, 60°, 100°; ბ) 32°, 50°, 98°; გ) 21°, 75°, 84°; №6. ა) 72°; ბ) 61°; გ) 120°; დ) 23°;
№8. ა) 81°; ბ) 59°; 48°; №10. ა) 48°, 72°, 60°; ბ) 1) 56°, 56°, 68° ან 68°, 68°, 44°; 2) 22°, 22°, 136°;
3) 40°, 40°, 100°; №11. 60°; №12. 56°; №13. 70°, 25°, 85°; 60°, 25°, 95°;

გაკვეთილი 5.13. №1. ბ) 37°, 53°; გ) 33°, 57°; №10. ა) 34°; ბ) 28 სმ; გ) 30°, 60°, 90°; №11. 30 სმ; №12. 22 მმ.

გაკვეთილი 5.14. №5. ა) 48°, 32°, 100°; №6. ა) 100°, 80°; ბ) 147°, 80°; გ) 27°, 37°; დ) 23°, 68°; №7. ა) 12°;
102°; ბ) 10°, 100°; გ) 10°, 80°; №8. ა) 35°, 35°, 110°; ბ) 44°, 68°, 68° ან 44°, 44°, 92°; №9. 90°, 32°, 58° და 90°;
148°, 122°; №11. არ შეიძლება.

გაკვეთილი 5.15. №3. ა) $\angle C < \angle B < \angle A$, სხვადასხვაგვარადებიანი; ბ) $\angle K = \angle N < \angle M$, ტოლფერდა; №4. ა)
 $\angle K < \angle N < \angle M$; ბ) $\angle A < \angle C < \angle B$; №6. ორივე მართალია. №8. ტოლფერდა.

გაკვეთილი 5.16. №3. ა) არ შეიძლება, ბ) არ შეიძლება, გ) შეიძლება; №4. ც) 27 სმ 2 მმ; №6. 6,92 სმ;
№8. $7 < c < 18$; №9. 37.

გაკვეთილი 5.20. №1. ა) 9; ბ) 12; გ) 12; №2. 6; №3. 4; №4. 12; №5. 21; №6. 56; №7. ა) $36, \frac{2}{5}$; ბ) $30, \frac{1}{3}$;
№8. ა) 6; ბ) 12; №9. 9; №10. 10; №11. ა) 6; ბ) 12; გ) 20; №12. 12; №13. 25, 100; №14. ა) 27; ბ) 48; 12.

გაკვეთილი 5.21. №1. ა) შეუძლებელი; ბ) შეუძლებელი; გ) შემთხვევითი; №2. $\frac{1}{2}$; №3. $\frac{1}{6}$; №4. $P_{\text{ფაზა}} = \frac{7}{16}$;
 $P_{\text{კათ}} = \frac{1}{4}$; №5. $\frac{12}{17}$; №6. ა) $\frac{1}{10}$; ბ) $\frac{1}{10}$; გ) $\frac{1}{18}$; დ) $\frac{1}{6}$; №7. $P = \frac{1}{36}$; №8. ა) 0,1; ბ) 0,2; გ) 0,07; დ) 0,08.

გაკვეთილი 5.22. №1. ა) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; ბ) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; გ) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; №3. ა) 0,01; ბ) 0,06; გ) 0,07; დ) 0,93; №4. $\frac{2}{3}$; №5. 0,8.

RİYAZİYYAT 7

*Ümumtəhsil məktəblərinin 7-ci sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə*

DƏRSLİK

(Gürcü dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəllif	İsmayılova Sevdə Camal qızı
Tərcümə edən	Abdurahmanov Çalabi
Buraxılışa məsul	Sevil İsmayılova
Baş redaktor	Gültəkin Cəfərova
Dizayner	Elşən Qurbanov
Səhifələyici	Ramin Abdurahmanov
Texniki redaktor	Fəridə Səmədova
Korrektor	Nübar Qarayeva
Texniki direktor	Xəqani Fərzəliyev
Nəşriyyat direktoru	Kəmalə Qarayeva

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi:
2017-014*

© **Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi – 2017**

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

Hesab-nəşriyyat həcmi. Fiziki çap vərəqi 14. Formatı 70x100 ¹/₁₆.
Səhifə sayı 224. Ofset kağızı. Jurnal qarnituru. Ofset çapı.
Tiraj 200. Pulsuz. Bakı – 2017.

“Şərq-Qərb” ASC
AZ1123, Bakı, Aşıq Ələsgər küç., 17.

Pulsuz

Çap üçün deyil