МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК 11

ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР
АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

МАТЕМАТИКА 11

Учебник
по предмету Математика
для 11 класса общеобразовательных школ

Замечания и предложения, связанные с этим изданием,
просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и derslik@edu.gov.az.
Заранее благодарим за сотрудничество!

Radius
Баку-2018

Содержание

1. Многочлены

Деление многочлена на многочлен 7
Теорема об остатке..............................11
Теорема о разложении
на множители 13
Нахождение рациональных
корней..15
Основная теорема алгебры 18
Функции многочлена 22
Рациональные функции.......................26
Обобщающие задания 28

2. Векторы в пространстве

Прямоугольная система
координат в пространстве 30
Векторы в пространстве 38
Скалярное призведение
двух векторов.......................................45
Обобщающие задания 51

3. Предел

Предел функции 53
Нахождение предела функции по таблице значений функции и графику.....54
Существование предела 56
Существование предела 59
Непрерывность функции.....................65
Особенные пределы, содержащие тригонометрические функции 71
Предел функции в бесконечности 73
Предел числовой
последовательности 78
Обобщающие задания 83

4. Уравнения прямой плоскости

Уравнения прямой в системе
координат на плоскости 85
Уравнения прямой в пространственной системе координат 92
Уравнение плоскости.........................96
Взаимное расположение
плоскостей 101
Уравнение сферы 102
Преобразование в пространстве
и на плоскости...................................104
Обобщающие задания 107

5. Производная функции

Средняя скорость изменения,
мгновенная скорость изменения.......109
Производная функции 114
Правила дифференцирования...........120
Правило дифференцирования
произведения 125
Правило дифференцирования
частного 127
Правило дифференцирования сложной
функции 129
Решение задач с применением
производной 133
Производная второго порядка...........135
Производная показательной
функции 138
Производная логарифмической
функции 141
Производная тригонометрической
функции 144
Обобщающие задания 148

6. Фигуры вращения Цилиндр, конус, шар

Фигуры вращения 150
Цилиндр 151
Площадь поверхности цилиндра......153
Конус 157
Площадь поверхности конуса...........159
Сечение плоскостью фигур вращения..164
Поверхность усеченного конуса.......166
Шар...169
Площадь поверхности шара 170
Площадь поверхности комплексных фигур 173
Подобие пространственных фигур ..177
Обобщающие задания.....................178

7. Исследование функции с применением производной

Производная функции и промежутки возрастания, убывания...........................180
Критические точки функции и экстремумы....................................185
Построение графиков функции с применением производной............193
Производная второго порядка и выпуклость функции 197
Задачи на оптимитизацию................201
Обобщающие задания.....................206

8. Объем фигур вращения

Объем цилиндра................................209
Объем конуса.....................................213
Объем усеченного конуса..................215
Объем шара..217
Подобие пространственных фигур ..222
Производная, площадь поверхности и объем фигур вращения 225
Обобщающие задания 227

9. Интеграл

Первообразная функция и неопределенный интеграл 230
Площадь фигуры ограниченной кривой...240
Определенный интеграл и площадь 242
Формула Ньютона-Лейбница 248
Свойства определенного интеграла...253
Площадь фигуры, ограниченной кривыми 258
Определенный интеграл и среднее значение функции на отрезке...263
Определенный интеграл и объем фигур вращения 266
Обобщающие задания.....................272

10. Статистика и вероятность

Статистические показатели 275
Формы распределения информации 280
Нормальное распределение 281
Диаграмма “ящик с усами”.............284
Случайные события и вероятность.......................................288
Формулы для вычисления вероятности 290
Обобщающие задания 294
Иррациональные уравнения и неравенства......................................296
Система показательных уравнений 298
Система логарифмических уравнений 299
Система тригонометрических уравнений 300
Обобщающие задания 305

1 Многочлены

- Деление многочлена на многочлен
- Теорема об остатке
- Теорема о разложении на множители
- Нахождение рациональных корней
- Основная теорема алгебры
- Функции многочлена
- Рациональные функции
- Обобщающие задания

Математический словарь

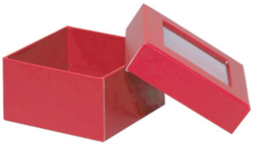
Многочлен *n*-ой степени	Теорема об остатке
Делимое, делитель, остаток	Множители многочлена
деление с уголком	Рациональные корни
Синтетическое деление	Корни многочлена

Это интересно!

Живший в 1050-1122 гг Омар Хаям известен в мире как мастер рубаи. Однако имя Омара Хаяма также упоминается как великого математика. Именно Омар Хаям впервые представил общую формулу корней уравнения кубического многочлена $f(x) = x^3 - bx - a$, в случае $a>0$, $b>0$.

Схематическую запись правила деления многочлена на двучлены впервые ввел итальянский математик Паоло Руффини.

Деление многочлена на многочлен



Задача. Высота подарочной коробки колеблется от 6 см до 16 см. Вычисления показывают, что объём каждой коробки (в куб. см) можно смоделировать функцией $V(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$, здесь x - положительной целое число и $5 \le x \le 15$. Высоты коробок можно определить при помощи линейной функции $h(x) = x + 1$. Как можно выразить другие размеры коробки в виде многочлена ?

Исследование. Нам известно правило деления многозначных чисел столбиком. Изучите, как данное правило можно применить к многочлену.

$$\begin{array}{r|l} _{-}552 & 17 \\ \cline{2-2} \underline{51} & 32 \\ _{-}42 & \\ \underline{34} & \\ 8 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} _{-}x^2 + 6x + 11 & x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{x^2 + 3x\phantom{{}+11}} & x + 3 \\ _{-}3x + 11 & \\ \underline{3x + 9} & \\ 2 & \end{array}$$

а) Для каждого из двух случаев укажите какие числа и какие многочлены соответствуют понятиям делимое, делитель и частное.

б) Как был найден первый член при делении многочлена? Каковы сходные и отличительные черты данного деления и деления многозначных чисел?

с) Как вы убедились,что деление выполнено правильно?

Выражение вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \,.\,.\, + a_1 x + a_0$ называется многочленом n степени от одной переменной. Здесь x - переменная, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ -заданные числа и $a_n \neq 0$, a_n-коэффициент при старшем члене, a_0-свободный член. Многочлен на многочлен можно делить аналогично правилу деления целых чисел столбиком.

Деление многозначного числа можно проверить при помощи равенства

Делимое = частное × делитель + остаток

Аналогичное правило справедливо и при делении многочлена на многочлен, т.е справедливо равенство $\dfrac{P(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$ или

$P(x) = Q(x)\,B(x) + R(x)$, где многочлены $P(x)$ - делимое, $B(x)$ - делитель, $Q(x)$ -неполное частное, $R(x)$ - остаток.

и степень многочлена $R(x)$ ниже степени многочлена $B(x)$.

Если делителем является двучлены $x - m$, то остатком может являться определенное число (r).

В этом случае: $\dfrac{P(x)}{x - m} = Q(x) + \dfrac{r}{x - m}$; $\quad P(x) = (x - m)\,Q(x) + r$

Пример 1. Разделите многочлен $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ на двучлены $x - 3$. Ответ запишите в виде $\dfrac{P(x)}{x - m} = Q(x) + \dfrac{r}{x - m}$

б) Определите множество допустимых значений переменной.

в) Выполните проверку.

Решение: а)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2-4x+5 & x-3 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3-3x^2} & x^2+x-1 \\
x^2-4x & \\
-\underline{x^2-3x} & \\
-x+5 & \\
-\underline{-x+3} & \\
+2 &
\end{array}
$$

На каждом шаге деления начиная слева первый член делимого делится на член наивысшей степени (в данном случае на x).

Значит,

$$\frac{x^3-2x^2-4x+5}{x-3}=x^2+x-1+\frac{2}{x-3}$$

б) При этом $x-3\neq 0$ или $x\neq 3$, иначе возникает деление на нуль.

в) Должно выполняться тождество

$$x^3-2x^2-4x+5=(x-3)(x^2+x-1)+2=$$
$$=x^3+x^2-x-3x^2-3x+3+2$$
$$=x^3-2x^2-4x+5$$

Пример 2. Разделите $5x+3x^3+2x^4-1$ на многочлен x^2-2x+2.

Решение: Запишим делимое в порядке убывания степеней. Введем в запись отсутствующие члены с коэффициентом равным 0.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+3x^3+0x^2+5x-1 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2}
-\underline{2x^4-4x^3+4x^2} & 2x^2+7x+10 \\
7x^3-4x^2+5x & \\
-\underline{7x^3-14x^2+14x} & \\
10x^2-9x-1 & \\
-\underline{10x^2-20x+20} & \\
11x-21 &
\end{array}
$$

На каждом шаге деления начиная слева первый член делимого делится на член наивысшей степени (в данном случае на x^2).

$$\frac{2x^4}{x^2}\quad \frac{7x^3}{x^2}\quad \frac{10x^2}{x^2}$$

$$2x^2+7x+10$$

Обучающие задания

1. 1) Выполните деление многочлена на многочлен столбиком.

a) $(2x^2-3x+6):(x-2)$

b) $(2y^3-y^2+3y-1):(y-4)$

c) $(4x+2x^2-x^3+5):(x+2)$

d) $(-3y^3+4y-5):(y-1)$

e) $(-z^3+2z^2-3z+2):(z-2)$

f) $(2x^3-12x-7x^2-3):(2x+3)$

2) Решение проверьте при помощи равенства $P(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

2. Найдите многочлен, при делении которого на двучлены $x-3$ частное равно $2x^2+3x-11$, а остаток равен -4.

3. При делении многочлена $2x^2-7x+9$ на некоторый многочлен в частном получается $2x-3$, а в остатке 3. Найдите делитель.

4. Выполните деление.

a) $(x^4-x^3-x-3):(x^2-1)$

b) $(x^4+2x^2+4):(x^2-2)$

5. Найдите $Q(2)$, если $x^3-x^2-5x+6=(x-2)\cdot Q(x)$.

Деление многочлена на многочлен

Деление многочлена на двучлены $x - m$ по схеме Горнера(синтетическое деление)

Практическая работа: 1) Перепишите в тетрадь деление многочлена $2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ на двучлены $x - 2$
2) На каждом шаге деления делимое делится на член с наивысшей степенью x-а и результат записывается в частное.Установите как можно найти первый член при делении на каждом из следующих шагов.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 3x^2 - 5x + 7 & x - 2 \\
\cline{2-2}
-\underline{2x^3 - 4x^2} & 2x^2 + 7x + 9 \\
7x^2 - 5x & \\
-\underline{7x^2 - 14x} & \\
9x + 7 & \\
-\underline{9x - 18} & \\
25 &
\end{array}
$$

$3x^2 - (-4x^2) = x^2 \cdot (3 + 2 \cdot 2)$

$-5x - (-14x) = x \cdot (-5 + 2 \cdot 7)$

$7 - (-18) = 7 + 2 \cdot 9$

При делении многочлена на двучлены $x - m$ можно, не записывая переменные и не выполняя промежуточных вычислений, найти многочлен, который является частным и остаток. При этом вычисления производятся только над коэффициентами.
При делении многочлена n-ой степени на двучлены $x - m$ в частном получается многочлен степени $n - 1$, а в остатке некоторое число r:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0 = (x - m) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x_0 + b_0) + r.$
Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые в правой части равенства, для соответствующих коэффициентов (при одинаковых степенях), имеем: $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} - b_k \cdot m = a_k$, $1 \leq k < n$; $r - m \cdot b_0 = a_0$.
Отсюда $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = a_k + m \cdot b_k$, $1 \leq k < n$; $r = a_0 + m \cdot b_0$
Нахождение частного и остатка этим способом называется методом синтетического деления (или схемой Горнера) и, обычно, эта схема задается в виде таблицы. В верхней строке таблицы записываются коэффициенты делимого, в нижней строке коэффициенты частного и остатки.

m	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
	↓	$+ m \cdot b_{n-1}$		$+ m \cdot b_2$	$+ m \cdot b_1$	$+ m \cdot b_0$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + m \cdot b_{n-1}$	...	$b_1 = a_2 + m \cdot b_2$	$b_0 = a_1 + m \cdot b_1$	$r = a_0 + m \cdot b_0$

Пример. Разделите многочлен $2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$ на двучлены $x + 3$ методом синтетического деления.

Решение: коэффициенты делимого записываются по убыванию степеней (если степень отсутствует, то записывается нуль). Если двучлены имеет вид $x + m$, то его записывают в виде $x - (-m)$.

Деление многочлена на многочлен

Запишем двучлены $x + 3$ в виде $x + 3 = x - (-3)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2x^3 & +3x^2 & -4x & +11 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -3 & 2 & 3 & -4 & 11 \\ \hline \times & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 2 & 3 & -4 & 11 \\ & & -6 & 9 & -15 \\ \hline \times & 2 & -3 & 5 & -4 \end{array}$$

$2x^2 - 3x + 5$ остаток

1. Перепишем первый коэффициент в нижнюю строку.
2. Коэффициент 1-*го* члена 2 умножим на (–3) и полученный результат (–6) сложим с коэффициентом второго члена (3). Получим 2-ой член частного (-3).
3. Коэффициент 2-го члена частного (-3) умножим на (-3) и сложим с коэффициентом 3-го члена делителя (-4). Получим 3 -ий член частного (5).

Остальные коэффициенты находятся по аналогичному правилу.

Таким образом, для делимого $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$ и делителя $B(x) = x + 3$, частным будет $Q(x) = 2x^2 - 3x + 5$, а остатком $r = -4$.

Деление можно записать в виде $\dfrac{P(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 11}{x + 3} = 2x^2 - 3x + 5 - \frac{4}{x + 3}$$

Обучающие задания

6. 1) Выполните деление при помощи метода синтетического деления.

a) $(x^2 + 3x + 15) : (x - 5)$
b) $x^2 + 7x - 2) : (x - 2)$
c) $(x^3 - 4x + 2) : (x + 2)$
d) $(x^3 - 14x + 8) : (x + 4)$
e) $(x^4 - 9x^2 + x + 3) : (x + 3)$
f) $(10x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9) : (x + 1)$

2) Проверьте результат при помощи равенства $P(x) = (x - m)\,Q(x) + r$.

7. Выполните деление любым из известных вам способом.

a) $(x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : (x - 1)$
b) $\dfrac{t^3 + 2t^2 - 7t - 2}{t - 2}$
c) $(y^3 + 3y + 10):(y + 2)$
d) $\dfrac{m^4 + 6m^3 + 2m^2 - m + 8}{m + 1}$

8. a) Сначала выполните деление многочлена $12x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ на многочлены $2x + 1$, $3x + 1$ и $4x + 1$ столбиком, а затем этот же многочлен разделите методом синтетического деления на двучлены $x + \dfrac{1}{2}$, $x + \dfrac{1}{3}$ и $x + \dfrac{1}{4}$. Выразите свое мнение по поводу полученных остатков и коэффициентах для каждого случая.
б) При синтетическом делении делитель должен иметь вид $x - m$. Как можно применить эту схему, если делитель будет иметь вид $2x - 4$?

Теорема об остатке (Теорема Безу)

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлены $x - m$ равен значению многочлена $P(x)$ в точке $x = m$.

$P(x) = (x - m)Q(x) + P(m), \qquad r = P(m)$

Доказательство: в равенстве $P(x) = (x - m') \cdot a(x) + r$ запишем $x = m$.
$P(m) = (m - m) \cdot Q(m) + r$, тогда $r = P(m)$

Пример. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = x^3 - 11x + 9$ на двучлены $x + 4$ применив теорему об остатке.

Решение: запишем делитель в виде $x + 4 = x - (-4)$, тогда $m = -4$. По теореме об остатке остаток равен $P(-4)$:
$r = P(-4) = (-4)^3 - 11\cdot(-4) + 9 = -64 + 44 + 9 = -11$

Проверим решение.
$x^3 - 11x + 9$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -11 & 9 \\ \times & 1 & -4 & 16 & -20 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -11 \end{array}$$

$x^2 - 4x + 5$ остаток

$P(-4) = -11$

Обучающие задания

9. Многочлен $P(x)$ разделите на двучлены $x - m$ методом синтетического деления и сравните полученный остаток со значением $P(m)$.

a) $P(x) = 2x^2 + 4x + 3; \quad m = 2$
b) $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 9; \quad m = -4$
c) $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x - 4; \ m = -2$
d) $P(x) = x^4 + x^3 - 2x + 3; \quad m = 1$

10. Используя “Теорему об остатке” определите остаток от деления многочленов на двучлены: 1) $x - 4$; 2) $x + 2$.

a) $x^3 + 3x^2 - 5x + 2$
b) $2x^3 + 5x - 2x^4$
c) $3x^3 + 7x^2 - 2x - 3$
d) $3x^3 + 4x^2 - 19$
e) $8x^2 - 8x - 5x^3 + 3$
f) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

11. С помощью схемы Горнера выполните деление. Проверьте результат при помощи теоремы об остатке.

a) $(x^3 + 2x^2 - 3x + 9) : (x + 3)$
c) $(2x^3 + 2x^2 - 5x + 4) : (x - 2)$
b) $(2y^2 + 3y - y^3 + 5) : (y - 4)$
d) $(2t^4 + 3t^3 - t^2 + 4t) : (2 + t)$

12. Найдите такое значение коэффициента c, чтобы остаток был равен 2.

a) $(x^3 + 3x^2 - x + c) : (x - 1)$
c) $(x^3 + cx^2 + x - 3) : (x - 2)$
b) $(x^3 + x^2 + cx - 15) : (x + 2)$
d) $(cx^3 + 3x + 1) : (x + 3)$

13. a) При каком значении c многочлен $x^3 - 5x^2 - 5x + c$ делится на двучлены $x + 3$ без остатка?
b) При каком значении c многочлен $x^4 + 2x^3 - x + c$ делится на двучлены $x + 2$ без остатка?

14. При каком значении k при делении многочлена $3x^2 + 6x - 10$ на двучлены $x + k$ остаток будет равен 14?

15. a) При каком значении c, при делении многочлена $P(x) = -2x^3 + cx^2 - 5x + 2$ на двучлены $x - 2$, и на двучлены $x + 1$, получатся одинаковые остатки?

b) При делении многочлена $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax - 7$ на $(x + 1)$ получили остаток 4. Найдите действительное число a.

16. Гюльнар утверждает, что может выполнить деление $(x^4 + 1) : (x + 1)$, не используя ни один из методов и при этом получит результат $x^3 + 1$. Права ли Гюльнар или нет? Обоснуйте свое мнение.

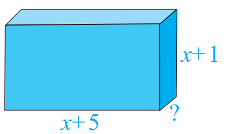
17. Многочлен $P(x)$ делится на $(x - 1)$ без остатка, а при делении на $(x + 2)$ остаток равен 3. Найдите остаток от деление этого многочлена на $(x^2 + x - 2)$.

Прикладные задания

18. Данные многочлены выражают объём прямоугольного параллелепипеда. Найдите неизвестные ребра параллелепипеда.

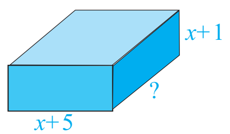
$V = 3x^3 + 8x^2 - 45x - 50$

a)



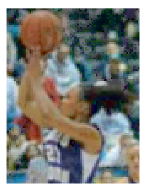
$V = 2x^3 + 17x^2 + 40x + 25$

b)



19. **Кино и театр.** Сумма, потраченная на посещение кино и театров жителями города с 2000 по 2007 гг. (в тыс. ман.) может быть смоделирована в виде $M = 3x^3 + 64x^2 + 824x + 4800$ (здесь x количество лет начиная с 2000 года). Количество населения (в тыс. чел.) для данного города в заданном временном промежутке можно смоделировать в виде $P = 0{,}2\,x + 40$. Сколько в среднем в год было потрачено жителями города с 2000- по 2007 гг. на посещение кино и театров?

20. **Количество зрителей.** Количество зрителей (A), посещающих турнир, начиная с 1982 года в соревнованиях Супер Лиги по волейболу среди женщин, а количество команд, принимающих участие в турнире (T), можно смоделировать при помощи многочленов: $A = 6x^3 + 418x^2 + 7200x + 18000$, $T = 2x + 6$, (здесь x количество лет $0 \le x \le 10$).



Запишите многочлен, моделирующий сколько зрителей за эти годы в среднем приходится на каждую игру.

Теорема о разложении многочлена на множители

Значения переменной x, которые обращают многочлен $P(x)$ в нуль (т.е. корни уравнения $P(x) = 0$) называются корнями (или нулями) многочлена.

Теорема. Если число m является корнем многочлена $P(x)$, то двухчлен $x - m$ является множителем многочлена $P(x)$.

Действительно в равенстве $P(x) = (x - m)Q(x) + P(m)$,
если $P(m) = 0$, то $P(x) = (x - m)Q(x)$.

Верно и обратное утверждение,т.е. если двухчлен $x - m$ является множителем многочлена $P(x)$, то $P(m) = 0$.

Пример 1. При помощи теоремы о разложении многочлена на множители, определите являются или нет, двучлены $x - 1$ и $x + 2$ множителями многочлена $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$.

Решение: вычислим значение многочлена $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ при $x = 1$ и $x = -2$.

$x = 1$: $P(1) = 1^3 - 1^2 - 5\cdot 1 + 2 = -3$

$x = -2$: $P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 5\cdot(-2) + 2 = 0$

Значит, $(x - 1)$ не является множителем, а $(x + 2)$ является одним из множителей данного многочлена.

Пример 2. Зная, что $f(-2) = 0$, разложите многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ на множители.

Решение: так как $f(-2) = 0$, то двучлен $x - (-2) = x + 2$ один из множителей многочлена $f(x)$, другой множитель найдем методом синтетического деления.

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

-2	1	-5	-2	24
		-2	14	-24
×	1	-7	12	0

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x^2 - 7x + 12)$$

Разложив квадратный трехчлен на множители, известным способом, можем найти другие корни многочлена.

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4)$$

$x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ корни уравнения $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$,
т.е. $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ являются нулями данного многочлена.

Примечание: если многочлен задан в виде $P(x) = (x - m)^k\cdot Q(x)$ (здесь $Q(m) \neq 0$), то число m является **кратным** корнем многочлена $P(x)$ (повторяется k раз). Например, если разложение многочлена на множители имеет вид $P(x) = (x - 2)^3\cdot(x + 1)$, то число $x = 2$ является корнем кратности 3.

Обучающие задания

1. Определите многочлены, для которых множителем является двучлен $x-1$.

x^3-3x^2+4x-2

$2x^3-x^2-3x-2$

$3x^3-x-3$

$2x^3+4x^2-5x-1$

$x^4-3x^3+2x^2-x+1$

$4x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

2. Найдите такое значение коэффициента k, при котором заданный двучлен является множителем многочлена.

a) $x^2-x+k,\quad x-2$

b) $x^2+kx-16,\quad x-2$

c) $x^3-x+k,\quad x-2$

d) $x^3+4x^2+x+k,\quad x+2$

3. Зная, что $f(a)=0$, разложите многочлен на множители.

$f(x)=x^3-12x^2+12x+80;\ a=10$

$f(x)=x^3-18x^2+95x-126;\ a=9$

$f(x)=4x^3-4x^2-9x+9;\ a=1$

$f(x)=x^3-x^2-21x+45;\ a=-5$

$f(x)=x^3-11x^2+14x+80;\ a=8$

$f(x)=2x^3+7x^2-33x-18;\ a=-6$

4. Зная один из корней уравнения, найдите другие корни.

$2x^3-5x^2+x+2=0;\quad x=2$

$3x^3+7x^2-22x-8=0;\quad x=-\dfrac{1}{3}$

$2x^3-3x^2-11x+6=0;\quad x=-2$

$12x^3+16x^2-5x-3=0;\quad x=-\dfrac{3}{2}$

5. 1) Покажите, что если x_1, x_2 и x_3 корни многочлена третьей степени, который можно разложить на множители в виде
$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_3\cdot(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, то

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3},\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_1}{a_3},\quad x_1x_2x_3=-\frac{a_0}{a_3}$$

2) зная, что x_1, x_2, x_3 корни уравнения $x^3-7x+6=0$ найдите :
а) сумму $x_1+x_2+x_3$; б) произведение $x_1x_2x_3$.

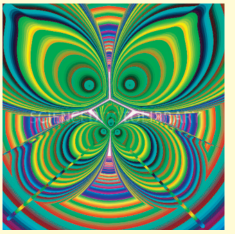
6. а) Найдите корни уравнения $x^3-4x^2+x+6=0$ разделив многочлен $f(x)=x^3-4x^2+x+6$ на двучлен $x+1$.
б) При помощи синтетического деления докажите, что один из корней уравнения $12x^3-11x^2-82x+21=0$ равен 3.

7. Применяя теорему о разложении на множители покажите, что двучлен $x+1$ является множителем многочлена $P(x)=x^{25}+1$, и не является множителем многочлена $Q(x)=x^{25}-1$.

8. Объём аквариума в форме прямоугольного параллелепипеда можно смоделировать по формуле $V(x)=x^3+14x^2+63x+90$. Если многочлен $x+6$ выражает глубину, то запишите другие измерения в виде многочлена с соответствующими целыми коэффициентами.

Нахождение рациональных корней

Полиномография вид искусства который является результатом синтеза изобразительного искусства, математики и компьютерной науки. Основой полиномографии является визуализация корней многочлена при помощи компьютерных программ.



Практическая работа: 1. Запишите уравнение $15x^3-52x^2-23x+6=0$ в виде $x\cdot(15x^2-52x-23)=-6$ и объясните, делителем какого числа необходимо является целый корень (если имеется) этого уравнения

2. С помощью синтетического деления проверьте, что число $x=3$ является корнем данного уравнения. Покажите, что числа $\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{5}$ также являются корнями.

3. Запишите корни в виде $\frac{3}{1}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{5}$. Делителем какого коэффициента в уравнении являются числители и знаменатели этих дробей?

Теорема о рациональных корнях

Если для многочлена $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами существует рациональный корень, то этот корень имеет вид

$$\frac{p}{q}=\frac{\text{делитель свободнго члена } a_0}{\text{делитель коэффициента } a_n \text{ при старшем члене}}$$

Следствие 1. если коэффициент при высшей степени ±1 и многочлен имеет рациональный корень, то он является целым числом. и является

Следствие2. Целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Пример. Найдите рациональные корни многочлена $f(x)=x^3-3x^2-x+3$

Решение: $\pm1, \pm3$ - делители свободного члена (3). Коэффициент при x^3 равен 1. Значит, нули надо искать среди делителей числа 3. Имеем $f(1)=1^3-3\cdot1^2-1+3=1-3-1+3=0$, т.е. одним из множителей является двучлен $x-1$. Другие множители найдем используя синтетическое деление $(x^3-3x^2-x+3):(x-1)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \multicolumn{4}{c}{x^3-3x^2-x+3} \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & 1 & -2 & -3 \\ \hline \times & 1 & -2 & -3 & 0 \\ & \multicolumn{4}{l}{x^2-2x-3} \end{array}$$

$(x^3-3x^2-x+3):(x-1)=x^2-2x-3$

$(x-1)(x^2-2x-3)=0$

$(x-1)(x+1)(x-3)=0$

$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=3$

Внимание! Если коэффициенты многочлена являются рациональными числами, то для нахождения рациональных корней уравнения $P(x)=0$ сначала обе части уравнения надо умножить на число (отличное от нуля), чтобы коэффициенты стали целыми.

Нахождение рациональных корней

Для нахождения рациональных корней выполните следующие действия.
1. В соответствии с правилом составляется все дроби с найденными всевозможными значениями числителя и знаменателя, которые могут соответствовать возможным рациональным корням.
2. Из этих чисел выбирается число m (обращающее значение многочлена в нуль), которое является корнем многочлена, т.е. определяется двухчлен $x - m$ на который многочлен делится без остатка.
3. Для данного многочлена при помощи синтетического деления на двухчлен $x - m$ определяются другие корни.
4. Находят другие корни. Причем, если множитель является квадратным трехчленом его раскладывают на множители известным методом , либо при помощи формул сокращенного умножения, в противном случае все линейные множители находятся синтетическим делением.
5. Возможно, что ни одно число из списка не будет нулем многочлена. В этом случае, многочлен не имеет рациональных корней.
Например, рациональными корнями многочлена $f(x) = x^3 + x + 1$ могут являться числа ± 1.
Проверим: $f(-1) = (-1)^3 - 1 + 1 = -1$; $f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$,
значит многочлен $f(x)$ не имеет рациональных корней.

Обучающие задания

9. Нулями какого многочлена являются числа $-1, 1, -2, 2$? Разложите на множители при помощи синтетического деления и найдите другие корни.

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$
b) $f(x) = 6x^3 - 19x^2 + 16x - 2$
c) $f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$
d) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$
e) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$
f) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x - 4$

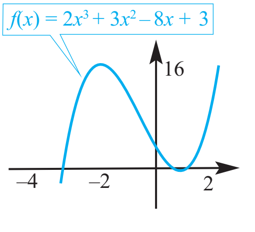
10. При помощи синтетического деления покажите, что число 5 является корнем уравнения $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20 = 0$. Решите это уравнение

11. Найдите рациональные корни уравнения.

a) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$
b) $2x^3 - 10x^2 + 12x - 4 = 0$

12. Запишите в виде произвидения множителей трехчлена $P(x)$, если коэффициент при старшем члене $a = 2$ и $P(-2) = P(1) = P(2) = 0$.

13. На рисунке изображен график функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.
По графику определите нули многочлена. Найдите корни многочлена по правилу нахождения рациональных корней и при помощи метода синтетического деления найдите остальные корни. Сравните результат с графиком.



Исследование. 1) Укажите степень многочленов $P(x) = (x+2)(x^2-1)$ и $Q(x) = (x-2)(x^2+1)$, заданных в виде произведения множителей и найдите их корни.

2) Равна ли степень произвольного многочлена количеству его корней?

Покажем на примере, что многочлен n -ой степени имеет n корней.

1. Многочлен первой степени $P(x) = x - 2$ имеет один корень: $x-2=0$; $x=2$
2. Многочлен второй степени $P(x) = x^2 + 4x + 3$ имеет два корня: $x^2 + 4x + 3 = 0$, $(x+1)(x+3)=0$; $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$
3. Многочлен третьей степени $P(x) = x^3 + 4x$ имеет три корня: $x^3 + 4x = x(x^2+4)$; $x(x^2+4)=0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2i$, $x_3 = -2i$
4. Многочлен четвертой степени $P(x) = x^4 - 1$ имеет четыре корня: $(x-1)(x+1)(x+i)(x-i)=0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -i$, $x_4 = i$
5. Принимая во внимание, что уравнение $(x-3)^2 \cdot (x+1)^3 = 0$ имеет кратные корни, имеем 5 корней: $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = x_4 = x_5 = -1$

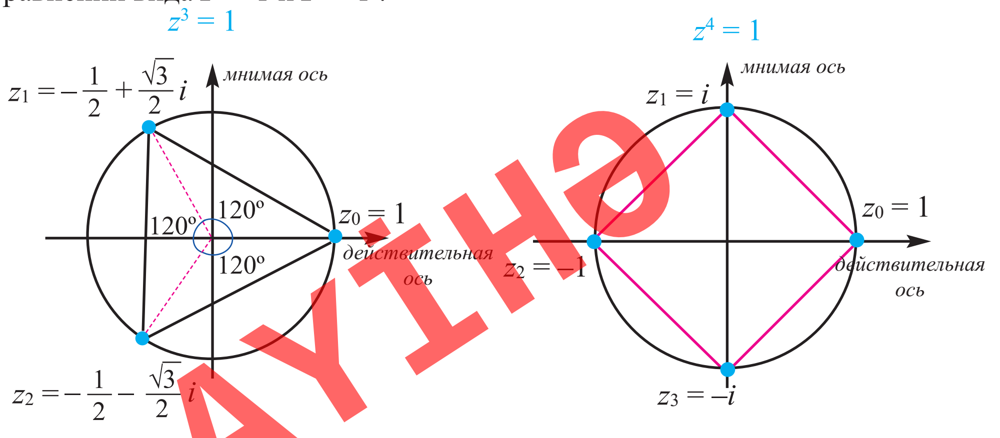
Пример 1. Найдите все корни уравнения $z^n = 1$.

Решение: Решение уравнения $z^n = 1$ приводит к нахождению корня n-ой степени из единицы. Известно, что $\sqrt[n]{1}$ имеет n различных значений :

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad 0 \le k \le n-1$$

модули корня n-ой степени из единицы равны 1, аргументы отличаются друг от друга в $\frac{2\pi}{n}$ раз. Т.е. эти числа соответствуют комплексным числам, расположенными в вершинах правильного n - угольника, вписанного в окружность радиусом равным 1, центр которой находится в начале координат.

На рисунках ниже на комплексной плоскости изображены все корни уравнений вида $z^3 = 1$ и $z^4 = 1$.



Пример 2. Найдем все корни многочлена $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$.

Решение: Рациональными корнями данного многочлена (если они существуют), согласно правилу, могут являться числа $\pm 1, \pm 5$. Проверим: $P(1) = 1^4 - 6\cdot 1^3 + 14\cdot 1^2 - 14\cdot 1 + 5 = 0$.

Значит, $x=1$ является корнем данного многочлена $P(x)$. Другие корни найдем синтетическим делением.

$$\begin{array}{c|ccccc} & x^4 - & 6x^3 + & 14x^2 - & 14x + & 5 \\ 1 & 1 & -6 & 14 & -14 & 5 \\ \times & & 1 & -5 & 9 & -5 \\ \hline & 1 & -5 & 9 & -5 & 0 \\ & x^3 - & 5x^2 + & 9x & - & 5 \end{array}$$

В выражении $P(x) = (x-1)(x^3-5x^2+9x-5)$ для множителя (x^3-5x^2+9x-5) вновь применим теорему о рациональных корнях и синтетическое деление $x^3-5x^2+9x-5=(x-1)\cdot(x^2-4x+5)$. Тогда $P(x)=(x-1)^2(x^2-4x+5)$. Решим уравнение $(x-1)^2(x^2-4x+5)=0$;

$(x-1)^2=0$; $\qquad x=1$(корень кратности 2);

$x^2-4x+5=0$; $\qquad x=2\pm\sqrt{4-5}=2\pm i$

Корни: $x_1=x_2=1 \quad x_3=2+i,\ x_4=2-i$

Во всех рассмотренных нами примерах уравнение n -ой степени всегда имеет n корней (действительных или комплексных).

Основная теорема алгебры (теорема Гаусса)

Теорема. Любой многочлен степени больше нуля имеет по крайней мере хотя бы один корень на множестве комплексных чисел.

Если многочлен $P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ является многочленом степень которого больше нуля с комплексными коэффициентами, то согласно основной теореме алгебры у него по крайней мере есть хотя бы один корень r_1. По теореме разложения многочлена на множители $P(x)=(x-r_1)Q_1(x)$. При этом многочлен $Q_1(x)$ имеет степень $n-1$. Если $n-1=0$, то $Q_1(x)=a_n$; если $n-1>0$, то согласно той же теореме многочлен $Q_1(x)$ имеет по крайней мере хотя бы один корень. Обозначим его через r_2, тогда справедливо разложение $Q_1(x)=(x-r_2)Q_2(x)$, где $Q_2(x)$ многочлен степени $n-2$. Значит, можно записать $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)Q_2(x)$. Аналогично, если $n-2=0$, то $Q_2(x)=a_n$; при $n-2>0$, на основании той же теоремы многочлен $Q_2(x)$ имеет по крайней мере хотя бы один корень. Обозначим его через r_3 получим $Q_2(x)=(x-r_3)Q_3(x)$ и можно записать $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)Q_3(x)$.

Продолжая процесс наконец при $k=n$ получаем $Q_n(x)=a_n$. Тогда для многочлена $P(x)$ можно записать следующее разложение

$$P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)a_n$$

здесь числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ являются нулями многочлена $P(x)$. Эти нули могут и не быть различными.

Следствие. Многочлен степени $n \geq 1$ во множестве комплексных чисел имеет n корней включая повторяющиеся корни.

Примечание: если комплексное число $a+bi$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то сопряженное комплексное число $a-bi$ так же является корнем данного многочлена.

Основная теорема алгебры

Любой многочлен с действительными коэффициентами можно представит в виде произведения множителей двухчленов в виде $(x - r)$, соответствующим действительным корням и трехчленов в виде $(x^2 + px + q)$ соответствующим сопраженным комплексным корням. Отсюда можно заключить, что многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами всегда имеет действительного корня.

Пример. Запишите в виде произведения многочлен наименьшей степени, если известно что коэффициент при старшем члене равен 2, а корнями являются числа 3 и $1 + i$

Решение. Так как числа $1 + i$ и $1 - i$ являются корнями трехчлена $x^2 + (1 + i + 1 - i)x + (1 + i)\cdot(1 - i) = x^2 - 2x + 2$, то имеем:

$P(x) = 2 \cdot (x - 3)\cdot(x^2 - 2x + 2)$.

Обучающие задания

14. Дано разложение многочлена на множители. Запишите корни многочлена и определите его степень.

a) $P(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$

b) $P(x) = (x - 1)^3(x - 4)^2$

c) $P(x) = (x + 2)(x - i)(x + i)$

d) $P(x) = (x + 2)^3(x - 2)$

e) $P(x) = 3(x - 4)^3(x - 3)^2(x - 1)$

f) $P(x) = (x - 7)(x + 4)^3(x + 8)$

15. По заданным корням найдите остальные корни многочлена.

a) $P(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 16$; $x_1 = -1$

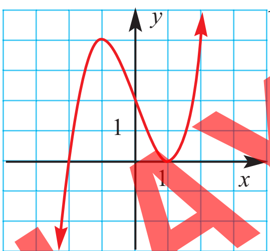
b) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$; $x_1 = 3$

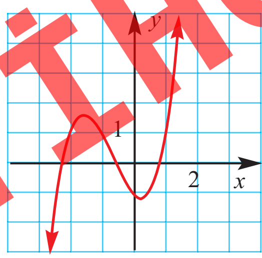
c) $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 28x - 15$; $x_1 = \dfrac{1}{2}$

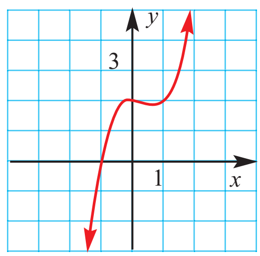
d) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

16. Найдите корни многочлена. Установите соответствие многочлена и графика.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $g(x) = x^3 - 3x + 2$ $h(x) = x^3 - x^2 + 2$

a)


b)


c)


17. Решите уравнение. Найдите все действительные корни.

a) $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = 0$

b) $x^3 - 22x + 24 = 0$

c) $x^3 - 8x + 8 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

18. Найдите все (действительные, иррациональные и комплексные) корни уравнения.

a) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$
b) $2x^3 - 10x^2 + 12x - 4 = 0$
c) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x - 5 = 0$
d) $x^3 - 19x + 30 = 0$
e) $x^4 - x^3 - 2x - 4 = 0$
f) $x^3 - 7x - 6 = 0$

19. Найдите количество кратных корней многочлена, применив для их нахождения схему Горнера:
a) число $x = 1$ многочлена $x^3 - 3x + 2$;
b) число $x = -2$ многочлена $x^3 + 3x^2 - 4$.

20. Зная, что $x = -2$ один из корней уравнения $x^3 + 2x^2 + ax - 6 = 0$, найдите a и решите уравнение.

21. 1) Упростите. a) i^5 b) i^7 c) i^{23} d) i^{17} e) $(1 + i)^6$
2) Запишите корни многочлена.
a) $P(x) = x^3 + 1$ b) $P(x) = x^4 - 1$; c) $P(x) = x^6 - 1$

22. a) Запишите в виде множителей квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, один из корней которого равен $3 - \sqrt{2}$.

b) Запишите в виде множителей квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, один из корней которого равен $2 + 3i$. Проверьте, является ли трехчлен $x^2 - 4x + 13$ искомым многочленом.

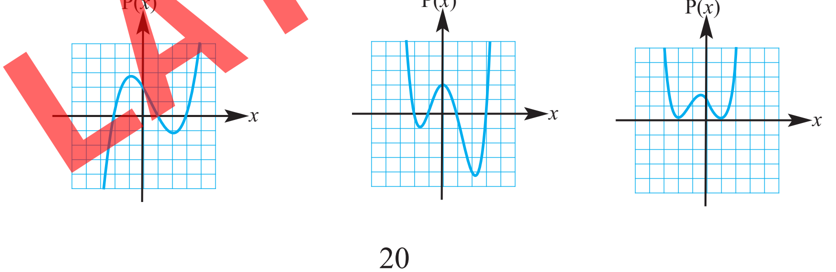
c) Обобщите результаты полученные в пунктах a и b и запишите сове мнение.

15. Запишите многочлен $P(x)$ наименьшей степени с заданными корнями и коэффициентом при высшей степени равным 1. Укажите его степень.

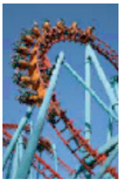
a) -2 (корень кратности 3) и 1 (корень кратности 2);

b) 1 (корень кратности 2), $-i$ и i; c) 2 и $3 - i$

16. **Вопрос открытого типа.** Используя точки пересечения графика оси x запишите в виде множителей какого-либо многочлена $P(x)$.



Прикладные задания



Пример. Скорость вращения карусели в Лунапарке за 5 секунд можно смоделировать функцией $h(t) = 2t^3 - 9t^2 + 3t + 14$ (здесь h показывает высоту кабины от нулевого уровня в м). На протяжении какого времени в течении 5 секунд после начала вращения кабина карусели находилась на нулевом уровне?

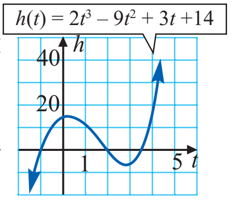
Решение: Во всех случаях,кроме значений $h(t)$ равных нулю, кабина карусели находится либо ниже, либо выше нулевого уровня. Значит, мы должны найти корни заданного многочлена. Применим правило нахождения рациональных корней.

1. Проверим является ли -1 корнем.
$h(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 9\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 14 = -2 - 9 - 3 + 14 = 0$

2. Число -1 является корнем, значит одним из множителей данного многочлена является $t + 1$. Другие корни найдем при помощи синтетического деления.

-1	2	-9	3	14
		-2	11	-14
	2	-11	14	0

$h(t) = 2t^3 - 9t^2 + 3t + 14 = (t + 1)(2t^2 - 11t + 14)$,
Учитывая, что $2t^2 - 11t + 14 = (t - 2)(2t - 7)$, запишем многочлен в виде $h(t) = (t + 1)(t - 2)(2t - 7)$,т.е.
$t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3{,}5$ являются корнями уравнения.
Значения $t_2 = 2$, $t_3 = 3{,}5$ принадлежат временному интервалу в 5 секунд и в этих моментах кабина карусели находилась на нулевом уровне?



То, что корни найдены верно показывает график многочлена, построенный при помощи графкалькулятора.

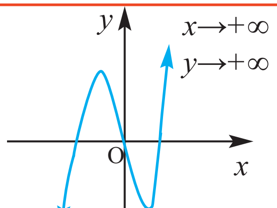
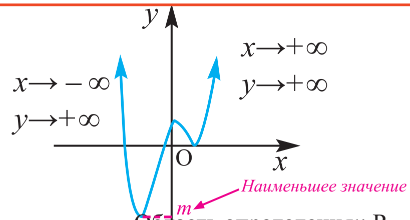
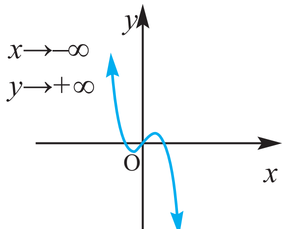
25. Прибыль, которую получает фирма по пошиву спортивных рубашек, можно смоделировать функцией $P(x) = -x^3 + 4x^2 + x$ (здесь P прибыль (млн. ман.), x - количество рубашек (млн.)). В отчете показано,что за 4 млн. пошитых рубашек, была получена прибыль в размере 4 млн. манат. Какое количество рубашек надо пошить, чтобы их количество стало меньше, а прибыль осталась бы такой же?

26. Произведение двух чисел задано выражением $2n^2 + 7n + 3$ (здесь n - действительное число). Если одно из чисел равно $n + 3$, то запишите выражение для другого числа. Что можно сказать об этих числах в случае $n = 1$?

График функции многочлена

Функция $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ является функцией многочлена в стандартном виде. В частном случае, при $n = 1$ получаем линейную функцию (график прямая линия), при $n = 2$ получаем квадратичную функцию (график парабола). Любой многочлен определен на множестве действительных чисел и графиком является непрерывная линия.
При возрастание значений аргумента по модулю, многочлен ведет себя как функция старшего члена $y = a_n x^n$. Ниже показаны примеры графиков функции многочлена и некоторые их свойства.

$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

	***n* нечетное**	***n* четное**
$a_n > 0$	 Область определения: R Множество значений: R	 Область определения: R Множество значений: $[m\ ; +\infty)$
$a_n < 0$	 Область определения: R Множество значений: R	 Область определения: R Множество значений: $(-\infty; M\ ]$

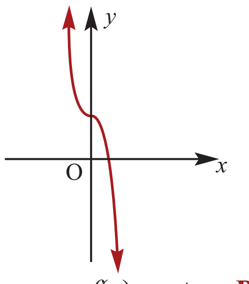
Пример 1. Определите характер поведения функции многочлена в зависимости от степени и знака коэффициента при старшем члени, а также при неограниченном возрастании аргумента по модулю.
a) $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$ b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$

Решение: a) Степень функции $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$ нечетная (равна 3). Коэффициент старшего члена равен –2. По таблице видно, что в данном случае при $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$; а при $x \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$.
b) Степень функции $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ четная (равна 4). Коэффициент старшего члена равен 1. В данном случае при
$x \to -\infty, f(x) \to +\infty$; при $x \to +\infty, f(x) \to +\infty$.

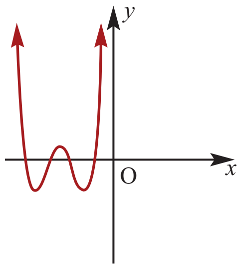
Пример 2. Анализ многочлена по графику

По графику функции многочлена определите является ли многочлен четным или нечетным, знак коэффициента старшего члена и как ведет себя функция при неограниченнном возрастании аргументов по модулю.

a)



b)



Решение: При $x\to -\infty$, $f(x)\to +\infty$
При $x\to +\infty$, $f(x)\to -\infty$
Многочлен нечетной степени.
$a_n < 0$,

Решение: При $x\to -\infty$, $f(x)\to +\infty$
При $x\to +\infty$, $f(x)\to +\infty$
Многочлен четной степени.
$a_n > 0$,

Отметим, что если n нечетно, то функция многочлена имеет по крайней мере хотя бы один действительный нуль, если n четно, то их вообще может и не быть.

Алгоритм построения эскиза графика функции многочлена

1. Находят точки пересечения графика с осями координат (если существуют). Эти точки отмечаются на координатной плоскости.
2. Вычисляют значение функции в некоторых точках между действительными нулями. Соответствующие точки отмечаются на координатной плоскости.
3. Определяют как ведет себя график в “кончевых точках”.
4. Строят график.

Применим алгоритм к следующему примеру.

Пример 3. Постройте график функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$.

1. Применим теорему о рациональных корнях. Разложим многочлен на множители и найдем нули функции.
По теореме возможные рациональные нули надо искать среди чисел, которые являются делителями числа 8: ± 1; ± 2; ± 4; ± 8 .

Проверим –1. $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) - 8 = 0$

Значит, двучлен $x + 1$ является одним из множителей. Остальные множители найдем синтетическим делением.

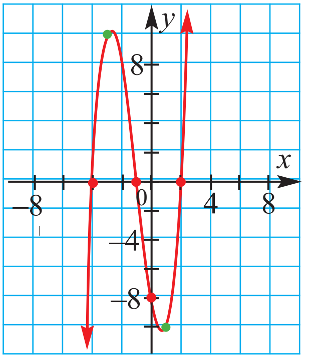
$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ -1 & & -1 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 8$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x + 1)(x^2 + 2x - 8)$

Зная, что $(x^2 + 2x - 8) = (x - 2)(x + 4)$ запишем все линейные множители многочлена:



$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 4)$; отсюда находим нули -1; 2; -4 . Так как $f(0) = -8$, то точка $(0;-8)$ является точкой пересечения с осью y.
Отметим эти точки на координатной плоскости.

2. Найдем еще несколько значений функции в точках, не требующих сложных вычислений. Например в точках $x = 1$ и $x = -3$:
$f(-3) = (-3 + 1)\cdot(-3 - 2)\cdot(-3 + 4) = 10$
$f(1) = (1 + 1)\cdot(1 - 2)\cdot(1 + 4) = -10.$
Отметим точки $(-3; 10)$ $(1; -10)$.

3. Определим как меняется график при уменьшении или увеличении значений x. Наивысшая степень равна 3, нечетная, коэффициент положительный. Значит, при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, *при* $x \to -\infty$, $y \to -\infty$.

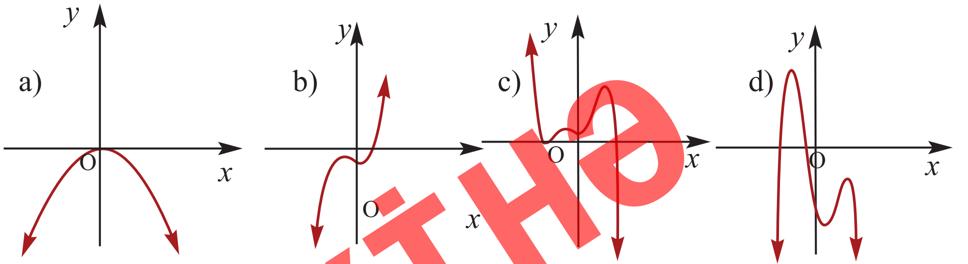
4. Соединим отмеченные точки и получим схематический график функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$.

Обучающие задания

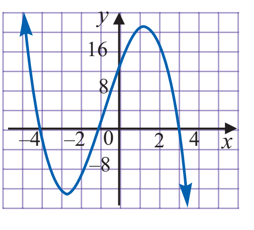
1. Определите степень многочлена, знак коэффициент при старшем члене и характер поведения при неограниченном росте аргумента по модулю.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ b) $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4$
c) $f(x) = -x^6 + 2x^3 + 3x + 1$ d) $f(x) = -4x^5 + 2x^3 - 3x + 1$

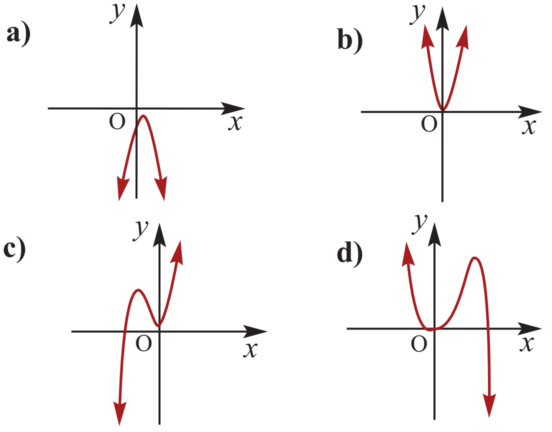
2. По графику определите степень многочлена (четная или нечетная), знак коэффициента при старшем члене и знак значения функции при неограниченном увеличении или уменьшении аргумента функции.



3. По графику запишите:
a) четной или нечетной является степень многочлена
b) знак коэффициента члена высшей степени;
c) точки пересечения с осью x;
d) интервалы, где функция имеет положительна и отрицательна;



4. Определите соответствие графика и функции.



1) $f(x) = 5x^3 + 9x^2 + 1$

2) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 3x^2$

3) $f(x) = 3x^4 - x^5 + x$

4) $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$

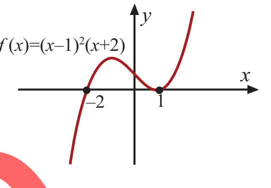
5. Схематично изобразите график функции.

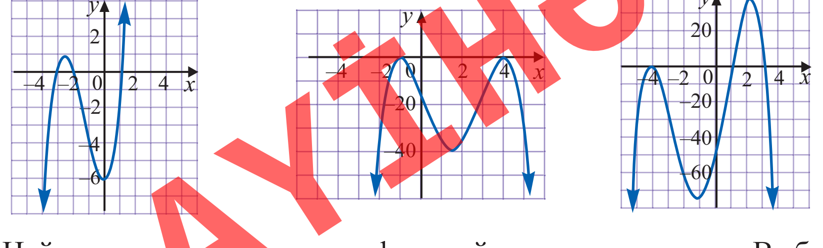
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ b) $f(x) = -x^4 - 4x^3 + 4x^3$

6. **Максимальный объем.** Из листа металла прямоугольной формы изготовили бак (без крышки). Для этого, от листа, с каждой стороны отрезали квадрат со стороной x. Функция $V = x(6 - 2x)(4 - 2x)$ моделирует объем бака. Постройте график функции и по графику определите при каких значениях x функция принимает максимальное значение.

7. Постройте график функции $y = (x + 3)^2$. Какую степень имеет данный многочлен? Найдите количество корней.

8. На рисунке изображен график функции $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$. График функции в нуле повторяшей четное количество раз касается оси x и поворачивается. Учитывая это, для следующих графиков установите какую наименьшую степень может иметь многочлен, соответствующий графику.





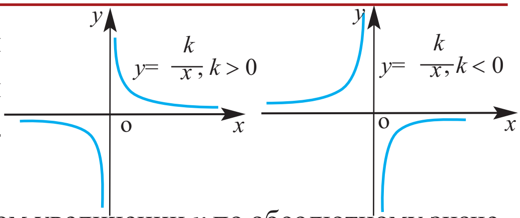
9. Найдите точки пересечения функций с осями координат. Выберите и постройте графики любых двух функций.

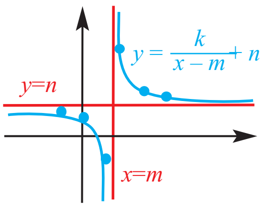
$f(x) = 2(x - 1)^2(x + 1)$ $f(x) = -3(x + 3)^2(x + 1)^2$ $f(x) = (x - 2)^2(x + 5)$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Рациональная функция

График функции $y=\dfrac{k}{x}$ называется гиперболой. При стремлении значений x к нулю точки гиперболы стремятся к оси ординат, т.е. к прямой $x = 0$, при неограниченном увеличении x по абсолютному значению точки гиперболы неограниченно приближаются к оси абсцисс, т.е. к прямой $y = 0$. Прямая $x = 0$ называется вертикальной асимптотой, а прямая $y = 0$ называется горизонтальной асимптотой гиперболы $y=\dfrac{k}{x}$. При параллельном переносе гиперболы $y=\dfrac{k}{x}$ на вектор $\langle m;\ n\rangle$ получается график функции $f(x)=\dfrac{k}{x-m}+n$. В этом случае начало координат преобразуется в точку $(m;\ n)$ и вертикальной асимптотой становится прямая $x = m$, а горизонтальной - прямая $y = n$.





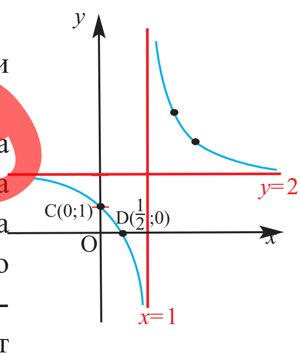
При помощи асимптоты можно по следующему алгоритму построить график функции $f(x)=\dfrac{k}{x-m}+n$.

1. Изобразим вертикальную прямую $x = m$ (вертикальную асимптоту) и горизонтальную прямую $y = n$ (горизонтальную асимптоту).
2. От вертикальной асимптоты справа и слева отметим несколько точек.
3. Через эти точки построим ветви гиперболы.

Для того, чтобы построить более точный график рекомендуется найти точки пересечения функции с осями координат (если такие существуют).

Пример: Постройте график функции $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

Решение: разделим почленно числитель функции на знаменатель и запишем ее в виде $y=2+\dfrac{1}{x-1}$. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, а пряма $y = 2$ горизонтальной асимптотой. Точка C(0;1) является точкой пересечения с осью y, а точка $D(\frac{1}{2};\ 0)$ является точкой пересечения с осью x. Учитывая вертикальные и горизонтальные асимптоты и точки C и D пересечения с осями координат изобразим ветви гиперболы.



Примечание: Для функции $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\left(\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}\right)$ прямая $x=-\dfrac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой, (прямая, которая проходит через точку, обращающую в нуль знаменатель $cx + d$), горизонтальной асимптотой является прямая $y=\dfrac{a}{c}$.

Рациональная функция

Стандартный вид рациональной функции:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}\ ;\ a_m\neq 0,\ b_n\neq 0$$

Для построения графиков рациональных функций надо определить нижеследующие:

- Точки пересечения с осями координат.
- Наличие симметрии у нечетных или четных функций.
- Асимптоты функции.

1. Для рациональной функции f абсциссами точек пересечения графика с осью x являются точки , которые обращают в нуль многочлен $p(x)$.

2. Для функции f вертикальная асимптота (асимптоты) определена для значений x, которые обращают в нуль функцию $q(x)$.

Если функции выражается в виде дроби, знаменатель которой обращается в нуль при $x=a$, а числитель не равен нулю, то данная рациональная функция имеет вертикальную асимптоту.

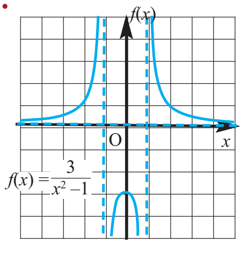
3.Для рациональной функции f существует не более одной горизонтальной оси, которая определяется значениями степеней m и n многочленов $p(x)$ и $q(x)$.

если $m<n$, то прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой

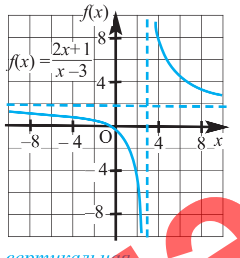
если $m=n$, *то* горизонтальной асимптотой является прямая $y=\dfrac{a_m}{b_n}$.

если $m>n$, то горизонтальная асимптота не имеется.

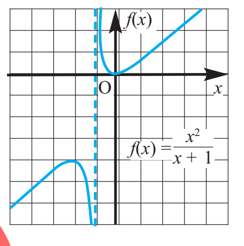
Пример:



вертикальные асимптоты: x = 1 и x = - 1 горизонтальная асимптота: y = 0



вертикальная асимптота: x = 3 горизонтальная асимптота: y = 2



вертикальная асимптота: x = -1 горизонтальной асимптоты нет

Обучающие задания:

1. Постройте графики следующих функций преобразованием графика функции $y=\dfrac{2}{x}$.

a) $y=\dfrac{2}{x-1}$ b) $y=\dfrac{2}{x+3}$ c) $y=\dfrac{2}{x}-1$ d) $y=\dfrac{2}{x}+1$

2. Найдите вертикальную и горизонтальную асимптоту функции и постройте ее график.

a) $y=\dfrac{x-3}{x-2}$ b) $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ c) $y=\dfrac{2x+1}{x}$ d) $y=\dfrac{3x+2}{x+1}$

Обобщающие задания

1. При делении многочлена $mx^3 - 3x^2 + nx + 2$ на двухчлен $x + 3$ в остатке получается -1, а при делении его на двухчлен $x - 2$ в остатке получается -4. Найдите значение параметров m и n.

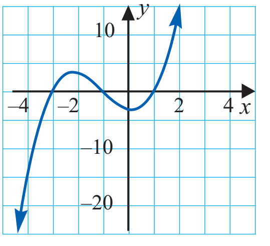
2. По данным синтетического деления найдите делимое, делитель, частное и остаток.

-3	1	-2	-9	18
		-3	15	-18
	1	-5	6	0

3. Выполните деления столбиком.

a) $(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x + 1)$
b) $(x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 2)$
c) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$
d) $(x^3 - 3x^2 - 7x + 6) : (x - 2)$
e) $(x^3 + 2x^2 - x + 5) : (x^2 - x + 1)$
f) $(7x^3 + x^2 + x) : (x^2 + 1)$

4. На рисунке представлен график функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.



a) Найдите значение m, если при делении $f(x)$ на $(x - m)$ в остатке получается -15.

b) При помощи графика определите остатки при делении:
$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 3)$ и
$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 1)$.

5. Покажите, что заданный двухчлен является множителем многочлена.

$g(x) = x^3 - x^2 - 20x;\ x + 4$
$h(x) = x^3 - x^2 - 24x - 36;\ x + 2$
$r(x) = x^3 - 37x + 84;\ x + 7$
$f(x) = x^4 - 6x^3 - 8x + 48;\ x - 6$
$s(x) = x^4 + 4x^3 - 64x - 256;\ x + 4$
$t(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45;\ x - 5$

6. Выполните деление при помощи метода синтетического деления.

$(3x^2 + 7x - 20) : (x + 5)$
$(5x^2 - 12x - 8) : (x + 3)$
$(4x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$
$(5x^3 - 6x^2 + 3x + 11) : (x - 2)$
$(6x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1) : (x - 2)$
$(x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 2x + 3) : (x - 3)$

7. По заданному корню найдите остальные корни многочлена.

a) $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 1;\ x = -1$
b) $f(x) = x^3 - 9x + 10;\ x = 2$

8. Найдите действительные корни уравнения.

a) $(4x^2 - 16)(x^2 - 3x - 10) = 0$
b) $(4x^2 - 81)(x^2 - 9) = 0$
c) $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$
d) $16x^6 = 54x^3$
e) $2x^3 + 5x^2 = 8x + 20$
f) $6x^5 - 18x^4 + 12x^3 = 36x^2$

9. Разложите многочлен на множители.

a) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
b) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 12$

10. Изобразите схематично график функции $f(x) = 3x - x^3$.

2 Векторы в пространстве

2

- Прямоугольная система координат в пространстве
- Векторы в пространстве
- Скалярное призведение двух векторов

Математический словарь

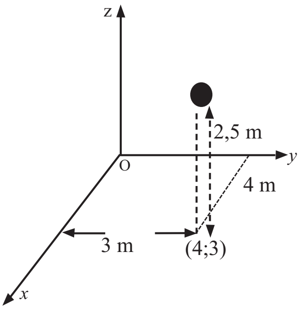
- прямоугольная система координат
- координатные плоскости
- координаты точек в пространстве
- октанты
- вектор
- компоненты вектора
- длина вектора
- базисные вектора
- единичный вектор
- вектор позиции (радиус-вектор)

Основоположниками аналитической геометрии являются знаменитые ученые Декарт и Ферма. Однако Декарт свои исследования опубликовал первым. А исследования Ферма увидели свет намного позже, после его смерти. Интересно, что подойдя к проблемме с разных сторон они пришли к одинаковым выводам. Декарт искал уравнение исследуемой кривой, а Ферма для заданного уравнения искал соответствующую кривую. Применение правил алгебры к геометрии привело к возникновению аналитической геометрии. В последствии аналитическая геометрия была усоврешенствована основателем математического анализа Исааком Ньютоном, который писал “ ... я смог пойти дальше Декарта, только потому, что стоял на плечах гигантов"


Пьер де Ферма

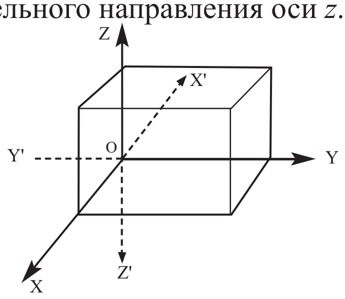

Рене Декарт

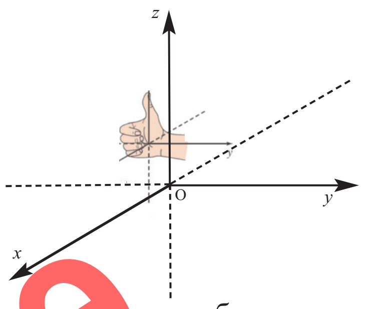
Прямоугольная система координат в пространстве



Пусть, мяч ударился о пол и отскочил вертикально вверх. Координаты мяча в точке, соприкосновения с полом можно определить относительно длины и ширины комнаты двумя значениями. Однако, когда мяч отскочил от пола, то его положение уже невозможно определить двумя координатами. Если положение мяча на полу определяется как (4; 3), то когда мяч поднялся на высоту 2,5 м его положение в пространстве задается уже тремя координатами (4; 3; 2,5).

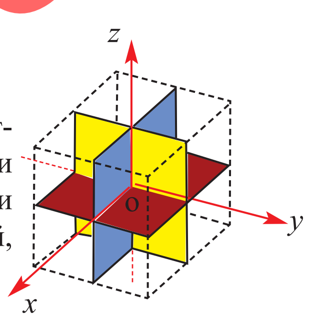
Прямоугольная система координат в пространстве. Проведем через точку O три взаимно перпендикулярные прямые $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ так что, прямые $x'Ox$, $y'Oy$ будут расположены на плоскости листа, а прямая $z'Oz$ будет перпендикулярна этой плоскости. Три взаимно перпендикулярные прямые, с указанным на них направлением и единичными отрезками, называются координатными осями и образуют трехмерную прямоугольную систему координат, что является простейшей пространственной моделью. Если согнуть пальцы правой руки в сторону положительного направления оси y от положительного направления оси x, то большой палец будет направлен вдоль положительного направления оси z.





Три координатные оси, попарно пересекаясь, образуют три координатные плоскости

- O начало координат
- Ox, Oy, Oz координатные оси
- Oxy, Oyz, Ozx координатные плоскости.



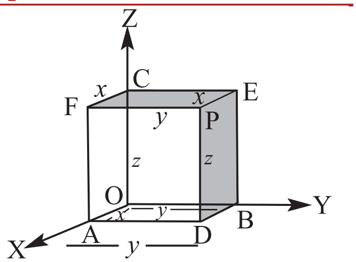
Каждая координатная плоскость делит пространство на две части (полупространства) и таким образом три координатные плоскости вместе делят пространство на восемь частей, каждая из которых называется октантом:

1. $Oxyz$; 2. $Ox'yz$; 3. $Ox'y'z$; 4. $Oxy'z$;
5. $Oxyz'$; 6. $Ox'yz'$; 7. $Ox'y'z'$; 8. $Oxy'z'$

Прямоугольная система координат в пространстве

Пусть точка P произвольная точка в пространстве. Проведем через точку P, параллельно плоскостям Oyz, Ozx и Oxy, плоскости, которые пересекают соответствующие координатные оси в точках A, B и C. Получим три плоскости:

1. ADPF || Oyz ;
2. BEPD || Oxz ;
3. CFPE || Oxy .



Координаты точки в пространстве.

1) Плоскость, проходящая через точку P и параллельная плоскости Oyz, пересекает ось x в точке $(x_0;0;0)$.

2) Плоскость, проходящая через точку P и параллельная плоскости Oxz пересекает ось y в точке $(0;y_0;0)$.

3) Плоскость, проходящая через точку P и параллельная плоскости Oxy пересекает ось z в точке $(0;0;z_0)$.

Значит, упорядоченная тройка $(x_0; y_0; z_0)$ соответствует точке P и наоборот: P $\leftrightarrow (x_0; y_0; z_0)$.

Расстояние от точки P до плоскостей yz, zx и xy соответствует абсолютным значениям координат x_0, y_0, z_0.

• тройка $(x_0; y_0; z_0)$ координаты точки P в прямоугольной системе координат $(Oxyz)$, или Декартовой прямоугольной системе координат. Числа x_0; y_0; z_0 называются координатами точки P и это записывается так P$(x_0; y_0; z_0)$.

1) Начало координат: O (0, 0, 0).

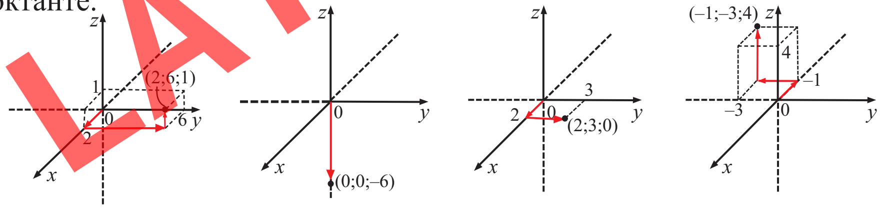
2) Точка, расположенная на оси Ox: $(x; 0; 0)$

Точка, расположенная на оси Oy : $(0; y; 0)$

Точка, расположенная на осиOz : $(0; 0; z)$.

3) Точки, расположенные в плоскостях Oxy, Oyz и Ozx имеют вид $(x; y; 0)$, $(0; y; z)$ və $(x; 0; z)$.

В пространстве отмечены различные точки. Точка (2; 6; 1) расположена в 1 октанте, точка (0; 0;–6) расположена в отрицательной части оси z, точка (2; 3; 0) расположена на плоскости xy, точка (–1;–3;4) расположена в III октанте.



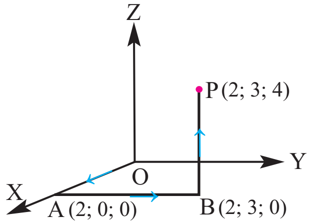
Прямоугольная система координат в пространстве

Знаки координат точки. Известно, что три взаимно перпендикулярные прямые делят пространство на 8 октантов. Знак координаты точки зависит от того, в каком октанте расположена точка. В следующей таблице заданы знаки координат точек в октантах.

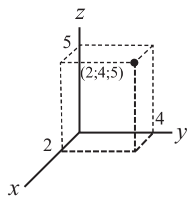
Октанты	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	OXYZ	OX'YZ	OX'Y'Z	OXY'Z'	OXYZ'	OX'YZ'	OX'Y'Z'	OXY'Z'
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

В первом октанте все знаки координат положительны, в седьмом октанте все знаки отрицательны.

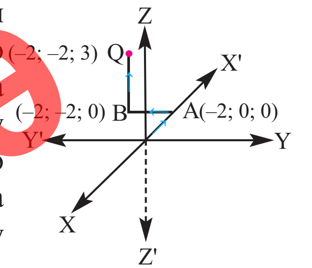
Пример 1. В прямоугольной системе координат в пространстве постройте точки: a) P (2; 3; 4); b) Q (–2; –2; 3).



Решние: a) для построения точки P (2; 3; 4) от начала координат по оси x в положительном направлении на расстоянии 2-x единичных отрезков отметим точку A (2; 0; 0). От точки A, вдоль положительного направления оси y и параллельно этой оси, на расстоянии 3-x единичных отрезков отметим точку B (2; 3; 0). От точки B, вдоль положительного направления оси z и параллельно этой оси, на расстоянии 4-x единичных отрезков отметим точку P (2; 3; 4).



b) для построения точки Q (–2; –2; 3) от начала координат по оси x в отрицательном направлении на расстоянии 2-x единичных отрезков отметим точку A (–2; 0; 0), от точки A вдоль отрицательного направления оси y и параллельно этой оси, на расстоянии 2-x единичных отрезков отметим точку B (–2; –2; 0). От точки B, вдоль положительного направления оси z и параллельно этой оси, на расстоянии 3-x единичных отрезков отметим точку Q (–2; –2; 3).

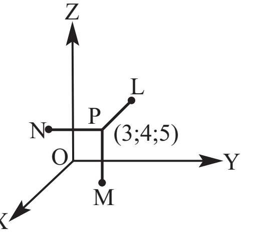


Пример 2. От точки P (3; 4; 5) к осям x, y и z проведены перпендикуляры. Запишите координаты оснований перпендикуляров соответствующие точкам A, B и C.

Решение: Координаты y и z точки основания перпендикуляра, проведенного из точки P на ось x равны нулю. Значит, координаты точки A (3; 0; 0). Аналогично, координаты остальных точек B(0;4;0) и C(0;0;5).

Пример 3. От точки P (3; 4; 5) к плоскостям *Oxy*, *Oxz* və *Oyz* проведены перпендикуляры. Запишите координаты точек M, N и L, которые являются основаниями перпендикуляров.

Решение: координата *z* точки основания перпендикуляра от точки P до *Oxy* равна нулю. Значит, точка M имеет координаты (3; 4; 0). Аналогично, находят координаты других точек: L(0;4;5) и N(3;0;5).



Обучающие задания

1. В трехмерной системе координат постройте точки (1; 1; 0), (2; 3;−1) и (−1; 2; 3).

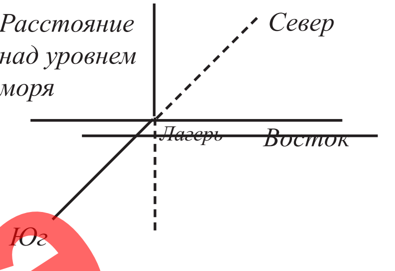
2. В пространстве найдите: a) координаты *x* и *z* точек, расположенных на оси O*y*.
b) координату *z* точек, расположенных на плоскости O*xy*.

3. Запишите какому октанту принадлежит каждая из следующих точек.

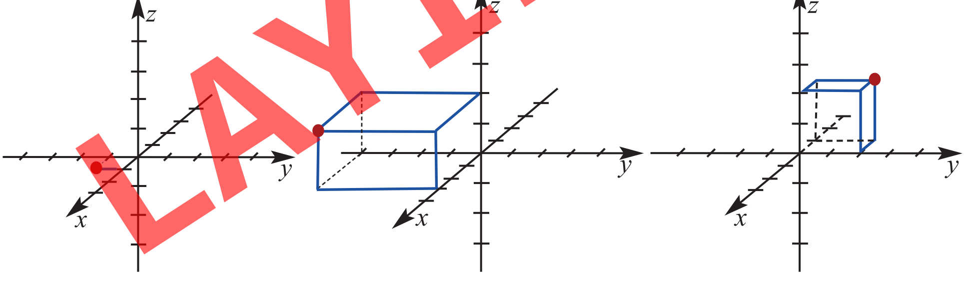
a) (1; 2; 5) b) (4; –2; 5) c) (6; –2; –3) d) (4; 5; –1)

e) (–4; 7; 2) f) (–3; –1; 8) g) (–3; 4; –9) h) (–6; –2; –1)

4. Мустафа и его друзья альпинисты взбираются на вершину. До места назначения они планируют двигаться так: 3 км на восток, 2 км на на север и 4 км вверх. Укажите в заданной системе координат путь и конечный пункт назначения Мустафы и его друзей.



5. Запишите координаты точек на рисунке. Изобразите координатную систему в тетради и постройте данные точки.

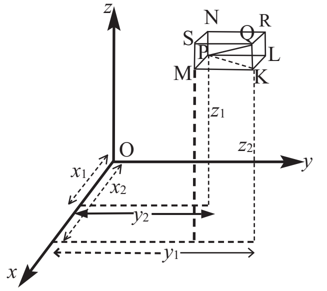


Расстояние между двумя точками в пространстве. Расстояние между точками P (x_1, y_1, z_1) и Q (x_2; y_2; z_2) можно найти по формуле

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доказательство: Пусть PQ диагональ параллелепипеда PMSNRLKQ с ребрами MP, PL и KQ, которые параллельны координатным осям Ox, Oy, Oz. Из пряммоугольного треугольника PKQ ($\angle PKQ$ прямой) имеем $PQ^2 = PK^2 + KQ^2$. Из прямоугольного треугольника ($\angle PLK$ прямой) имеем $PK^2 = KL^2 + PL^2 = MP^2 + PL^2$; $KL = MP$

$$PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2$$

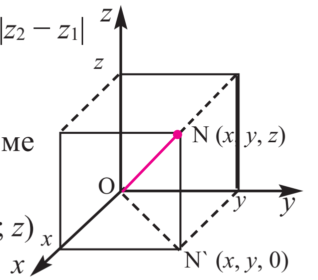


Учитывая, что $MP = |x_2 - x_1|$, $PL = |y_2 - y_1|$ и $KQ = |z_2 - z_1|$ получаем,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Расстояние от начала координат. В системе координат в пространстве, расстояние от точки O (0;0;0) начала координат, до любой точки N(x; y; z) можно найти по формуле:

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

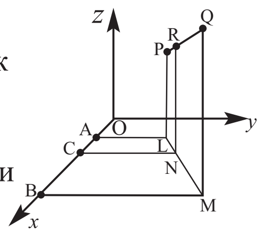


Координаты точки делящей отрезок в некотором отношении. Координаты точки R, делящей отрезок с концами в точках P (x_1; y_1; z_1) и Q (x_2; y_2; z_2) в отношении PR : RQ= m : n можно найти по формуле

$$R\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n};\ \frac{my_2 + ny_1}{m+n};\ \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

Доказательство: пусть точка R(x; y; z) делит отрезок PQ, в заданном отношении. Через точки P, R и Q к плоскости xy проведем перпендикуляры PL, RN и QM, и через точки L, N, M перпендикуляры LA, NC и MB к оси Ox. По рисунку видно, что

$AC = OC - OA = x - x_1$ и $BC = OB - OC = x_2 - x$.



На основе теоремы о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{LN}{NM} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$(m + n)x = mx_2 + nx_1$$

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

Аналогично, используя перпендикуляры к осям Oy и Oz, можно определить координаты y и z.

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \qquad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}$$

Координаты середины отрезка. Координаты середины отрезка соединяющих точки P (x_1; y_1; z_1) и Q (x_2; y_2; z_2) можно найти по формуле $M(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2})$.

Коориначы центра тяжести треугольника.
Координаты центра тяжести треугольника (точки пересечения медиан) с вершинами в точках M (x_1, y_1, z_1), N (x_2; y_2; z_2) и L (x_3; y_3; z_3), находится по формуле:

$$P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right.$$

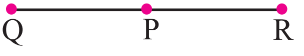
Пример 1. Точки, расположенные на одной прямой называются **коллинеарными точками**.
Докажите, что точки P (2; 4; 6), Q (– 2;– 2;–2) и R (6;10;14) являются коллинеарными точками, используя формулу находжения расстояния между двумя точками.

Решение: $PQ = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-4)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$

$PR = \sqrt{(6-2)^2 + (10-4)^2 + (14-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$

$QR = \sqrt{(6+2)^2 + (10+2)^2 + (14+2)^2} = \sqrt{64+144+256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$

Так как QR = QP + PR, то точки P, Q и R расположены на одной прямой, т.е. они коллинеарны.



Пример 2. Найдите координаты точки, расположенной на оси абсцисс и равноудаленной от точек A (3; 2; 2) и B (5; 5; 4).

Решение: если точка P расположена на оси абсцисс, значит ее координаты (x; 0; 0). Так как точка P равноудалена от точек A и B, то PA = PB или $PA^2 = PB^2$. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$(x-3)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 = (x-5)^2 + (0-5)^2 + (0-4)^2$$
$$4x = 25 + 25 + 16 - 17;\ x = 12{,}25$$

Значит, точка P (12,25; 0; 0) расположена на оси абсцисс и равноудалена от точек A и B.

Пример 3. Даны точки A (– 2; 0; 6) и B (10; –6; –12). Найдите координаты точки P, которая делит отрезок AB как AP : PB = 5 : 1.

Решение: пусть точка P имеет координаты P(x;y;z). Эта точка делит отрезок AB в отношении 5:1. По формуле нахождения координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении, получаем:

$$P(x;y;z) = P\left(\frac{5\cdot 10 + 1\cdot(-2)}{5+1}; \frac{5\cdot(-6) + 1\cdot 0}{5+1}; \frac{5\cdot(-12) + 1\cdot 6}{5+1}\right) =$$
$$= P(8; -5; -9).$$

Пример 4. Даны координаты двух точек вершин треугольника (3; –5; 7) и (–1; 7; –6). Найдите координаты третьей вершины, если центр тяжсти треугольника совпадает с началом координат.

Решение: Так как центр тяжести находится в начале координат, то:

$$O\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)=$$

$$=O\left(\frac{3-1+x_3}{3};\ \frac{-5+7+y_3}{3};\ \frac{7-6+z_3}{3}\right)=O\ (0;0:0)$$

Отсюда, $\dfrac{3-1+x_3}{3}=0$; $\dfrac{-5+7+y_3}{3}=0$; $\dfrac{7-6+z_3}{3}=0$

$x_3=-2$ $\qquad$ $y_3=-2$ $\qquad$ $z_3=-1$

Значит, третьей вершиной треугольника является точка (–2; –2;–1).

Обучающие задания

6. Найдите координаты точки, расположенной на оси ординат, если расстояние от этой точки до точки A(2; 1; 3) равно $\sqrt{17}$.

7. Докажите, что точки (0; 7; 10), (–1; 6; 6) и (– 4; 9; 6) являются вершинами равнобедренного прямоугольнго треугольника.

8. Докажите, что точки (5; –1; 1), (7; – 4; 7), (1; – 6; 10) и (–1; – 3; 4) являются вершинами ромба.

9. Нйдите координаты точки, расположенной на плоскости *yz,* равноудаленной от точек A (–1; 1; 0), B (1; 0; –1) və C (0; –1; 0).

10. Точка M (1; –2; 3) является серединой отрезка AB. Найдите координаты конца B, если координаты другого конца равны A(3; 1; –1).

11. Даны точки A(17;– 2; –1), B(1;–2;11) и C(1;16;–1). Найдите длину медианы BM треугольника ABC.

12. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из точки P (3; 4; 5) на ось O*y*.

13. Даны коллинеарные точки A (3; 2; – 4), B (5; 4; –6) и C (9; 8; – 10). Найдите в каком отношении точка B делит отрезок AC.

14. Даны точки P (2;– 4; 3) и Q (– 4; 5; – 6). Найдите координаты точки, которая делит отрезок PQ в отношении 2:1(рассмотрите два случая).

15. Найдите координаты вершин треугольника, если точки (3; 2; 3), (–1;1;5) и (0;3;4) являются серединами его сторон.

16. Докажите, что точки (7; –1;17) , (2; 2; 7) и (4; 2; 6) являются вершинами прямоугольного треугольника и найдите его площадь.

17. Докончите предложение.

1) Если прямая параллельна плоскости Oxy, то все ее______одинаковы.

2) Расстояние от точки P (3; 5; 6) до оси Oy равно _________ .

18. Точки A и B расположены на гранях паралеллепипеда, параллельных координатным плоскостям. Для каждого случая:
a) изобразите соответствующий геометрический рисунок.
b) найдите координаты остальных 6 вершин параллелепипеда.
c) найдите длину диагонали AB.

1. A(0; 0; 0) ; B(7 ;2;3)
2. A(1; 1 ; l); B(3; 4; 2)
3. A(–1; l; 2); B(2; 3; 5)
4. A(2; –1; –9); B(4; 0; –l)

19. Определите являются ли точки A,B и C вершинами треугольника.

a) A(1; 2; 3), B(1; 4; 5), C(5; 4; 0)

b) A(2;– 3;3), B(1;2;4), C(3;– 8;2)

20. a) Докажите, что точки A(0;4;1), B(2;3; −1), C(4;5;0) и D(2;6;2) являются вершинами квадрата.

b) Покажите, что если растояние между точками (5;− 1;7) и (a;5;1) равно 9 единицам, то значение "a" равно или 2, или 8.

21. Покажите, что заданные три точки коллинеарны.
a) (−3;2;4) , (−1;5;9), (1;8;14)
b) (5;4;2) , (6;2 −;1), (8;–2; −7)

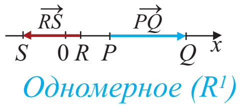
22. Точки A (3; 2; 0), B (5; 3; 2), C (– 9; 6; – 3) являются вершинами треугольника. Биссектриса ∠ BAC пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

23. a) Изобразите комнату, одна из противоположных вершин которой совпадает с началом координат, другие расположены: 4 м на север, 3 м на восток и 3,5 м вверх.
b) Найдите длину диагонали, соединяющей противоположные вершины.
c) Запишите координаты всех 8 вершин модели параллелепипеда.

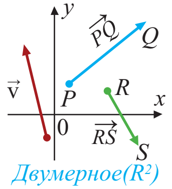
Векторы в пространстве

Вектором называется направленный отрезок.

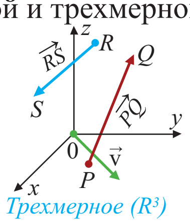
Вектор можно изобразить в одномерной, двухмерной и трехмерной системе координат.



Одномерное (R^1)

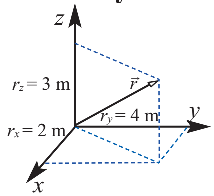


Двумерное(R^2)



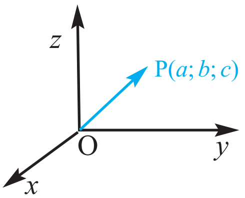
Трехмерное (R^3)

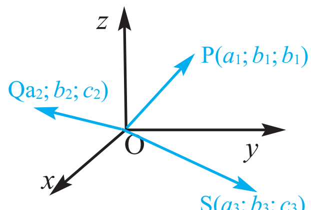
Вектор, у которого начальная и конечная точка совпадают называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора не определено.



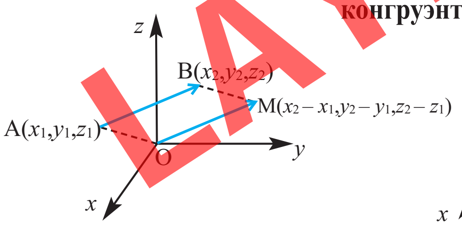
Местоположение любого объекта в пространстве может быть определенно некоторым вектором в прямоугольной системе координат, Например, на рисунке изображен вектор, показывающий положение мяча который находится на высоте 3 м от точки, находящейся на расстоянии 2 м вдоль ширины и на расстоянии 4 м вдоль длины.

Вектором позиции или **радиус вектором** называется вектор, который определяет и соединяет начальную точку и место (положение, позицию) некоторой точки в пространстве. Каждой точке пространства соответствует единственный вектор. Положение точки P(a;b;c) в системе координат определяет вектор $\overrightarrow{OP}\langle a;b;c\rangle$- вектор в пространстве, заданный компонентами.

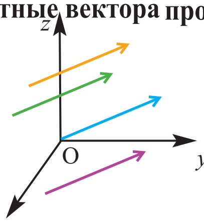




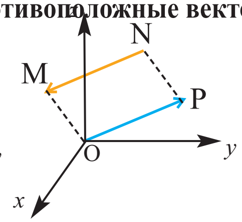
Конгруэнтность векторов в пространстве. Два вектора в пространстве являются конгруэнтными, если их компоненты равны. Другими словами, если два вектора одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они называются **конгруэнтными векторами.** Например, вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OM}$ на рисунке конгруэнтны. Для радиус вектора $\overrightarrow{OM}$ можно изобразить бесконечно много векторов, сонаправленных и равных по абсолютному значению векторов. Каждый новый вектор можно получить параллельным переносом. Если два вектора в пространстве имеют разное направление, но одинаковое абсолютное значение, то они называются **противоположными векторами.**



конгруэнтные вектора



противоположные вектора



Векторы в пространстве

Так же, как и на плоскости, определяются основные понятия для векторов в пространстве: модуль вектора, направление вектора, конгруэнтность векторов, операции над векторами.

Длина вектора. Модуль вектора можно найти используя формулу нахождения расстояния между двумя точками.

Теорема. Если начало вектора расположено в точке P (x_1, y_1, z_1), а конец в точке Q (x_2, y_2, z_2), то длину вектора $\overrightarrow{PQ}$ можно найти по формуле

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2, - x_1)^2 + (y_2, - y_1)^2 + (z_2, - z_1)^2}\ .$$

Следствие. Длина радиус-вектора равна $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (находится по формуле нахождения расстояния от начала координат до точки).

Сложение и вычитание векторов: суммой (разностью) векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$, является вектор компоненты которого равны сумме (разности) компонент векторов,т.е.сумма (разность) векторов $\vec{v}\langle v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\rangle$ и $\vec{u}\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ равна вектору $\vec{v} + \vec{u} = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3\rangle$

$\vec{v} - \vec{u} = \langle v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3\rangle$

Пример 1. Найдите сумму векторов $\vec{v} = \langle 2; 1; -3\rangle$ и $\vec{u} = \langle 0; 4; -2\rangle$.

Решение: $\vec{v} + \vec{u} = \langle 2; 1; -3\rangle + \langle 0; 4; -2\rangle = \langle 2; 5; -5\rangle$

Умножение вектора на число: произведение вектора $\vec{v}\langle v_1; v_2; v_3\rangle$ на число k определяется как вектор $k\vec{a} = \langle kv_1; kv_2; kv_2\rangle$.

Для произведеня вектора на действительное число справедливы следующие правила:

- Если $k \in R$,то $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- Если $k_1, k_2 \in R$, то $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$
- Если $k_1, k_2 \in R$, то $(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a})$

Пример 2. Для вектора $\vec{a}\langle 1; -2; 3\rangle$ и $k = 3$, запишите вектор $k\vec{a}$ компонентами.

Решение: $k\vec{a} = \langle 3\cdot 1; -2\cdot 3; 3\cdot 3\rangle = \langle 3; -6; 9\rangle$

Коллинеарные вектора. Если направленные отрезки, которыми изображены вектора параллельны или лежат на одной прямой, то вектора называются коллинеарными. Если вектора $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b}$ коллинеарны, тогда существует единственное число k, которое удовлетворяет условию $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$. При $k > 0$, вектора сонаправленные, при $k < 0$ они направлены в противоположные стороны. Соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны: $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3} = k \qquad (a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0)$

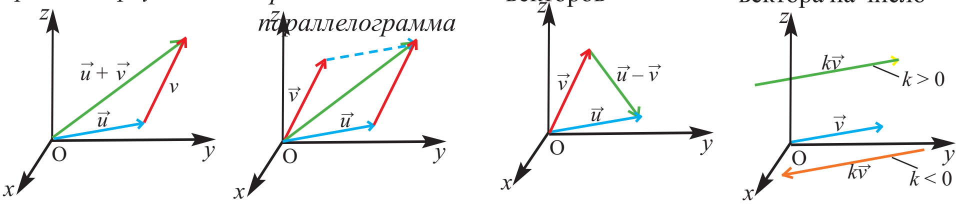
Пример 3. Определите, являются ли параллельными в пространстве вектора $\vec{a} = \langle -1; 2; -3\rangle$ и $\vec{b} = \langle -3; 6; -9\rangle$.

Решение: так как $\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{-3}{-9} = \dfrac{1}{3}$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны и сонаправлены.

В простарвнстве векторы также можно складывать и вычитать по правилам аналогичным для векторов на плоскости.

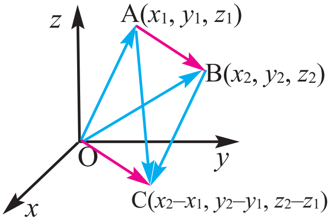
Сложение векторов | Вычитание векторов | Умножение вектора на число

правило треугольника | *правило параллелограмма*



Пример 4. Постройте радиус-вектор, соответствующий вектору $\overrightarrow{AB}$.

Если в пространстве заданы три точки A,B и C, то для них справедливо следующее отношение $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (в соответствии с правилом треугольника). Точкам A и B соответстуют радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Эти векторы можно записать компонентами $\overrightarrow{OA}\langle x_1; y_1; z_1\rangle$ и $\overrightarrow{OB}\langle x_2; y_2; z_2\rangle$.



По правилу сложения векторов на плоскости

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

Отсюда, $\overrightarrow{AB}=\langle x_2; y_2; z_2\rangle-\langle x_1; y_1; z_1\rangle \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\langle x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\rangle$

А это соответствует вектору $\overrightarrow{OC}$. Значит, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$.

Т.е. радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$ конгруэнтен вектору $\overrightarrow{AB}$.

Пример 5. В трехмерной системе координат задан вектор $\overrightarrow{AB}$, с началом в точке A(–3;–4;1) и концом в точке B(1; –2; 3). Запишите вектор $\overrightarrow{AB}$ конгруэнтного радиус-вектора компонентами.

Решение: обозначим через $\overrightarrow{OP}$ радиус-вектор конгруэнтный вектору $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}$).

Точке A соответствтвует радиус вектор $\overrightarrow{OA}\langle -3;-4;1\rangle$, тогда соответствующий радиус вектор для точки B имеет вид $\overrightarrow{OB}\langle 1; -2; 3\rangle$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\langle 1; -2; 3\rangle-\overrightarrow{OA}\langle -3;-4;1\rangle=\overrightarrow{AB}\langle 4;2;2\rangle$

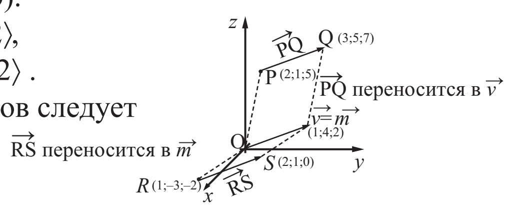
Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}$, то $\overrightarrow{OP}\langle 4;2;2\rangle$.

Пример 6. Установите справедливость равенства $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$ для точек P(2; 1; 5), Q(3; 5; 7), R (1; –3; –2) и S (2; 1; 0).

Решение: $\overrightarrow{PQ}=\langle 3-2; 5-1; 7-2\rangle=\langle 1;4;2\rangle$,

$\overrightarrow{RS}=\langle 2-1; 1-(-3); 0-(-2)\rangle=\langle 1;4;2\rangle$.

Из равенства соответствующих компонентов следует $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$.



Обучающие задания

1. По координатам точек R и S в пространстве запишите вектор $\overrightarrow{RS}$ компонентами и найдите его длину.

a) R $(3;-1;1)$, S $(3;-2;1)$ b) R $(4;3;-6)$, S $(-5;-2;5)$

2. Найдите длину вектора.
a) $\vec{v}\langle 2;-1;1\rangle$ b) $\vec{v}\langle 2;-1;0\rangle$ c) $\vec{v}\langle 3;2;-2\rangle$
d) $\vec{v}\langle 0;0;1\rangle$ e) $\vec{v}\langle 6;4;-4\rangle$ f) $\vec{v}\langle -2;3;-0\rangle$

3. Запишите вектор, начало которого в пространстве расположено в точке A$(1;-2;3)$, а конец в точке B$(-2;1;1)$ компонентами и определите соответствующий радиус-вектор.

4. a) Установите справедливость равенства $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ для точек P $(1;-1;1)$, Q $(2;-2;2)$, R $(2;0;1)$, S $(3;-1;2)$.

5. Найдите неизвестные координаты векторов, чтобы данные вектора были параллельны и имели одинаковое направление.

a) $\vec{a}\langle -1;2;3\rangle$ и $\vec{b}\langle x;6;9\rangle$ b) $\vec{a}\langle 4;y;6\rangle$ и $\vec{b}\langle 10;20;15\rangle$

6. Зная,что $\vec{a}\langle 3;0;4\rangle$ и $\vec{b}\langle 2;1;-1\rangle$, запишите компонентами вектор $2\vec{a} - 3\vec{b}$.
Указание: запишите вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в выражении компонентами и примените правило умножения вектора на число.

7. Для векторов $\vec{v} = \langle 2;1;-1\rangle$ и $\vec{w} = \langle 3;-4;2\rangle$ найдите:

a) $\vec{v} - \vec{w}$ b) $2\vec{v} - 3\vec{w}$ c) $-\vec{v} - 2\vec{w}$ d) $2(\vec{v} + \vec{w})$

8. Какой вектор надо прибавить к вектору $\vec{a}\langle -1;2;0\rangle$, чтобы получить вектор $\vec{b}\langle 3;1;5\rangle$?

9. Найдите координату середины вектора полученного при изменении положения Q $(2;-2;2)$ в направлении точки P $(3;-1;2)$.

10. Даны вектора $\vec{a}\langle 1;-1;k\rangle$ və $\vec{b}\langle -1;-6;-4\rangle$. При каком значение k длина вектора $2\vec{a} - \vec{b}$ будет равна 5?

11. **Физика.** На тело действуют две силы, векторы которых выражены компонентами $\langle 3;-2;4\rangle$ и $\langle 6;2;5\rangle$. Запишите компонентами вектор третьей силы, которая сохраняет тело в состоянии равновесия.

Векторы, расположенные на одной плоскости, или на параллельных плоскостях называются **компланарными векторами**. Например, векторы расположенные на противолежащих гранях куба компланарны, а векторы направленные по трем ребрам выходящеи из одной вершины некомпланарны

Единичый вектор - вектор, длина которого равна единице.

Для любого, отличного от нуля вектора $\vec{v}$ вектор вида $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ является единичным вектором.

Пример 1. Для вектора $\vec{a} = \langle 4; -2; 4\rangle$ найдите: a) единичный сонаправленный вектор $\vec{u}$; b) вектор, сонаправленный вектору $\vec{a}$, длиной 10 единиц.

Решние: обозначим единичный вектор через $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{u} = \frac{\langle 4; -2; 4\rangle}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{\langle 4; -2; 4\rangle}{6} = \frac{\langle 4; -2; 4\rangle}{6} = \langle \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\rangle$$

Проверим действительно ли длина этого вектора равна единице:

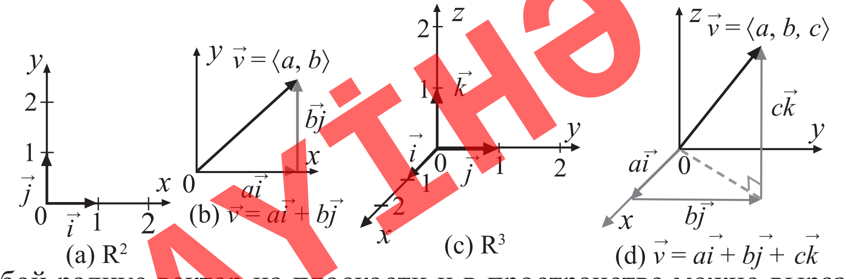
$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

b) чтобы определить вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a} = \langle 4; -2; 4\rangle$ длиной 10 единиц, надо компоненты единичного вектора пункта a, увеличить в 10 раз.

$$\vec{v} = 10\,\vec{u} = 10 \cdot \langle \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\rangle = \langle \frac{20}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\rangle$$

В прямоугольной системе координат в пространсте, векторы, направленные вдоль положительных направлений координатных осей Ox, Oy, Oz, определенные как $\vec{i} = \langle 1;0;0\rangle$, $\vec{j} = \langle 0;1;0\rangle$ и $\vec{k} = \langle 0;0;1\rangle$ и при этом $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, называются базисными векторами.

Базисные вектора в различных системах координат



Любой радиус вектор на плоскости и в пространстве можно выразить через базисные вектора. В системе R^2 точке A(x; y) соответствует радиус вектор $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, в системе R^3 точке A (x; y; z) соответствует вектор $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Данное выражение называется записью вектора компонентами. Здесь числа x, y, z координаты точки A.

Теорема. Любой вектор $\vec{a}\,\langle a_1;\ a_2;\ a_3\rangle$ можно разложить по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ единственным образом, при этом спарведливо равенство $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$.

Пример 2. Вектор $\vec{a}$, началом которого на плоскости является точка (2;–5), а концом точка (1;–3), выразите через базисные вектора.
Зная, что $\vec{a} = \langle 1-2;\ -3-(-5)\rangle = \langle -1;\ 2\rangle$ получим $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Пример 3. Запишите разложение вектора $\vec{a} = \langle -3;2;7\rangle$ в пространстве по базисным векторам.
Решение: по теоерме разложения на базисные ветора имеем:
$\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$

Пример 4. a) Запишите в виде $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ радиус вектор, соответствующий точке P (1; –3; 2).
b) Запишите вектор $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ компонентами в виде $r\langle x;\ y;\ z\rangle$.
Решение: a) начало радиус вектора совпадает с началом координат точкой O(0;0;0). Таким образом вектор $\overrightarrow{OP}$ имеет вид $\overrightarrow{OP} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$
b) $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = 3\langle 1;0;0\rangle - 2\,\langle 0;1;0\rangle - \langle 0;0;1\rangle = \langle 3;0;0\rangle - \langle 0;2;0\rangle - \langle 0;0;1\rangle =$
$= \langle 3;-2;-1\rangle$

Пример 5. Найдите сумму и разность веторов
$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

Решение: $\vec{a} + \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + k) + (-2i + \vec{j} - 3\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} - 2k$

$\vec{a} - \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - (-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Обучающие задания

12. Зная координаты точки P, запишите радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$ в виде $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

a) (1; 3;–1) b) (2; –1; 0) c) (–3; 2;–2) d) (–4; 0;–3)

13. Запишите координаты точки P, зная выражение для радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$.

a) $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ b) $-\vec{i} - 2\vec{k}$ c) $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ d) $-\vec{i} - 4\vec{j}$

14. Найдите длину вектора.

a) $\vec{r} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ b) $\overrightarrow{OP}\langle -3;\ 1;\ 2\rangle$ c) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

15. Зная, что вектора конгуэнтны, найдите неизвестные компоненты векторов.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + y\vec{k}$ və $\vec{b} = x\vec{i} - 3\vec{k}$ b) $\vec{a} = x\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ və $\vec{b} = \langle -3;\ y;\ z\rangle$

16. Для каждого вектора запишите сонаравленный единичный вектор и проверьте полученный результат.

a) $\overrightarrow{OR} = \langle 3;\ 0;\ 1\rangle$ b) $\overrightarrow{OP} = \langle -3;\ 1;\ 2\rangle$ c) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

17. Запишите вектор $\vec{v}$, сонаправленный и равный заданному вектору $\vec{u}$.

a) $\vec{u} = \langle 0;3;\ 0\rangle$, $|\vec{v}| = 6$ c) $\vec{u} = \langle 1;1\rangle$, $|\vec{v}| = 5$
b) $\vec{u} = \langle \sqrt{3};3;\ 2\rangle$, $|\vec{v}| = 2$ d) $\vec{u} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, $|\vec{v}| = 2$

18. Зная, что $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ запишите следующие вектора.

a) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ b) $3\vec{a} + \vec{b}$ c) $-2\vec{a} - 4\vec{b}$

19. Найдите длину векторов.

a) $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ b) $\vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ c) $\vec{l} = 7\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

20. В пространстве заданы вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Определите какие вектора параллельны вектору $\vec{a}$ или $\vec{b}$.

1) $-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ 2) $5\vec{i} - 10\vec{j} + 15\vec{k}$ 3) $4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

4) $6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ 5) $-2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ 6) $-4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

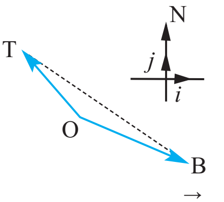
21. Даны радиус векторы $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Найдите:

a) $\overrightarrow{AO}$ b) $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$ c) $4\overrightarrow{BO}$ d) $-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$

22. Дильбяр утверждает, что вектор $\langle 1;\ 1;\ 1\rangle$ является единичным вектором, а вектор $\langle \frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$ не является единичным вектором. Как вы обоснуете, верно или нет утверждение Дильбяр?

23. Длина суммы двух векторов или меньше, или равна сумме длин этих векторов. Данное утверждение запишите математически и докажите его справедливость. **Указание:** используйте неравенство треугольника.

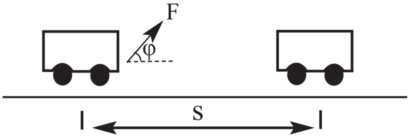
24. Наблюдатель находится на возвышенности. На расстоянии 4 км на запад и 3 км на север от него расположен трансформатор высокого напряжения, а на расстоянии 5 км на юг и 2 км на восток от него расположено новое здание. Место, где находится наблюдатель примите за начало координат. a) Определите радиус вектор трансформатора $\overrightarrow{OT}$ и здания $\overrightarrow{OB}$. b) Определите вектор $\overrightarrow{TB}$ расположения трансформатора относительно здания.



Скалярное произведение двух векторов

Тележка переместилась по прямой под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом φ. Вычислите совершенную работу: если значение силы $\vec{F}$ равно F, то $\vec{F} = \langle F\cos\varphi;\ F\sin\varphi\rangle$. Вертикальная компонента силы $\vec{F}$ на горизонтальном пути равна нулю, тогда горизонтальная компонента силы F на расстоянии s будет

$$A = F \cdot s \cdot \cos\varphi.$$



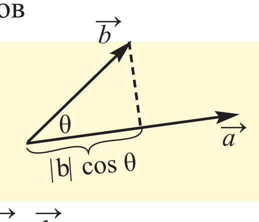
Работа, совершаемая при перемещении равна произведению абсолютного значения компоненты вектора перемещения $\vec{F}$ ($|\vec{F}|\cos\theta$) на расстояние d.

$A = |\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta$.

Работа является скалярной величиной, однако ее значение зависит от угла между силой, действующей на тело и вектором перемещения.

Скалярное произведение двух векторов

Скалярное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно произведению абсолютного значения этих векторов и косинуса угла между ними. Скалярное произведение записывается как $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Значит, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$

Угол θ является углом между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые имеют общее начало и $0 \le \theta \le \pi$.

Свойство скалярного произведения

• Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, то есть скаярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

• **Переместительное свойство скалярного произведения.** Для любых векторовп $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

• **Свойство группировки скалярного произведения.** Для любых векторов a и b и действительного числа m справедливо равеснство:

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$$

• **Распределительное свойство скалярного произведения:**

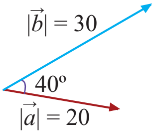
1) Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и действительного числа m справедливо следующее равенство: $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

2) Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедиво следующее равенство: $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$.

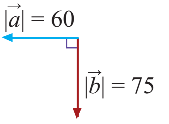
Скалярное произведение двух векторов

Пример 1. По данным на рисунке, найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

a)



b)



Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

a) $|\vec{a}| = 20$ ед. $\quad |\vec{b}| = 30$ ед. $\quad \theta = 40°$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 20\cdot 30\cos 40° \approx 459{,}6$$

b) $|\vec{a}| = 60$ ед. $\quad |\vec{b}| = 75$ ед. $\quad \theta = 90°$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 60\cdot 75\cos 90° = 60\cdot 75\cdot 0 = 0$$

Пример 2. Упростите выражение $(\vec{r}+\vec{s})\cdot(\vec{r}-\vec{s})$, используя свойство скалярного произведения векторов.

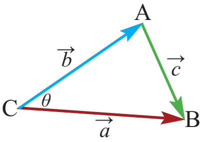
Решение: $(\vec{r}+\vec{s})\cdot(\vec{r}-\vec{s}) = (\vec{r}+\vec{s})\cdot\vec{r} + (\vec{r}+\vec{s})\cdot(-\vec{s}) =$

$$= \vec{r}\cdot\vec{r} + \vec{s}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot(-\vec{s}) + \vec{s}\cdot(-\vec{s}) =$$

$$= |\vec{r}|^2 + \vec{s}\cdot\vec{r} - 1\cdot\vec{r}\cdot\vec{s} - 1\cdot\vec{s}\cdot\vec{s} =$$

$$= |\vec{r}|^2 + \vec{s}\cdot\vec{r} - \vec{r}\cdot\vec{s} - |\vec{s}|^2 = |\vec{r}|^2 - |\vec{s}|^2$$

Скалярное произведение двух векторов на координатной плоскости можно найти при помощи координат.



Пусть даны векторы $\vec{a}\langle a_1, a_2\rangle$ и $\vec{b}\langle b_1, b_2\rangle$.
По определению скалярного произведения двух векторов имеем

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Из Δ ABC получаем $\quad \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \langle a_1 - b_1;\ a_2 - b_2\rangle$

По теореме коминусов получаем $|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |a|^2 + |b|^2 - |c|^2$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2}{2}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2}{2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}{2}$$

$$= \frac{\cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} - \cancel{a_1^2} + 2a_1b_1 - \cancel{b_1^2} - \cancel{a_2^2} + 2a_2b_2 - \cancel{b_2^2}}{2}$$

$$= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2} = a_1b_1 + a_2b_2, \text{ а это значит, что}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов $\vec{a}\langle a_1;\ a_2\rangle$ и $\vec{b}\langle b_1;\ b_2\rangle$ равно сумме произведения соответствующих компонент.

Аналогичным образом скалярное произведение двух векторов $\vec{a}\langle a_1;\ a_2;\ a_3\rangle$ и $\vec{b}\langle b_1;\ b_2;\ b_3\rangle$ в трехмерной, Декартовой, системе координат находится как: $\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

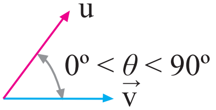
Пример 3. Зная, что $\vec{a} = \langle 2; -3; 5\rangle$, $\vec{b} = \langle 1; 2; -4\rangle$, найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

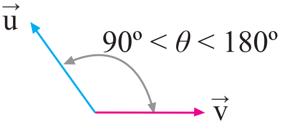
Решение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 5 \cdot (-4) = 2 - 6 - 20 = -24$

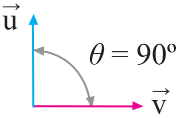
Обучающие задания

1. a) По определению скалярного произведения, значение угла θ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится в промежутке $0 \le \theta \le 180°$. Почему?

b) Определите знак скалярного произведения двух векторов в зависимости от значения угла θ.

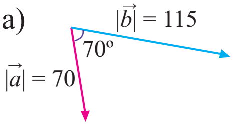




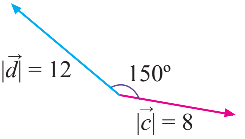


2. По рисунку найдите скалярное произведение векторов.

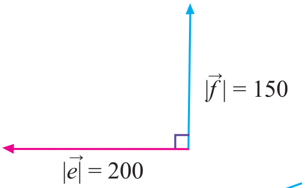
a)



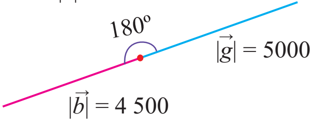
b)



c)



d)



3. Найдите скалярное произведение следующих векторов. θ угол между векторами.

a) $|\vec{f}| = 5{,}8$; $|\vec{g}| = 6{,}4$; $\theta = 180°$ b) $|\vec{m}| = 16$; $|\vec{p}| = 2$; $\theta = 45°$

c) $|\vec{m}| = 16$; $|\vec{n}| = 28$; $\theta = 35°$ d) $|\vec{m}| = 2{,}5$; $|\vec{s}| = 20$; $\theta = 120°$

4. Упростите выражения, используя свойства скалярного произведения векторов.

a) $\vec{u}\,(k\vec{u} + \vec{v})$ b) $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

5. Найдите скалярное произведение векторов, заданных компонентами.

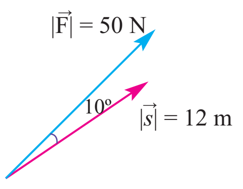
a) $\vec{a}\ \langle 6; 2; 4\rangle$; $\vec{b}\,\langle 9; 3; 6\rangle$ c) $\vec{s} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{t} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

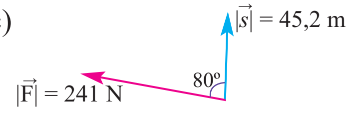
b) $\vec{p}\,\langle -3; 2; 5\rangle$; $\vec{q}\,\langle 3; 1; 6\rangle$ d) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

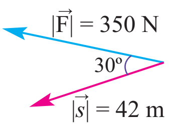
6. Вычислите работу совершаемую телом вектором перемещения $\overrightarrow{s}$ (в метрах) под действием заданной силы $\overrightarrow{F}$(в ньютонах). Векторы $\overrightarrow{F}$ и $\overrightarrow{S}$ имеют одинаковое направление.

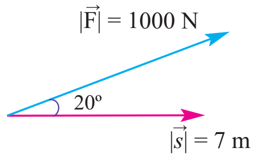
a) $\overrightarrow{F}\langle 5; 2\rangle$, $\overrightarrow{s}\langle 7; 4\rangle$ b) $\overrightarrow{F}\langle 100; 400\rangle$, $\overrightarrow{s}\langle 12; 27\rangle$

7. По данным на рисунке, вычислите работу, совершаемую вектором перемещения $\overrightarrow{s}$ под действем силы $\overrightarrow{F}$.

a)


c)


b)


d)


8. В направлении вектора $\overrightarrow{a}\langle 3; 4\rangle$ действует сила (F) 20 Н .

a) Запишите единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{a}$.

b) Запишите силу $\overrightarrow{F}$ компонентами, используя результаты пункта а.

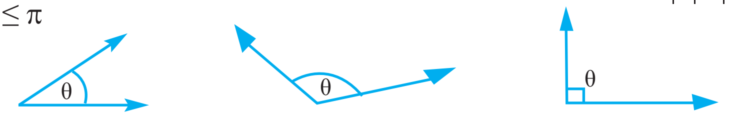
c) Найдите работу по перемещению объекта из точки (0;0) в точку (6;8) под действием данной силы.

9. Из-за остановки конвеерной линии рабочий толкнул рукой коробку, приложив к ней силу 50 Н в направлении под углом 30°. При этом коробка переместилась из точки (−3;0) в точку (3;0). Найдите проделанную работу, учитывая, что длина конвеера измеряется в метрах.

10. Найдите абсолютное значение силы, приложенной токарем, при изготовлении детали, под углом 20°, зная что сила на расстоянии 8 м в горизонтальном направлении равна 50 Дж.

Угол между двумя векторами

Угол между двумя векторами находится из отношения $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$
Здесь $0 \le \theta \le \pi$



Пример. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = \langle -3;4\rangle$ и $\vec{b} = \langle 9;12\rangle$.

Решение:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-3\cdot 9 + 4\cdot 12}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{9^2+12^2}} = \frac{-27+48}{5\cdot 15} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25}$$

Вывод: два ненулевых вектора перпендикулярны только тогда когда их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

Пример. При каком значении k вектора $\vec{a} = \langle 3;4\rangle$ и $\vec{b} = \langle k;12\rangle$ взаимно-перпендикулярны?

Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 : 3\cdot k + 2\cdot 6 = 0$ при $k = -4$ имеем $\vec{a}\perp\vec{b}$

Обучающие задания

11. Сколько градусов составляет угол между векторами?

a) $\vec{a}\langle -3;6\rangle$ и $\vec{b}\langle 4;2\rangle$ c) $\vec{e}\langle 2;3;0\rangle$ и $\vec{f}\langle 9;-6;2\rangle$
b) $\vec{m}\langle -2;-8\rangle$ и $n\langle 6;-1\rangle$ d) $\vec{t}\langle -2;-1;2\rangle$ и $\vec{s}\langle 2;1;-2\rangle$

12. 1) Покажите, что вектора $\vec{u}\langle 6,-2,-5\rangle$ и $\vec{v}\langle -12,4,10\rangle$ коллинеарны.

2) Найдите значения a и b, при которых вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны.
a) $\vec{u}\langle a;3;6\rangle$, $\vec{v}\langle -8;12;b\rangle$ b) $\vec{u}\langle a;3;6\rangle$, $\vec{v}\langle -8;12;b\rangle$

13.) Запишите вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}\langle 9;2\rangle$.

b) Запишите значение k, при котором векторы $\vec{u}\langle 2;5\rangle$ и $v\langle k;4\rangle$ станут перпендикулярными.

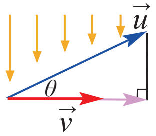
14. **Задания открытого типа.** Запишите примеры, соответствующие следующим свойствам скалярного произведения.
a) Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны только тогда, когда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
b) Если $\vec{a}$ единичный вектор паралелльный вектору $\vec{u}$, то $\vec{a}\cdot\vec{u} = |\vec{a}|$.

15. Проверьте является ли треугольник прямоугольным. Обозначьте прямой угол. Решите задание различными способами.
a) ΔABC с вершинами в точках A(3; 1), B(–2; 3) и C(5; 6).
b) ΔSTU с вершинами в точках S(4; 6), T(–3; 7) и U(–5; –4).

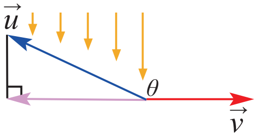
16. Найдите углы треугольника с вершинами в точках A(5; 1), B(4; –7) и C(–1; –8).

Проекция одного вектора на другой

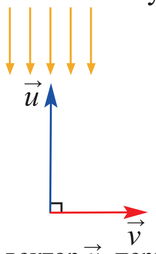
Если вектор является направленным отрезком, то его проекцию можно также рассматривать как направленный отрезок. Проекция вектора также является вектором и его направление зависит от значения угла между векторами.



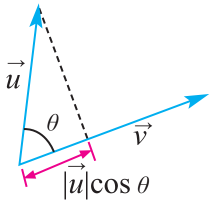
Если $0 \le \theta < 90°$, то проекция вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$ имеет одинаковое направление с вектором $\vec{u}$.

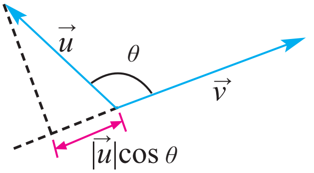


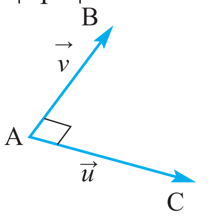
Если $90° < \theta \le 180°$ то проекция вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$ имеет противоположное направление с вектором $\vec{u}$.



Если вектор $\vec{v}$ перпендикулярен вектору $\vec{u}$, то $|пр_v u| = 0$

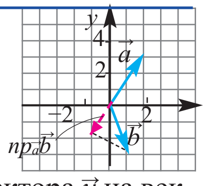




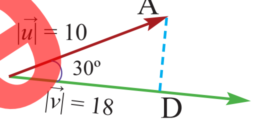


Значение проекции вектора $\vec{u}$ на вектор $\vec{v}$ равно $|\vec{u}|\cos\theta$ и это называется скалярной компонентой вектора $\vec{u}$ на вектор $\vec{v}$ и записывается как $пр_v\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta$.

Пример 1. Изобразите проекцию вектора $\vec{b}\langle 1;-3\rangle$ на вектор $\vec{a}\langle 2;3\rangle$.



Пример 2. Найдите абсолютное значение проекцию вектора $\vec{u}$ на вектор $\vec{v}$.

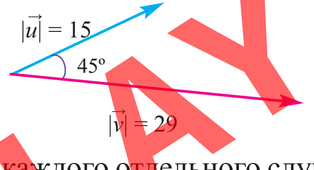


$пр_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta = 10\cos 30° = 10\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8{,}7$

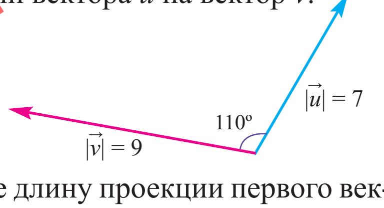
Обучающие задания

17. Найдите абсолютное значение проекции вектора $\vec{u}$ на вектор $\vec{v}$.

a)



b)



18. Для каждого отдельного случая найдите длину проекции первого вектора на второй. Изобразите соответствующий рисунок.

$\vec{a}\langle 5;-2\rangle, \vec{b}\langle 8;5\rangle$ $\quad$ $\vec{c}\langle 3;6\rangle, \vec{d}\langle -2;-5\rangle$ $\quad$ $\vec{g}\langle -1;5\rangle, \vec{f}\langle -4;4\rangle$

Обобщающие задания

1. Для векторов $\vec{a}\langle 1; -1; 2\rangle$ и $\vec{b}\langle 2; -3; -1\rangle$ выполните следующие задания.

a) Запишите разложение вектора по базизным векторам.

b) Найдите длину вектора.

2. Установите вид треугольника, вершины которого находятся в точках A(0;1;2), B(1;5;5) и C(2;3;1).

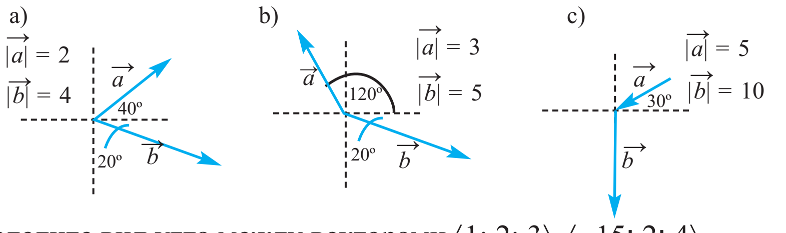
3. Прямая, проходящая через точку P(4;3) параллельна радиус вектору $\vec{m}\langle 5; -1\rangle$. Изобразите график данной прямой.

4. Зная координаты точек A и B запишите вектор компонетами $\overrightarrow{AB}$.

a) $A\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$; $B\left(1; -\frac{5}{2}; 1\right)$ b) $A\left(-2; -\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)$; $B\left(1; \sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)$

c) A $(2; -3{,}5)$; B $(1; -1; 3)$ d) A $(a; -a; 2a)$; B $(a; -a; 2a)$

5. Для каждого отдельного случая найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



6. Определите вид угла между векторами $\langle 1; 2; 3\rangle$ $\langle -15; 2; 4\rangle$.

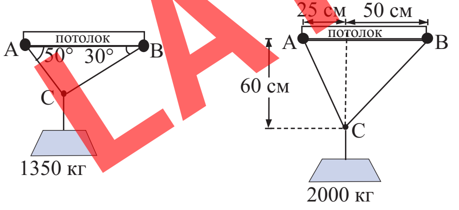
7. Точка C делит отрезок, соединяющий точки A (2;2; 1) и B (3; −1; 2) в отношении 2 : 3. Найдите координату точки C. Рассмотрите два случая.

8. Даны векторы $\vec{a}\langle 4; 2\rangle$ и $\vec{b}\langle 2; -4\rangle$:

a) изобразите данные вектора;

b) что больше: $|\vec{a}+\vec{b}|$, или $|\vec{a}| + |\vec{b}|$?

9. Найдите силу натяжения кабеля под действием тяжести.



10. Силы 20 Н, 555 Н и 75 Н приложенные к телу, образуют с положительным направлением оси x соответственно углы 30°, 45° и 120°. Найдите направление и абсолютное значение изменяющейся силы.

3 Предел

- Предел функции
- Нахождение предела функции по таблице значений функции и графику
- Существование предела
- Свойства пределов
- Непрерывность функции
- Особенные пределы, содержащие тригонометрические функции
- Предел функции в бесконечности
- Предел числовой последовательности

Математический словарь

предел
односторонний предел
предел слева
предел справа
существование предела
непрерывность

непрерывность в точке
непрерывность на интервале
непрерывность на отрезке
замечательные пределы
предел на бесконечности
предел числовой последовательности

Это интересно!

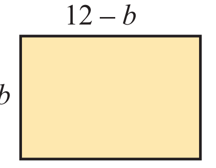
Предел (лимит) от латинского слова "limes", что означает граница, цель.

Понятие предела независимо друг от друга было введено английским математиком Исааком Ньютоном (1642–1727) и немецким математиком Готфридом Лейбницом (1646–1716). Однако ни Ньютон, ни Лейбниц так до конца и не смогли осознать важность данного математического понятия. Точное определение предела было дано французским математиком Коши. А работы немецкого ученого Вейерштрасса наконец завершили создание этой серьезной теории.

Предел функции в точке

Понятие предела является одним из фундаментальных в математики. Чтобы осознать понятие предела сначала рассмотрим следующую задачу.

Исследование. Проволокой длиной 24 м, необходимо оградить прямоугольный участок как показано на рисунке. Какие размеры должен иметь участок, чтобы он имел наибольшую площадь?



Решение: Обозначим длину прямоугольника через a, а ширину через b. Тогда периметр прямоугольника будет равен $P = 2a + 2b$. По условию $2a + 2b = 24$. Отсюда $a = 12 - b$. Применим это в формуле для нахождения площади $S = ab$. Тогда зависимость площади от ширины можно записать как $S = (12 - b)b$ или $S(b) = 12b - b^2$. Составим таблицу значений площади для значений ширины b, которые как справа, так и слева стремятся к 6.

при стремлении b к 6 слева → ← *при стремлении b к 6 справа*

Длина	b	5,0	5,5	5,9	6,0	6,1	6,5	7,0
Sahə	S	35,00	35,75	35,99	36,00	35,99	35,75	35,00

S(b) стремится к 36 → ← *S(b) стремится к 36*

Значит, при стремлении значений b как справа, так и слева к 6 значения $S(b)$ приближаются к 36 и не зависит от того, как значения b-стремятся к 6. В этом случае число 36 называется пределом функции $S(b)$ при стремлении переменной b к 6 и это записывается так:

$$\lim_{b\to 6} S(b) = \lim_{b\to 6} (12b - b^2) = 36$$

При стремлении значений переменной b к 6, предел функции S(b) равен 36.

Здесь запись $b\to 6$ означает, что b расположено сколь угодно близко к 6, однако это не означает, что b равно 6. Как видно из таблицы числа при стремлении слева меньше 6, при стремлении справа числа больше 6. Если записать $S(b) = 36 - (b - 6)^2$, то при стремлении величины $|b - 6|$ к 0 можно увидеть стремление значений S к 36.

Определение. Пусть, функция $f(x)$ определена в окрестности $(a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$ точки a. Если при стремлении разности $x - a$ к нулю, разность $f(x) - L$ также стремится к нулю, то число L называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ и записывает как

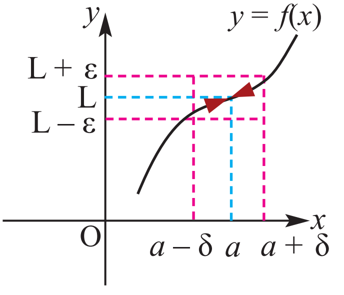
$$\lim_{x\to a} f(x) = L .$$

Можно также дать следующее определение предела.

Определение. Пусть для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех x удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$. Тогда число L называется пределом функции $f(x)$ в точке a и записывается как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Это можно объяснить коротко геометрически.

Для произвольной точки $\varepsilon > 0$ на оси ординат возьмем окрестность $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ точки L и проведем через точки $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$ параллельно оси абсцисс прямые. Получим полоску шириной 2ε и всем x-ам $(x \neq a)$ в окрестности $(a - \delta; a + \delta)$ аргументов, соответствуют значения функции $f(x)$ из полосы 2ε.



Пример 1. Используя определение предела покажем справедливость следующего равенства $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$

Решение: выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Для всех x удовлетворяющих условию $|x-2| < \delta$ оценим величину $|(3x-2)-4|$:

$|(3x-2)-4| = |3x-6| = 3|x-2| < 3\delta$. Возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, тогда все x удовлетворяющие условию $|x-2| < \delta$ удовлетворяют отношению $|(3x-2)-4| < \varepsilon$. А это, по определению означает $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$.

Обозначения. Обозначение $\to$ указывает на стремление.

Запись $x \to a^-$ обозначает стремление x к a слева. В этом случае значения x стремятся к a слева, т.е. оставаясь меньше a приближаются к a.

Запись $x \to a^+$ обозначает стремление x к a справа. В этом случае значения x стремятся к a справа, т.е. оставаясь больше a приближаются к a.

Запись $x \to a$ обозначает стремление с обоих сторон.

Предел можно определить различными методами.

- по таблице
- по графику
- аналитически

Приближенное нахождение предела функции по таблице значений и по графику.

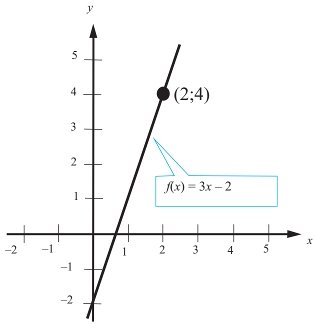
Пример. Задайте таблицу значений и найдите предел: $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)$

Решение: запишем функцию $f(x) = 3x - 2$ и в таблицу найдем значения $f(x)$ в x очень близких к 2.

x	1,9	1,99	1,999	2,0	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,700	3,970	3,997	?	4,003	4,030	4,300

По таблице видно, что при стремлении значений x к 2, как справа, так и слева значения $f(x)$ приближаются к 4.

Построив график функции $f(x) = 3x - 2$ также можно увидеть, что при стремлении x как справа, так и слева к 2 значения функции “сходятся” к 4. Значит, можно записать следующее $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2) = 4$.



Пример 3. Найдите. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Решение: Функция $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена в точке $x = 1$ и при $x \neq 1$ $f(x) = x + 1$. Построим таблицу значений функции при стремлении x слева и справа к числу 1.

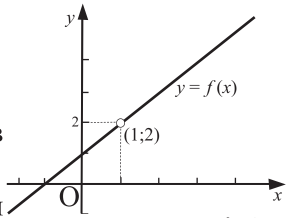


график функции $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

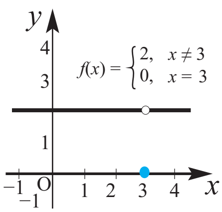
x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1

Из таблицы видно, что при стремлении x к 1значения $f(x)$стемяться к 2. Убедится в этом можно построив график соответствующей функции. Здесь надо обратить внимание на следующее: в точке $x = 1$ заданная функция не определена, однако в этой точке предел функции существует и он равен 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Обратите внимание на разницу двух понятий - предел функции и значение функции в заданной точке!

Пример 4. По графику функции $f(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$ найдите $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.



Решение: Из графика видно, что при стремлении значений x к 3 значение функции приближается к 2: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$

Значение же функции в точке $x = 3$ равно 0: $f(3) = 0$

Предел функции в точке

Обучающие задания

1. Найдите предел по таблице.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+3)$

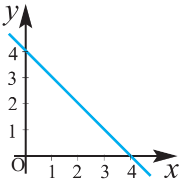
x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				?			

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

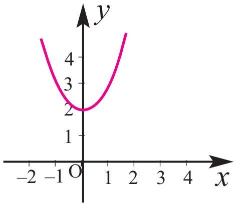
x	–0,1	–0,01	–0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$				?			

2. По графику найдите пределы (если они существуют). В случае, если предела не существует, обоснуйте причину его отсутствия.

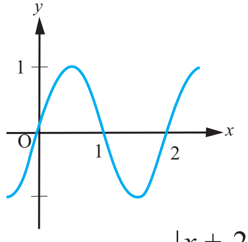
a) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)$



b) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)$

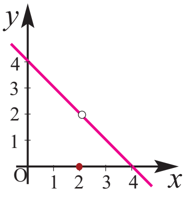


c) $\lim\limits_{x\to 1}(\sin \pi x)$



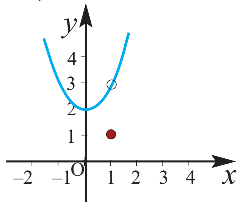
d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$f(x)=\begin{cases} 4-x, & x\neq 2 \\ 0, & x=2 \end{cases}$

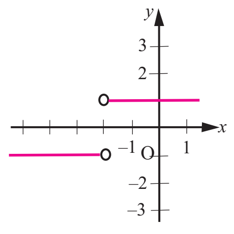


e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$



f) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{|x+2|}{x+2}\right)$



3. От картоне квадратной формы, длина стороны которой равна 24 см с каждого угла вырезали одинаковые по размеру квадраты, после чего картон сложили в виде коробки (без крышки).

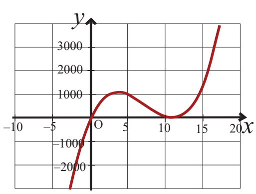
a) По следующим данным изобразите рисунок коробки и отметьте на нем соответствующие обозначения.

b) Покажите, что объем коробки можно найти по формуле $V=4x(12-x)^2$.

c) Объем коробки достигает наибольшего значения, при стремлении значений x к 4. Заполните следующую таблицу, и исследуйте как изменяются значения функции при стремлении x к 4. По таблице найдите предел $\lim\limits_{x\to 4} V$.

x	3	3,5	3,9	4	4,1	4,5	5
V							

d) При помощи графкалькулятора постройте график функции $V(x)$. Убедитесь, что функция достигает максимального значения при $x=4$.



Существование предела. Односторонний предел.
Для некоторых значений переменной x приходится рассматривать стремление к a только с одной стороны (слева или справа).

Предел слева. Если значения x, оставаясь меньше a, стремятся к a, при этом разность $f(x) - \mathrm{L}$ стремится к нулю, то число L называется пределом функции $f(x)$ в точке a слева и записывается как $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

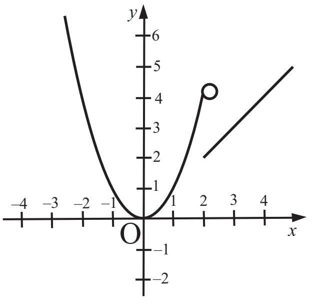
Предел справа. Если значения x, оставаясь больше a, стремятся к a, при этом разность $f(x) - \mathrm{L}$ стремится к нулю, то число L называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа и записывается как $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Если для функции $f(x)$ существуют правый и левый пределы и они равны, то в точке $x = a$ для функции $f(x)$ существует предел и справедливо равенство $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Для данного предположение верно и обратное.
Исследуем пределы слева и справа для кусочно заданной функции.

Пример 5. Для функции $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$

найдите предел слева и справа при $x \to 2$.



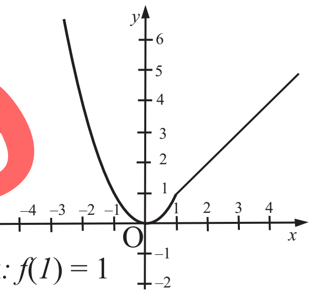
Решение: предел слева: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

Предел справа: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2$

Так как, левый и правый пределы не равны, то в точке $x = 2$ для данной функции предела не существует.

Пример 6. Для функции $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$

найдите предел слева и справа при $x \to 1$.



Решение: предел слева: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$

Предел справа: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ значение функции: $f(1) = 1$

Исследуйте самостоятельно!

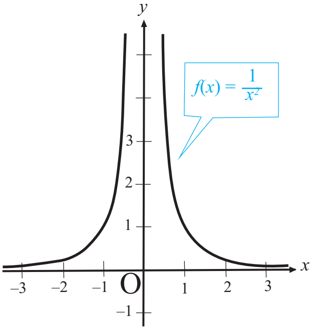
a) Постройте график следующей функции. Проверьте существует ли предел функции при $x \to 3$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq 3 \\ 9 - x & x > 3 \end{cases}$$

b) Постройте график следующей функции. Проверьте существует ли предел функции при $x \to 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x > 1 \\ x^2 + 3 & x \leq 1 \end{cases}$$

Предел функции в точке



В определении предела функции мы предположили, что числа a и L конечны. Однако , a и L (одно или оба) могут и не быть конечными числами.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

Как видно по графику при стремлении значений x к нуля слева и справа, значения функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ бесконечно возрастают. Значит, если нам нужны достаточно большие значения функции, то мы должны брать как можно маленькие значения x. Например,

$$0<|x|<\frac{1}{10} \longrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}>100$$

$$0<|x|<\frac{1}{1000} \longrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}>1000\,000$$

При уменьшении значений $|x|$, значения функции неограниченно растут.
Функция $\frac{1}{x^2}$ при $x\to 0$ бесконечно возрастающая. Это записывается так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

Обучающие задания

4. При помощи графика найдите пределы (если они существуют) функции. Если предел не существует, то объясните причину.

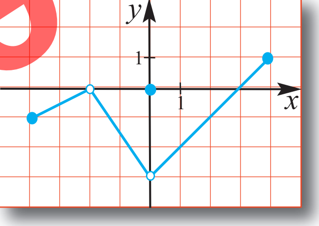
1) $f(x)=\begin{cases} x+6, & x<1 \\ 8-x, & x\ge 1\end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x<0 \\ 1-x^2, & x\ge 0\end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

5. По графику функции найдите следующие пределы.



a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

6. Постройте график функции $f(x)$, удовлетворяющей условию.

a) $f(-1)=3$, $f(0)=-1$, $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

b) $f(-2)=4$, $f(0)=5$, $f(1)=-2$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ существует.

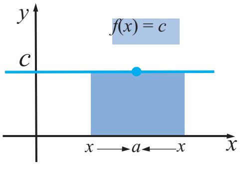
Свойства пределов

Для пределов функции справедливы следующие утверждения.

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то он единственный.

Предел константы. Для постоянной функции $f(x) = c$ имеем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$.

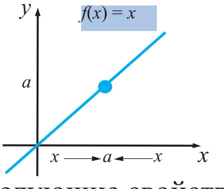
Предел константы равен самой константе.



Пример. $\lim\limits_{x\to 3} 7 = 7$, $\lim\limits_{x\to 3} 5 = 5$

Предел тождественной функции.

Для тождественной функции $f(x) = x$ имеем $\lim\limits_{x\to a} x = a$



Пример. $\lim\limits_{x\to -5} x = -5$

При нахождении пределов функции используются следующие свойства.

Если для действительных чисел L, M, a, имеются $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \text{L}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \text{M}$, то:

1. Предел суммы: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = \text{L} + \text{M}$

Предел суммы двух функций равен сумме их пределов .

Пример. $\lim\limits_{x\to 3} (x + 6) = \lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 6 = 3 + 6 = 9$

2. Предел разности: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = \text{L} - \text{M}$

Предел разности двух функций равен разности их пределов.

Пример. $\lim\limits_{x\to -1} (11 - x) = \lim\limits_{x\to -1} 11 - \lim\limits_{x\to -1} x = 11 + 1 = 12$

3. Предел произведения: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = \text{L} \cdot \text{M}$

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

В частном случае, $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

То есть множитель константу можно вынести за знак предела.

Пример. $\lim\limits_{x\to 5} (-2x) = (-2) \cdot \lim\limits_{x\to 5} x = -2 \cdot 5 = -10$

4. Предел частного: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\text{L}}{\text{M}}$, $\text{M} \neq 0$

Предел частного двух функций, равен частному их пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю.

Пример. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x+5}{4-x}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} (x+5)}{\lim\limits_{x\to 2} (4-x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 5}{\lim\limits_{x\to 2} 4 - \lim\limits_{x\to 2} x} = \dfrac{2+5}{4-2} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$

5. Предел степени: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = \text{L}^n$, $n \in N$.

В частном случае, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

Пример. a) $\lim\limits_{x\to 10} x^4 = 10^4 = 10000$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3} 2}{\lim\limits_{x\to 3} x^3} = \dfrac{2}{27}$

Свойства пределов

На основании данных утверждений можно сделать следующий вывод.

Предел многочлена и рациональной функции

Для произвольного многочлена $P(x)$ имеем: $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

Для произвольных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ при $Q(a) \neq 0$, имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + 4) = 3\lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} 4 = 3\cdot(2)^2 + 4 = 16$

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$

Как видно, если знаменатель рациональной функции при $x\to 1$ отличен от нуля, то можно применить все свойства, о которых говорилось ранее.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{2\cdot(1)^2 + 1 + 1}{1 + 1} = 2.$$

Можно показать, что при возможных значений переменной имеет место:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{P(a)}$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$

Обучающие задания

1. Применяя свойства пределов, вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to 2} 8$ b) $\lim\limits_{x\to 6} x$ c) $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 4)$ d) $\lim\limits_{x\to -2} 7x^2$

2. 1) Зная, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 2$ и $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 3$, найдите:

a) $\lim\limits_{x\to c}(5g(x))$ b) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x))$ c) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)g(x))$ d) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

2) Зная, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \dfrac{3}{2}$ и $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \dfrac{1}{2}$, найдите:

a) $\lim\limits_{x\to c}(4f(x))$ b) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) - g(x))$ c) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)g(x))$ d) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

3. Вычислите, используя свойства пределов.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(-4x^2 + 2x - 5)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x - x^3)$ 3) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3 - 4x + 1)$

4) $\lim\limits_{x\to -2}(5x^3 + 6x^2 - 8)$ 5) $\lim\limits_{x\to -3}(2x^2 + 4x + 1)$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3 - 2x^2 + 4)$

4. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to -4} x^2$ b) $\lim\limits_{x\to 2}(-x^3)$ c) $\lim\limits_{x\to 3}(x - 1)^5$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3x + 1}$ e) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[3]{x + 1}$

5. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x}{x-4}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x+1}$ f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$

6. a) Изобразите график какой-либо функции, определенной в точке $x = 2$, но не имеющей предела при $x \to 2$.

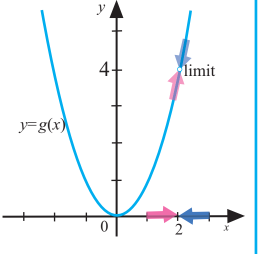
b) Изобразите график какой-либо функции, неопределенной в точке $x = 2$, но имеющей предел при $x \to 2$

Некоторые способы вычисления пределов

Нахождение пределов рационального выражения, при помощи упрощения.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$ При непосредственной подстановке $x = 2$ получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

В этом случае, числитель и знаменатель рационального выражения раскладывают на множители и сокращают, а затем вычисляют предел эквивалентного выражения:



$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4.$$

Проверь себя! Вычислите предел рациональной функции (если это возможно). Если у функции нет предела, запишите причину.

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-10x-25}{x^2-4x-5}$ c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-5x}$

Нахождение пределов, при помощи освобождения от радикала.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$ Вычислите предел, освободив числитель от радикала.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2+4} + \lim\limits_{x \to 0} 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Применяются свойства пределов.

7. Вычислите предел рациональной функции (если это возможно). Если у функции нет предела, запишите причину.

a) $\lim\limits_{x\to 3}(-4x)$ b) $\lim\limits_{x\to 5}(-x^3)$ c) $\lim\limits_{x\to -2}x^2$

d) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-4x+1)$ e) $\lim\limits_{x\to 6}(-5x^2+6x+8)$ f) $\lim\limits_{t\to -2}(t+4)^2$

g) $\lim\limits_{t\to 1}(3t-1)(5t^2+2)$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+5}{3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-6}{x^2-7x+6}$

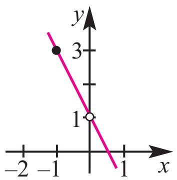
8. Зная, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}=100$, найдите

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{100}-1)^2}{(x-1)^2}$

На каждом шаге вычисления покажите какое свойство пределов вы применяли.

9. Найдите пределы функции по графику. Отметьте точки в которых функция не существует .

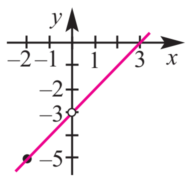
$g(x)=\dfrac{-2x^2+x}{x}$



a) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}g(x)$

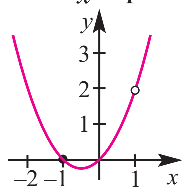
$h(x)=\dfrac{x^2-3x}{x}$



a) $\lim\limits_{x\to -2}h(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$

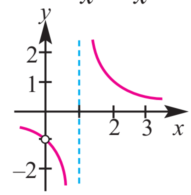
$\varphi(x)=\dfrac{x^3-x}{x-1}$



a) $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$



a) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

10. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-12}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x^3+4x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$ i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6}$

11. Применяя различные методы вычислите пределы.

1) $\lim\limits_{x\to 2} [(x+1)^2(3x-1)^3]$ 2) $\lim\limits_{x\to -1} [(x+2)^3(3x+2)]$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{12}{x^3-8}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{6}{x^2-9}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{16+x}-4}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

12. Вычислите пределы функций.

1) $f(x) = 5 - x,\quad g(x) = x^3$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

2) $f(x) = x + 7,\quad g(x) = x^2$

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -3} g(f(x))$

3) $f(x) = 4 + x^2,\quad g(x) = \sqrt{x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

Прикладные задания

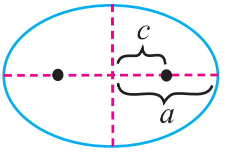
Пример. По теории относительности Эйнштейна, длина движущегося тела относительно наблюдателя, находящегося в состоянии покоя, при возрастании скорости уменьшается. Если длина тела в состоянии покоя L_0, а при движении длина тела равна L, то между этими величинами существует зависимость $L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Что можно сказать о длине искусственного спутника, если его скорость будет стремиться к скорости света?

Решение: в этом случае мы должны вычислить предел $\lim\limits_{v\to c} L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$$\lim_{v\to c} L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = L_0\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}} = L_0\sqrt{0} = 0.$$

Значит, для наблюдателя, находящегося в состоянии покоя, длина спутника сравняется с нулем, в случае, если скорость спутника сравняется со скоростью света.

13. Множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек (фокусов) постоянна, называется эллипсом Площадь ограниченная эллипсон, больший диаметр которого равен $2a$, можно найти по формуле $\pi a\sqrt{a^2-c^2}$. c - расстояние от центра эллипса до фокуса. Найдите предел площади при $c \to 0$. Объясните значение данного предела.



14. Денежные средства (тыс. манат), которые необходимы для очистки $p\%$ озера можно вычислить по формуле $C = \dfrac{25000p}{100-p} (0 \le p < 100)$.

a) Вычислите сумму денег необходимую для очистки 50% озера.

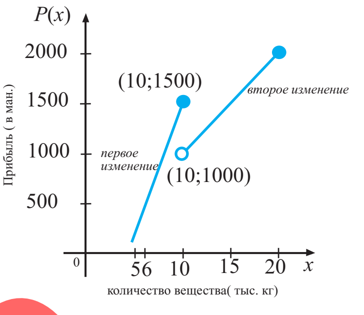
b) Сколько процентов озера можно очистить за 100 тыс. манат?

c) Вычислите $\lim\limits_{p\to 100^-} C$ и объясните смысл данного предела.

15. На графике показана прибыль, полученная от продажи x тыс. кг химических средств. При помощи графика, найдите требуемые пределы (если это возможно).

a) $\lim\limits_{x\to 6} P(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 10^-} P(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 10^+} P(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 10} P(x)$



16. Почта отправляет срочные письма, при условии, что масса письма не превышает 0,3 кг. За письмо, массой 0,1 кг надо заплатить 20 манат. Если вес письма будет больше 0,1 кг, то за каждые лишние 25 грамм надо доплатить 2 маната. Обозначив через $M(x)$ сумму, которую надо заплатить за письмо массой x кг, найдите следующее:

a) $\lim\limits_{x\to 0,3^-} M(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0,3^+} M(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0,3} M(x)$ d) $M(0,3)$

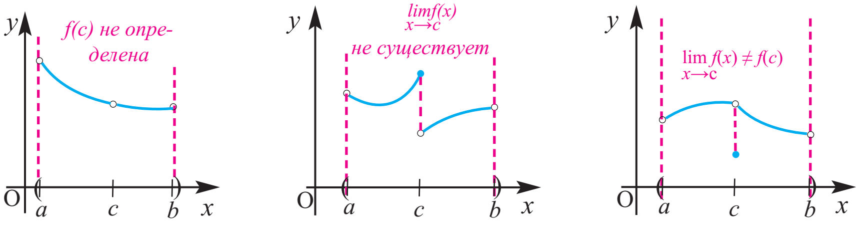
e) $\lim\limits_{x\to 0,25^-} M(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 0,25^+} M(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 0,25} M(x)$ h) $M(0,25)$

17. Для всех значений x удовлетворяющих условию $8 - x^2 \le f(x) \le 8 + x^2$ вычислите $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Непрерывность функции

Непрерывность функции часто можно легко объяснить следующим образом. Если график какой-либо функции можно построить не отрывая карандаш от бумаги, то эта функция непрерывна. В противном случае, у графика есть точки разрыва (скачка) и данная функция является разрывной функцией. График разрывной функции невозможно изобразить не отрывая карандаша от листа.

Непрерывность функции в точке. Для того, чтобы функция была непрерывной в точке, она не должна иметь разрыва, а график не должен иметь скачков. На графиках ниже, функции имеют разрыв или скачок в точке $x = c$. Значит эти функции в точке $x = c$ имеют разрыв. Рассмотрим данные случаи.



Как видно по графику, если функция разрывная в точке $x = c$, то она обладает одним из трех условий.

1. Функция не определена в точке $x = c$.
2. В точке $x = c$ функция $f(x)$ не имеет предела.
3. Предел функции $f(x)$ в точке $x = c$ существует, но не равен $f(c)$.

Точка, где функция прерывается, является точкой разрыва.

Если функция не удовлетворяет ни одному из указанных выше условий, то ее можно назвать непрерывной в точке $x = c$.

Непрерывность функции в точке. Для того, чтобы функция f была непрерывна в точке c должны выполняться три следующих условия:

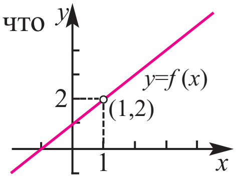
1. Функция должна быть определена в точке $x = c$;
2. Должен существовать предел $\lim\limits_{x\to c} f(x)$;
3. Должно выполняться равенство $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ т.е. предел в точке c должен равняться значению функции в этой точке.

Пример. Исследуйте непрерывность следующей функции.

a) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $p(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$

Решение: a) из графика функции $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ видно, что при стремлении значений x к 1 у функции есть предел и он равен 2: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

Однако в точке $x = 1$ функция неопределенна. Значит, в точке $x = 1$ функция разрывна.



$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

Отметим, что во всех точках кроме $x = 1$ на всей действительной оси она определена и непрерывна.

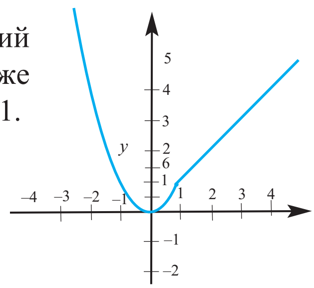
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$

Как видно из графика, при стремлении значений x к 1 функция имеет предел, равный 1, в тоже время при $x = 1$ значения функции также равны 1.

Предел функции: $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$

Значение функции: $f(1) = 1$

$\lim f(x) = f(1) = 1$



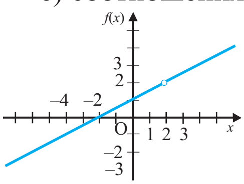
При $x\to1$ предел функции равен значению функции в точке $x = 1$. Т.е. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$. Значит, данная функция непрерывна в точке $x = 1$.

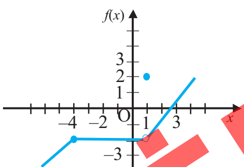
Обучающие задания

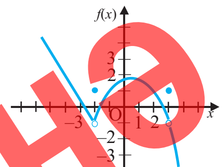
1. По графику определите все точки разрыва $x = a$ функции и запишите следующее:

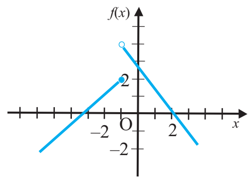
a) $f(a)$, (если существует); b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

e) соотношения, показывающие разрывы функции.





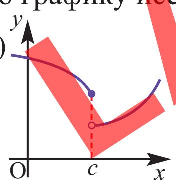


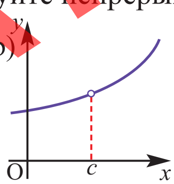


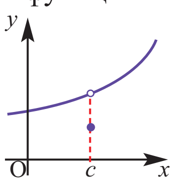
2. Определите точки разрыва (если они существуют) функции.

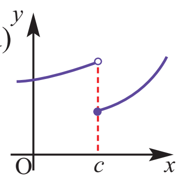
a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ c) $f(x) = x^2 - 9x + 18$ d) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x}$

3. По графику исследуйте непрерывность функции в точке $x = c$.

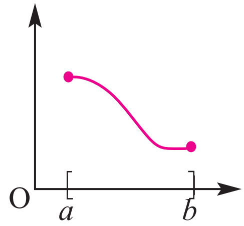
a) 

b) 

c) 

d) 

Непрерывность функции на интервале.



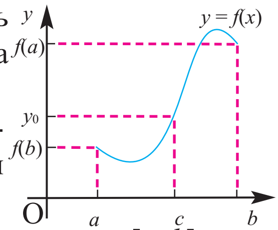
Определение. Функция называется непрерывной на интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Непрерывность функции на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;\ b]$, если она определенна на отрезке $[a;\ b]$, непрерывная на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Любая функция многочлена непрерывна на всей действительной оси. Рациональная функция непрерывна во всех точках, кроме тех которые обращают знаменатель в 0. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ непрерывны на всей действительной оси, а функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \log_a x$ непрерывны на области определения.

Теорема о промежуточных значениях функции.



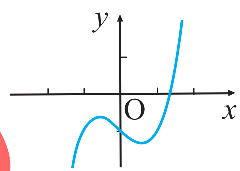
Все сказанное выше дает возможность выразить теорему, о промежуточных значениях функции. Она применяется при решении многих задач.

Теорема. Функция, непрерывная на отрезке, принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значениям.

Теорема Коши. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и принимает на концах значения противоположных знаков, то хотя бы в одной точке из отрезка $[a;\ b]$ она принимает значение равное нулю.

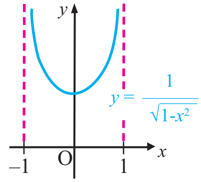
Применяя эту теорему, можно решить следующий тип задач.

Пример 1. Существует ли такое действительное число, куб которого больше самого числа на 1?



Решение: Искомое число x равно $x^3 - 1$, т.е.должно удовлетворять уравнению $x^3 - x - 1 = 0$. Для решение задачи исследуем функцию $f(x) = x^3 - x - 1$. Из графика функции, построенного с помощью граф-калькулятора, видно, что значения функции в точках $x = 1$ и $x = 2$ имеют разные знаки: $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. Тогда, по теореме Коши, существует такое число $c \in (1;2)$, что $f(c) = 0$. Это число c является корнем уравнения $x^3 - x - 1 = 0$.

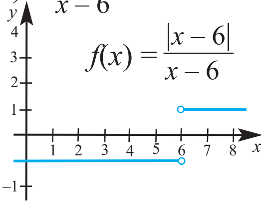
Если какая-либо функция непрерывна на интервале $(a;\ b)$ это не означает, что она непрерывна на отрезке $[a;b]$.



Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна на интервале $(-1;\ 1)$.

Однако, так как она неопределенна в точках $x = -1$ и $x = 1$, то говорить о непрерывности данной функции на отрезке $[-1;1]$ не имеет смысла.

Пример 2. Исследуйте непрерывность функции $f(x) = \dfrac{|x-6|}{x-6}$



Решение: как видно из графика, при стремлении x справа к 6 предел функции равен 1, при стремлении слева предел равен -1.

$\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \dfrac{|x-6|}{x-6} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \dfrac{|x-6|}{x-6} = -1$

Т.е. в точке $x = 6$ предела функции не существует.

Данная функция разрывается в точке $x = 6$, но на каждом из интервалов $(-\infty;6)$ и $(6;+\infty)$ она непрерывна.

Пример 3. Определите точки разрыва функции $f(x) = \begin{cases} x+2,\ x \le 0 \\ 2,\ 0 < x < 1 \\ x^2+2,\ x > 1 \end{cases}$

Решение:

Сначала исследуем непрерывность функции каждой части. Первая функция $f(x) = x + 2$ является линейной, вторая $f(x) = 2$ постоянная функция, третья $f(x) = x^2 + 2$ является функцией многочлена, и каждая из них для всех значений x непрерывна. Значит, непрерывность может быть нарушена только в точках "перехода", т.е. в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Сначала исследуем непрерывность функции в точке $x = 0$.

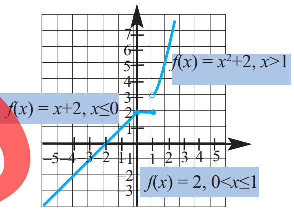
1. Значение функции. Функция определена в $f(0)$ и $f(0) = 0+2 = 2$.

2. Существование предела. Для определения предела $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ исследуем левый ($x\to 0^-$) и правый ($x\to 0^+$) пределы функции. При приближении к 0 слева значения x меньше 0 и в этом случае $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+2) = 2$.

При приближении к 0 справа значения x больше 0 и в этом случае $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2 = 2$. Значит, $\lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$

3. Значении и предел функции в точке.

Так как $f(0) = 2$ и $\lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$, то в точке $x = 0$ nфункция непрерывна.

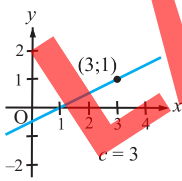


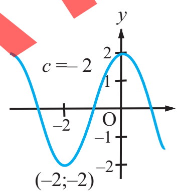
! Непрерывность функции в точке $x=1$ исследуйте самостоятельно. Результаты проверьте по графику.

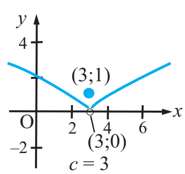
Обучающие задания

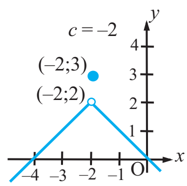
4. Для каждого функции по графиком определите требуемый предел. Объясните непрерывность функции.

a) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$









5. Определите точки разрыва следующих функций и найдите предел функции в данной точке (если он существует).

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ 3) $p(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$ 4) $f(x)=\dfrac{5+x}{x-2}$

6. Упростите выражение заданной функции и запишите свое мнение о непрерывности функции в заданной точке.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x=-3$ b) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x=1$

c) $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, $x=4$ d) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2-11x+30}{x^2-4}$, $x=2$

7. Определите является ли функция непрерывной в заданном промежутке.

1) $f(x)=x^2+1$
a) $[-1; 3]$ b) $[3; \infty)$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
a) $(0; 4]$ b) $[1; 9]$

3) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$
a) $(-3; 3)$ b) $[-3; 3]$

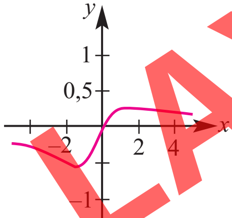
4) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$
a) $(-2; 2]$ b) $[-4; 3]$

8. **Вопрос открытого типа.** Изобразите график функции, соответствующий условиям. Запишите свое мнение о непрерывности функции в заданной точке.

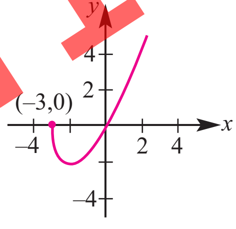
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$ и $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1$

9. По графику определите в каком промежутке функция непрерывна.

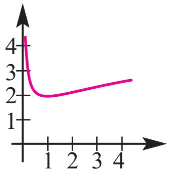
$f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+2}$



$f(x)=x\sqrt{x+3}$



$f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$



10. a) Изобразите график функции.
b) Покажите точки разрыва функции.
c) Найдите предел слева и справа в точках разрыва.

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ x + 5 & 2 \le x \le 4 \\ 7 & x > 4 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 1 \\ 0 & 1 \le x \le 4 \\ x - 2 & x > 4 \end{cases}$

11. Покажите, что функция принимает указанные значения, используя теорему о промежуточных значениях функции.

a) $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0; 5]$, $f(c) = 11$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0; 3]$, $f(c) = 0$

c) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, $[0; 3]$, $f(c) = 4$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$, $[\dfrac{5}{2}; 4]$, $f(c) = 6$

12. Фирма сдает в аренду автомобили на следующих условиях (за каждые 12 дней):
- от 1 до 5 дней - ежедневно 28 манат
- 6 и 7 день плата не взимается
- от 8 до 12 дней - ежедневно 28 манат.

Функция F(t) выражает сумму за t дней ($0 < t \le 12$).

1)Найдите значение функции F(t) в следующих точках.
a) $t = 4$ b) $t = 5$ c) $t = 6$ d) $t = 7$ e) $t = 8$

2) Найдите пределы:a) $\lim\limits_{x \to 5^+} F(t)$ b) $\lim\limits_{x \to 5^-} F(t)$

3) c) При каком значении t функция F(t) непрерывна?

13. По данным исследований было установлено, что изменение массы бройлерной курицы (в граммах) в первые 56 дней можно задать следующей функцией.

$$M(t) = \begin{cases} 48+3{,}64t+0{,}6363t^2+0{,}00963t^3, & \text{при } 1 \le t \le 28 \\ -1004 + 65{,}8t, & \text{при } 28 < t \le 56 \end{cases}$$

a) Найдите массу бройлерной курицы за 20 дней.
b) Найдите пределы слева и справа, удовлетворяющие условию $t \to 28$. Является ли функция M(t) непрерывной в точке $t = 28$?
c) Почему возникла необходимость задать функцию изменения массы бройлерной курицы в виде двух функций?

Особые пределы, содержащие тригонометрические функции

Пределы тригонометрических функций

Пределы тригонометрической функции

$\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$

число a принадлежит области определения тригонометрической функции.

Значения пределов наиболее часто используемых функций, содержащих тригонометрические функции:

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$

На самом деле, так как функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны, пределы функций в данных точках равны значениям функции в этих же точках.

Первый замечательный предел

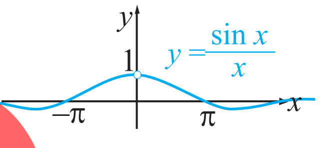
При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции часто используется нижеследующий предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

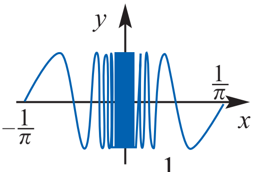
Учитывая, что x - действительное число или радианная мера угла, по таблице можно установить, что для значений удовлетворяющих условию $x\to 0^+$ значение функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ приблизительно стремятся к 1.

$x\to 0^+$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,99833416	0,99998333	0,99999983	0,99999999

$f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x} = f(x)$, т.е. так как заданная функция четная, то для значений удовлетворяющих условию $x\to 0$ $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$. По графику функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ построенному при помощи графкалькулятора также видно, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



Отметим, что предел $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ не существует. По графику, построенному при помощи графкалькулятора, видно, что функция нечетная и не имеет периода. При приближении значений x к нулю значения функции находятся между –1 и 1.



$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

Пример 1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2$$

! Покажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = k$. Обозначьте $t = kx$, тогда $x = t/k$.

Пример 2. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x-3\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{10x-3\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{10x}{x}-\frac{3\sin x}{x}\right]$$

Выражение записывается в виде разности двух дробей.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10x}{x}-3\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}$$

Применяется свойство предела разности.

$$=\lim_{x\to 0}10-3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Вычисляется предел.

$$=10-3\cdot 1=7$$

Пример 3. **Покажите, что** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

Числитель и знаменатель умножается на выражение $1+\cos x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

Упрощается

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

Учитывается, что $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.

Выражение записывается в виде произведения двух выражений.

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

Применяется свойство произведения

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)=0$$

Учитывается, значение $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$

Обучающие задания

1. Найдите следующие пределы.

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x$ 2. $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{tg} x$ 3. $\lim\limits_{x\to 2}\cos\dfrac{\pi x}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 5. $\lim\limits_{x\to\pi}\sec 2x$ 6. $\lim\limits_{x\to\pi}\cos 3x$

2. Вычислите пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(1-\cos x)}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{2x^2}$

4. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta\operatorname{tg}\theta}{\theta}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ 6. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1-\cos h)^2}{h}$

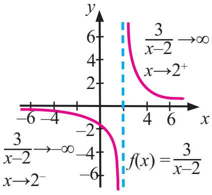
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ 8. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$ 9. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ 11. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{2t}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

3. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{2x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$

1. Бесконечные пределы



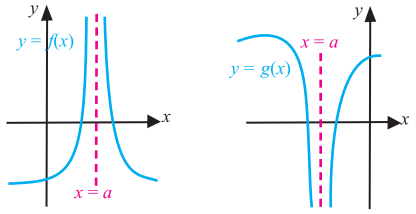
Пример. По графику функции $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ на рисунке видно, что при приближении значений x справа к 2 значения y **бесконечно растут.** Т.е.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$$

При приближении значений x к 2 слева значения y также **бесконечно увеличиваются по абсолютному значению.** Т.е. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = -\infty$

Так как левый и правый пределы различны, то заданная функция на имеет предела в точке $x = 2$.

На графике функции на рисунке определена для всех значений на множестве действительных чисел, кроме числа a в интервале, содержащем данное число a и при $x \to a$ имеем $f(x) \to \infty$. Этот предел записывается как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$



Аналогичным образом можно установить, что $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, т.е. показывает на бесконечное изменение функции. Изменение функции в бесконечности можно записать при помощи следующих 6 пределов.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^+} g(x) = -\infty$$

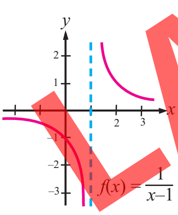
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^-} g(x) = -\infty$$

Вышеупомянутые бесконечные переменные и соответствующие им пределы дают понятие вертикальной асимптоты.

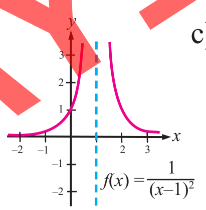
Вертикальная асимптота. Каждый из 6 представленных выше пределов, говорит о наличии прямой $x = a$, которая является вертикальной асимптотой функции $f(x)$.

Пример. По графику исследуйте левый и правый предел в точке $x = 1$.

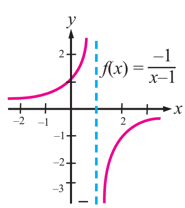
a)



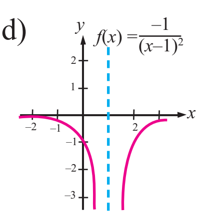
b)



c)



d)



Решение. a) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

Функция не имеет предела, однако правый и левый предел показывают изменение функции.

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

И правый и левый предел функции $+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{x-1}=+\infty$ və $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1}{x-1}=-\infty$

Функция не имеет предела, однако правый и левый предел показывают изменение функции.

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$

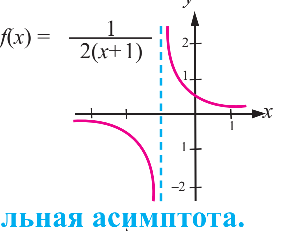
И правый и левый предел функции $-\infty$.

Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции.

Если функции f и g являются непрерывными на данном интервале, и в точке c , из этого интервала $f(c)\neq0$ и $g(c)=0$ и $x\neq c$ $(g(x)\neq0)$, тогда прямая $x=c$ является вертикальной асимптотой функции $r(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Правило нахождения вертикальной асимптоты. Если найти аргументы, которые обращают в нуль знаменатель выражения, то можно определить уравнение вертикальной асимптоты.

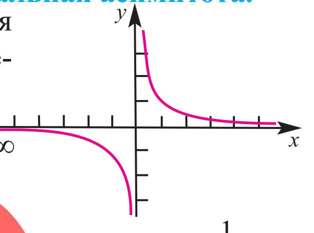
Пример. $f(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}$; $2(x+1)=0$, $x=-1$



Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой функции f.

2. Предел функции в бесконечности. Горизонтальная асимптота.

Рассмотрим еще раз по графику, как изменяются значения функции $y=\dfrac{1}{x}$, если значения x (увеличиваются или уменьшаются до бесконечности.



Как видно из графика функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$ $\dfrac{1}{x}$ стремятся к нулю.Запишем это: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Таким же образом, при $x\to-\infty$ значения $\dfrac{1}{x}$ стремятся к нулю: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, и прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$

> **Горизонтальная асимптота.** Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, то прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой функции $f(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, то $f(x)$ при $x\to a$ называется бесконечно малой.

Например, функция $\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$ бесконечно малая.

Если функция f при $x\to\infty$ бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{f}$ бесконечно большая. Например, при $x\to\infty$ функция $\dfrac{1}{x^2}$ бесконечно малая, а x^2 бесконечно большая.

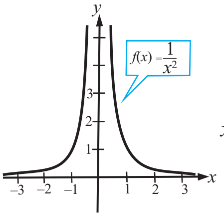
Бесконечные пределы и предел бесконечности

Сумма и произведение конечного количества бесконечно малых функций бесконечно малая величина. Можно показать, при $n>0$,

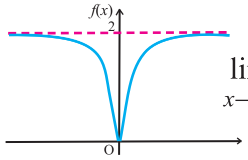
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

Пример. Нахождение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ по графику.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=2$$

Свойства пределов справедливы и для для предела бесконечной функции

Пример. Найдите предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-5}{3x^2-1}$

Решение: Разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 и применим свойства пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3\cdot 1-\frac{1}{x^2})}=\frac{2\cdot 0-5\cdot 0}{3-1\cdot 0}=0$$

Теорема. При $x\to\pm\infty$ функция $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ведет себя как старший член многочлена. Т.е.

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n \text{ и } \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$$

Аналогично, учитывая, что рациональная функция является отношением двух многочленов для предела рациональной функции имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+\text{члены еще меньшей степени}}{bx^m+\text{члены еще меньшей степени}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{bx^m}=\begin{cases}\dfrac{a}{b} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

Здесь $a\neq 0$ və $b\neq 0$

Пример.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3}{3x^3+5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{5}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=+\infty$

решим по теореме:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3}{3x^3+5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{3x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

Обучающие задания

1. Определите вертикальные асимптоты функции.

a) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{2x+8}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+3}$ d) $f(x)=\dfrac{1-2x}{2x^2-5x-3}$

2. Определите вертикальную асимптоту (если она существует) при помощи вычисления предела при $x \to \pm\infty$.

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f(x) = \dfrac{x - 2}{2x^2 + 3x - 5}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

$f(x) = \dfrac{x - 2}{2x^2 + 3x - 5}$

$f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 5}{x^2 - 1}$

3. Применив теорему о пределе рациональной функции, найдите возможные вертикальные и горизонтальные асимптоты.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 5}{x^2 - 4}$

4. Вычислите предел.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{7x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x + 2}{4x - 5}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 2x}{2x^2 - 2x + 1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 5}{3x^2 + 2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x}{4x^2 + 5}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x + 2} - \dfrac{x - 1}{2x + 16} \right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

5. Найдите предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2}, & x > 1 \\ \dfrac{4x}{2x - 5}, & x \le 1 \end{cases}$ a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2}{x + 3}, & x > 0 \\ \dfrac{2x - 3}{x - 1}, & x \le 0 \end{cases}$

6. Запишите функцию в виде отношения двух многочленов $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и покажите, что предел отношения при условии $x \to \pm\infty$, равен единице. Обобщите полученный результат.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^4$

b) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 6x^3$

7. Найдите остаток при делении многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$. Что выражает остаток, согласно теореме о пределе рациональной функции.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$, $g(x) = 3x^3 + 4x - 5$

$f(x) = 2x^3 - x^3 + x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

Прикладные задания

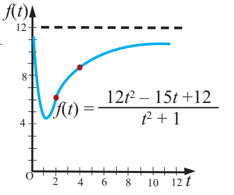
Рассмотрим как меняется функция при стремлении значений аргумента в бесконечность на следующем примере.

Пример. Нормальная концентрация оксигена в озерной воде равна 12 единицам. При сбросе в озеро отходов, в момент $t = 0$, концентрация оксигена в озере изменяется. Зависимость изменения концентрации оксигена в озерной воде от времени, выражается следующим образом:

$$f(t) = \frac{12t^2 - 15t + 12}{t^2 + 1}$$

Объясните как, со временем, изменяется концентрация оксигена? Сможет ли концентрация вновь стать равной 12 единицам?

t	$f(t)$
10	10,515
100	11,85
1000	11,985
10000	11,9985
100000	11,99985



Решение: по графику функции построенном при помощи графкалькулятора можно увидеть, что при увеличении до бесконечности значений t значение функции становится равным 12. Описать данную ситуацию математически можно при помощи следующего предела

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 12$$

Здесь прямая $y = 12$ является горизонтальной асимптотой.

8. Среднее значение. Сумму, которую необходимо заплатить за анализы в больнице можно вычислить с помощью функции $S(n) = 150 + 30n$. Здесь, n показывает количество анализов. Среднюю стоимость одного анализа $\overline{S}(n)$ можно узнать разделив $S(n)$ на n. Найдите $\lim\limits_{n \to -\infty} \overline{S}(n)$ и объясните соответствующую ситуацию.

9. Медицина. Зависимость всасывания лекарства в кровь от времени t можно определить по формуле $M(t) = \dfrac{0{,}21t}{t^2 + 2}$. Найдите $\lim\limits_{t \to \infty} M(t)$ и объясните соответствующую ситуацию.

10. Производительность труда. Исследование показали, что производительность труда работников фирмы за n дней изменяется по формуле $P(n) = \dfrac{64n}{n + 8}$. Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} P(n)$ и прокомментируйте данную ситуацию.

11. Пингвины. Зависимость числа пингвинов от времени можно вычислить по формуле. $N(t) = \dfrac{400\,000}{1 - 0{,}143e^{-0{,}01t}}$

a) Найдите количество пингвинов через 10 лет ($t = 10$).

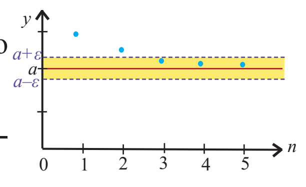
b) Известно, что количество пингвинов не увеличивается бесконечно. При стремлении t к бесконечности, вычислите предел, заданный формулой.

Запишем несколько первых членов последовательности, заданной формулой $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$: $3; \dfrac{5}{2}; \dfrac{7}{3}; \dfrac{9}{4}; \dfrac{11}{5}; \dfrac{13}{6}; \ldots$

При возрастании n значение членов уменьшается и приближается к 2. На самом деле, для $|a_n - 2| = \left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| = \dfrac{1}{n}$, при возрастании n абсолютное значение разности $a_n - 2$ становится достаточно близким к 0. Например, начиная с 11 члена ($n > 10$) все последующие члены удовлетворяют отношению $|a_n - 2| < 0{,}1$, а с 101 члена ($n > 100$) - отношению $|a_n - 2| < 0{,}01$. Вообще, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - 2| < \varepsilon$. Здесь число 2 является пределом этой последовательности.

Определение: Пусть для произвольного $\varepsilon > 0$ и последовательности a_n существует такой номер N, что для всех n ($n > N$) после заданного номера выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Тогда число a называется пределом последовательности a_n и это записывается как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Из определения ясно, что если число a является пределом последовательности a_n, то для некоторого числа ε, все члены после определенного номера, расположены в окрестности $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ и за пределами данной окрестности расположено конечное число членов. Это говорит о том, что при $n > N$ точки $(n; a_n)$ на координатной плоскости расположены в полосе $a - \varepsilon < y < a + \varepsilon$. Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, а не имеющая конечного предела, расходящейся последовательностью.



Свойство. Если последовательность имеет предел, то он единственен.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,то последовательность α_n называется бесконечно малой. Например, последовательности n-ый член которые есть $\dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n^2}; \dfrac{1}{n^3}; \ldots; \dfrac{A}{n^k}$ (здесь A , . какое -либо число $k \in N$) является бесконечно малыми.

Предел каждой сходящейся последовательности равен сумме бесконечно малых и наоборот: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Например, для $a_n = \dfrac{2n+1}{n} = \dfrac{2n}{n} + \dfrac{1}{n} = 2 + \dfrac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, последовательность $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ сходящаяся и ее предел равен 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$.

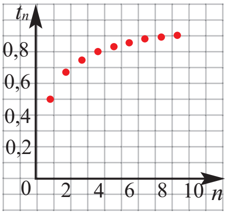
Пример. Найдите предел последовательности (если он существует). Если предела нет, то объясните почему.

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ b) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-2}, \ldots$

Решение: a) покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$ для последовательности $t_n = \frac{n}{n+1}$.

При $n \to \infty$ имеем $\left|\frac{1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \to 0$,

а это по определению означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.



То, что предел последовательности равен 1 можно увидеть, отметив на координатной плоскости точки $(n; t_n)$ для достаточных значений n.

b) При бесконечном возрастании n члены последовательности $a_n = 3^{n-2}$ бесконечно увеличиваются, т.е. стремятся в бесконечность. Значит, последовательность не имеет конечного предела. Мы можем убедится в этом, отметив соответствующие точки на координатной плоскости.

Одним из примеров является наличие конечного предела для периодической десятичной дроби.

$$0{,}3333(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots = \frac{1}{3}$$

Для данной периодической десятичной дроби общий член $b_n = 3 \cdot 10^{-n}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, со знаменателем $q = \frac{1}{10}$. Если рассмотреть эту бесконечную сумму как предел суммы первых n членов последовательности $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, то

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0{,}3(1-10^{-n})}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}.$$

Многие свойства пределов функции в точке также справедливы для предела последовательности.

Пусть, последовательности x_n и y_n сходящиеся и существуют $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n - \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a - b$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c \cdot a$ (здесь c постоянная)

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a \cdot b$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0, y_n \neq 0)$

Предел числовой последовательности

Пример. Вычислите: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

Решение: умножим и разделим выражение внутри скобки на сопряженное иррациональное выражение и применим теорему о пределах, получим:

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n})}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1.$$

Обучающие задания

1. Определите к какому числу сходится числовая последовательность.

a) 0,5; 0,55; 0,555; 0,5555; 0,55555; …

b) 0,36; 0,3636; 0,363636; 0,36363636;...

c) 3; 3,1; 3,14; 3,141;3,1415; 3,14159; 3,141592; …

2. Запишите предел последовательности (если он существует). Если предела не существует объясните причину.

a) 1; −1; 1; −1; 1; −1; 1; −1, …
b) 5,9; 5,99; 5,999; 5,999 9; 5,999 99; 5,999 999; …
c) 3,1; 3,01; 3,001; 3,000 1; 3,000 01, …
d) 3; 2,9; 3; 2,99; 3; 2,999; 3; 2,999 9, …

3. Найдите члены ппоследовательности $a_n=\frac{n}{n+1}$ с номерами $n=99$; 999; 9999 и сравните полученные значения. Является ли a_n-1 безконечно малой при $n\to\infty$? Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

4. Запишите предел последовательности (если он существует). Если предела не существует объясните причину.

a) $0;\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ldots;$ $\qquad f(n)=\frac{n-1}{n}$

b) $\frac{1}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{9}{4};\frac{16}{5};\ldots;$ $\qquad f(n)=\frac{n^2}{n+1}$

c) $2;1;\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\frac{1}{8};\ldots;$ $\qquad f(n)=2^{2-n}$

d) $4;\ 5\frac{1}{2};\ 4\frac{2}{3};\ 5\frac{1}{4};\ 4\frac{4}{5};\ 5\frac{1}{6};\ldots;$ $\qquad f(n)=5+\frac{(-1)^n}{n}$

5. Вычислите предел.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3+\dfrac{2}{n})$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{n}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{3n+2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^3+1}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3n^2}{n^2+1}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(3^n)}{n}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{5\sqrt{4^n}}$ 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+2n+1}}{1-2n^3}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^{10}+2}{(n^2+1)^5}$ 11) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+1}{2n}-\dfrac{2n-1}{4})$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot(2n+3)}{(n+2)\cdot(4n+1)}$ 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(2n+1)\cdot n}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$ 16) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n)$

Предел монотонной и ограниченной последовательности.

Если для всех значений n выполняется $a_{n+1}>a_n$, то последовательность a_n называется возрастающей, если выполняется $a_{n+1}<a_n$, то последовательность называется убывающей. Например, последовательность $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ является возрастающей. На самом деле,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)}=\frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)}>0.$$

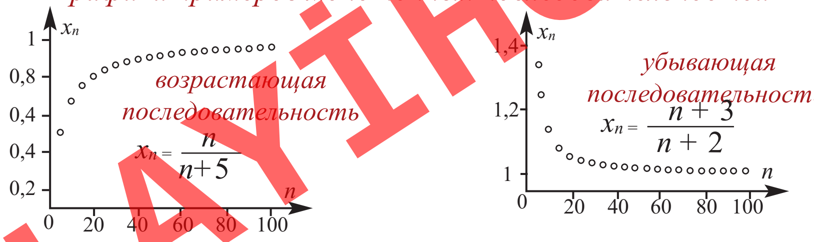
А последовательность $c_n=\dfrac{n}{3^n}$ убывающая. Все члены данной последовательности положительны и

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}=\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{1}{n})\le\frac{2}{3}<1.$$

Тогда получим, что $c_{n+1}<c_n$.

Возрастающая или убывающая последовательность называется монотонной.

Графики примеров монотонных последовательностей



Если для чисел m и M, последовательность a_n удовлетворяет неравенству $m\le a_n\le M$ $(n\in N)$, то она является ограниченной последовательностью.

Теорема Вейерштрасса. Для любой монотонной и ограниченной последовательности существует предел.

Второй замечательный предел

Для любого общего члена $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$ можно показать, что последовательность монотонно возрастающая и ограниченная. Значит, эта последовательность имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e: $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$. Здесь $e = 2{,}718281828459045....$

Примечание: при вычислении многих пределов, связанных с числом e будем учитывать следующее. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,b} = a^b$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$

В отношении n натуральное число $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Можно показать,

что для любого действительного числа x выполняется отношение $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Если в последнем отношении выполнить замену $\frac{1}{x} = t$, то можно записать следующее $\lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. Используя данный предел можно показать следующее $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}}$.

Решение: $\lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \left(\lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Обучающие задания

6. Вычислите предел.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$

7. Покажите, что последовательность $a_n = \frac{n+3}{n}$ монотонно убывающая и ограниченная и ее предел равен 1.

8. Пусть вклад в размере 1 манат, помещен в банк под 100% годовых.

1. Какая сумма получится при следующих начислениях:
a) годовых, b) полугодовых, c) ежеквартальных, d) ежемесячных, e) ежедневных, f) ежеминутных.

2. Какая связь существует между следующей последовательностью и предыдущими вычислениями?

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, ...,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, ...$$

3. Существует ли связь данной последовательности с числом e ?

Обобщающие задания

1. Вычислите предел (если он существует)

1. $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+1)$ 2. $\lim\limits_{x\to 4}3(1-x)(2-x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+6}$

4. $\lim\limits_{t\to -4}\dfrac{t^2}{4-t}$ 5. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ 8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$ 9. $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{1}{4-h^2}$

10. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+4h^3}{h^2-h^3}$ 11. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ 12. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 15. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2-2t+1}{t^2-1}$

2. Исследуйте непрерывность функции.

1) $f(x)=x^2+4x-6$ 2) $f(x)=x^2+8x-10$ 3) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-4)}$

4) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+2)(x-5)}$ 5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 6) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$

7) $f(x)=\pi$ 8) $f(x)=c$

3. a) При больших значениях x рациональная функция ведет себя как частное старших членов многочленов в числителе и знаменателе. Такая функция также является моделью изменения рациональной функции в бесконечности. Определите модель следующих функций в бесконечности.

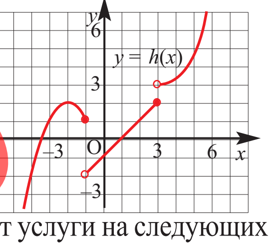
b) Найдите горизонтальную асимптоту (если это возможно).

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-1}{x^2+2x}$ 3) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x+3}{x-3}$

4. По графику (если это возможно) найдите:

a) $\lim\limits_{x\to -1^-}h(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^+}h(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1}h(x)$ d) $h(-1)$

e) $\lim\limits_{x\to 3^-}h(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 3^+}h(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 3}h(x)$ h) $h(3)$



5. Фирма по перевозке пассажиров из аэропорта предлагает услуги на следующих условиях: за первый километр - 3 маната 60 гяпиков; за каждый следующий километр - 1 манат 25 гяпиков. Такси, от аэропорта, проделало путь 8 км.

a) Изобразите график, отражающий зависимость стоимости поездки от расстояния.

b) Исследуйте функцию, соответствующую данной ситуации, на непрерывность.

6. Докажите геометрически, что периметры правильного 4-х угольника, 8-ми угольника, 10-ти угольника и т.д., вписанных в одну и ту же окружность образуют возрастающую и ограниченную последовательность.

4 Уравнение прямой и плоскости

- Уравнения прямой в системе координат на плоскости
- Уравнения прямой в пространственной системе координат
- Взаимное расположение прямых в пространстве
- Уравнение плоскости
- Взаимное расположение плоскостей
- Уравнение сферы
- Преобразование в пространстве и на плоскости

Математический словарь

уравнение прямой на плоскости
уравнение прямой в пространстве
скалярное уравнение прямой
векторное уравнение прямой
параметрическое уравнение прямой
каноническое уравнение прямой
уравнение плоскости
уравнение сферы

Уравнения прямых на плоскости

В двухмерной системе координат прямую можно определить при помощи углового коэффициента и точки пересечения с осью y. Угловой коэффициент показывает направление прямой, точка пересечения с осью y дает возможность среди всех прямых с одинаковым угловым коэффициентом определить точное месторасположение именно этой прямой. А как можно определить прямую в трехмерной системе координат?

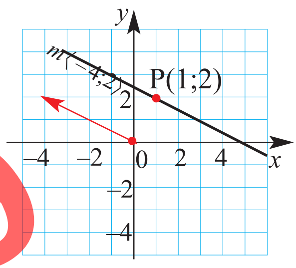
Уравнение прямой на плоскости выражается в виде $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$. Это уравнение также называется **скалярным уравнением** прямой. Прямая также может быть задана векторным уравнением и это имеет большое практическое значение. Чтобы задать прямую векторным уравнением надо знать либо координаты двух точек, принадлежащих прямой, либо одной точки, и направление прямой, вектор направления. Отличный от нуля вектор, параллельный (коллинеарный) данной прямой является вектором направления $\vec{m}\langle a; b\rangle$, начало которого совпадает с началом координат, а конец совпадает с точкой $(a; b)$. Произведение вектора $\vec{m}$ на произвольное число $k \neq 0$ т.е. вектор $k\vec{m}$ также является вектором направления для данной прямой (почему?).

Пример 1. Вектор направления.

a) Вектор $\vec{m}\langle -4; 2\rangle$ является вектором направления прямой, проходящей через точку P(1;2). Постройте график прямой.

b) Определите вектор направления для прямой, проходящей через точки $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ и $\mathrm{B}\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ и выразите компоненты целыми числами.

Решение: a) На координатной плоскости изобразим вектор $\vec{m}\langle -4;2\rangle$. Прямая, проходящая через точку P (1;2) и параллельная вектору $\vec{m}$ является искомой прямой.

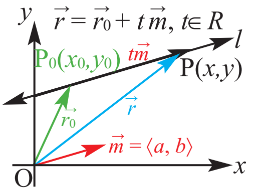


b) Вектор направления, проходящей через точки $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ $\mathrm{B}\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ будет либо вектор $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ либо вектор $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$. Найдем данные вектора.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left\langle \frac{3}{4} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - (-2)\right\rangle; \ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\left\langle \frac{1}{4}; \frac{5}{2}\right\rangle \text{ или } \overrightarrow{\mathrm{BA}}\left\langle -\frac{1}{4}; -\frac{5}{2}\right\rangle$$

По условию задачи компоненты вектора направления должны быть целыми числами. Произведением вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ или $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ на скалярное число также является вектором направления для прямой, проходящей через заданные точки. Наиболее подходящим выбором будет произведение компонент вектора направления на 4, т.е. $4\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ или $4\overrightarrow{\mathrm{BA}}$. Для данной прямой $\vec{m}_1(1;10)$ и $\vec{m}_2(-1;-10)$ являются векторами направления.

Векторное уравнение прямой



Пусть, на координатной плоскости задана прямая, проходящая через точку $P_0(x_0;y_0)$ и вектор направления $\vec{m}\langle a;b\rangle$. Выберем на этой прямой какую-либо точку $P(x;y)$. Изобразим радиус векторы $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$, соответствующие точкам $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$. Для записи векторного уравнения прямой l, используем правило треугольника. Из треугольника OP_0P

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P},\ \ \overrightarrow{OP} = \vec{r},\ \ \overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0},\ \overrightarrow{P_0P} = t\vec{m}$$

учитывая это, получи векторное уравнение прямой

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{m}$$

здесь t параметр. При изменении значений t, можно получить координаты новых точек вектора $\vec{r}$, расположенного на прямой. Записав векторы $\vec{r}\langle x; y\rangle$, $\vec{r_0}\langle x_0; y_0\rangle$ и $\vec{m}\langle a; b\rangle$ компонентами, можно записать векторное уравнение прямой в виде:

$$\langle x; y\rangle = \langle x_0; y_0\rangle + t\,\langle a; b\rangle, \qquad t \in R$$

В двухмерной системе координат векторное уравнение прямой:

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{m}$ или $\langle x; y\rangle = \langle x_0; y_0\rangle + t\,\langle a; b\rangle$

- $t \in R$
- $\vec{r}\langle x; y\rangle$ радиус - вектор, который определяет координаты любой точки на прямой.
- $\vec{r_0}\langle x_0; y_0\rangle$ радиус - вектор, который определяет координаты какой-либо известной точки на прямой.
- $m\,\langle a; b\rangle$ вектор, задающий направление прямой, вектор направления.

Пример 2. Векторное уравнение по двум точкам

a) Запишите векторное уравнение прямой, проходящей через две точки A(1; 4) и B(3; 1).

b) Запишите позиционные вектора, соответствующие четыремя точками на прямой, компонентами.

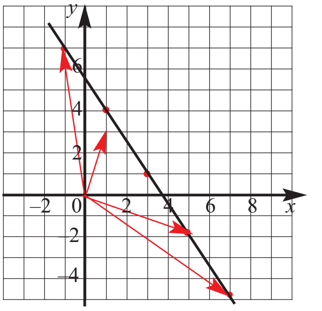
c) Используя точки A и B изобразите треугольник, определяющий векторное уравнение прямой.

d) Установите лежит ли точка (2;3)на данной прямой.

Решение: a) вектор, задающий направление прямой от точки A до точки B является вектором направления данной прямой. Найдем этот вектор:

$$\vec{m} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle 3;\ 1\rangle - \langle 1;\ 4\rangle = \langle 2;\ -3\rangle$$

Выберем позиционный вектор $\vec{r_0}$, соответствующий одной из точек A или B, например $\vec{r_0}\langle 3;\ 1\rangle$. Векторное уравнение прямой будет иметь вид:

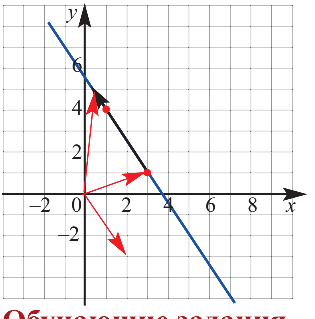


$\langle x; y\rangle = \langle 3; 1\rangle + t\,\langle 2; -3\rangle$.

b) задавая t различные значения можно определить координаты точек, расположенных на прямой. Пусть $t = 1$; $t = 2$; $t = -1$; $t = -2$, тогда

$\langle x; y\rangle = \langle 3; 1\rangle + \mathbf{1}\,\langle 2; -3\rangle = \langle 5; -2\rangle$
$\langle x; y\rangle = \langle 3; 1\rangle + \mathbf{2}\,\langle 2; -3\rangle = \langle 7; -5\rangle$
$\langle x; y\rangle = \langle 3; 1\rangle + \mathbf{(-1)}\,\langle 2; -3\rangle = \langle 1; 4\rangle$
$\langle x; y\rangle = \langle 3; 1\rangle + \mathbf{(-2)}\,\langle 2; -3\rangle = \langle -1; 7\rangle$

c) Изобразим треугольник, определяющий векторное уравнение прямой.



d) Если точка (2;3) находится на этой прямой, то определенное значение t должно удовлетворять уравнению $\langle 2;3\rangle = \langle 3; 1\rangle + t\,\langle 2; -3\rangle$. Убедимся в этом. Сначала найдем t, для координаты x. $2 = 3 + 2t$; $t = -\frac{1}{2}$.

а затем для координаты y: $3 = 1 - 3t$; $t = -\frac{2}{3}$.

Как видно, t получило разные значения. Точка (2;3) не расположена на данной прямой.

Обучающие задания

1. Запишите векторное уравнение прямой, проходящей через точку P_0 для заданной направляющего вектора.

a) $\vec{m}\,\langle 3; 1\rangle$, $P_0(2; 4)$ c) $\vec{m}\,\langle -3; 0\rangle$, $P_0(-1; -3)$

b) $\vec{m}\,\langle -1; 5\rangle$, $P_0(3; -2)$ d) $\vec{m}\,\langle 2; -1\rangle$, $P_0(5; 1)$

2. Запишите векторное уравнение прямой проходящей через две точки.

a) A(2; 3), B(4; 1) c) A(1; –1), B(1; –1)

b) A(–3; 1), B(–3; –5) d) A(4; 1), B(9; 3)

3. Изобразите треугольник задающий векторное уравнение прямой.

$\langle x; y\rangle = \langle 2; -2\rangle + t\langle 5; 6\rangle$ $\langle x; y\rangle = \langle -2; 4\rangle + t\langle -1; 6\rangle$

$\langle x; y\rangle = \langle -3; -2\rangle + t\langle 4; -6\rangle$ $\langle x; y\rangle = \langle 5; 8\rangle + t\langle -3; -7\rangle$

4. Установите, принадлежат ли следующие точки прямой, заданной уравнением $\langle x; y\rangle = \langle 3; 1\rangle + t\langle -2; 5\rangle$.

a) P(–1; 11) b) P(9; –15) c) P(–2; 3) d) P(–9; 21)

Параметрическое уравнение прямой в двухмерной системе координат

Записав векторное уравнение прямой в виде $\langle x; y\rangle = \langle x_0; y_0\rangle + t\,\langle a; b\rangle \quad t\in R$

$\langle x; y\rangle = \langle x_0; y_0\rangle + \langle ta; tb\rangle = \langle x_0 + ta; y_0 + tb\rangle$

относительно координат делится на два уравнения.

$$x = x_0 + t\,a$$
$$y = y_0 + t\,b, \qquad t\in R$$

В таком виде уравнение прямой называют **параметрическим уравнением**

Здесь $\langle a; b\rangle$ направляющий вектор прямой, t - параметр, зависящий от переменных x и y.

При решении параметрического уравнения прямой относительно t можно получить уравнение прямой в Декартовой системе координат.Такое уравнение называется **каноническим** или **симметрическим уравнение.**

Каноническое уравнение прямой $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$

Пример. Прямая l задана уравнениями $x = 3 + 2t,\ y = -5 + 4t$.

a) Запишите координаты двух точек, расположенных на прямой.

b) Запишите векторное уравнение прямой.

c) Запишите скалярное уравнение прямой.

d) Установите параллельна ли данная прямая l прямой, заданной в параметрическом виде $x = 1 + 3t,\ y = 8 + 12t$.

Решение: a) найдем точки, соответствующие значениям $t = 0$ и $t = 1$:

при $t = 0 \qquad x = 3, y = -5; \qquad$ при $t = 1 \qquad x = 5, y = -1.$

Т.е. точки $(3; -5)$ и $(5; -1)$ расположены на заданной прямой.

b) Выберем радиус - вектор $\vec{r_0}\langle 3; -5\rangle$ соответствующий точке $(3; -5)$.

Тогда векторное уравнение прямой, соответствующий вектору $\vec{m}\langle 2; 4\rangle$ имеет вид: $\langle x; y\rangle = \langle 3; -5\rangle + t\,\langle 2; 4\rangle,\ t\in R$.

c) Найдя из каждого параметрического уравнения переменную t и приравняв выражения получим скалярное уравнение прямой:

$$x = 3 + 2t, \quad y = -5 + 4t \qquad t = \frac{x - 3}{2}, \quad t = \frac{y + 5}{4}, \qquad \frac{x - 3}{2} = \frac{y + 5}{4},$$

$$4x - 12 = 2y + 10, \quad 4x - 2y - 22 = 0, \qquad 2x - y - 11 = 0.$$

Уравнение $2x - y - 11 = 0$ является скалярным уравнением прямой.

d) Если заданные прямые параллельны, то их направляющие вектора $\langle 2; 4\rangle$ и $\langle 3; 12\rangle$ должны быть коллинеарны.

Так как $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{4}{12}$ то прямые не параллельны.

5. Для каждого векторного уравнения, запишите параметрическое уравнение прямой.

a) $\langle x; y\rangle = \langle 10; 4\rangle + t\langle 8; 3\rangle$ c) $\langle x; y\rangle = \langle 6; -1\rangle + t\langle 4; 3\rangle$

b) $\langle x; y\rangle = \langle 0; -5\rangle + t\langle -2; -3\rangle$ d) $\langle x; y\rangle = \langle 3; 0\rangle + t\langle 5; 0\rangle$

6. Для параметрического уравнения, запишите соответствующее векторное уравнение.

a) $x = 2 + 5t$, $y = 4 - 3t$ b) $x = 9t$, $y = 11 + 2t$ c) $x = -2 - 3t$, $y = 8 + 2t$ d) $x = 2 - 11t$, $y = -2t$

7. Определите принадлежит ли точка B$(-13, -1)$ прямым, заданным в параметрической форме $x = 2 - 5t$ и $y = -4 + t$.

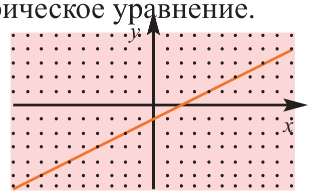
8. Запишите параметрическое и векторное уравнения прямой, перпендикулярной прямой $\langle x; y\rangle = \langle 3; -4\rangle + t\langle -5; 1\rangle$ и проходящей через точку P(2, 3).

9. a) Запишите векторное уравнение прямой, перпендикулярной прямой $4x - 3y = 9$ на плоскости и проходящей через точку $(1; -2)$.

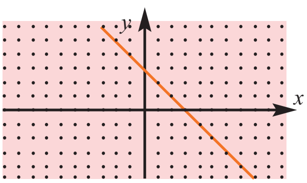
b) Запишите параметрическое уравнение прямой, параллельной оси x на плоскости и проходящей через точку $(3; 8)$.

10. Для заданных прямых запишите соответствующие векторное и параметрическое уравнение.

a)



b)



11. Постройте графики прямых, заданных уравнением.

a) $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 6 + 2t \end{cases}$ b) $\vec{r} = \langle -3; -4\rangle + t\langle 5; 2\rangle$

12. Покажите, что точка $(1; 4)$ принадлежит как прямой $\vec{r} = \langle 3; 9\rangle + t\langle 2; 5\rangle$, так и прямой $\vec{r} = \langle -5; 6\rangle + u\langle 3; -1\rangle$. Найдите с точностью до одного градуса угол, образованный при пересечении данных прямых.

13. Покажите, что точки P(9; 8) и Q(17; 28) расположены на прямой, проходящей через точку A(7;3) и имеющий направляющий вектор $\langle 2; 5\rangle$.

14. Установите, какие из заданных прямых параллельны, а какие перпендикулярны.

a) $x = 1 - 3t$, $y = 7 + 4t$ və $x = 2 - 4s$, $y = -3s$

b) $\vec{r} = \langle 1; 7\rangle + t\langle -3; 4\rangle$ və $\vec{r} = \langle 2; 0\rangle + s\langle 3; -4\rangle$

c) $\vec{r} = \langle 1; 7\rangle + t\langle -3; 4\rangle$ və $\vec{r} = \langle 2; 0\rangle + s\langle 4; -3\rangle$

Прямая задается скалярным уравнением.

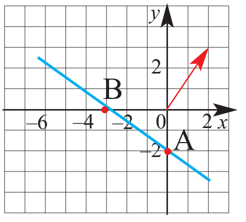
Пример. Прямая $2x + 3y + 6 = 0$ задана скалярным уравнением.

a) Постройте график прямой.

b) Найдите радиус-вектор, перпендикулярный прямой.

c) Исследуйте связь между радиус-вектором и скалярным уравнением.

d) Запишите векторное уравнение прямой.



Решение:

a) Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x = 0$ получаем $y = -2$; $(0; -2)$;

При $y = 0$ получаем $x = -3$; $(-3; 0)$

b) Найдем для прямой направляющий вектор.

$\vec{m} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle 0;-2\rangle - \langle -3;0\rangle = \langle 3;-2\rangle$

Вектор $\vec{m}\,\langle 3;-2\rangle$, перпендикулярный вектору $\vec{d}\langle x; y\rangle$ должен удовлетворять условию $\langle 3;-2\rangle\,\langle x; y\rangle = 0$ или $3x - 2y = 0$. Вектор $\vec{d}\langle 2;3\rangle$ перпендикулярен прямой.

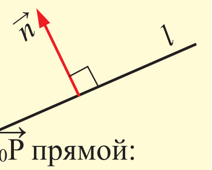
c) Как видно, компоненты вектора $\vec{d}$ соответствуют коэффициентам переменных x и y скалярного уравнения прямой.

d) Чтобы записать векторное уравнение прямой необходимы компоненты направляющего вектора и позиционный (радиус) вектор.

Векторное уравнение данной прямой будет $\langle x; y\rangle = \langle -3;0\rangle + t\,\langle 3;-2\rangle$, $t \in R$.

Вектор, перпендикулярный прямой называется **нормальным вектором**. Для прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$ нормальным вектором является вектор $\vec{n}\langle a;b\rangle$.

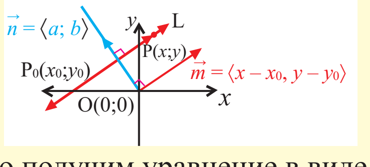
Используя свойства нормалей прямых можно получить скалярное уравнение $ax + by + c = 0$.



Пусть точка $P_0(x_0; y_0)$ заданная точка на прямой, а точка $P(x; y)$ произвольная точка на прямой, а вектор $\vec{n}\langle a;b\rangle$ – нормаль прямой.

Сначала найдем компоненты направляющего вектора $\overrightarrow{P_0P}$ прямой: $\overrightarrow{P_0P}\langle x - x_0; y - y_0\rangle$. На рисунке, этот вектор показан как вектор $\vec{m}\langle x - x_0; y - y_0\rangle$. Так как вектора $\vec{n}$ и $\overrightarrow{P_0P}$ перпендикулярны, то

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$



$\langle a;b\rangle \cdot \langle x - x_0; y - y_0\rangle = 0,$

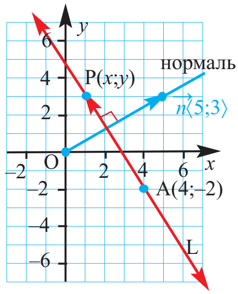
$ax - ax_0 + by - by_0 = 0,$

$ax + by - by_0 - ax_0 = 0$

Если ввести обозначение $-by_0 - ax_0 = c$, то получим уравнение в виде $ax + by + c = 0$.

Пример. Запишите скалярное уравнение прямой l проходящей через точку A(4; –2) и имеющий нормаль $\vec{n} = \langle 5; 3\rangle$.

Решение: сначала можно решить задачу графически, изобразив на координатной плоскости вектор $\vec{n} = \langle 5; 3\rangle$ и перпендикулярную ему прямую, проходящую через точку A(4; –2). Теперь запишем требуемое уравнение.



1-ый способ.

Пусть, на прямой l имеется точка P(x;y), отличная от заданной точки A. Тогда, прямая l коллинеарна вектору $\overrightarrow{AP}$ и можно записать следующее:

$\overrightarrow{AP} = \langle x - 4; y - (-2)\rangle = \langle x - 4; y + 2\rangle$.

Так как вектора $\vec{n}$ и $\overrightarrow{AP}$ перпендикулярны, то $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$\langle 5; 3\rangle \cdot \langle x - 4; y + 2\rangle = 0$ $\quad$ $5(x - 4) + 3(y + 2) = 0$

$5x - 20 + 3y + 6 = 0$ $\quad$ $5x + 3y - 14 = 0$

2-ой способ.

Для вектора $\vec{n} = \langle 5;3\rangle$ уравнение Ax + By + C = 0 можно записать в виде $5x + 3y + C = 0$. Так как точка A(4; –2) находится на прямой, получаем $5\cdot 4 + 3\cdot(-2) + C = 0$, $C = -14$, $\quad 5x + 3y - 14 = 0$.

Обучающие задания

15. Запишите уравнение прямой с нормалью $\langle 4; 3\rangle$ и проходящей через точку A(–2; 5) в виде Ax + By + C = 0 .

16. Запишите уравнение прямой, перпендикулярной $2x - 4y + 5 = 0$ и проходящей через точку P(–1; 1).

17. Угол между пересекающимися прямыми равен углу между их нормалями. Даны прямые $x - 3y + 6 = 0$ и $x + 2y - 7 = 0$

a) Изобразите графики этих прямых.

b) Найдите с точностью до одного градуса величины тупого и острого углов между ними.

18. Найдите угол между прямыми.

a) $\langle x; y\rangle = \langle 3; 6\rangle + t\langle 2; -5\rangle$ və $\langle x; y\rangle = \langle -3; 4\rangle - t\langle -4; -1\rangle$

b) $x = 2 - 5t,\ y = 3 + 4t$ və $x = -1 + t,\ y = 2 - 6t$

c) $y = 0{,}5x + 6$ və $y = -0{,}75x - 1$

d) $\langle x; y\rangle = \langle -1; -1\rangle + t\langle 2; 4\rangle$ və $2x - 6y = 8$

Уравнения прямой в пространстве

В трехмерной системе координат уравнение прямой также можно записать как в векторном, так и в параметрическом виде. Однако, в скалярном виде, его представить невозможно. В пространстве векторное уравнение прямой аналогично векторному уравнению на плоскости. Разница только в том, что в пространстве оно определено тремя компонентами.

Векторное уравнение прямой в пространстве имеет вид:
$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{m}$ və ya $\langle x; y; z\rangle = \langle x_0; y_0; z_0\rangle + t\,\langle a; b; c\rangle$, $t \in R$.
Здесь вектор $\vec{r_0}\,\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ позиционный вектор, расположенный на прямой и задающий координаты какой-либо точки, а вектор $\vec{m}\langle a, b, c\rangle$ направляющий вектор, параллельный прямой.
Параметрическое уравнение прямой в пространстве имеет вид:

$$x = x_0 + t\,a$$
$$y = y_0 + t\,b$$
$$z = z_0 + t\,c, \quad t \in R$$

Каноническое уравнение прямой в пространстве имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

здесь коэффициенты a, b, c - компоненты направляющего вектора $\vec{m}\langle a;b;c\rangle$

Пример. Прямая проходит через точки A(2; –1; 5) и B(3; 6; –4).
a) Запишите векторное уравнение прямой
b) Запишите параметрическое уравнение прямой
c) Установите принадлежит ли точка C(0; –5; 2) данной прямой.

Решение: Прямая проходит через точки A(2; –1; 5) и B(3; 6; –4).
a) Найдем направляющий вектор прямой:

$$\vec{m} = \vec{OB} - \vec{OA} = \langle 3; 6; -4\rangle - \langle 2; -1; 5\rangle = \langle 1; 7; -9\rangle$$

запишем радиус-вектор для одной из точек A и B

$$\langle x; y; z\rangle = \langle 2; -1; 5\rangle + t\,\langle 1; 7; -9\rangle, \quad t \in R$$

b) Параметрическое уравнение прямой:

$$x = 2 + t$$
$$y = -1 + 7t$$
$$z = 5 - 9t, \quad t \in R$$

c) Если подставить соответствующие координаты точки C(0; –5; 2) в параметрическое уравнение прямой, решить полученные уравнения относительно t и установить принадлежит, или нет, данная точка прямой.

$$0 = 2 + t; \qquad t = -2$$
$$-5 = -1 + 7t \qquad t = -\frac{4}{7}$$
$$2 = 5 - 9t \qquad t = \frac{1}{3}$$

Так как t принимает различные значения, то точка не принадлежит прямой.

Уравнения прямой в пространстве

Обучающие задания

19. Запишите векторное уравнение прямой, заданное параметрическими уравнениями.

a) $x = 5 - 5t$
$y = 1 - 2t$
$z = 2 + t$

b) $x = -2 - t$
$y = 1 + 0{,}5t$
$z = 2t$

c) $x = 5 - 7t$
$y = 3 + 11t$
$z = -1 + t$

20. Зная, что прямая проходит через точки A(–1; 2; 4) и B(5; –2; 3) запишите: a) векторное; b) параметрическое; c) каноническое уравнение.

21. Постройте график прямой.

a) $x = 2 - 3t$
$y = 0$
$z = 1 - t$

b) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{5}$

22. Установите какие из прямых параллельны, а какие перпендикулярны.

a) $l_1: \langle x; y; z\rangle = \langle 3; -1; 8\rangle + t\langle 4; -6; -15\rangle$
$l_2: \langle x; y; z\rangle = \langle 1; 1; 0\rangle + s\langle -8; 12; 30\rangle$

b) $l_1: \langle x; y; z\rangle = \langle 10; 2; -3\rangle + t\langle 5; 1; -5\rangle$
$l_2: \langle x; y; z\rangle = \langle 1; 1; 0\rangle + s\langle 1; 5; 2\rangle$

23. Найдите точки пересечения заданных прямых (если они существуют).

a) $l_1: \langle x; y; z\rangle = \langle 2; 2; 3\rangle + t\langle 1; 3; 1\rangle$
$l_2: \langle x; y; z\rangle = \langle 2; 3; 4\rangle + s\langle 1; 4; 2\rangle$

b) $l_1: \langle x; y; z\rangle = \langle -1; 3; 1\rangle + t\langle 4; 1; 0\rangle$
$l_2: \langle x; y; z\rangle = \langle -13; 1; 2\rangle + s\langle 12; 6; 3\rangle$

24. Запишите векторное и параметрическое уравнение прямой, соответствующее точкам позиционного (радиус) вектора.

a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 7\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ b) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

25. Запишите каноническое уравнение прямой, соответствующее заданной прямой.

a) $x = 5 - 8t, y = -3 + 5t, z = 2 + t$ b) $\langle x; y; z\rangle = \langle 0; -4; 1\rangle + t\langle 4; 1; 2\rangle$

c) Запишите каноническое уравнение прямой, проходящей через точки A(7; 2; 0) и B(5; 4; 1).

26. Для прямой, проходящей через точку (11; –4; 0) и параллельной вектору $\langle 3; 7; 2\rangle$ запишите: a) векторное; b) параметрическое; c) каноническое уравнение

27. Для заданной прямой запишите вектор направления.

a) $x = 9 - 3t, \quad y = -4 + 2t, z = 1 - t$

b) проходящий через точки (6; 4; 0) и (−2; −6; 1)

c) параллельный прямой $\vec{r} = \langle 1; 7; 0\rangle + t\langle 4; 3; -2\rangle$

Прикладные задания

Пример. Движение объекта на плоскости задано уравнением $\vec{r} = \langle 3;1\rangle + t\langle -2;\ 3\rangle$. Здесь t показывает время в часах, путь измеряется в километрах.

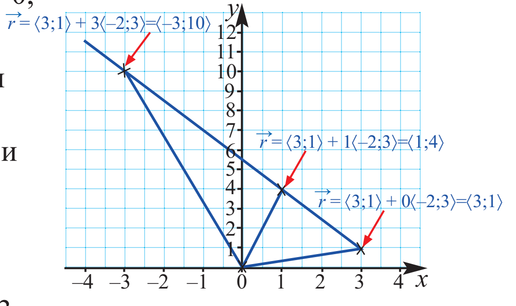
a) Найдите координаты объекта в момент $t = 0$.

b) Изобразите график движения объекта на координатной плоскости и отметьте место, где будет находится объект через 1 час, через 3 часа после начала движения.

c) Найдите вектор скорости.

d) Найдите сколько километров объект проходит за 1 час.

Решение: a) Координата объекта в $t = 0$, т.е в начале движения, равна (3; 1).



b) При помощи векторного уравнения можно найти координаты двух или более точек, принадлежащих прямой и построить график.

c) Вектор скорости равен $\langle -2;\ 3\rangle$. Это показывает, что объект за каждый час перемещается на 2 км на восток и на 3 км на север.

d) Скорость объекта $|v| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ (км/час)

28. В 12:00 дня самолет А пролетает около аэропорта со скоростью 800 км/час на высоте 12 км. Вектор направления самолета единичный вектор $\frac{1}{5}\langle 4;3;0\rangle$.

Указание: учтите, что $\langle 1;\ 0;\ 0\rangle$ показывает расположение на 1 км на восток, $\langle 0;1;0\rangle$ - на 1 км на север, а $\langle 0;\ 0;\ 1\rangle$ на 1 км вверх.

a) Примите место расположения аэропорта за начало координат и запишите векторное уравнение, которое позволит определять место расположения самолета через t часов.

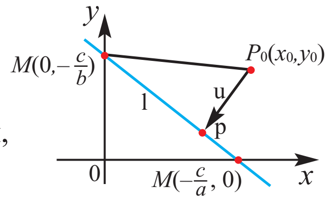
Указание: вектор скорости $800 \cdot \frac{1}{5}\langle 4;3;0\rangle$, радиус - вектор, соответствующий 12:00 будет $\langle 0;\ 0;\ 12\rangle$.

b) Определите координаты самолета через час после 12:00.

c) Самолет В , вектор скорости которого равен $\langle -480;\ -320;\ 0\rangle$, начал движение из точки соответствующей радиус - вектору $\langle 600;\ 480;\ 12\rangle$. Существует ли угроза столкновения данных самолетов?

29. Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Найдите расстояние от точки (1;3) до прямой, заданной уравнением $2x - y = 7$.

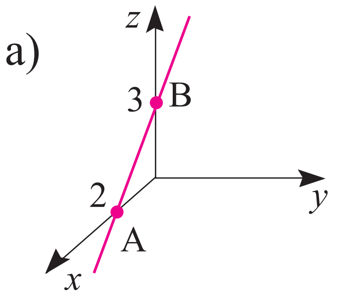
30. Из города выехал автомобиль. До первой развилки он проехал 4 км на восток и 3 км на север, двигаясь со скоростью 30 км/час. До второй развилки он проехал 8 км на восток и 6 км на север. Приняв место расположения города за начало координат найдите:

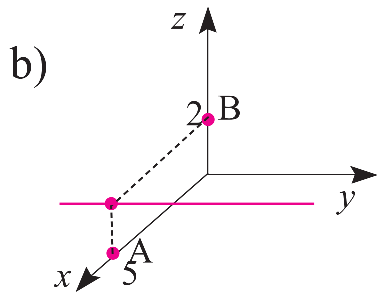
a) Вектор скорости автомобиля.

b) Векторное уравнение, которое показывает место, где находится автомобиль в момент t.

c) Через сколько времени автомобиль достиг развилки?

31. Запишите векторное и параметрическое уравнение прямых на рисунке.





32. Заданные уравнения определяют где будет находится автомобиль в любой момент времени t (здесь время в час., а расстояние в км).

a) $\langle x; y\rangle = \langle 5; -2\rangle + t\,\langle 24; -7\rangle$ b) $\langle x; y\rangle = \langle -3; 1\rangle + t\,\langle 5; -12\rangle$

a) Найдите место, где находился автомобиль в начале движения.

b) Найдите вектор скорости автомобиля.

c) Найдите, где будет находится автомобиль в $t = 10$ часам.

33. Перемещение автомобиля из точки A(24;96) в точку B задано вектором скорости $\vec{d}\langle 75;40\rangle$ (км/час).

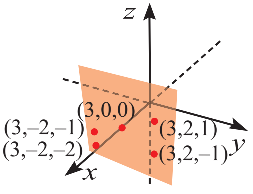
a) Запишите параметрическое уравнение движения автомобиля.

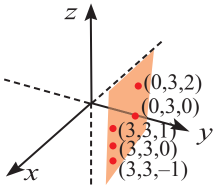
b) За сколько времени автомобиль доедет до точке P, находящейся на расстоянии 120 км на восток от точки A?

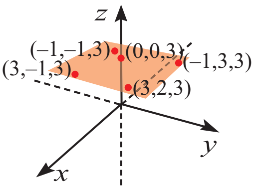
c) Найдите координаты точки P.

Исследование. Как известно, в двухмерной системе координат абсцисса каждой точки на прямой $x = 3$ равна 3. Т.е. координату любой точки, находящейся на прямой $x = 3$ можно выразить в виде $(3; y)$ $(y \in R)$.

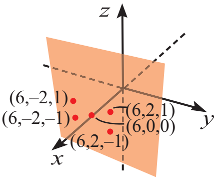
По рисунка исследуйте следующее:
1. Представьте и обобщите информацию о точках, указанных на каждом рисунке.
2. Определите какому рисунку соответствует каждое уравнение $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$, задающее плоскость.

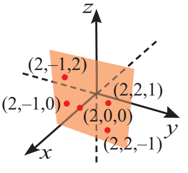


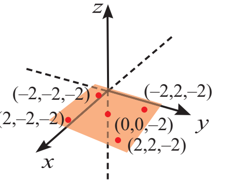




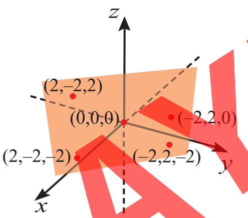
3. Теперь рассмотрим плоскости $x = 2$, $x = 6$ и $z = –2$.

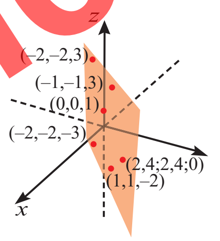






4. Изобразите график плоскости, соответствующий уравнению $y = 5$ и запишите координаты 6 точек, принадлежащих данной плоскости.
5. Как изменится плоскость, при изменении значений k в уравнениях $x = k$, $y = k$, $z = k$?
5. В чем схожесть координат точек на плоскостях представленных на следующих рисунках?
Есть ли связь между уравнениями $x + y = 0$ и $x – y = 0$ и координатами отмеченных точек на рисунке? Представьте данные плоскости.

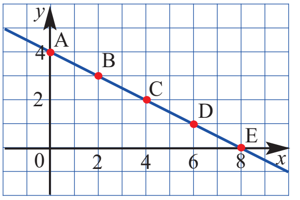




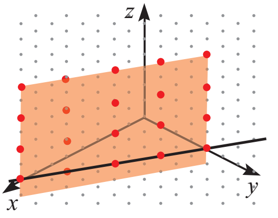
Изобразите графически плоскости $x + y = 5$ и $x – y = 2$ и отметьте несколько точек на этих плоскостях.

Уравнение плоскости

Уравнение прямой в двухмерной системе координат имеет вид $ax + by + c = 0$.

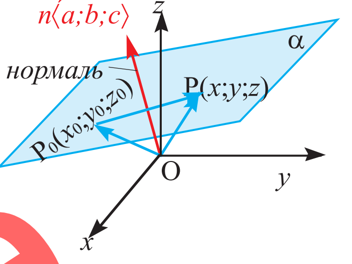


Например, уравнение $x + 2y - 8 = 0$ определяет прямую, проходящую через точки A(0; 4), B(2; 3), C(4; 2), D(6; 1) и E(8; 0). Мы можно написать уравнение данной прямой и в трехмерной системе координат: $x + 2y - 0z = 8$. Этому уравнению соответствуют точки: A(0; 4; z), B(2; 3; z), C(4; 2; z), D(6; 1; z) и E(8; 0; z). Здесь коэффициент координаты z равен нулю и может принимать различные значения. Отметив точки на изометрической бумаге в трехмерной системе координат, получим плоскость, параллельную оси z. Значит, уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.



Плоскость может быть определена различными способами.

- тремя неколлинеарными точками
- прямой и точкой не прнадлежащей этой прямой
- двумя пересекающимися прямыми
- двумя параллельными прямыми
- точкой и перпендикуляром, проведенным в заданном направлении



Используя последний способ, которым можно задать плоскость, покажем, что уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Пусть, дана плоскость α и точка $P_0(x_0; y_0; z_0)$, расположенная на этой плоскости. Вектор $\vec{n}\langle a; b; c\rangle$ нормальный вектор, проведенный к плоскости. Понятно, что нормальный вектор перпендикулярен к плоскости. Для определения уравнения плоскости возьмем какую-либо другую точку $P(x;y;z)$ и соединим точки P_0 и P. Прямая, перпендикулярная плоскости перпендикулярна каждой прямой, лежащей в данной плоскости. Значит $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$.

А это значит, что $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

Учитывая, что $\vec{n}\langle a; b; c\rangle$ и $\overrightarrow{P_0P}\langle x - x_0; y - y_0; z - z_0\rangle$ имеем:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Обозначим $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$,

тогда уравнение плоскости будет иметь вид

$$ax + by + cz = d.$$

Обратите внимание! Коэффициенты трех переменных в уравнении плоскости являются координатами нормали.

Пример 1. Плоскость с нормалью $\vec{n}\langle -1;\,3;\,4\rangle$, проходит через точку A(1; 2; 3). Запишите уравнение этой плоскости.

Решение: задание можно выполнить двумя способами.

1-ый способ. Возьмем произвольную точку P(x; y; z) на плоскости и запишем компонентами вектор, с началом в точке A и концом в точке P. Вектор будет иметь вид $\overrightarrow{AP} = \langle x-1;\, y-2;\, z-3\rangle$. Так как нормальный вектор имеет вид $\vec{n}\langle -1;\,3;\,4\rangle$, то $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$ или справедливо следующее

$\langle -1;\,3;\,4\rangle \cdot \langle x-1;\, y-2;\, z-3\rangle = 0$. Отсюда

$$-1(x-1)+3(y-2)+4(z-3)=0,$$
$$-x+1+3y-6+4z-12=0,$$
$$-x+3y+4z-17=0.$$

Умножив обе части уравнения на (–1), тогда уравнение данной плоскости будет иметь вид $x-3y-4z+17=0$.

2-ой способ. Известно, что уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$ и нормаль к плоскости имеет вид $\vec{n}=\langle a;\, b;\, c\rangle$. Значит, коэффициенты $a,\ b,\ c$ известны. Из вектора нормали $n\,\langle -1;\,3;\,4\rangle$ имеем:

$(-1)x+3y+4z+d=0$. Записав координаты точки A(1;2;3), принадлежащей плоскости в уравнение $-x+3y+4z+d=0$, найдем переменную d:

$-x+3y+4z+d=0$, $-1+3\cdot 2+4\cdot 3+d=0$; $d=-17$

и уравнение плоскости будет иметь вид:

$-x+3y+4z-17=0$ или $x-3y-4z+17=0$

Пример 2. Дано уравнение плоскости $x+2y-z-8=0$.

a) Определите принадлежат ли точки A(1; 3; –1), B(3,5; 1), C(–1; 3:1) плоскости.

b) Определите координаты точки пересечения плоскости с осями x, y, z.

c) Запишите координаты какой-либо другой точки, принадлежащей данной плоскости.

Решение:

a) Проверка:

A(1;3;–1)	B(1; 5; 3)	C(1;3;–1)
$x+2y-z-8=0$	$x+2y-z-8=0$	$x+2y-z-8=0$
$1+2\cdot 3+1-8=0$	$1+2\cdot 5-3-8=0$	$-1+2\cdot 3-1-8=-4$
Принадлежит плоскости	Принадлежит плоскости	Не принадлежит плоскости

b) Координаты точек пересечения с осями x, y, z:

в точке пересечения с осью x координаты y и z равны нулю

$x = 8$

(8; 0; 0)

в точке пересечения с осью y координаты x и z равны нулю

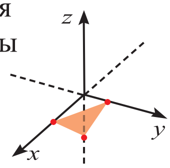
$y = 4$

(0; 4; 0)

в точке пересечения с осью z координаты x и y равны нулю

$z = –8$

(0; 0; –8)



c) Для определения другой координаты точки на заданной плоскости задайте любые значения двум переменным и найдите третью координату.

Например, при $x = 4$, $y = –5$ значение z находят так $4 + 2(–5) – z – 8 = 0$, $z = –14$. Значит, точка (4; –5; –14) принадлежит данной плоскости.

Обучающие задания

1. Определите принадлежат ли заданные точки плоскости $4x + 3y – 5z = 10$.

a) A(1; 2; 0) b) B(1,2; –2,4; 6,2) c) C(–7; 6; 4) d) D(–2; 1; –3)

2. Запишите координаты трех точек, расположенных на плоскости.

a) $x = 6$ b) $2x – 5y + z – 1 = 0$ c) $3x + 7y – 2z = 6$

3. a) Точка P(1;0;1) расположена на плоскости нормаль которой имеет вид $\vec{n}(2; 2; –1)$. Запишите уравнение данной плоскости.
b) Точка A(1;2;2) расположена на плоскости нормаль которой имеет вид $\vec{n}(–2; 2; 6)$. Запишите уравнение данной плоскости.

4. Плоскость, с нормалью $\vec{n}\,\langle –12; 8; 10\rangle$ проходит через начало координат. Запишите уравнение данной плоскости.

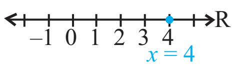
5. Плоскость задана уравнением $x – 7y – 18z = 0$.
a) Запишите вектор нормали к плоскости.
b) Обоснуйте, что данная плоскость проходит через начало координат.
c) Запишите координаты трех точек, расположенных на плоскости.

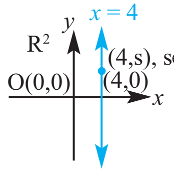
6. Точка A(2; 2; –1) и прямая $\vec{r} = \langle 1;1;5\rangle + t\langle 2;1;3\rangle$ лежат на плоскости.. Запишите уравнение данной плоскости.

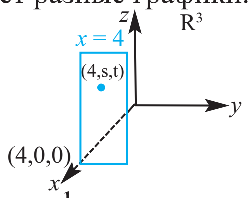
7. Запишите уравнение плоскости, которая проходит через середину отрезка соединяющего точки M(1; 3; 1) и N(2; –3; 0) и перпендикулярной данному отрезку. Принадлежит ли точка A(2; –1; 1) данной плоскости?

8. Задания, предназначенные для долгосрочного выполнения. Изображение плоскостей при помощи графиков.

Уравнение $x = 4$ в одномерной (действительные числа R^1), двухмерной (R^2) и трехмерной (R^3) системе координат имеет разные графики.







a) Установите для каждого случая соответствие графика и геометрической формы.

b) Аналогично задайте еще два уравнения и постройте их графики.

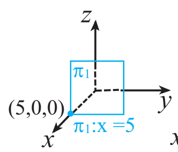
c) Изобразите в системе R^3 уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, выбрав для этого наиболее удобные координаты точек, расположенных на плоскости. Представьте для каждого отдельного случая в письменном виде как расположены графики в системе координат.

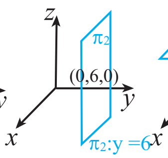
1. Уравнение плоскости определено одной переменной.

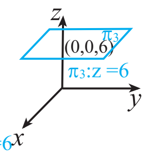
a) При $D = 0$ значения двух коэффициентов A, B или C равно нулю.

b) При $D \neq 0$ значения двух коэффициентов A, B или C равны нулю.

Примеры:





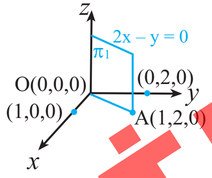


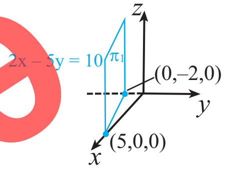
2. Уравнение плоскости, определено двумя переменными.

a) При $D = 0$ значения какого-либо из коэффициентов A, B или C равно нулю.

b) При $D \neq 0$ значения какого-либо из коэффициентов A, B или C равны нулю.

Примеры:



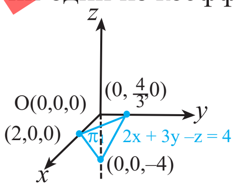


3. Уравнение плоскости, определено тремя переменными.

a) При $D = 0$ значения ни один из коэффициентов A, B или C не равно нулю.

b) При $D \neq 0$ значения ни один из коэффициентов A, B или C не равно нулю.

Пример:

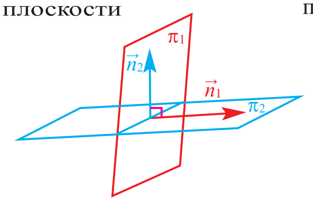


Параллельные и перпендикулярные плоскости

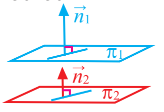
Если плоскости α и β перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормали: $\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

Если плоскости α и β параллельны, то параллельны и их нормали: $\pi_1 \parallel \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$

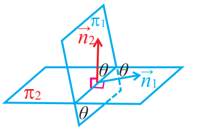
Перпендикулярные плоскости



Параллельные плоскости



Угол между двумя плоскостями



Для угол θ между двумя плоскостями π_1 и π_2 с нормалями $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ справедливо отношение $\cos\theta = \dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$.

Пример. Определение являются ли плоскости параллельными или перпендикулярными.

a) плоскость α задана уравнением $2x - 3y + z - 1 = 0$, а плоскость β задана уравнением $4x - 3y - 17z = 0$. Обоснуйте, что данные плоскости перпендикулярны.

b) плоскость α задана уравнением $2x - 2y - z + 3 = 0$, а плоскость β задана уравнением $2x - 2y - z - 1 = 0$. Обоснуйте, что данные плоскости параллельны.

Решение: для того, чтобы плоскости α и β были перпендикулярны скалярное произведение нормалей $\vec{n_\alpha}\langle 2;-3;1\rangle$ и $\vec{n_\beta}\langle 4;-3;-7\rangle$ плоскостей α и β должно равняться нулю.

$\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta} = \langle 2;-3;1\rangle\cdot\langle 4;-3;-7\rangle = 2\cdot 4 - 3(-3) + 1(-17) = 8 + 9 - 17 = 0$

Значит, плоскости α и β перпендикулярны: $\alpha \perp \beta$

b) Нормали плоскостей α и β равны: $\vec{n_\alpha} = \vec{n_\beta} = \langle 2;-2;1\rangle$. Если для данных плоскостей постоянная D имеет различное значение, то это значит, что плоскости не лежат друг на друге, т.е. они параллельны.

Обучающие задания

9. Точка P (1;2:–3) находится на плоскости с нормалью $\vec{n}\langle 3; 2; 5\rangle$.

a) Запишите уравнение плоскости.

b) В уравнении $2x - 2y - cz - 1 = 0$ подберите такое значение коэффициента *c*, чтобы плоскости были перпендикулярны.

c) Какой-либо вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости если $\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$. Определите параллелен ли вектор $\vec{a}\langle 4, 1, 2\rangle$ плоскости?

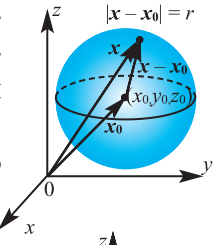
10. При каком значении *k* плоскости заданные уравнениями $4x + ky - 2z + 1 = 0$ и $2x + 4y - z + 4 = 0$: a) параллельны; b) перпендикулярны?

11. Найдите угол между плоскостями заданными уравнениями $x - y - 2z + 3 = 0$ и $2x + y - z + 2 = 0$

Уравнение сферы

Выведем уравнение сферы в двухмерной системе координат.

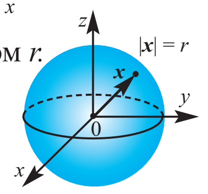
Сферой называется множество все точек, расположенных на расстоянии r от точки $P_0(x_0; y_0; z_0)$. Расстояние r от точки P_0, , центра сферы, до сферы называется радиусом.



Если точка $P(x; y; z)$ - произвольная точка сферы, то по формуле расстояния между двумя точками:

$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$.

Это уравнение сферы с центром в точке P_0 и радиусом r.

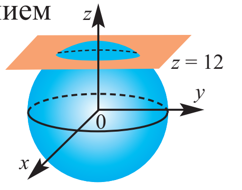


Если центр сферы находится в начале координат, то уравнение сферы радиуса r имеет вид

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Как видно из рисунка, пересечение этой сферы с координатной плоскостью Oxy является его большим сечением

$$r^2 = x^2 + y^2$$



Пример. Запишите уравнение фигуры, выражающей пересечение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ с плоскостью $z = 12$.

Решение: радиус сферы $\sqrt{169} = 13$. Учитывая в уравнении сферы, что $z = 12$ получим : $x^2 + y^2 + 12^2 = 169$; $x^2 + y^2 = 169 - 144 = 25$

Пересечение плоскости $z = 12$ и данной сферы является окружность $x^2 + y^2 = 25$ с центром в точке (0; 0; 12) и радиусом $r = 5$.

Обучающие задания

1. a) Запишите уравнение сферы радиусом 4, центр которой находится в начале координат.

b) Запишите уравнение сферы радиусом 6, центр которой находится в точке M(1; –2; 4).

2. Найдите точки пересечения сферы, заданной уравнением $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36$с осями координат.

3. Запишите уравнение сферы, с центром в точке (2; 3; –1), проходящей через точку (4; –1; 1).

4. Найдите расстоянии от точки A(1; 2; 3) до сферы, заданной уравнением $(x - 9)^2 + (y + 7)^2 + (z + 9)^2 = 36$.

5. Определите являются ли следующие уравнения уравнением сферы. Если уравнение является уравнением сферы, то найдите ее центр и радиус.

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 37 = 0$ $\quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 4z - 44 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 8z + 19 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - z^2 + 12x + 2y - 4z + 32 = 0$

6. Найдите центр и радиус сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 16y + 10z + 54 = 0$. Вычислите расстояние от точки A(8; 0; 7) до сферы.

7. Плоскость, касающаяся сферы, перпендикулярна радиусу, проведенному из точки касания. Запишите уравнение сферы радиусом 7, если плоскость $z = 0$ касается сферы в точке A(3; 4; 0).

8. Изобразите геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют условию.

a) $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ $\quad$ b) $x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0$

9. Расположите точку P так, чтобы расстояние от точки A(−1, 5, 3) было в два раза больше расстояния до точки B(6, 2, −2). Покажите, что множество данных точек является сферой.

10. Запишите уравнение сферы центр которой находится в точке (2;–3;6) и касающейся плоскостей a) xy; b) yz; c) xz.

11. Запишите уравнение сферы, один из диаметров которой проходит через точки (2;1;4) и (4;3;10).

12. a) Запишите уравнение сферы, центр которой находится в точке (6, 8, −5) и радиус равен 6.
b) Представьте пресечение этой сферы с осями координат.

13. Если $\vec{r} = \langle x; y; z \rangle$, $\vec{a} = \langle 2; 1; -1 \rangle$ и $\vec{b} = \langle 1; 1; 0 \rangle$, то покажите, что равенство $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} - \vec{b}) = 0$ выражает сферу и найдите ее центр.

14. В пространстве четыре сферы, имеющие одинаковые радиусы, касаются друг друга. Найдите центр и радиус четвертой сферы, если центры трех из них находятся в точках $(\sqrt{2}; 0; 0)$,$(0; \sqrt{2}; 0)$, $(0; 0; \sqrt{2})$, а центр четвертой находится в точке P $(-a; -a; -a)$ и расположен в октанте с отрицательными знаками $\{x < 0, y < 0, z < 0\}$.

Ремесленники и художники создают узоры, заполняя некоторую площадь без пробела рисунком при помощи преобразований (параллельный перенос, поворот, отображение) или увеличения или уменьшения этого рисунка (гомотетия).

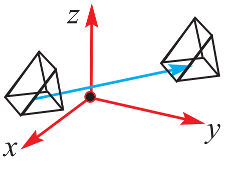
Нахичевань. Примеры образцов на камне

Китайская тарелка

Это знать интересно. Великий голландский художник Эшер, объединив такие разделы математики как симметрия, комбинаторика, стереометрия и топология, создал динамические рисунки, заполнения плоскости цветовыми оттенками. Не имея специального математического образования Эшер создавал свои произведения опираясь на интуицию и визуальные представления. Ряду работ, построенных на параллельном переносе, он дал название "Правильное движение плоскости". ***https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher***

М.К.Эшер **Пределы окружности IV**

Если, каждой точке P фигуры F в пространстве, по определенному правилу, ставится в соответствие единственная точка P', то это называется преобразованием фигуры F в пространстве. Преобразование, сохраняющие расстояние между точками, называется **движением.** Движение преобразовывает плоскость в плоскость, прямую в прямую, отрезок в отрезок, а угол - в конгруэнтный ему угол. Значит, движение преобразовывает фигуру в конгруэнтную себе фигуру.

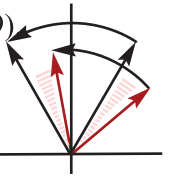


Известно, что в двухмерной системе координат за преобразование каждой точки $(x;\ y)$ в точку $(x+a;\ y+b)$, т.е. за параллельный перенос отвечает вектор $\langle a;\ b\rangle$. Аналогичным образом, в пространстве при параллельном переносе координаты каждой точки изменяется так: $(x; y; z) \to (x+a; y+b; z+c)$.

Параллельный перенос является движением. Каждому параллельному переносу соответствует один вектор. Справедливо и обратное.

Пример 1. В какую точку переходит точка A(–4; 5; 6) при параллельном переносе на вектор $\vec{p}\langle 2; -1; 3\rangle$?

Решение: По определению, при данном преобразовании координаты точки A преобразуются в координаты точки A' следующим образом: $x' = -4 + 2 = -2$; $y' = 5 - 1 = 4$; $z' = 6 + 3 = 9$. Т.е. при этом параллельном переносе точка A(–4; 5; 6) преобразуется в точку A'(–2; 4; 9).

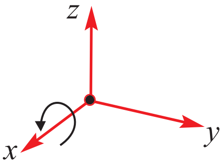


В двухмерной системе координат поворот определяется центром и углом поворота. Все координаты фигуры изменяются следующим образом:

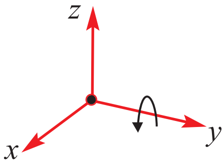
$(x; y) \to (x\cos\theta + y\sin\theta; -x\cos\theta + y\sin\theta)$.

Для представления поворота фигуру помещают в начало координат. Если заданная фигура не расположена в начале координат, то при помощи параллельного переноса ее располагают в начале координат, выполняют поворот фигуры, а затем вновь перемещают на прежнее место.
Поворотом фигуры в пространстве вокруг прямой l на угол θ называется такое преобразование, при котором каждая плоскость перпендикулярная прямой l поворачивается в одном направлении на угол θ, вокруг точек пересечения прямой l с плоскостью. Прямая l называется осью симметрии, угол θ называется углом поворота.

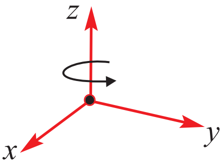
Примеры движения при повороте в пространстве.



поворот относительно оси x в направлении против часовой стрелки

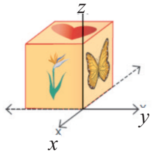


поворот относительно оси y в направлении против часовой стрелки

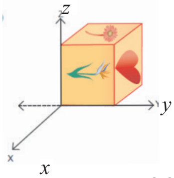


поворот относительно оси y в направлении против часовой стрелки

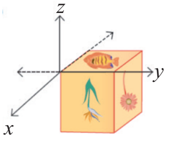
Ниже на рисунках представлены примеры различных изображений поворота куба вокруг оси x в направлении по часовой стрелке на угол 90°, 180°, 270°.



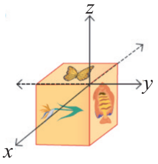
начальное положение



поворот на 90°

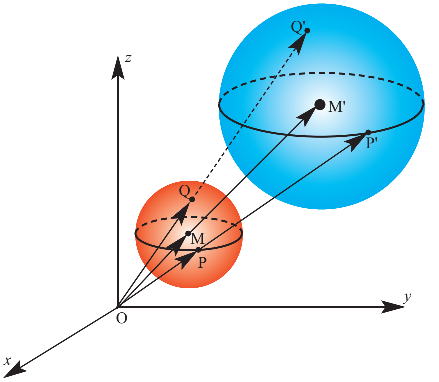


поворот на 180°



поворот на 270°

Аналогичным образом вводится понятие преобразования подобия для пространства. Если при преобразовании фигуры, расстояние между двумя точками X и Y изменяется в $k>0$ раз, то такое преобразование называется преобразованием подобия. Здесь число k называется коэффициентом подобия.
Если, для любой точки X фигуры F, при преобразовании ее в точку X′, выполняется равенство $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, то это преобразование называется **гомотетией** с центром в точке O и с коэффициентом k ($k \neq 0$). Гомотетия преобразования подобия. В частном случае при $k = -1$ получаем центральную симметрию относительно O, при $k=1$ подобные преобразования.

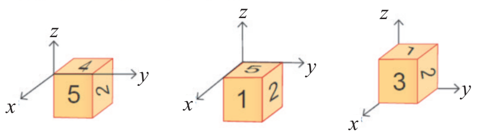


Пример. Пусть дана сфера с центром в точке M(1;3;3) и радиусом 2. Запишите уравнение сферы, полученной гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом k=3.

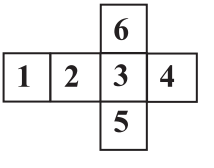
Решение: радиус- вектор, соответствующий точке M равен $\overrightarrow{OM}\langle 1;\ 3\ ;\ 3\rangle$. Пусть радиус- вектор, соответствующий точке M′ будет $\overrightarrow{OM'}\langle x';\ y';\ z'\rangle$. Тогда, по определению, $\overrightarrow{OM'} = k\cdot\overrightarrow{OM}$ или $\langle x';\ y';\ z'\rangle = 3\cdot\langle 1;\ 3\ ;\ 3\rangle = \langle 3;\ 9;\ 9\rangle$.
Тогда $x'=3,\ y'=9,\ z'=9$. Т.е. центр данной сферы будет точка M′(3; 9; 9). Зная, что радиус данной сферы равен R = M′P′ = 3MP = 3·2 = 6 , получим уравнение сферы $(x-3)^2+(y-9)^2+(z-9)^2=36$.

Обучающие задания

1. На рисунке показан последовательно выполненные повороты куба относительно оси y в направлении по часовой стрелке на угол 90°, 180°, 270° . Изобразите начальное положение куба.



2. По рисунку развертки куба изобразите поворот куба вокруг оси x в направлении против часовой стрелки на угол 90°, 180°, 270°.



3. При параллельном переносе точка A(2; 0; –1) преобразовывается в точку A'(4; –3; 5). В какую точку при этом же параллельном переносе преобразовывается: a) начало координат; b) точка B(–3; 1; 0)?

4. В какую точку преобразовывается точка A(0; –3; 2) при гомотетии с центром в точке P(1; 2; 3) и коэффициентом гомотетии k = 3.

5. Изобразите куб длина ребер которого равна единице, одна из вершин совпадает с началом координат, а другие вершины расположены на положительных направлениях осей координат. Запишите координаты вершин куба, полученного при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии равным k=2.

Обобщающие задания

1. Запишите векторное и параметрическое уравнение прямой $y = \frac{3}{4}x + 2$ и постройте ее график.

2. Дано векторное уравнение прямой $\langle x; y\rangle = \langle 3; -6\rangle + t\langle -1; -4\rangle$. Запишите уравнение данной прямой в виде $y = kx + b$.

3. Запишите векторное и параметрическое уравнение прямой.
a) Проходит через точку $P_0(9; 1; -2)$, параллельно прямым $\langle x; y; z\rangle = \langle 4; 1; 8\rangle + s\langle 1; -1; 1\rangle$ и $\langle x; y; z\rangle = \langle -5; 0; 10\rangle + t\langle -6; 2; 5\rangle$.
b) Проходит через точки A(1; 3; –2), B(3; –9; 7) и C(4; –4; 5) и пересекает ось x в точке $x =$ 8, ось y в точке $y = 3$ и ось z в точке $z = 2$.

4. Найдите точку, расположенную на плоскости Oyz и равноудаленную от точек A(2; 0; 3), B (0; 3; 2) и C (0; 0; 1).

5. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку (−2; 1; 4) и параллельной вектору $3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$.

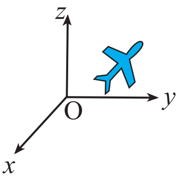
6. Покажите, что точки (5; –1; 1), (7; – 4; 7), (1 ;– 6; 10) и (–1;– 3; 4) являются вершинами ромба.

7. Определите параллельны или перпендикулярны вектора $\vec{a}\langle 12; -20; 16\rangle$ и $\vec{b}\langle 12; -20; 16\rangle$.

8. Запишите уравнение сферы с центром в точке (2; 3; −1)и проходящей через точку (4; −1; 1).

9. Плоскость задана уравнением $x = 0$.
a) Запишите вектор нормали к плоскости.
b) Обоснуйте, что данная плоскость проходит через начало координат.
c) Запишите три точки, принадлежащие данной плоскости.

10. Движение самолета в пространстве задано уравнениями $x = 1 - s$, $y = 2 - 2s$, $y = 1 + 4s$. Запишите три координаты, расположенные на пути самолета.



11. Движение корабля задано векторным уравнением вида $\vec{r}(t) = (t + 1)\vec{i} + 6\vec{j}$, $t \geq 0$. Здесь расстояние измеряется в метрах.
Найдите на каком расстоянии от начала координат будет находится корабль в момент $t = 5$.

5 Производная функции

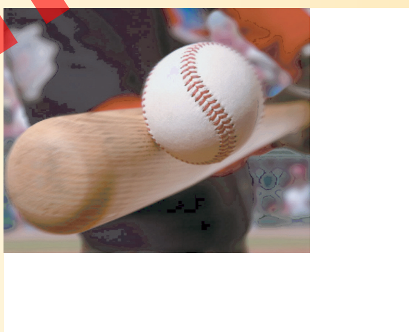
- Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения
- Производная функции
- Правила дифференцирования
- Правило дифференцирования произведения
- Правило дифференцирования частного
- Правило дифференцирования сложной функции
- Решение задач с применением производной
- Производная второго порядка
- Производная показательной и логарифмической функции
- Производная тригонометрической функции

Математический словарь

средняя скорость
мгновенная скорость
секущая графика
касательная графика
угловой коэффициент

функция производной
дифференциал
дифференцирование
производная второго порядка

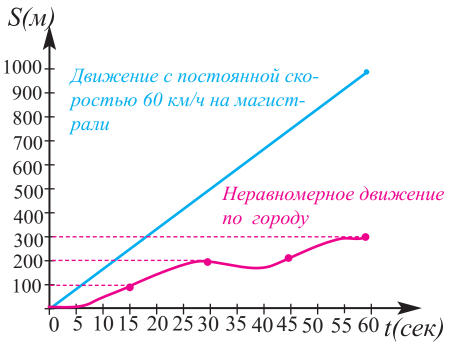
маржинальное значение
маржинальная прибыль
маржинальный доход

Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения

До настоящего времени мы могли получать статистические данные, соответствующие реальной жизненной ситуации, используя алгебраические правила, изученные нами. Однако, во многих случаях, в производстве, медицине, а также в различных областях науки, возникает необходимость получить более динамическую информацию, другими словами как изменение одной величины влияет на скорость изменения другой величины. Например, рекламный менеджер хочет знать как изменяется прибыль при изменении затрат, врач - динамику изменения структуры печени при увеличении дозы лекарственного препарата и т.д. Рассмотрим следующий пример определения скорости изменения.

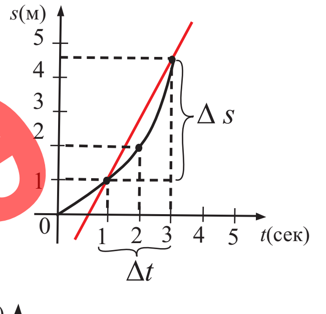
Средняя скорость. На рисунке показаны графики зависимости расстояния от времен при равномерном движении автомобиля на магистрали и неравномерном движении по городу. При равномерном движении, за равные промежутки времени, длина пройденного пути одинакова и угловой коэффициент прямой графика выражает скорость. При неравномерном движении длина пути на одинаковых временных участках может и не быть одинаковой. В этом случае используется значение средней скорости.



Средней скоростью тела называется отношение пройденного пути к промежутку времени, за которое этот путь пройден.

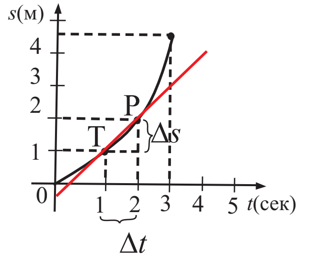
$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Пример 1. Частица движется равномерно по закону $s(t) = 0{,}5\ t^2$. Найдите среднюю скорость на промежутке времени: a) [1; 3] , b) [1; 2] (здесь s в метрах, t - в секундах).



Решение: a) Средняя скорость на промежутке времени $1 \le t \le 3$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{4{,}5 - 0{,}5}{2} = 2\ (м/сек)$$

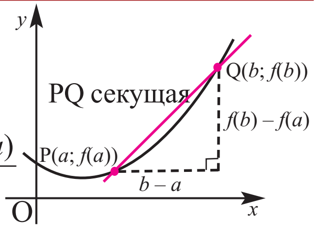


b) Средняя скорость на промежутке времени $1 \le t \le 2$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{2 - 0{,}5}{1} = 1{,}5\ (м/сек)$$

Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения

Средняя скорость переменной



Для произвольной функции $y = f(x)$ на промежутке $a \le x \le b$ средняя скорость равна $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Это отношение показывает угол наклона секущей, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$ графика функции.

Мгновенная скорость. Исследуем понятие мгновенной скорости на следующем примере.

Пример 2. В таблице представлены результаты вычислений средней скорости частицы, движущейся равномерно по закону $s = 0{,}5\,t^2$ для некоторых малых значений Δt за промежуток времени $[2; 2+\Delta t]$.

интервал времени	*средняя скорость*
[2; 2,1]	$\dfrac{s(2{,}1)-s(2)}{2{,}1-2} = \dfrac{2{,}205-2}{2{,}1-2} = \dfrac{0{,}205}{0{,}1} = 2{,}05$
[2; 2,01]	$\dfrac{s(2{,}01)-s(2)}{2{,}01-2} = \dfrac{2{,}02005-2}{0{,}01} = \dfrac{0{,}02005}{0{,}01} = 2{,}005$
[2; 2,001]	$\dfrac{s(2{,}001)-s(2)}{2{,}001-2} = \dfrac{2{,}0020005-2}{0{,}001} = \dfrac{0{,}0020005}{0{,}001} = 2{,}0005$

По таблице можно установить, что при $t = 2$ мгновенная скорость приблизительно равна 2 м/сек. Вообще средняя скорость на интервале времени $[2; 2+\Delta t]$ будет:

$$\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t} = \frac{0{,}5\cdot(2+\Delta t)^2-0{,}5\cdot 2^2}{\Delta t} = \frac{2\Delta t+0{,}5(\Delta t^2)}{\Delta t} = 2+0{,}5\Delta t$$

При стремлении Δt к нулю,т.е при уменьшении промежутка времени $[2; 2+\Delta t]$, пределном состаянии в момент $t = 2$ является мгновенной скоростью. Таким образом, при прямолинейном движении по закону $s(t)$ мгновенная скорость в любой момент времени t будет:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

По аналогичному правилу, для любой функции мгновенную скорость изменения скорости находят по формуле:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad \lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Мгновенная скорость изменения

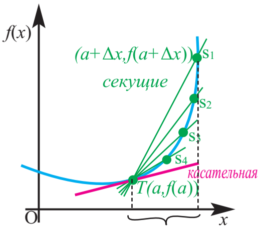
Предел $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ выражает мгновенное изменение скорости функции f в точке $x = a$.

Мгновенное изменение скорости показывает скорость в данной точке.

Теперь пронаблюдаем как средняя скорость превращается в мгновенную скорость, при изменении положения секущей на кривой. Угловой коэффициент секущей в промежутке $[a; a+\Delta x]$ выражает среднюю скорость.

Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения

На графике точки S_1, S_2, S_3, S_4, показывают изменение положения точки S по направлению к точке T. Здесь, при уменьшении значения Δx до 0, точка S, меняя положение вдоль кривой, приближается к точке T и, наконец, совпадает с ней.



Для точки S, остающейся на кривой, предельное значение секущей TS (если оно оно существует), при приближении к точке T, называется касательной к кривой в точке T. При $\Delta x \to 0$ предел отношения, выражающего угловой коэффициент секущего равен угловому коэффициенту касательной в точке $T(a, f(a))$.
Угловой коэффициент касательной и есть мгновенная скорость в точке.

Пример 3. Найдем скорость свободного падения в момент $t = 2$ сек.

Решение: Зависимость между пройденным путем и временем t при свободном падении имеет вид: $s(t)= \dfrac{gt^2}{2}$. Здесь g ускорение свободного падения и $g \approx 10$ м/сек^2. Тогда можно написать $s = 5t^2$.

Через 2 секунды после начала в интервале Δt в секундах средняя скорость будет $\dfrac{5\cdot(2+\Delta t)^2 - 5\cdot 2^2}{\Delta t}$ м/сек.

В момент $t = 2$ скорость равна значению предела.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{5\cdot(2+\Delta t)^2 - 5\cdot 2^2}{\Delta t} = 5\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[(2+\Delta t)^2 - 2^2]}{\Delta t} = 5\cdot\lim_{\Delta t\to 0}(4+\Delta t) = 20 \text{ (м/сек)}$$

Пример 4. Дана функция $y = x^2 + 3x$. Найдите среднюю скорость изменения при: a) $1 \le x \le 3$; b) мгновенную скорость при $x = 2$.

Решение: a) При $a = 1$, $b = 3$ средняя скорость будет:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{[3^2 + 3\cdot 3] - [1^2 - 3\cdot 1]}{3-1} = \frac{20}{2} = 10$$

b) Найдем мгновенную скорость при $x = 2$.

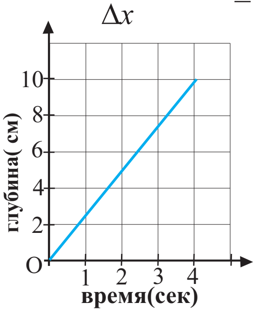
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2 + 3\cdot(2+\Delta x) - (2^2 + 3\cdot 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4 + 2\cdot 2\Delta x + \Delta x^2 + 3\cdot 2 + 3\Delta x - 2^2 - 3\cdot 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x + 7) = 7$$

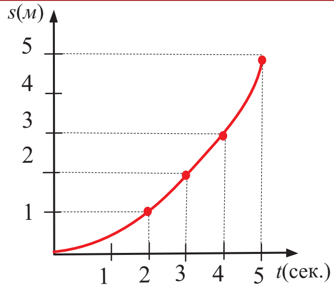
Обучающие задания

1. Автомат по продаже воды наполняет стакан водой за 4 секунды. График на рисунке отображает зависимость количества воды в стакане от времени. Найдите скорость изменения уровня воды. Изменяется ли скорость на каком-либо интервале?

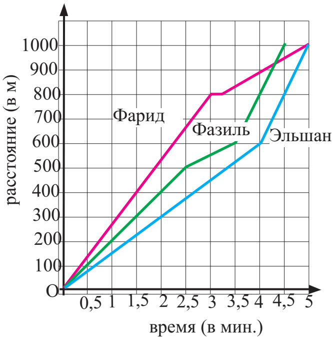


Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения

2. На рисунке представлена зависимость пройденного пути s от времени t.
1) Найдите среднюю скорость за следующие промежутки времени.
a) $[0; 2]$ b) $[2; 3]$ c) $[4; 5]$ d) $[0; 5]$
2) Сравните полученные результаты с результатами 1-го задания. Обобщите результаты.



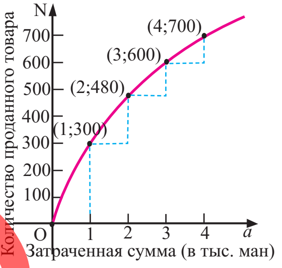
3. На графике представлен результат забега 3 спортсменов на дистанции 1000 м.
a) Кто является победителем? Обоснуйте.
b) Запишите информацию о скорости каждого спортсмена на дистанции.



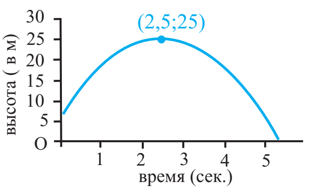
4. П графику найдите среднюю скорость на интервалах:
a) $-3 \leq x \leq -1$; b) $-3 \leq x \leq 3$; c) $1 \leq x \leq 7$; d) $3 \leq x \leq 9$.

x	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
y	7	-5	-3	-1	5	12	21	48

5. График показывает как зависит количество проданного товара N(m) в зависимости от суммы m (в тыс. манат) потраченной на его рекламу .
a) определите N(m) на интервалах m
от 0 до 1; 1 до 2; 2 до 3; 3 до 4
b) Увеличивается или уменьшается средняя скорость при увеличении m ? Объясните на примере реальной ситуации.



6. Зависимость изменения высоты брошенного вверх мяча представлена графически.
a) На какую максимальную высоту поднялся мяч?
b) С какой высоты был брошен мяч ?
c) На каком промежутке времени происходит уменьшение высоты?
d) Найдите среднюю скорость изменения высоты полета меча на следующих промежутках (в сек.): a) от 0 до 1; b) от 3 до 4.



7. В море на нефтяной платформе произошла утечка нефти. За каждые 30 секунд радиус нефтяного пятна увеличивается на 1 м.

1) Составьте таблицу значений и постройте график зависимости площади распространения нефтяного пятна со 2- ой до 30 минуты.

2) Найдите среднюю скорость распространения нефтяного пятна за данный промежуток времени:

a) за первые 5 минут; b) следующие 10 минут; c) за первые 30 минут

3) Разность скорости распространения на 5-ой и 20-ой минутах.

Для чего пригодится данная информация?

8. Заполните таблицу для каждой функции.

a) $f(x) = 4x^2$
b) $f(x) = -5x^2$
c) $f(x) = x^2 + x$
d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

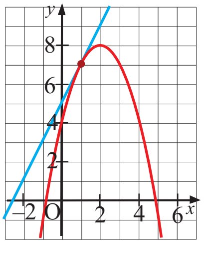
x	h	$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
5	2	
5	1	
5	0,1	
5	0,01	

9. Найдите угловой коэффициент секущей к графику функции $f(x) = 2^x$, проходящей через точки с абсциссами:

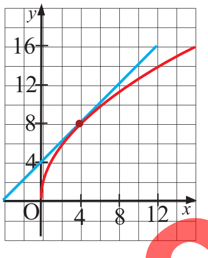
a) $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$;
b) $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

10. Определите, приблизительно, угловые коэффициенты касательных на рисунках. Какую скорость они выражают: мгновенную или среднюю?

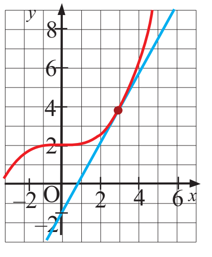
a)



b)



c)

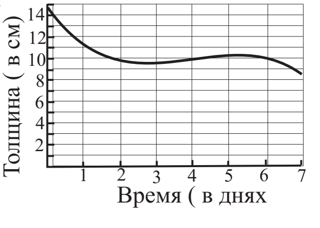


11. Функция $s(t) = t^2 + 3t + 2$ (s в метрах, t в секундах) выражает зависимость пути от времени равномерно движущегося тела. Найдите скорость тела в момент: a) $t = 5$; b) $t = 1$.

12. Изменение толщины льда озера за неделю можно смоделировать функцией $T(d) = -0{,}1d^3 + 1{,}2d^2 - 4{,}4d + 14{,}8$. Здесь T показывает толщину слоя льда в см, d количество дней, прошедших после 31 декабря. График данной функции изображен на рисунке. .

a) Как вы думаете какой из дней был самым теплым? Обоснуйте.

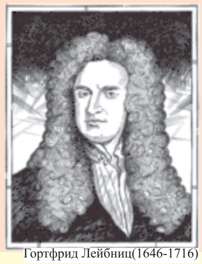
b) Определите мгновенную скорость в точке, выбранной в пункте a.



Производная функции

Необходимость вычисления мгновенной скорости изменения привело к развитию дифференциального исчисления. Его концепция была предложено Исааком Ньютоном (1642-1727) и Готфридом Лейбницем (1646-1716). Как результат, появилось понятие, которое называется “производной”.

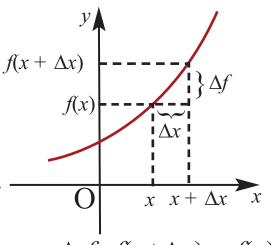
Исаак Ньютон(1642-1727)



Гортфрид Лейбниц(1646-1716)

Производная функции. Функция производной.

Вычисление мгновенной скорости и нахождение углового коэффициента касательной по сути одинаковы. А теперь обобщим эти понятия.



Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a;b)$. Отметим произвольную $x\in(a;b)$ и дадим аргументу приращение Δx, так чтобы была $(x+\Delta x)\in(a;b)$.

Тогда функция получит соответствующее приращение $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, то этот предел называется производной функции $f(x)$ в точке x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Производную функции $f'(x)$ также можно записать в виде $\dfrac{df}{dx}$ (запись по Лейбницу).

Если в точке x у функции $f(x)$ есть производная $f'(x)$, в этом случае говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в данной точке. Нахождение производной функции называется дифференцированием.

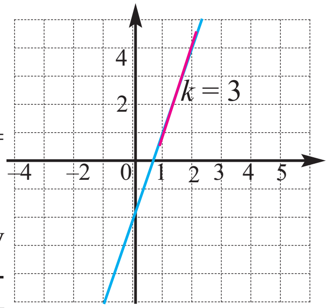
Если функция дифференцируема в каждой точке $(a;b)$, то говорят, что она дифференцируема на этом интервале.

Согласно определению производной, для аналитического нахождения производной необходимо выполнить следующее:

1. Находят $f(x+\Delta x)$.
2. Упрощается разность $f(x+\Delta x) - f(x)$.
3. Записывается и упрощается выражение $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
4. Находится предел отношения при $\Delta x\to 0$: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Производная функции

Пример 1. Найдите производную $f'(x)$ функции $f(x) = 3x - 2$.



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) - 6 - (3x-6)}{\Delta x} = $$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

По графику видно, что касательной к графику функции $y = 3x - 2$ является прямая, т.е. мгновенная скорость изменения равна угловому коэффициенту. В общем случае $\boldsymbol{(kx + b)' = k}$.

Здесь при $k = 0$, $b = 1$ имеем: $\boldsymbol{(x)'=1}$

Значение производной функции в точке с абсциссой x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику в точке x_0 : $k_{кас} = f'(x_0)$
Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент которой равен k имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$. Учитывая, что абсцисса равна x_0, ордината равна $y_0 = f(x_0)$, угловой коэффициент равен $k=f'(x_0)$, уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид: $\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$.

Пример 2. Для функции $f(x) = x^2$ найдите:
a) производную;
b) значения $f'(-3)$ и $f'(4)$;
c) уравнение касательной в точке с абсциссой $x = -3$.

Решение:

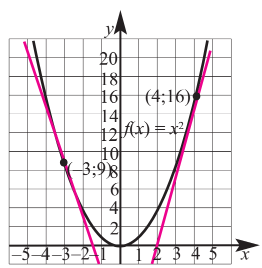
a) По определению, если для любых значений x существует предел, то производная в точке x находится так: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$

2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$



Для функции $f(x) = x^2$ производной является $f'(x) = 2x$. Как видно, производной квадратичной функции является линейная функция: $\boldsymbol{(x^2)' = 2x}$.

b) Так как $f'(x) = 2x$, то $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$; $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$

c) Уравнение касательной запишем при помощи формулы уравнения прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$. Так как $f'(-3) = -6$, то угловой коэффициент касательной с в точке абсциссой $x_0 = -3$ равен $k = -6$. Ордината точки на графике с абсциссой $x_0 = -3$ равна $y_0 = f(-3) = 9$. Запишем данные значения в формулу. Получим, уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0 = -3$: $y - 9 = -6(x + 3)$; $y - 9 = -6x - 18$; $y = -6x - 9$.

Согласно выполненным вычислениям можно скачать, что:

- В точке (–3; 9) угловой коэффициент касательной $k = -6$.
- В точке (4; 16) угловой коэффициент касательной $k = 8$.
- В точке $x = -3$ мгновенное значение скорости равно –6.
- В точке $x = 4$ мгновенное значение скорости равно 8.
- Уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0 = -3$ имеет вид: $y = -6x - 9$.

Пример 3. Для функции $f(x) = x^3$ найдите:

a) производную;

b) $f'(-1)$ и $f'(1{,}5)$.

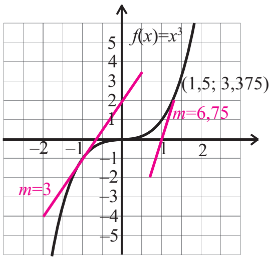
Решение:

1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$

2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x$

3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$

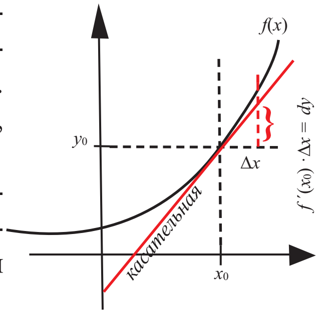
4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$



Значит, производная функции $f(x) = x^3$ является квадратичной функцией: $\mathbf{(x^3)' = 3x^2}$.

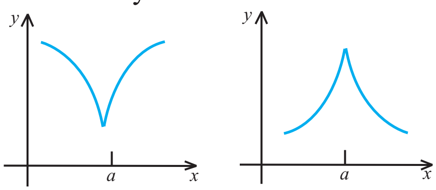
b) Так как $f'(x) = 3x^2$, то $f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 = 3$ $f'(4) = 3\cdot(1{,}5)^2 = 6{,}75$

Выражение $f'(x_0)\cdot\Delta x$ называется дифференциалом функции и обозначается dy. Как видно, дифференциал функция зависимая от Δx. Так как $x' = 1$ для функции $y = x$, то получаем, что $dx = \Delta x$.
Поэтому дифференциал функции $f(x)$ обозначается как $df = f'(x)\, dx$. Для определении приращения функции дифференциал является главной (основную) частью и $\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$.

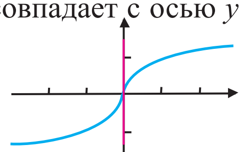


Точки в которых функция не имеет производной. Если функция не дифференцируема в точке x_0, то для $\Delta x \to 0$ имеем $\Delta f \to 0$, т.е в этой точке функция непрерывна. Однако, это не означает, что верно и обратное. Иногда, функция в некоторых точках непрерына, но в этой точке не имеет производной. Например, функция $y = |x|$ непрерывна на всей действительной оси, однако в точке $x_0 = 0$ не дифференцируема (почему?). Графически производная определяется как угловой коэффициент касательной. На графике могут быть такие точки, для которых к кривой в данной точке касательную провести невозможно. В таких точках производная не существует.
Ниже представлены несколько примеров таких случаев.

1) Функция, график которой имеет вид “V” (некоторые кусочно - заданные, модульные и т.д. функции) в “угловых” точках не имеет производной.



2) Если касательная является вертикальной прямой, совпадает с осью y или параллельна ей.
Например, касательная к графику функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ с абсциссой в точке $x_0 = 0$ является вертикальной прямой и в этой точки функция не имеет производной.

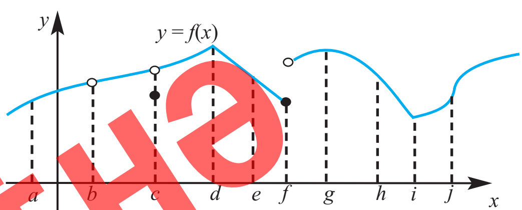


вертикальная
касательная

3) В точках разрыва функции не имеет производную.

Пример 4. На рисунке показан график функции $y = f(x)$. При каких значениях аргумента, отмеченных на оси абсцисс, функция не дифференцируема.

Решение: функция $y = f(x)$ не имеет производную в точках:
*b, c, f - точки разрыва функции;



* d и i - “угловые” точки ;
* j - касательная вертикальная прямая.

Обучающие задания

1. Для каждого случая, определите функцию для которой находится производная и найдите ее предел .

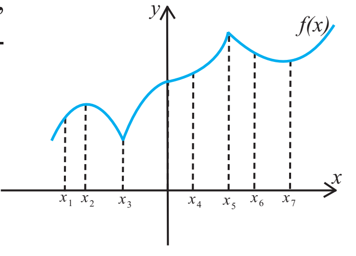
a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(x+h)^3 - 3x^3}{h}$

2. Выполните задания, для следующих функций:
1) $f(x) = 3x^2$ 2) $f(x) = -2x^2$ 3) $f(x) = -2x + 5$ 4) $f(x) = x^3$
a) схематично изобразите график;
b) изобразите касательную к графику в точках с абсциссами –2; 0; 1;
c) по определению, найдите производную $f'(x)$вычислив предел;
d) найдите значение производной в точках пункта *b*.

3. Найдите производную функции. Запишите уравнение касательной в заданной точке.

1) $f(x) = x^2$ a) (2;4) b) (0;0) c) (10;100)
2) $f(x) = x^3$ a) (–1;–1) b) (2;8) c) (–2;–8)

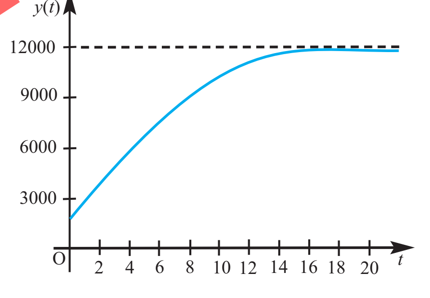
4. Для каких значений аргументов, указанных на оси абсцисс производная функции:
a) равна нулю;
b) больше нуля;
c) меньше нуля;
d) не существует?



5. a) Изобразите график, который не имеет касательную в точке $x = 5$.
b) Изобразите график, который имеет горизонтальную касательную в точке $x = 2$.
c) Изобразите график, который имеет горизонтальную касательную в точках $x = 0$, $x = 3$, $x = 6$ и не имеет касательной в точке $x = 2$.

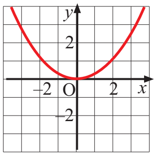
6. При испытании нового корма для телят в течении 6 недель, было установлено, что зависимость веса телят от данного корма выражается функцией $f(x) = \sqrt{x} + 40$. Вычислите предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ и найдите еженедельную скорость изменения функции.

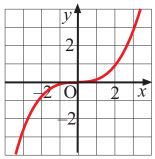
7. При наблюдении за морскими обитателями были получены результаты изменения их численности, которые представили в виде графика. Изобразите график изменения скорости роста численности данных обитателей моря.

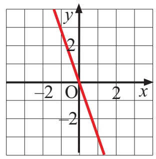


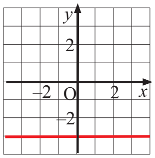
8. Найдите функцию зависимости объема куба (V) от длины ребра (a).
a) Найдите мгновенную скорость изменения объема в зависимости от длины ребра.
c) Найдите скорость изменения объема при $a = 1$, $a = 5$.

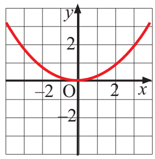
9. Установите соответствие между графиками функций A, B, C и графиками производных *a, b, c*.

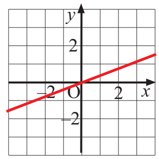
A 

B 

C 

a) 

b) 

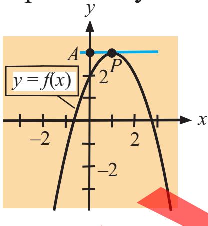
c) 

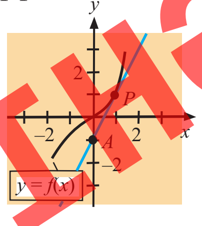
10. Найдите производную функции $y = x^2$.
a) Запишите область определения и множество значений для самой функции и ее производной.
b) Какая существует связь между функцией и ее производной?

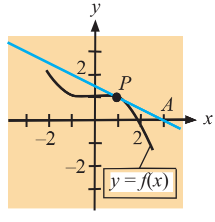
11. Представьте схожие и отличительные черты производных функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$.

12. Найдите точку, в которой функция $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{2x}$ не дифференцируема Вычислите $f'(2)$. Найдите удобный способ для данного вычисления.

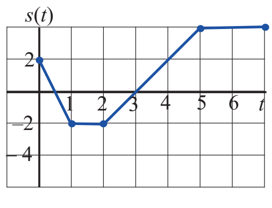
13. На рисунках изображены касательные к графикам функции. Точка P является точкой касания, точка A принадлежит на касательной. Найдите $f'(1)$, определив угловой коэффициент касательного.

a) 

b) 

c) 

14. На рисунке представлен график зависимости пройденного пути от времени.
a) Найдите среднюю скорость с 1 до 4 секунды.
b) Согласно графику зависимости пути от времени, изобразите график изменения мгновенной скорости.



Правила дифференцирования

Используя определение производной мы нашли производные некоторых степенных функций, например, $y = x^2$ и $y = x^3$.
Для нахождения производных функции используют следующие правила.

Производная константы	$C' = 0$
Производная степенной функции	$(x^n)' = n x^{n-1},\ n \in \mathrm{N}$
Производная произведения на константу	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Производная суммы (разности)	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

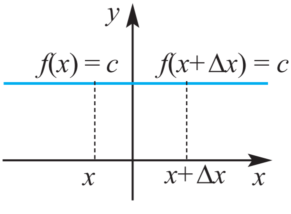
Докажем эти правила, используя определение производной.

1. Если $f(x) = c$, то $f'(x) = 0$, т.е. производная константы равна нулю.

Доказательство:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Это видно и по графику постоянной функции. В каждой точке графика угловой коэффициент равен нулю.



2. Если $n \in \mathrm{N}$ и $f(x) = x^n$, то $f'(x) = n x^{n-1}$

Для функции $f(x) = x^n$ запишем соответствующее биномиальное разложение при $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$.

$$(x+\Delta x)^1 = x + \Delta x$$
$$(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$
$$(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$
$$(x+\Delta x)^4 = x^4 + 4x^3\Delta x + 4x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4$$

Как видно, в каждом разложении первый член x^n, а второй член $n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x$.
У каждого члена из желтого треугольника присутствует множитель $(\Delta x)^2$.
В упрощенной форме разложение бинома $(x + \Delta x)^n$ перепишем в виде:

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n$$

Запишем отношение приращения функции и аргумента и упростим его

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n - x^n}{\Delta x} =$$

$$=\frac{\Delta x\,(nx^{n-1}+\Delta x\cdot A_n)}{\Delta x}=nx^{n-1}+\Delta x\cdot A_n$$

Предел данного выражения при условии $\Delta x\to 0$ является производной функции $f(x)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(nx^{n-1}+\Delta x\cdot A_n)=n\cdot x^{n-1}$$

Значит, для любого натурального числа n

$$\mathbf{(x^n)'=n\cdot x^{n-1}}$$

В частном случае, при n = 1,2,3получаем

$$x'=1,\ (x^2)'=2x,\ (x^3)'=3x^2.$$

Можно показать, что формула $(x^\alpha)'=n\cdot x^{\alpha-1}$ справедлива для любого действительного числа α.

3. **Если $f(x)$ дифференцируема, то функция $c\cdot f(x)$, где c-постянная,тоже дифференцируема и $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$,**
те.е константу можно вынести за знак производной.

$$[c\cdot f(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\cdot f'(x)$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, то их сумма (разность) дифференцируема и $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$.

Доказательство: Верность формулы докажем для $h(x)=f(x)+g(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(x))]+[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)$$

Пример 1. Найдите производную функции $f(x)=x^3-2x+3$.
Решение: $f'(x)=(x^3-2x+3)'=(x^3)'-(2x)'+(3)'=3x^2-2$

Пример 2. Найдите производные функций.

a) $y=x^4$

$y'=(x^4)'=4x^3$

$y'=4x^3$

b) $y=\dfrac{1}{x^5}$

$y'=\left(\dfrac{1}{x^5}\right)'=(x^{-5})'$

$=-5x^{-6}=-5\cdot\dfrac{1}{x^6}$

$y'=-\dfrac{5}{x^6}$

c) $y=\sqrt[3]{x}$

$y'=(x^{\frac{1}{3}})'=$

$=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=$

$=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $y=2x^{-3}+x$

$y'=(2x^{-3}+x)'=$

$(2x^{-3})'+(x)'=$

$=2\cdot(-3)x^{-4}+1=$

$=-\dfrac{6}{x^4}+1$

Пример 3. Найдите производную: a) $\dfrac{d}{dx}(5x^4)$; b) $\dfrac{d}{dx}(3\sqrt{x}+\dfrac{2}{x})$

a) $\dfrac{d}{dx}(5x^4)=5\dfrac{d}{dx}x^4 \;=5\cdot 4\cdot x^3=20x^3$

b) $\dfrac{d}{dx}(\,3\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\,) \;=\dfrac{d}{dx}(3\sqrt{x})+\dfrac{d}{dx}(\dfrac{2}{x})=3\,\dfrac{d}{dx}(x^{1/2})+2\dfrac{d}{dx}(x^{-1})=$

$$=3\cdot\frac{1}{2}(x^{-1/2})-2\,x^{-2}=\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}$$

Обучающие задания

1. Сначала выберите функции, производная которых равна нулю, а потом найдите производные остальных функций.

$f(x)=\sqrt{11}$ $\quad f(x)=2x^{-2}$ $\quad f(x)=4{,}5\pi$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ $\quad f(x)=\dfrac{5}{x^3}$

2. Найдите производную функции.

a) $y=x$ b) $y=\dfrac{1}{4}x^2$ c) $y=x^5$ d) $y=-3x^4$

e) $y=1{,}5x^3$ f) $y=\sqrt[5]{x^3}$ g) $y=\dfrac{5}{x}$ h) $y=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$

3. Найдите производные функций.

a) $f(x)=2x^2+x^3$ b) $y=\dfrac{4}{5}x^5-3x$ c) $b(t)=-1{,}1t^4+78$

e) $p(x)=\dfrac{x^2}{4}-2\sqrt{x}$ d) $V(r)=\dfrac{4}{2}\pi r^3$ f) $k(s)=-\dfrac{1}{s^2}+7s^2$

4. Найдите производные.

1) $\dfrac{d}{dx}(5x^2-7x+3)$ 2) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt[4]{x}-\dfrac{3}{x})$ 3) $\dfrac{d}{dx}(-\sqrt[4]{x^3})$ 4) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}})$

5. Упростите выражения функции и найдите их производные.

a) $f(x)=(x-3)(x+1)$ b) $f(x)=x^2\cdot(3-x)$ c) $f(x)=\sqrt{x}\cdot(1-2\sqrt{x})$

d) $y=\dfrac{x^3+x+2}{x}$ e) $y=\dfrac{x^5-2x^3+1}{x^2}$ f) $y=\dfrac{3x^4-6x^3}{x-2}$

6. Найдите значение производных в заданных точках.

a) $f(x)=x^3+4x,\ x=0,\ x=2$ b) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$, $x=1,\ x=4$

7. При каких значения x производная функции равна нулю?

a) $f(x)=x^4-4x^2+1$ b) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-3x^2$

8. Решите неравенство $f'(x)>0$:

a) $f(x)=x+\dfrac{x^2}{4}$; b) $f(x)=3x^2-x^3$

9. Запишите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=-3x^4+2x^3+5$ в точке $x_0=1$. Запишите уравнение касательной.

10. Дана функция $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 2$. Найдите a и b, зная что $f(2) = 10$ и $f'(-1) = 14$.

11. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2$, которая проходит через точку $(1;-5)$.

12. Упростите выражение функции $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2$ и найдите ее производную.

13. Задайте формулой хотя бы одно функцию, производная которой равна:

a) 2; b) $2x + 3$; c) $3x + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Прикладные задания. ***Уравнение касательной. Угловой коэффициент.***

Пример. a) В каких точках касательные к графику функции $f(x) = -x^3 + 6x^2$ параллельны оси абсцисс?

b) Определите координаты точки, в которой угловой коэффициент касательной к графику равен 9.

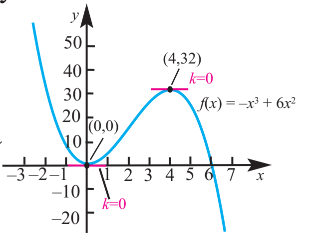
Решение: a) Если касательная параллельна оси абсцисс, то угловой коэффициент равен нулю.

Точки в которых угловой коэффициент равен нулю являются точками в которых производная равна 0, т.е. $f'(x) = 0$.

Найдем производную функции $f(x) = -x^3 + 6x^2$

$$f'(x) = (-x^3 + 6x^2)' = -3x^2 + 12x$$

Определим точки в которых производная равна нулю.



$$-3x^2 + 12x = 0, \qquad -3x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = 4$$

$f(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0$; $(0;0)$ $\qquad$ $f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 = 32$; $(4;32)$

На графике функции, построенном при помощи графкалькулятора, видно, что в точках (0;0) и (4;32) касательная к графику параллельна оси абсцисс.

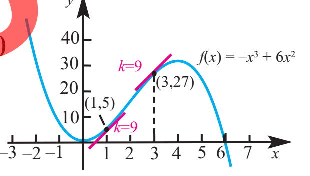
b) Найдем точки, в которых угловой коэффициент равен 9:

$$-3x^2 + 12x = 9 \qquad -3x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1; \quad y = 5; \qquad (1; 5)$$

$$x = 3; \quad y = 27 \qquad (3; 27)$$



По графику также видно, что им соответствуют точки (1; 5) и (3; 27).

14. a) Для функций $f(x) = 2x^2$ и $g(x) = x^3$ найдите такие значения x, в которых равны угловые коэффициенты касательных к этим функциям.

b) Запишите уравнения касательных, в точках найденных в пункте a .

15. Покажите, невозможно изобразить касательную к графику функции $f(x) = 6x^3 + 2x^2$ угловой коэффициент которой равен $k = -5$.

16. Существуют ли горизонтальные касательные следующих функций?
1) $y = x^2 - 3$ 2) $y = -x^2 + 4$ 3) $y = -x^3 + 1$
4) $y = x^3 - 2$ 5) $y = 3x^2 - 5x + 4$ 6) $y = 5x^2 - 3x + 8$

17. Найдите точки в которых угловой коэффициент касательных к графикам следующих функций равен 1.
1) $y = 20 - x^2$ 2) $y = 6x - x^2$ 3) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x$

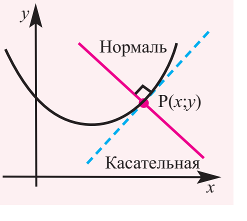
18. На параболе $y = x^2 - x + 1$ найдите такую точку, в которой касательная к параболе параллельна прямой $y = 3x + 2$. Запишите уравнение касательной в этой точке

19. Найдите угловой коэффициент касательной в точках пересечения параболы $y = 4x - x^2$ с осью абсцисс.

20. Найдите производные функций $g(x) = x^3$, $p(x) = x^3 - 3$, $q(x) = x^3 + 2$.
a) Обобщите свое мнение о производной для функции $f(x) = x^3 + c$, где c-постоянная.
b) Есть ли среди этих функций такая функция, что для $f'(x) = 3x^2$ при $x = 0$ имеет место $f(0) = 0$. Что это за функция?
c) Есть ли среди этих функций такая функция, что для $f'(x) = 3x^2$ при $x = 0$ имеет место $f(0) = -3$. Что это за функция?

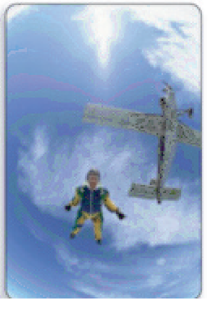
21. Функции многочлена f и g $f'(x) = g'(x)$ удовлетворяют условиям $f(0) = 1$, $g(0) = 2$. Запишите свое мнение о том, существуют ли точки пересечения данных функций.

22. **Взаимосвязь.** *Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания (x,y), называется нормалью к графику функции y=f(x) в этой точке.*



a) Определите угловой коэффициент касательной в точке $x_0 = 2$ к графику функции
$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$
b)Запишите уравнение нормали функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$.

23. Парашютист прыгнул с самолета, находящегося на высоте 2500 м. Высоту, на которой будет находится парашютист через t секунд, можно найти по формуле $h(t) = 2500 - 5t^2$.



a) Найдите скорость изменения высоты на 5 секунде.
b) Парашют спортсмена раскрылся на высоте 1000 м. Через сколько секунд это произошло.?
c) Чему равна скорость изменения для значения найденного в пункте b?

Правило дифференцирования произведения

Найдем производную функции $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 4)$. Для этого сначала надо упростить выражение и к функции многочлена применить известные нам правила дифференцирования. Однако существует более эффективное правило нахождения приводной произведения.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, то их произведение тоже дифференцируемо и $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Доказательство: Пусть $p(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$p'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

Прибавив и отняв в числителе член $f(x+\Delta x)\cdot g(x)$, для членов $f'(x)$ и $g'(x)$ дробь можно записать в виде суммы двух дробей.

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\,g(x) + f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\,g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\,\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x)\,\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Пример. Найдите производную функции $p(x) = (2x - 1)(x^2 - 5)$

Решение:

$f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x^2 - 5$ *каждый множитель записывается как одна функция*

$f'(x) = 2,\ g'(x) = 2x$ *для каждой функции находится производная*

$p'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ *применяется правило дифференцирования произведения*

$p'(x) = 2(x^2 - 5) + 2x\,(2x - 1) =$ *принимаются во внимание соответствующие выражения*

$= 2x^2 - 10 + 4x^2 - 2x =$ *упрощается*

$= 6x^2 - 2x - 10$

Решение может быть проверено предварительно вражение функции:

$p(x) = (2x - 1)(x^2 - 5) = 2x^3 - 10x - x^2 + 5 = 2x^3 - x^2 - 10x + 5$

$p'(x) = (2x^3 - x^2 - 10x + 5)' = 6x^2 - 2x - 10$

Правило дифференцирования произведения

Обучающие задания.

1. Найдите производные функций.

a) $f(x) = (x - 4)(2x + 1)$ c) $p(x) = (x^3 - 1)(3x^2 + 8)$

b) $h(x) = (5x^2 + 3)(1 - 2x)$ d) $g(x) = (2x^2 + 1)(4 + 3x^3)$

2. Найдите производные функций двумя способами: при помощи правила дифференцирования произведения и сначала упростив произведение, а затем найдя производную. Сравните полученные результаты.

$m(x) = x^3 \cdot x^{-2}$ | $y = 5x^2(3x - 2)$ | $h(x) = (3x + 2)(5x^2 - 2x + 3)$

3. Запишите уравнение касательной к функции в данной точке.

$f(x) = (2x - 1)(x + 4)$ (1;5) $g(x) = (x - 1)(x - 2)$ (–1;6)

4. Найдите производную функции $f(x) = kg(x)$ используя правило дифференцирования произведения. Одинаковы ли полученный вами результат и правило дифференцирования произведения функции на константу?

5. Зная, что $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ и $f'(3) = 7$, $f''(3) = 12$, $g(3) = 8$, $g'(3) = 5$, найдите значение $h'(3)$.

6. Производная функции $p(x)$ задана в виде $p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Определите функцию $p(x)$ для каждого случая.

a) $p'(x) = (6x^2 + 8)(3x^2 - 4x) + (2x^3 - 8x)(6x - 4)$

b) $p'(x) = (6x^2 - 1)(0{,}5x^2 + x) + (2x^3 - x)(x + 1)$

7. Для каждой функции запишите уравнение касательной в точке с заданной абсциссой.

a) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 1)$, $x_0 = -4$ b) $g(x) = (2x^2 - 1)(-x^2 + 3)$, $x_0 = 2$

c) $h(x) = (x^4 + 4)(2x^2 - 6)$, $x_0 = -1$ d) $p(x) = (-x^3 + 2)(4x^2 - 3)$, $x_0 = 3$

8. В какой точке угловой коэффициент касательной равен данному числу:

a) $y = (-4x + 3)(x + 3)$, $k = 0$ b) $y = (5x + 7)(2x - 9)$, $k = \frac{2}{5}$

c) $y = (2x - 1)(-4 + x^2)$, $k = 3$ d) $y = (x^2 - 2)(2x + 1)$, $k = -2$

Соответствующие задания

9. Найдите производные функций, используя правило дифференцирования произведения. Какое правило можно установит, опираясь на полученные результаты?

a) $y = (x^2 + 2x)^2$ b) $y = (2x^3 - x)^2$ c) $y = (x^4 - 3x^2)^2$

10. При простое горючее из топливного бака улетучивается. Количество оставшегося в баке горючего, через t часов можно смоделировать по формуле $V(t) = 90(1 - \frac{t}{18})^2$.

a) Сколько литров горючего было в топливном баке в момент, когда началась утечка?

b) С какой скоростью улетучивается горючее через 12 часов?

c) С какой скоростью происходит утичка, в момент когда в баке 40 л?

Правило дифференцирования отношения

Правило дифференцирования отношения

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g(x) \neq 0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема и имеет место равенство:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Доказательство:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} - \frac{f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{g(x+\Delta x)}\right] \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x}\right] - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g(x)}\, f'(x) - \frac{f(x)}{[g(x)]^2}\, g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

В частном случае, если $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, то $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$

Пример. Найдите производную функции $h(x) = \dfrac{3x-2}{4x+3}$

Решение: $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 4x + 3$ *числитель и знаменатель записываются как отдельные функции*

$f'(x) = 3$, $g'(x) = 4$ *находится производная каждой функции*

$$h'(x) = \frac{3 \cdot (4x+3) - (3x-2) \cdot 4}{(4x+3)^2}$$ *применяется правило дифференцирования произведения*

учитываются соответствующие выражения

$$= \frac{12x + 9 - 12x - 8}{(4x+3)^2} = \frac{1}{(4x+3)^2}$$ *упрощается*

Обучающие задания.

1. Найдите производную функции.

1) $f(x) = \dfrac{6x+1}{3x+10}$ 2) $y = \dfrac{x^2+x}{x-1}$ 3) $f(x) = \dfrac{8x-11}{7x+3}$

4) $y = \dfrac{x^2-4x}{x+3}$ 5) $y = \dfrac{5-3t}{4+t}$ 6) $f(t) = \dfrac{4t^2+11}{t^2+3}$

Правило дифференцирования отношения

2. Найдите производную функции сначала применив правило дифференцирования отношения, а затем упрощая выражение и применив к нему правило нахождения производной для многочлена. Обратите внимание на равенство результатов.

a) $y = \dfrac{x^4}{x^3}$ b) $y = \dfrac{x^6}{x^4}$ c) $y = \dfrac{t^2 - 16}{t + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^5 + x^2}{x}$ e) $g(x) = \dfrac{3x^7 - x^3}{x}$ f) $h(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x + 3}$

3. Даны функции $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

a) Найдите $f'(x)$. b) Найдите $g'(x)$.

c) Опираясь на результаты, запишите сходство и отличие.

4. 1) Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$ в точках: a) (0;2); b) (–2;1).

2) Запишите уравнение касательной к графику функции $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$ в точках с абсциссами: a) $x_0 = 1$; b) $x_0 = 1/4$.

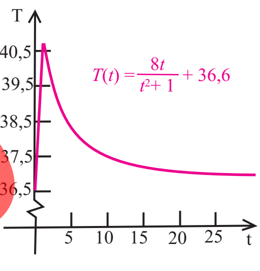
5. В решении при нахождении производной функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3}$ была допущена ошибка . Найдите ошибку и запишите правильное решение.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-4}{x^3}\right)' = x^3(2x) - (x^2 - 4)(3x^2) = 2x^4 - 3x^2 + 12x^2$$

6. Зависимость температуры больного от времени можно смоделировать следующей функцией.

$$T(t) = \frac{8t}{t^2+1} + 36{,}6$$

Найдите мгновенную скорость изменения температуры в момент $t = 2$ часам.



7. Исследование показывают, что зависимость между количеством собранных деталей новым работником и количество дней, затраченных на его обучение моделируется функцией:

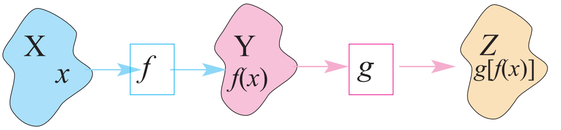
$$N(t) = \frac{100t^2}{3t^2 + 10}$$

a) Определите функцию скорости сборки деталей работником в любой день.

b) Найдите значения $N'(2)$ и $N'(10)$ и объясните соответствующую ситуацию.

Производная сложной функции

Во многих случаях аргумент заданной функции зависит от другой переменной.



Исследование

1) Для $y = f(x) = 3x + 1$ и $g(y) = y^2$ задайте сложную функцию $h(x) = g(f(x))$ и представьте ее в виде многочлена.

$$h(x) = g(f(x)) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

2) Найдите производную функции $h(x)$ и запишите ее в виде

$$h'(x) = 18x + 6 = 2\cdot(3x + 1)\cdot 3$$

3) Зная,что $g'(y) = 2y$ и $f'(x) = 3$ проверьте справедливость равенства

$$h'(x) = g'(y)\cdot f'(x).$$

“Цепная” правила нахождения производной сложной функции

Пусть на каком - либо интервале задана функция $h(x) = g(f(x))$ и дифференцируемые функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Тогда, функция $h(x) = g(f(x))$ дифференцируема и для нахождения ее производной справедлива формула

$$\boldsymbol{\frac{dh}{dx} = \frac{dg}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

На самом деле, если функция f дифференцируема в точке x ,то при $\Delta x \to 0$ получаем, что $\Delta y \to 0$.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta g}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta g}{\Delta y}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= g'(y)\cdot f'(x)$$

Таким образом, получаем, что $h'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$. Учитывая, что $y = f(x)$ последнее равенство по Лейбницу будет выглядит так:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dg}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

В частном случае, если $g(f(x)) = (f(x))^n$, то получим

$$\boldsymbol{((f(x))^n)' = n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)}$$

Если $f(x) = kx + b$, имеем: $\boldsymbol{((kx + b)^n)' = n\cdot(kx + b)^{n-1}\cdot k}$

Правило дифференцирования сложной функции

Пример 1. Найдите производную функции $h(x) = (5x^2 + 3)^4$.

Решение: Обозначим $y = 5x^2 + 3$ и $\varphi(y) = y^4$. Тогда заданная функция является композицией этих функций, т.е. сложной функцией и

$$h'(x) = \varphi'(y) \cdot y'(x) = 4y^3 \cdot 10x = 40x \cdot (5x^2+3)^3$$

Пример 2. Найдите производную функции $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2}$.

Решение: Если $y = f(x) = 3x^2 + 2$, $\varphi(y) = \sqrt{y}$, то $h(x) = g(f(x))$.

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ и } f'(x) = 6x, \text{ тогда } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 2}}.$$

Пример 3. Найдите производную функции $f(x(x) = 3x(2x-1)^2$.

Решение: Как видно, здесь надо применить как правило дифференцирования сложной функции, так и правило дифференцирования произведения $f'(x) = (3x(2x-1)^2)' = (3x)' \cdot (2x-1)^2 + 3x \cdot ((2x-1)^2)'$

$$= 3 \cdot (2x-1)^2 + 3x \cdot 2 \cdot (2x-1) \cdot 2 = 3 \cdot (2x-1)^2 + 12x \cdot (2x-1) =$$
$$= 12x^2 - 12x + 3 + 24x^2 - 12x = 36x^2 - 24x + 3$$

Обучающие задания

1. Заполните таблицу.

$h(x)=g(f(x))$	$y=f(x)$	$g(y)$	$f'(x)$	$g'(y)$	$(g(f(x)))'$
a) $(6x-1)^2$	$6x-1$	y^2	6	$2y$	$12 \cdot (6x-1)$
b) $(x^2+3)^3$					
c) $(2-x^3)^4$					
d) $(-3x+4)^{-1}$					

2. Найдите производную функции.

a) $f(x) = 3 \cdot (4x+1)^5$ b) $f(x) = (3x^2-1)^4$ c) $f(x) = (x^2-x)^{-3}$

3. Найдите производную, выразив в виде степени с положительным показателем.

a) $y = \sqrt{5x-1}$ b) $y = \sqrt[3]{2x+1}$ c) $y = \sqrt{x^2+3}$

4. Найдите производную, выразив в виде степени с отрицательным показателем.

a) $y = \dfrac{5}{(3-2x)^2}$ b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ c) $y = \dfrac{1}{(3x^2-2)^2}$

5. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ запишите сложную функцию $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ и $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ и найдите ее производную.

$f(x) = x^3$; $g(x) = 6x - 1$ $f(x) = x^4$; $g(x) = 2x + 1$

6. Найдите:

a) $f'(2)$, если $f(x) = (2x-1)^3$

b) $f'(1$, если $f(x) = (4-3x)^4$

c) $f'(-2)$, если $f(x) = \sqrt{x^2-3}$

7. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 \cdot (5-4x)^3$ в точке $x = 1$.

8. Дана функция $f(x) = x \cdot (2x-1)^4$. Решите:

a) уравнение $f'(x) = 0$; b) неравенство $f'(x) < 0$.

9. 1) Сначала найдите производную функции, при помощи правила дифференцирования отношения, а затем, представив выражение в знаменателе в виде степени с отрицательным показателем, применив правило дифференцирования сложной функции.

a) $q(x) = \dfrac{1}{3x+5}$ b) $q(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ c) $g(x) = \dfrac{6}{7x^2+1}$

10. Запишите уравнение касательной в точке, абсцисса которой равна:

a) $f(x) = \sqrt{x^2+16}$; $x_0 = 3$ b) $f(x) = (x^3+7)^{2/3}$; $x_0 = 1$

11. Найдите абсциссы точек, касательная которых к графику функции параллельна оси абсцисс.

a) $f(x) = \sqrt{x^3+6x^2+9x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)^4}$

Прикладные задания

Пример 1. Денежный вклад, вложен в банк под сложный процент с процентной ставкой r % ежемесячно на 10 лет. Сумму вклада через 10 лет можно рассчитать по формуле:

$$S(r) = 500\left(1+\frac{r}{1200}\right)^{120}$$

a) Запишите функцию $S'(r)$, которая поможет определить увеличении суммы вклада $S(r)$в зависимости от процента.

b) Найдите прибыль при $r = 5$ или $r = 7$.

Решение: **a)** $S'(r) = \left(500\left(1+\dfrac{r}{1200}\right)^{120}\right)' =$

$= 500 \cdot 120\left(1+\dfrac{r}{1200}\right)^{119} \cdot \dfrac{1}{1200} =$ *правило дифференцирования сложной функции*

$= 50\left(1+\dfrac{r}{1200}\right)^{119}$ *упрощаем*

b) моментальная (ежемесячная) прибыль через 10 лет при $r = 5$

$$S'(5) = 50\,(1 + \frac{5}{1200})^{119} \approx 82{,}01$$

моментальная (ежемесячная) прибыль через 10 лет при $r = 7$

$$S'(7) = 50\,(1 + \frac{7}{1200})^{119} \approx 99{,}90$$

2) Запишите правило дифференцирования отношения в общем виде, используя правило дифференцирования сложной функции.

12. Зависимость объема (V) жидкости в баке в форме куба от длины ребра (x) определяется функцией $V(x) = 2x^2 - 5x + 1$. Найдите $\frac{dV}{dx}$ при $x = 5$ и объясните ситуацию соответствующую этому значению.

13. Бизнес. Количество проданных электронных устройств, нового поколения, от времени вычисляется по формуле.

$$N(t) = \frac{250\,000t^2}{12t + 122}, \quad t > 0$$

a) Найдите производную функции и объясните ситуацию соответствующую данной функции.

b) Найдите значения производной $N'(100)$ и $N'(500)$ и объясните соответствующую ситуацию.

14. Финансы. 1000 манат, вложены в банк под сложный процент на 5 лет с процентной ставкой r ежеквартально. Сумма прибыли через 5 лет, задается зависимостью от процентной ставки в виде:

$$S(r) = 1000\,(1 + \frac{r}{400})^{20}$$

a) Найдите производную $\frac{dS}{dr}$ и объясните соответствующую ситуацию.

b) Найдите ежеквартальное изменение суммы вклада через 5 лет при $r = 4\%$; $r = 7\%$; $r = 12\%$.

15. Распространение утечки нефти. На нефтяной скважине, расположенной в прибрежной зоне, произошла утечка. Зависимость радиуса нефтяного пятна от времени выражается функцией $r(t) = t^2$, а зависимость площади круга от радиуса r функцией $S(r) = \pi r^2$. Здесь t измеряется в секундах, а r в дециметрах.

a) Запишите функцию $S[r(t)]$ и объясните ситуацию.

b) Найдите функцию $S'(t)$ и объясните ситуацию.

c) Найдите значение $S'(100)$ и объясните ситуацию.

Решение прикладных задач при помощи производной

При решении ряда экономических задач, часто используют термин “маржинал”, который отражает скорость изменения экономических показателей. При этом приняты следующие обозначения:

x - объем произведенной продукции (или услуг)

$C(x)$ - функция затрат на производство (или выпуск) продукции объемом x

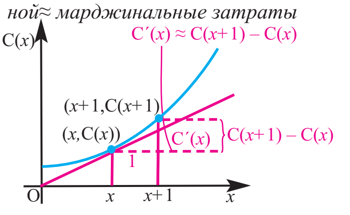
$R(x)$ - функция выручки от продажи (или выпуска) продукции объемом x

$P(x)$ - функция прибыли от продажи (или выпуска) продукции объемом x

$P(x) = R(x) – C(x)$.

Маржинальные затраты на производство-изменение стоимости товара производимой продукции, другими словами это дополнительные затраты при производстве для каждой дополнительной единицы продукции.

Обозначим через $C(x)$ затраты на производство товара в количестве x штук, тогда для $x+1$ штук затраты будут $C(x+1)$. Разность $C(x+1) – C(x)$ показывает себестоимость $(x+1)$-го товара. Эта разность показывает прирост затрат и называется маржинальными затратами на производство. Объем маржинальных затрат равен угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(x;C(x))$, другими словами производной функции в точке x. Т.е. значение производной $C'(x)$ функции $C(x)$ выражает изменение себестоимости $x+1$ -го товара, и используется для приблизительного определения маржинальной себестоимости.



Маржинальная выручка. $R'(x)$ выручка полученная при изменении (скорость) количества проданного (выпущенного) товара. Другими словами, показывает выручку от каждой единицы дополнительного проданного (произведенного) товара.

Маржинальная прибыль. $P'(x)$ зависит от количества проданного (выпущенного) товара, другими словами, доход полученный от каждой дополнительно произведенной (выпущенной) единицы продукции.

Пример. Фирма по производству радиаторов может смоделировать затраты на производство x радиаторов, произведенных после 8 -9 радиаторов, функцией $C(x) = x^3 – 6x^2 + 15x$, а выручку, полученную при продаже радиаторов в количестве x штук функцией $R(x) = x^3 – 3x^2 + 12x$.

a) Чему равна себестоимость каждого следующего после производства 10 радиаторов? b) Найдите прибыль, полученную после продажи каждого следующего радиатора после 10 проданных.

Решение: Функция моделирующая затраты $C(x) = x^3 – 6x^2 + 15x$.

Производная $C'(x)$ функции $C(x)$ дает возможность найти приблизительно в любой момент времени (в зависимости от количества произведенной продукции) затраты на производство радиаторов.

a) $C'(x) = (x^3 - 6x^2 + 15x)' = 3x^2 - 12x + 15$; $C'(10) = 3\cdot10^2 - 12\cdot10 + 15 = 195$
Т.е. после производства 10 радиаторов, себестоимость каждого следующего радиатора равна 195 ман.
b) Производная $R'(x)$ функции $R(x)$ позволяет в любой момент (в зависимости от количества) найти выручку от продажи.

$$R'(x) = (x^3 - 3x^2 + 12x)' = 3x^2 - 6x + 12$$
$$R(10) = 3\cdot10^2 - 6\cdot10 + 12 = 252 \text{ ман}$$

16. Маржинальные затраты на производство (маржинальная цена). Пусть, затраты на производство стиральных машин в количестве x штук, моделируются функцией $C(x) = 2000 + 100x - 0{,}1x^2$
a) Какова средняя цена ($C(x)/x$) стиральной машины при производстве 100 штук?
b) Чему равна маржинальная цена (себестоимость) одной стиральной машины при производстве 100 штук?
c) Покажите, что маржинальная себестоимость (цена) 100 стиральных машин, равна себестоимости 101-й стиральной машины.

17. Маржинальная выручка (маржинальная стоимость). Общую выручку от продажи x складных столов можно смоделировать функцией
$$R(x) = 20x - \frac{x^2}{500}$$
a) Найдите маржинальную выручку от продажи 1000 столов.
b) Найдите маржинальную выручку 1001-го стола по формуле $R(1001) - R(1000)$
c) Сравните результаты, полученные в пунктах a и b.

18. Маржинальная прибыль. Прибыль, полученная фирмой за неделю за изготовление и продажу x станков выражается функцией
$P(x) = -0{,}004x^3 - 0{,}3x^2 + 600x - 800$.
В настоящий момент фирма за неделю продает 9 станков.
b) Если продажа снизится до 8 станков в неделю, как уменьшится недельная прибыль?
c) Найдите маржинальную прибыль за 9 станков.
d) Используя результаты пунктов a и c определите, приблизительно, прибыль от продажи 10 станков.

19. Пусть $C(x) = 4x + 10$, $R(x) = 50x - 0{,}5x^2$:
a) запишите функцию прибыли $P(x)$;
b) найдите значения $C(40)$, $R(40)$, $P(40)$;
c) запишите производные $C'(x)$, $R'(x)$, $P'(x)$;
d) найдите значения $C'(40)$, $R'(40)$, $P'(40)$.

Производная второго порядка. Пройденный путь, скорость, ускорение.

Известно, что производная выражает мгновенную скорость. Функция скорости (зависисмости скорости от времени) является производной функцией для функции пройденного пути.

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Как видно, скорость также является функцией, зависящей от времени. Изменение скорости выражается новой величиной, называемой ускорением. Значит, производная функции скорости является новой функцией, которая показывает зависимость ускорения от времени.

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$$

Находя производную функции пройденного пути от времени находим функцию скорости. Находя производную функции скорости от времени находим ускорение. Т.е. находя дважды производную функции пройденного пути от времени можно найти ускорение. Из физики известно, что и скорость и ускорение являются векторными величинами. Если скорость и ускорение имеют одинаковые знаки, то движение ускоренное, если знаки разные, то движение замедленное.

Производная второго порядка используется для решения ряда экономических задач, в том числе задач, моделирующих реальные жизненные ситуации. Большое практическое значение имеет приблизительное определение знака переменной.

Пример 1. Найдите производную второго порядка y''.

a) $y = x^4 + 3x^2 - 5x$ b) $y = \frac{5}{2}(x^2 - 2x)^2$

Решение:

a) $y' = (x^4 + 3x^2 - 5x)' = 4x^3 + 6x - 5$ *находим производную первого порядка*

$y'' = (4x^3 + 6x - 5)' = 12x^2 + 6$ *находим производную второго порядка*

b) $y = \frac{5}{2}(x^2 - 2x)^2$

$y' = (2{,}5(x^2 - 2x)^2)' = 5(x^2 - 2x)(x^2 - 2x)'$

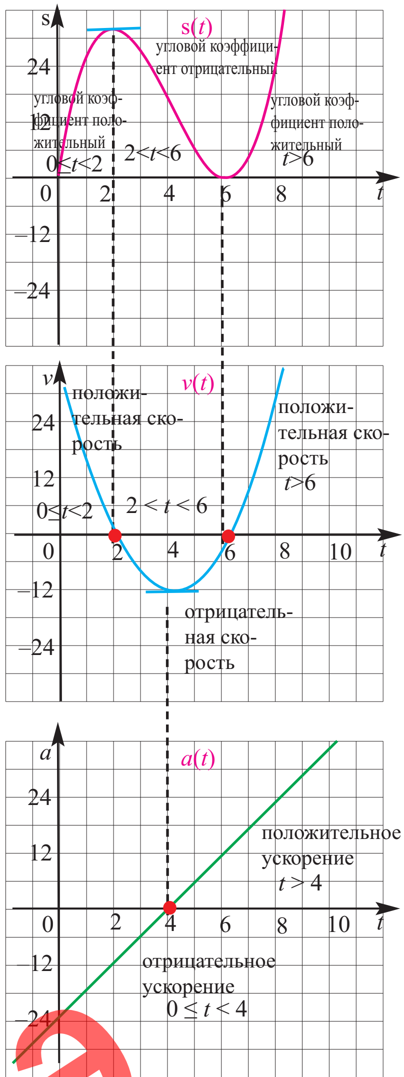
$= 5(x^2 - 2x)(2x - 2) = 10x^3 - 30x^2 + 20x$

находим производную первого порядка, используя правило дифференцирования производной сложной функции

$y'' = (10x^3 - 30x^2 + 20x)' = 20x^2 + 60x + 20$ *находим производную второго порядка*

Производная второго порядка

Пример. Найдите связь между функциями расстояния, скорости и ускорения, если функция $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ является функцией пройденного пути от времени t (t время в сек., s расстояние в м, $t \geq 0$).



Решение:

Из графиков видно, что угловой коэффициент касательной функции $s(t)$ в точках $t = 2$ и $t = 6$ равен нулю. Т.е. производная функции в соответствующих точках (точек пересечения с осью абсцисс) равна нулю.
В интервалах (0; 2) и (6; 8) угловой коэффициент касательной функции $s(t)$ положителен и функция $v(t)$ также положительна (расположена выше оси t).
В интервале (2;6) угловой коэффициент касательной функции отрицателен и функция $v(t)$ также отрицательна (расположена ниже оси t).
Из графика функции $v(t) = 3t^2 - 24t^2 + 36$ видно, что в точке $t = 4$ угловой коэффициент касательной к графику равен нулю. Эта точка, в которой функция $a(t)$ пересекает ось абсцисс.
На интервале [0; 4) угловой коэффициент касательной к графику функции $v(t)$ отрицателен, на интервале (4; 8) угловой коэффициент положителен и функция
$a(t) = v'(t) = 6t - 24$ на интервале [0; 4) принимает отрицательные значения;на интервале (4; 8) - положительные значения.

Обучающие задания

1. Для следующих функций найдите производную второго порядка.

1) $y = 7x + 2$	2) $y = 6x - 3$
3) $y = 4x^2 + 3x - 1$	4) $y = 4x^2 - 5x + 7$
5) $y = 5x^3 + 4x$	6) $y = 2x^4 - 5x$
7) $y = x^4 - 7$	8) $y = 7x + 2$
9) $y = \dfrac{1}{x^2}$	10) $y = \dfrac{1}{x^3}$
11) $y = \sqrt{x}$	12) $y = \sqrt[4]{x}$

2. Для следующих функций найдите $f''(2)$.

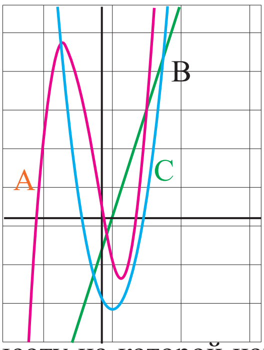
1) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 5$ 4) $f(x) = (3x^2 + 2)(1 - x)$

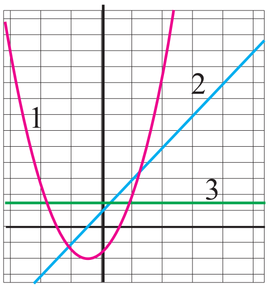
2) $f(x) = 4x^3 - 5x + 6$ 5) $f(x) = (6x - 5)(x^2 + 4)$

3. Для следующих функций найдите y''-i .

1) $y = (x^2 + 3)(4x - 1)$ 2) $y = \dfrac{3x + 1}{2x - 3}$ 3) $y = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$

4. По рисунку установите соответствие между графиками и функциями пути $s(t)$, скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$.

a) 

b) 

5. Высоту на которой находится тело, брошенное вертикально вверх, можно задать функцией $h(t) = -0{,}5gt^2 + v_0t + h_0t$. Здесь $g \approx 9{,}8$м/сек^2 ускорение свободного падения, v_0 - начальная скорость м/сек, h_0 свысота, на которую подброшено тело в м.

a) Зная функцию $h(t)$, найдите функцию скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$.

b) Стрела брошена вверх с вершины дерева, высотой 3 м с начальной скоростью 18 м/сек. Запишите функции описывающие движение стрелы $s(t)$, $v(t)$ və $a(t)$.

c) Пусть факелы праздничного фейерверка были выпущены на высоте 40 м и через 2 секунды их скорость равнялась 12 м/сек. Запишите функции расстояния, скорости и ускорения, соответствующие данному движению .

6. Тело массой 2 кг движется равномерно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$ (путь в см, t время в сек.). Найдите кинетическую энергию тела через 3 секунды после начала движения.

7. Тело движется по закону $s(t) = -8t^2 + 2t + 3$. Здесь s в м, t в сек. Для функции пройденного пути найдите функции скорости и ускорения. Найдите $v(t)$ и $a(t)$, при $t = 2$ сек.

8. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 - 4t$ (s - перемещение в метрах, t время в сек.). Найдите значение силы F, действующей на тело.

Производная показательной и логарифмической функции

Производная показательной функции

Мы уже знакомы с моделями реальных жизненных ситуаций в которых определенные изменения происходят по экспоненциальному закону - прирост населения, увеличение денежного вклада на счету, радиоактивный распад, увеличение количества бактерий и.т.д. В этих ситуациях часто необходимо найти скорость прироста в данный момент. Ее можно найти применяя производную. Показательная функция дифференцируема в любой точке числовой оси.

1. Производная функции $y = e^x$. $\quad (e^x)' = e^x$

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

по определению производной
множитель e^x выносим за скобку

$$= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

множитель e^x не зависит от h, значит его можно вынести за знак предела.

$$= e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}$$

учитывая, что $\lim_{h\to\infty}\frac{e^h - 1}{h} = 1$

$$= e^x$$

2. Производная сложной функции $y = e^{u(x)}$.
Если функция $u(x)$ дифференцируема, то $\boldsymbol{(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)}$
В частном случае, $\boldsymbol{(e^{kx+b})' = k \cdot e^{kx+b}}$

3.Производная функции $y = a^x$. $\quad \boldsymbol{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$

$y' = (a^x)' = (e^{x\ln a})' =$ *по основному свойству логарифма*
$= e^{x\ln a} \ln a =$ *производная сложной функции*
$= (\ln a)\, a^x = a^x \cdot \ln a$ *по основному свойству логарифма*

4. Производная сложной функции $y = a^{u(x)}$.
Если функция $u(x)$ дифференцируема, то $\boldsymbol{(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a}$

Пример 1. $y = e^{x^2 + 2x}$; $u = x^2 + 2x$
$y' = (e^{x^2 + 2x})' = e^{x^2 + 2x}(x^2 + 2x)' = (2x + 2)\, e^{x^2 + 2x}$

Пример 2. $y = 4 \cdot 10^{1/x}$
$y' = (4 \cdot 10^{1/x})' = 4 \cdot \ln 10 \cdot 10^{1/x}(1/x)' = 4 \cdot \ln 10 \cdot 10^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-4 \cdot \ln 10 \cdot 10^{1/x}}{x^2}$

Производная показательной и логарифмической функции

Обучающие задания

1. Найдите производные функций.

a) $y = 3e^x + 2$ b) $y = 2x - e^{-x}$ c) $y = e^{x+2}$ d) $y = e^{3x+2}$

e) $y = 2x \cdot 4e^x$ f) $y = x^3 \cdot e^{2x}$ g) $y = x^2 \cdot e^x$ h) $y' = \dfrac{5}{e^x}$

2. Найдите производные функций.

a) $y = 7^{3x+2}$ b) $y = 4^{-5x+2}$ c) $y = 3 \cdot 4^{x+2}$

d) $y = -10^{3x-4}$ e) $s = 2 \cdot 3^{\sqrt{t}}$ f) $s = 5 \cdot 2^{\sqrt{t-2}}$

3. a) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = e^x$ в точке (0;1). .

b) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{2x}$ в точке (0;1).

c) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = e^x$, проходящей через начало координат.

4. Для функций:

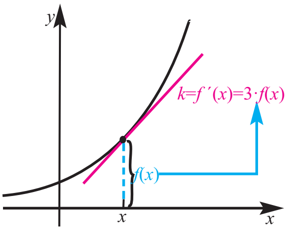
a) $f(x) = 2e^x + 2$ найдите $f'(0)$. b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$, найдите $f'(1)$

5. Решите неравенство $f'(x) > 0$:

a) $f(x) = x \cdot \ln 3 - 3^x$ b) $f(x) = 2^x + 4 \cdot 2^{-x}$

Прикладные задания

Найдем производную функции $f(x) = 2e^{3x}$. Тогда $f'(x) = (2e^{3x})' = (2e^{3x})(3x)' = 3(2e^{3x}) = 3f(x)$. При этом угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в 3 раза больше значение функции в точке с абсциссой x.



Это показывает, что если прирост задан экспоненциально, то он увеличивает скорость изменения в таких же пропорциях.

Пример. Увеличения денежной суммы (рост при помощи сложного процента). Сумма денег в размере P_0 вложена в банк под сложные проценты при процентной ставке 9% в год.

Количество денег в t год можно найти по формуле $P(t) = P_0 e^{0,09t}$.

a) Если в банк вложено 1000 манат, то какова сумма вклада через 3 года?

b) Если в банк вложено 1000 манат, то какова сумма прироста через 3 года?

Решение:

a) При $t = 3$ найдем значение $P = 1000e^{0,09t}$.

$P = 1000e^{0,09 \cdot 3} \approx 1000 \cdot 1,310 = 1310$ ман.

b) При $t = 3$ значение производной функции $P(t)$ соответствует приросту за год. Этот прирост равен $\Delta P \approx P'(3) \cdot \Delta t = P'(3) \cdot 1 = P'(3)$. При $P'(t) = 1000 \cdot 0,09 \cdot e^{0,09t}$, найдем $\Delta P \approx P'(3) = 90 \cdot e^{0,27} \approx 117,9$ ман .

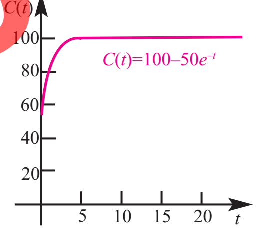
5. **Работа с графкалькулятором.** a) Постройте график функции $f(x) = 4^x$.
b) Изобразите график функции $f'(x)$.
c) Определите, приблизительно, форму графика функции $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
d)Постройте график функции $g(x)$ при помощи графкалькулятора и проверьте свои предположения.
e) Изменится ли форма графика функции $y = 4^x$, если она будет иметь вид $y = b^x$? Изменится ли при этом форма графика функции $g(x)$? Запишите мнение о графике функции при частном случае, если $b = e$.

6. **Прирост населения.** На основе данных ООН рост населения начиная с 1960 года можно смоделировать функцией $N(t) = 3100e^{0{,}0166t}$. Найдите скорость прироста населения (мгновенный прирост) в :
a) 1980; b) 2002; c)2015 гг.

7. **Прибыль от продажи.** Прибыль от продажи новейших компьютеров в зависимости от времени (в годах) можно смоделировать функцией $S(t) =100 - 90e^{-0{,}3t}$.Найдите скорость изменения прибыли через:
a) 3 года; b) 5 лет;
c) Через сколько лет прибыль приблизительно станет равна нулю?

8. **Радиоактивны распад.** Количество свинца 214(в граммах) в веществе через t лет можно определить по формуле $A(t) = 500e^{-0{,}31t}$. Как уменьшится масса (мгновенная скорость) в последующие годы после:
a) 4 лет b) 7 лет c) 10 лет
d) Запишите свое мнение о скорости изменения количества вещества.
e) Исчезнет ли вещество вовсе?

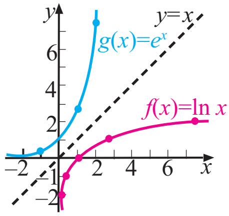
9. **Бизнес.** Завод по производству полимерных изделий с момента запуска производства затраты на производство изделия А в млн. ман. моделирует функцией $C(t) = 100 - 50e^{-t}$.



Найдите следующее:
a) Маржинальные затраты .
b) Значение $C'(0)$.
c) Значение $C'(4)$ (с точностью до десятых)
d) Значение $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} C'(t)$. Объясните на примере реальной ситуации, что при дальнейшем изменение затрат на производство они приближаются к нулю.

Производная логарифмической функции

Функции $y = \ln x$ дифференцируема в интервале $(0; +\infty)$ и $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$



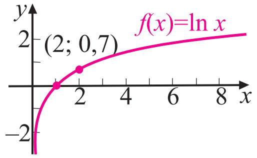
$e^y = x$ *выполним эквивалентную замену*

$(e^y)' = (x)'$ *получим производную*

$(e^y)\, y' = 1$

$y' = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{e^y}$ *выполним замену*

$y' = \dfrac{1}{x}$, т.е. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$



Производную функции $y = \ln x$ можно представить и геометрически. Проведем касательную в какой-либо точка начиная слева. На эту касательную поместим линейку и смоделируем следующие касательные, двигаясь вправо. Каждая следующая касательная изменяется в горизонтальном направлении и угловой коэффициент стремится к нулю, однако никогда не станет равным нулю.

Если, $u(x) > 0$ и дифференцируема, то: $\boldsymbol{(\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)}$

В частном случае, $\boldsymbol{(\ln(kx+b))' = \dfrac{k}{kx+b}}$

Пример. a) $y = \ln 5x$ b) $y = \ln(x^3 + 2)$

Решение: a) $(y)' = (\ln 5x)' = (\ln 5 + \ln x)' = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

b) $y' = (\ln(x^3+2))' = \dfrac{1}{x^3+2}(x^3+2)' = \dfrac{3x^2}{x^3+2}$

Производная функции $y = \log_a x$: $\quad \boldsymbol{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}}$

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ *перейдем к основанию e*

$(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

получим производную

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ *применим правила дифференцирования*

Если, $u(x) > 0$ и дифференцируема, то: $\boldsymbol{(\log_a u(x))' = \dfrac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)}$

Пример. a) $y = \log_5 x$ b) $y = \log_3(x^2 + 1)$

Решение: a) $(y)' = (\log_5 x)' = \dfrac{1}{\ln 5} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \cdot \ln 5}$

b) $y' = (\log_3(x^2+1))' = \dfrac{1}{\ln 3} \dfrac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \dfrac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 3}$

Производная показательной и логарифмической функции

Обучающие задания

1. Найдите производные заданных функций.
a) $y = 4\ln x$ b) $y = 3\ln(2x)$ c) $y = \ln(2x + 1)$ d) $\ln(x^2 + 1)$

2. Найдите производные функций.
a) $y = x^2 \cdot \ln x$ b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ c) $y = \ln^3 x$ d) $y = \sqrt{\ln x}$

3. Найдите производную функции $y = \ln x$, заменив эквивалентной записью.

4. Найдите производные функций.
a) $y = \log_2(x^2 + x + 3)$ b) $y = \log_3 \dfrac{x-2}{x+1}$ c) $y = \lg\sqrt{x^2+3}$

5. a) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = (x^2 - x)\ln 6x$ в точке $x_0 = 2$.
b) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \ln x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

6. Вычислите значения производных в заданных точках.
a) $f(x) = \log_2(4 + 3x)$, $x_0 = -1$ b) $f(x) = x^3 \cdot \ln(3 + 2x)$, $x_0 = -1$

7. 1) Если $f(x) = x - \ln x$, то решите неравенство $f'(x) > 0$
2) При каких значениях x производная равна нулю?
a) $f(x) = \ln(x + 2) - 2x + 2$ b) $f(x) = x^3 - \ln x$

Прикладное задание

8. **Увеличение количества бактерий.** Исследования показали, что количество бактерий $N(t)$ в колбасе при температуре 32°С в момент времени t удовлетворяет соотношению

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = 0{,}2t$$

Здесь N_0 начальное количество бактерий, t время, в сек.

a) Используя свойств логарифма запишите функцию $N(t)$, приняв $N_0 = 100$.
b) Найдите производную функции $N(t)$ и объясните соответствующую ситуацию.
c) Найдите $N'(t)$ при $t = 12$.

9. **Маржинальные затраты.** Пусть затраты (в манатах), на производство x штук музыкального инструмента тутек можно смоделировать функцией $C(x)= 5\log_2 x + 10$. Найдите маржинальные затраты для производства тутек в следующем количестве:

a) 10 b) 20

10. **Амплитуда землетрясения.** Сила землетрясения(магнитуда) определяется по формуле:

$$M = \lg\frac{A}{A_0}$$

Здесь A_0 наименьшая возможная амплитуда подземного толчка при, A - амплитуда землетрясения.

a) Найдите изменение dM/dA.

b) Объясните ситуацию соответствующую изменению dM/dA. Как изменяется dM/dA при увеличении значения A?

11. **Увеличение количество пчел.** Пусть количество пчел увеличивается согласно модели заданной функцией $N(t) = (t+200)\ln(t+2)$. Здесь t - время в днях. Найдите скорость увеличения на 5-ый и 10 день.

12. **Увеличение сбережений.** Сбережения в банке находятся под сложными процентами, с процентной ставкой r%. Следующая формула показывает время за которое сумма вклада удвоится.

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r/100)}$$

Найдите dT/dr при $r = 5$ и объясните соответствующую ситуацию.

13. Ляман говорит, что $\frac{1}{x}$ является производной обеих функций $y = \ln 5x$ и $y = \ln x$. А это значит, что эти функции одинаковые. Как вы можете объяснить ошибку Ляман.

14 **Размножение форели.** Для размножения в озеро помещено 400 форелей. Условия озера позволяют увеличить их количество до самое большее 2500 штук. Приблизительно зависимость количества рыбы от времени t (в месяцах) можно задать функцией

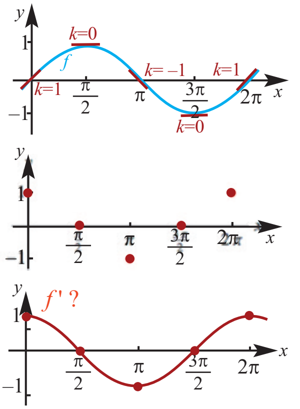
$$P(t) = \frac{2500}{1 + 5{,}25\,e^{-0{,}32t}}$$

a) Найдите количество форелей через 3 месяца, через 5 месяцев.

b) Найдите $P'(t)$ и объясните соответствующую ситуацию.

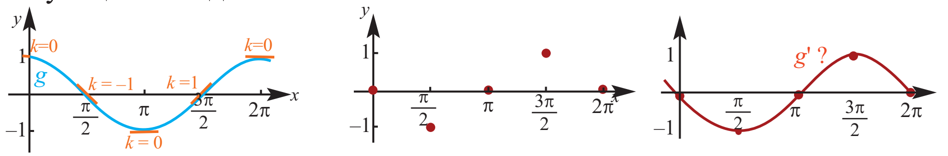
Производная тригонометрических функций

Исследование. ***Производная функции y = sinx***



1. В тетради изобразите график функции $y = \sin x$ Отметьте угловой коэффициент касательной к графику в указанных точках.
2. Изобразите новую систему координат и отметьте точки соответствующие указанным угловым коэффициентам.
3. Соедините полученные точки. Учитывая, что угловой коэффициент равен производной функции в данных точках, сделайте соответствующие выводы по поводу производной данной функции.

4. Такие же действия выполните для функции $y = \cos x$ и сделайте сопутствующие выводы.



Тригонометрические функции дифференцируемы в любой точке области определения.

Производная функции y = sinx: $\quad (\sin x)' = \cos x$

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$ *по определению производной*

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$ *тригонометрические тождества*

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x(\cos\Delta x - 1) + \cos x\sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *вынесение общего множителя за скобку*

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}\right] =$$ *свойство дроби*

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *свойство пределов*

$$= \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *так как sinx и cos x не зависят от Δx*

$$= \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x$$ *учитывая* $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = 0 \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$

Производная тригонометрических функций

Производная сложной функции $y = \sin u(x)$: $(\sin u(x))' = u'(x)\cdot\cos u(x)$

В частном случае, $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx + b)$

Пример. Найдите производную функции $y = \sin 2x$

Решение: здесь, $u = 2x$, $y' = (\sin 2x)' = \cos 2x\cdot(2x)' = 2\cos 2x$

Производная функции $y = \cos x$: $(\cos x)' = -\sin x$

Найдем производную функции у = cos$x$ *используя тождество* $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

$$y' = (\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}_{\sin x} \cdot \underbrace{(\frac{\pi}{2} - x)'}_{-1} = -\sin x$$

Производная сложной функции $y = \cos u(x)$: $(\cos u(x))' = -u'(x)\cdot\sin u(x)$

В частном случае: $(\cos(kx + b))' = -k \cdot \sin(kx + b)$

Пример. Найдите производную функции $y = \cos 4x$

Решение: здесь, $u = 4x$, $y' = (\cos 4x)' = -\sin 4x\cdot(4x)' = -4\sin 4x$

Производная функции $y = \mathrm{tg}\,x$: $(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Найдем производную функции $y = \mathrm{tg}\,x$, используя тождество $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$y' = (\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Производная сложной функции $y = \mathrm{tg}\,u(x)$: $(\mathrm{tg}\,u(x))' = \dfrac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)$

В частном случае: $(\mathrm{tg}(kx + b))' = \dfrac{k}{\cos^2(kx + b)}$

Аналогично можно показать, что

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\mathrm{ctg}\,u(x))' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x),$$

В частном случае: $(\mathrm{ctg}(kx + b))' = -\dfrac{k}{\sin^2(kx + b)}$

Пример 1. Найдите производную функции $y = 3\sin 2x - 4\cos 3x$

Решение: $y' = (3\sin 2x - 4\cos 3x)' = (3\sin 2x)' - (4\cos 3x)' =$
$= 3\cos 2x(2x)' + 4\sin 3x(3x)' = 6\cos 2x + 12\sin 3x$

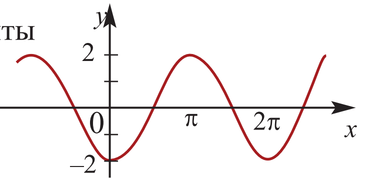
Пример 2. Найдите производную функции $y = 4\sin^3 2x$.

Решение: $y' = (4\sin^3 2x)' = 4 \cdot 3 \cdot \sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' = 12 \cdot \sin^2 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x =$
$= 24\sin^2 2x \cdot \cos 2x$

Производная тригонометрических функций

Обучающие задания

1. На рисунке дан график функции $y = -2\cos x$.



По графику найдите угловые коэффициенты касательных в заданных точках:

a) нулях функции

b) в точках максимума

c) в точках минимума

d) изобразите график производной.

2. Найдите производные функций.

a) $y = 2\sin x$ b) $y = 3\cos x$ c) $y = 2\,\mathrm{ctg}\, x$

d) $y = 3\sin 2x$ e) $y = 2\cos 3x$ f) $y = 4\,\mathrm{tg}\, 2x$

g) $y = x^2\cdot\sin x$ h) $y = x\cdot\sin 2x$ i) $y = x^2\cdot\cos 2x$

3. Найдите значение производных в заданных точках.

a) $f(x) = 4x - 2\mathrm{tg}x$, $f'(\frac{\pi}{4})$ b) $f(x) = x\cdot\cos 2x$, $f'(\pi)$

4. Найдите производные функций и вычислите угловой коэффициент в точке $x = \frac{\pi}{3}$

a) $y = \cos x$ b) $y = 2\sin x$ c) $y = \cos x - \sin x$

d) $y = -\sin 3x$ e) $y = \cos(\pi - 2x)$ f) $y = \cos(3x + 2\pi)$

5. Найдите производные функций.

a) $y = \sin x\cos x$ b) $y = \sin 3x\cdot\cos x + \cos 3x\cdot\sin x$

c) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ d) $y = \cos 3x\cdot\cos x - \cos 3x\cdot\cos x$

6. a) Покажите, что производная функции $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ равна нулю.

7. Найдите производные функций.

1) $y = \sin^2 x$ 2) $y = \cos^2 x$ 3) $g(t) = \frac{\cos t}{t}$

4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 5) $y = x\cdot\sin\frac{1}{x}$ 6) $y = x^2\cdot\cos\frac{1}{x}$

7) $y = e^{2x}\cdot\sin 2x$ 8) $y = e^{-x}\cdot\cos\frac{1}{x}$ 9) $y = x^2\cdot\sin 2x$

8. Решите уравнение $f'(x) = 0$.

a) $f(x) = x - \cos x$ b) $f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$ c) $f(x) = x + \cos 2x$

9. Задайте хотя бы одну функцию $f(x)$, производная которой равна:

a) $f'(x) = 2 + \sin x$; b) $f'(x) = \cos 2x$.

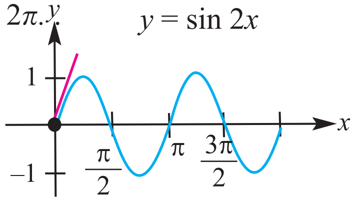
10. **Задания открытого типа.** Запишите одну сложную функцию в виде $y = \sin^n u(x)$ и найдите ее производную.

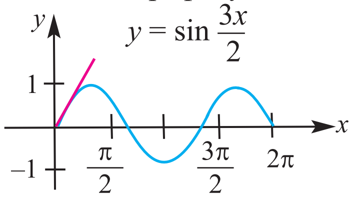
11. a) Найдите абсциссы всех точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin^2 x$ равен нулю.

b) Определите, в каких точках касательная к графику функции $f(x)=2\sin x - \sin^2 x$ горизонтальна.

c) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \sin 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

12. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции, проходящей через начало координат. Сравните полученное значение со значением углового коэффициента касательной к графику в точке $x = 2\pi$.

a) 

b) 

13. Для функции $y = x^2 \sin 2x$ найдите производную второго порядка.

14. Какая из функций является $P'(x)$ для функции
$P(x) = 1 - \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x - \mathrm{tg}^6 x + \ldots$, если $0 \le x < \frac{\pi}{4}$?

a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ c) $-\mathrm{tg} 2x$ d) $-\sin 2x$ e) $-\cos 2x$

15 Изменение глубины (в м) воды на берегу моря в зависимости от приливов и отливов можно смоделировать по функцией
$D(t) = 0{,}5 + 1{,}5 \cos \frac{\pi t}{6}$.

a) Запишите функцию dD/dt.

b) Найдите значение dD/dt при t=5 и t =10. Объясните ситуации соответствующие данным значениям.

c) Когда вода на берегу будет иметь наибольшую глубину?

16 Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2\cos x \sin 2x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$.

17 Найдите производную функции относительно θ.

a) $f(\theta) = -3\cos\theta - 2\sin\theta$

b) $f(\theta) = \frac{\pi}{2}\sin\theta - \pi\cos\theta + 2\pi$

c) $f(\theta) = 15\cos\theta + \theta - 6$

d) $f(\theta) = \frac{\pi}{4}\cos\theta - \frac{\pi}{3}\sin\theta$

Обобщающие задания

1. Найдите производные функций.

a) $h(t) = t^3 - 2t^2 + \dfrac{1}{t^2}$ b) $p(n) = -n^5 + 5n^3 + \sqrt[3]{n^2}$ c) $p(r) = r^6 - \dfrac{2}{5\sqrt{r}} + r - 1$

2. Объем шара, заполняемого воздухом равен $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Здесь r - радиус шара (в сантиметрах).

a) Найдите мгновенное изменение объема шара при $r = 1{,}5;\ 6;\ 9$.

b) Постройте график функции $V(r)$ и изобразите касательные в точках, указанных в пункте a.

3. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = (6x - 3)(-x^2 + 2)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

4. Найдите значение $f''(-2)$ для функции $f(x) = (4 - x^2)(3x + 1)$.

5. Найдите производные функций.

a) $q(x) = \dfrac{-7x + 2}{(4x^2 - 3)^3}$ b) $y = \dfrac{8x^3}{\sqrt{3x - 2}}$ c) $m(x) = \dfrac{(-x + 2)^2}{(3 + 5x)^4}$

6. Найдите производные сложных функций, используя запись Лейбница.

a) $y = u^2 + 3u$; $u = \sqrt{x - 1}$; $x = 5$ b) $y = \sqrt{2u}$; $u = 6 - x$; $x = -3$

7. Найдите производные функций.

a) $y = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x$

d) $y = \sin^4 \theta$ e) $y = \sin^3 4\theta$ f) $y = 3\sin^2 2\theta$

8. Найдите производные функций.

a) $y = -2e^{-\frac{1}{2}x}$ b) $f(x) = x^3e^{2x} - x^2e^{-2x}$

c) $g(x) = 2xe^{\sin x}$ d) $y = e^x\cos(2x)$

9. Если сегодня купить самый современный компьютер, то через некоторое время можно увидеть, что его цена уменьшится. Изменение цены компьютера в зависимости от времени можно задать функцией $A(t) = 900e^{-t/3}$.

a) Найдите начальную цену компьютера.

b) Сколько будет стоить компьютер через 1 год ?

c) Через сколько лет цена компьютера уменьшится в 2 раза? Найдите скорость уменьшения цены компьютера на этот момент.

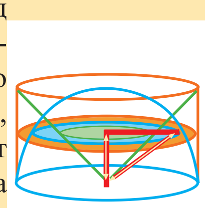
6 Фигуры вращения
Цилиндр, конус, шар

- Фигуры вращения
- Цилиндр
- Площадь поверхности цилиндра
- Конус
- Площадь поверхности конуса
- Сечение цилиндра и конуса плоскостью
- Усеченный конус. Поверхность усеченного конуса
- Шар
- Площадь поверхности шара
- Площадь поверхности комплексных фигур
- Подобие пространственных фигур

Математический словарь

ось вращения	конус	шар
фигуры вращения	образующая	больший круг
цилиндр		сегмент шара
боковая поверхность		шаровой слой
полная поверхность		

Это интересно! Великий греческий ученый Архимед был очень взволнован, когда он обнаружил, что площадь поверхности и объем цилиндра, описанного около шара относятся как 2:3. Великий математик, физик, инженер, Архимед, среди всех своих работ самой значимой считал именно эту. Он завещал на своей могильной плите выгравировать шар и цилиндр. Из истории известно, что долгое время его родной город Сиракузы, располагающийся на Сицилии, противостоял римлянам именно благодаря оружию, которое изобрел Архимед. Поэтому при взятии города римский военачальники приказал не трогать Архимеда. Но римский воин, который не знал Архимеда в лицо, убил его.



Великий философ и писатель Цицерон потратил много времени, чтобы отыскать могилу Архимеда (по историческим сведениям он нашел ее через 137 лет). Это дело Цицерона стало идеей для работ многих художников.

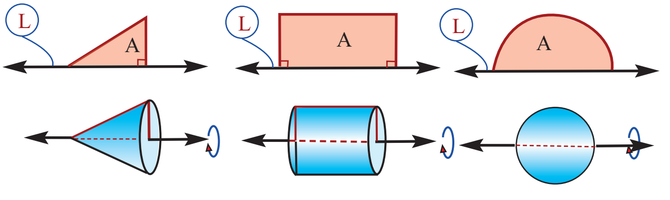
Фигуры вращения

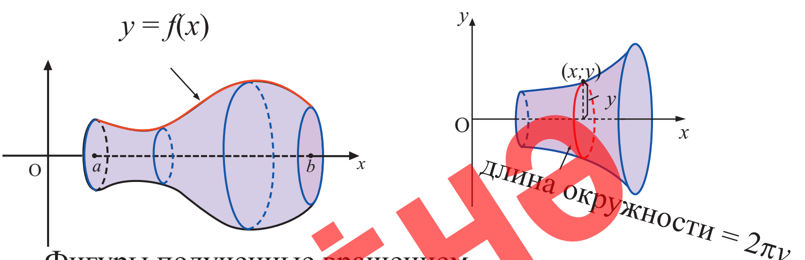
Гончарное ремесло позволяет создавать керамическую посуды из куска глины. Форму глиняной лепешке придают вращением вокруг оси. Затем полученную форму обжигают. Это ремесло живо до сих пор. В различных районах Азербайджана есть ремесленники, которые изготавливают керамическую посуду. Исследуем принцип работы по которому кусок глины приобретает какую-либо форму.

https://www.youtube.com/watch?v=4Qiu4iFeXl0

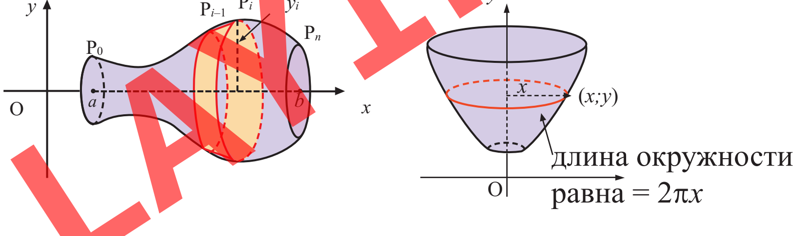
Плоские фигуры (плоская часть ограниченная кривой), совершая один полный оборот вокруг определенной оси, образуют пространственные фигуры. Эта ось называется осью вращения. Цилиндр, конус и сфера являются простыми пространственными фигурами, полученными при вращении.

Например, при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов получается конус, при вращении прямоугольника вокруг стороны образуется цилиндр, а при вращении полукруга - шар.





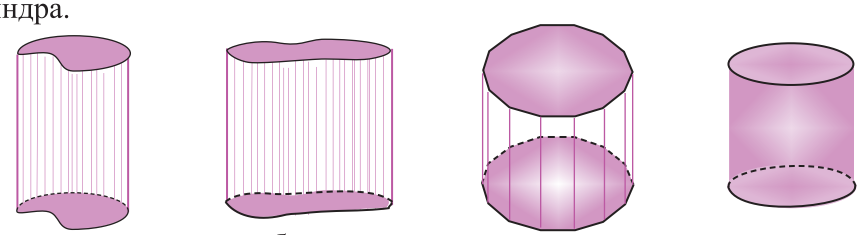
Фигуры полученные вращением



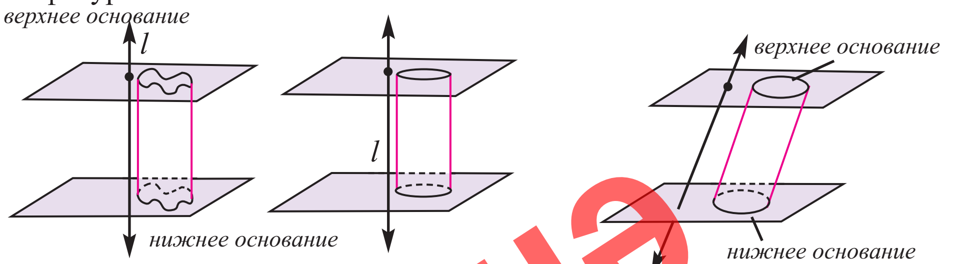
Цилиндр

Наглядно образование фигур вращения можно увидеть на примере крутящейся стреляной двери, которые мы часто видим в общественных зданиях, отелях и больницах. Одна из дверей одной стороной прикрепленная к неподвижной металлической стойки при вращении образует цилиндр.

Цилиндром называется пространственная фигура, образованная двумя параллельным и конгруэнтными плоскими фигурами, и отрезками соединяющим соответствующие точки данных фигур. Плоские фигуры называются **основаниями** цилиндра, отрезки, соединяющие соответствующие точки называются **образующими** цилиндра. Если образующая перпендикулярна основаниям, то цилиндр называется прямым, иначе - наклонным. Расстояние между основаниями называется **высотой** цилиндра.

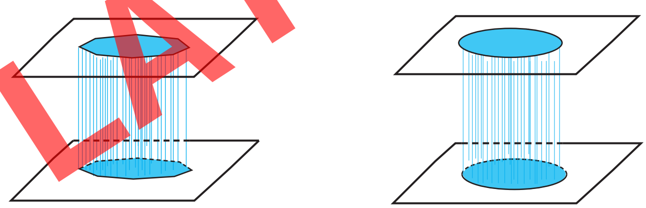


На рисунках ниже изображены прямые и наклонные цилиндрические фигуры.



Прямой цилиндр **Наклонный цилиндр**

Сравнивая рисунки изображенные ниже можно сделать вывод, что призму можно рассматривать как частный случай цилиндра.

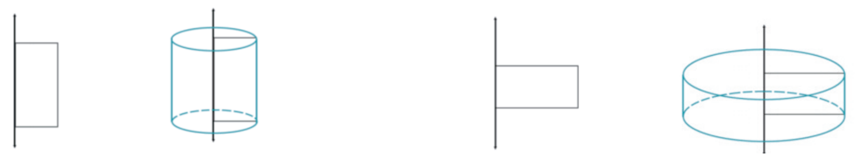


Цилиндр

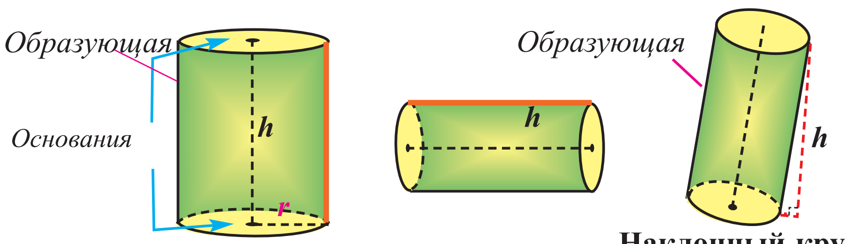
Прямой цилиндр, в основании которого лежат круги, называют прямым круговым цилиндром.
Далее, говоря о цилиндре, мы будем иметь ввиду прямой круговой цилиндр. В любом другом случае будут отмечены особенности.

Прямой круговой цилиндр также можно рассматривать как фигуру , полученную вращением прямоугольника вокруг одной из сторон.
Высота прямого кругового цилиндра равна его образующей.
Радиус основания цилиндра называется **радиусом цилиндра**.

Вращая прямоугольник вокруг любой стороны, можно получить цилиндр, высота которого равна стороне прямоугольника.



Прямая, выходящая из центра основания цилиндра называется осью цилиндра.



Прямой круговой цилиндр

Наклонный круговой цилиндр

Обучающие задания

1. Образующая наклонного цилиндра длиной 12 см, составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту цилиндра.

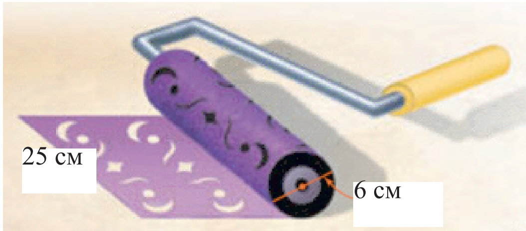
2. Найдите высоту и диаметр основания цилиндра, полученного вращением прямоугольного треугольника, вокруг одного из катетов, если катеты равны 3 см и 4 см (рассмотрите два случая).

3. Прямоугольный лист бумаги, стороны которого равны 20 см и 30 см свернули в форме цилиндра. Найдите радиус основания полученного цилиндра (рассмотрите два случая). Результат округлите до сотых.

Площадь поверхности цилиндра

Площадь полной поверхности и боковой поверхности цилиндра.

Изобразите или приклейте на листе бумаге развертку цилиндров различных размеров.

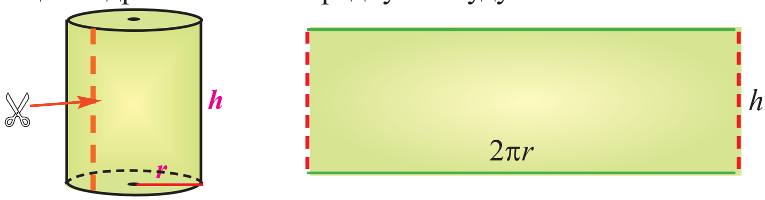


Мустафа красит стену цилиндрической кистью. Чтобы посчитать время, которое он потратил на покраску, он захотел узнать какую площадь покрывает кисть при одном полном обороте? Какие советы вы могли бы дать мальчику?

Так как кисть имеет цилиндрическую форму, то за один полный оборот кисть покрывает площадь в форме прямоугольника, равную боковой поверхности цилиндра.

Полная поверхность цилиндра находится по формуле схожей с формулой полной поверхности призмы. Полная поверхность цилиндра состоит из боковой поверхности и двух конгруэнтных кругов.

Боковую поверхность цилиндра можно рассматривать как свернутый в окружность радиусом r прямоугольник. Тогда размеры боковой поверхности цилиндра высотой h и радиуса r будут $2\pi r$ и h .



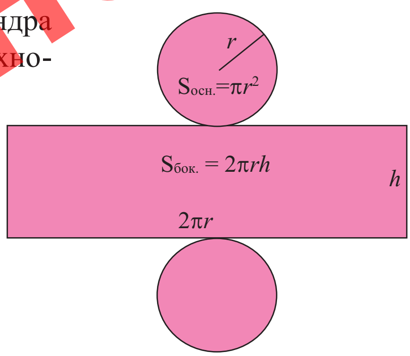
Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания и высоты.

$$S_{бок.} = 2\pi rh$$

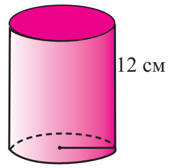
Площадь **полной поверхности** цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей оснований.

$$S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$$

$$S_{п.п.} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$



Пример 1. **Найдите площадь полной поверхности цилиндра выстой 12 см и радиусом 5 см.** Н



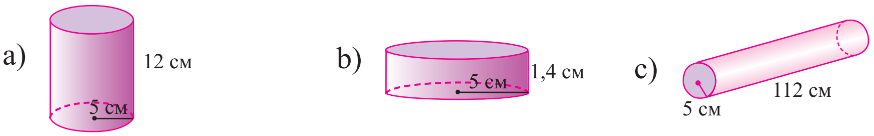
Решение: $S_{бок.} = 2\pi rh \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 12 = 376{,}8$ (см²)

$S_{осн.} = \pi r^2 \approx 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5$ (см²)

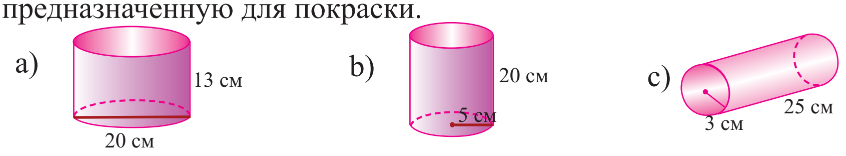
$S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} \approx 376{,}8 + 157 = 533{,}8$ (см²)

Обучающие задания

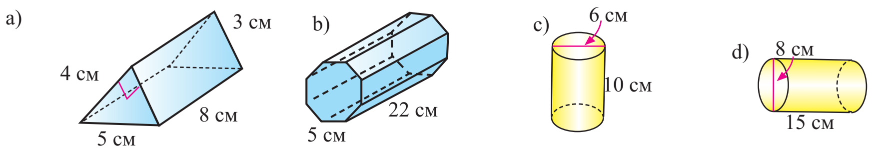
1. Найдите площадь полных поверхностей цилиндров на рисунке.



2. Посуда на рисунке имеет вид цилиндра без верхнего основания. Ее надо покрасить как внутри, так и снаружи. Найдите общую площадь, предназначенную для покраски.



3. Найдите площади полных поверхностей цилиндров и призм.



Прямая треугольная призма *Прямая шестиугольная призма*

4. Если радиус основания цилиндра увеличить в 2 раза, то:
a) во сколько раз изменится боковая поверхность?
b) во сколько раз изменится полная поверхность?

5. Радиус основания цилиндра на 10 см больше высоты, а площадь полной поверхности равна 144π см². Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

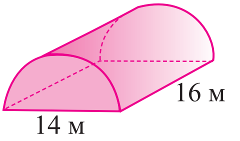
6. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра равна 10 см, а одна из сторон прямоугольника 6 см. Найдите площадь полной поверхности этого цилиндра. Рассмотрите все возможные случаи.

7. Найдите отношение площади боковой поверхности к площади полной поверхности цилиндра, высота которого равна диаметру основания.

8. Коробка имеет форму цилиндра, радиусом 6 см и высотой 14 см. При изготовлении коробки картон не использовали только на верхнее основание. Какое наименьшее количество картона было использовано?

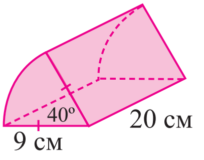
Прикладные задания

Пример. Найдите площадь боковой поверхности фигуры цилиндрической формы, основанием которой являются полуокружности, на рисунке.



Решение: $S_{\text{бок. сеч.}} = \pi rh + 2rh = \pi \cdot 7 \cdot 16 + 14 \cdot 16 = 112\pi + 224 \approx 575{,}68$ (м²)

Пример. Найдите площадь полной поверхности фигуры прямой цилиндрической формы, размеры которого указаны на рисунке.



Решение: основанием фигуры является сектор круга равны 40°. По формуле площади сектора:

$$S_{\text{осн.}} = \frac{\theta}{360}\pi r^2 = \frac{40}{360} \cdot \pi \cdot 9^2 = 9\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

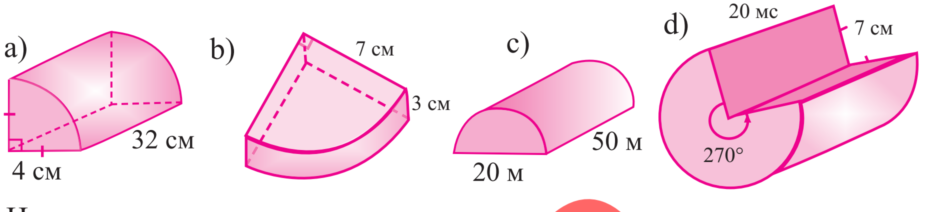
Боковая поверхность фигуры равна $\frac{1}{9}$ части боковой поверхности цилиндра с радиусом основания 9 см и высотой 20 см плюс площадь двух конгруэнтных прямоугольников размерами 9 см × 20 см.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{9} \cdot 2\pi \cdot 9 \cdot 20 + 2 \cdot 9 \cdot 20 = 40\pi + 360 \text{ (см}^2\text{)}$$

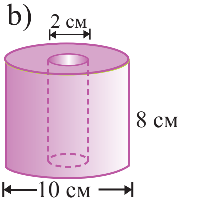
Таким образом,

$$S_{\text{п.п.}} = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2 \cdot 9\pi + 40\pi + 360 = 58\pi + 360 \approx 542{,}21 \text{(см}^2\text{)}$$

9. По рисунку найдите площадь боковой и полной поверхности фигур.



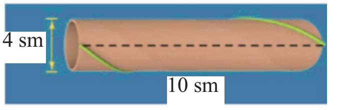
10. Некоторые детали для машин и механизмов имеют вид полого цилиндра. Боковая поверхность полого цилиндра находится как сумма внутренних и внешних боковых поверхностей, а для нахождения площади основания используется разность радиусов. Принимая во внимание все сказанное найдите: a) площадь боковой и полной поверхности полого цилиндра на рисунке .
b) Запишите формулу нахождения боковой и полной поверхности полого цилиндра.



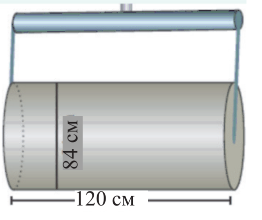
11. Диаметр трубы дымохода равен 70 см, а высота 20 м. Сколько квадратных метров железного листа надо для изготовления дымохода, если при изготовлении 5% железа теряется?

12. Машина асфальтоукладчик состоит из двух цилиндрический частей- для укладки и для утрамбовки асфальта. Высота большего цилиндра 1,25 м, а диаметр 1,5 м. Поверхность какой площади выравнивает эта часть, за один оборот?

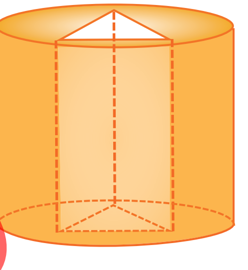
13. Подарочная коробка имеет форму цилиндра. Для того, чтобы развернуть оберточную бумагу на него по прямой прикреплена лента. От нижнего конца ленты вокруг цилиндра намотана (в один слой) цветная веревка, которая заканчивается в другом конце ленты. Найдите длину веревки, если диаметр основания равен 4 см, а высота 10 см. Указание: определите геометрический смысл веревки по развертке цилиндра. .



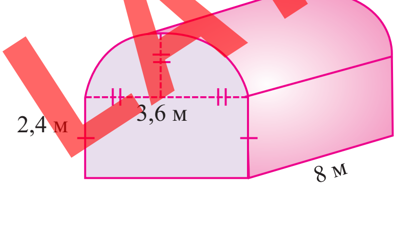
14. Для выравнивания площадки для игры цилиндрический барабан должен совершить 500 полных оборотов. Какова площадь игрового поля?



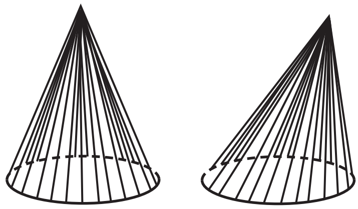
15. Внутри цилиндра радиуса 10 см и высотой 12 см вырезали плоскость в форме прямой треугольной призмы, как показано на рисунке. Стороны основания призмы 3 см, 4 см и 5 см. Надо покрасить всю поверхность полученной фигуры. Какова площадь поверхности, которую надо покрасить?



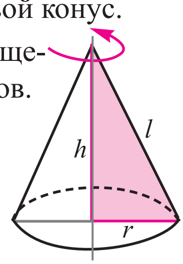
16. Теплица, размеры которой указаны на рисунке покрыта полиэтиленовой пленкой. Полиэтилен продается в рулонах шириной 2 м и длиной 15 м. Сколько рулонов полиэтилена надо купить?



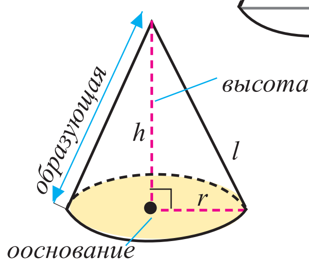
Конусом называется пространственная фигура, образованная всеми отрезками, соединяющими какую-либо плоскую фигуру с точкой, не принадлежащей данной плоскости. Плоскую фигуру называют **основанием** конуса, а точку - **вершиной** конуса. Перпендикуляр, проведенный из вершины конуса на его основание называется **высотой** конуса. Конус, в основании которого лежит круг, называется **круговым** конусом. Если проекция вершины конуса лежит в центре основания, то конус называется **прямым круговым конусом**. Отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой на окружности основания кругового конуса, называется **образующей** конуса. В дальнейшем, говоря о конусе будем иметь ввиду прямой круговой конус.



Конус можно рассматривать как фигуру, образованную вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.



Прямая, выходящая из вершины конуса и проходящая через центр основания называется осью конуса, радиус основания называется радиусом конуса. Для образующей конуса, высоты и радиуса верно справедливо отношение $l^2 = h^2 + r^2$ (по теореме Пифагора)



Сооружение конуса

Известно, что при сворачивании прямоугольника можно получить цилиндр. Скручивая круговой сектор можно соорудить конус.

Радиус сектора равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания.

Проектная работа. Исследование связи между круговым сектором и образующей конуса и радиусом основания конуса.

1. Пусть конус сооружен из кругового сектора, с радиусом R и центральным углом $\alpha°$. По какой формуле можно вычислить радиус основания конуса?

- Длина дуги сектора равна $\dfrac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$.
- Длина дуги сектора также равна длине окружности основания конуса. Найдите радиус основания.

$$2\pi r = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R, \qquad r = \frac{\alpha}{360} R$$

✔ Найдите длину образующей и радиус основания конуса, образованного из кругового сектора с радиусом 12 см и центральным углом 45°.

2. Пусть r радиус основания конуса, а l- образующая конуса. Чему равен центральный угол, соответствующий круговому сектору, образующему боковую поверхность конуса. Запишите общую формулу.

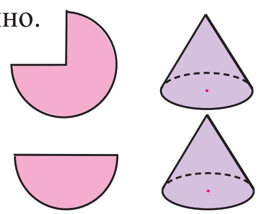
$$\frac{x}{360} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

✔ Сколько градусов составляет центральный угол кругового сектора, из которого образован конус, радиус основания которого равен 10 см, а высота 25 см?

✔ Определите отношение между радиусом и образующей конуса, образованного из полуокружности.

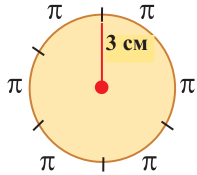
✔ Айша утверждает, что А “круговому сектору с центральным углом 60° и радиусом 18 см, соответствует конус, радиус основания которого равен 3 см, так как ответ можно получит разделив 18 на 6.” Верно ли решение, предложенное Айшей? Ответ обоснуйте письменно.

3) Какой конус выше?
Конус, образованный из полуокружности или конус, образованный из трех четвертей той же окружности? Ответ обоснуйте .

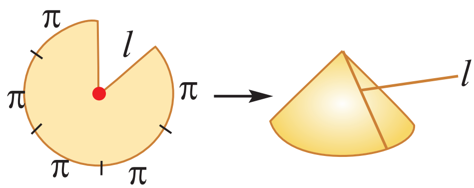


Практическое занятие. Конус. Площадь поверхности конуса.

- На листе бумаги изобразите круг радиусом 3 см.
- Разделите круг на 6 равных частей.
- Длина окружности круга будет равна $2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Длина каждой дуги равна π. Отметьте эти размеры на окружности.



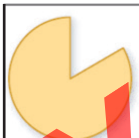
- Вырежьте одну часть, как показано на рисунке и сделайте конус.



a) Основание конуса должно быть в форме круга. Покажите, что длина этой окружности равна 5π.
b) Найдите радиус основания.
c) Найдите площадь круга.
d) Найдите площадь круга, оставшегося после того, как из него удалили одну часть.
e) Объясните геометрически боковую поверхность конуса.
f) Объясните полную и боковую поверхность, включая основание конуса.

Теперь соорудите различные конусы, деля круг на различное количество равных частей и сделайте различные конусы.

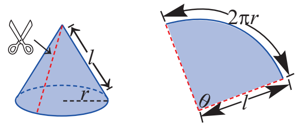
a) Измерьте радиус основания конуса.
b) Измерьте образующую конуса.

					
Радиус основания					
Образующая					
Площадь поверхности					

Площадь поверхности конуса

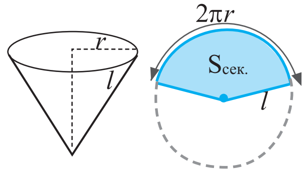
Боковая поверхность конуса, полная поверхность конуса.

Поверхность конуса состоит из боковой поверхности и круга в основании.
На рисунке показаны радиус основания r и образующая l.



Боковая поверхность конуса круговой сектор, с радиусом l и соответствующим центральным углом θ.
Значит, площадь сектора и есть площадь боковой поверхности.

- Сектор радиуса l является частью круга длиной $2\pi l$.
- Длина дуги сектора равна длине окружности круга в основании конуса $2\pi r$.
- Найти какую часть сектор составляет от всего круга можно найдя отношение длины дуги к длине окружности.



$$\frac{\text{длина дуги сектора}}{\text{длина всей окружности}} = \frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{r}{l}$$

Значит, сектор составляет $\frac{r}{l}$ часть окружности

- Зная, что площадь круга πl^2, тогда $\frac{r}{l}$ часть площади круга будет $\pi l^2 \cdot \frac{r}{l}$. $S_{\text{бок.}} = \pi l^2 \cdot \frac{r}{l} = \pi l r$

$$S_{\text{бок.}} = \pi l r$$

Боковая поверхность конуса равна произведению половины длины окружности и образующей.

- Площадь полной поверхности конуса

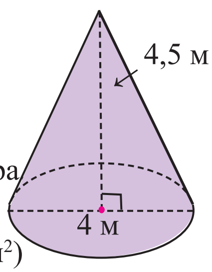
$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = \pi l r + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

$S_{\text{п.п.}} = \pi l r + \pi r^2$ или $S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r)$

Пример. По рисунку найдите площадь боковой и полной поверхности конуса.

Решение: Дано: $d = 4$ м, $h = 4{,}5$ м

Найти: $S_{\text{бок.}}$ и $S_{\text{п.п.}}$



$$S_{\text{бок.}} = \pi l r \text{ и } S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r)$$

Чтобы найти образующую l, применим теорему Пифагора

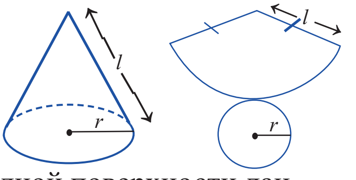
$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{24{,}25}$$

$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot \sqrt{24{,}25} \cdot 2 = \pi \cdot \sqrt{97}$ (м²); $S_{\text{п.п.}} = \pi \cdot (\sqrt{97} + 4)$ (м²)

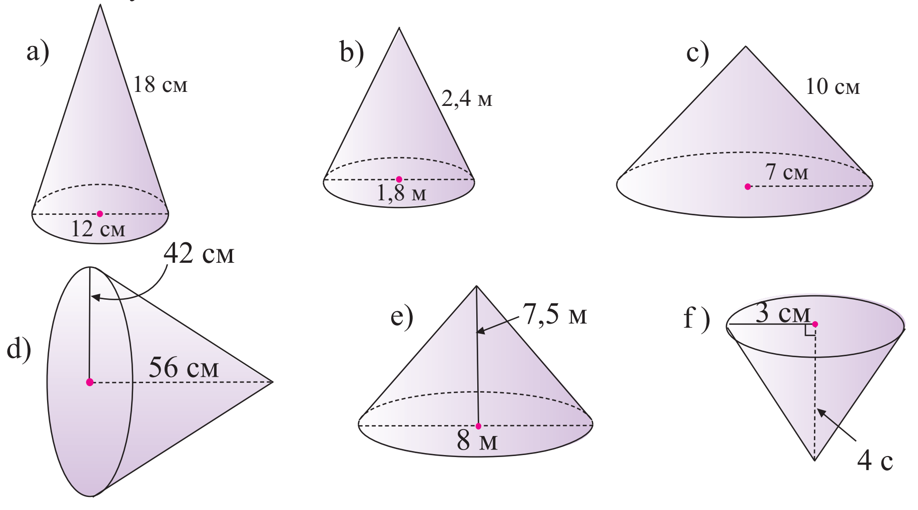
Площадь поверхности конуса

Обучающие задания

1. Дан круговой сектор радиусом 25см и длиной дуги 14π.
a) Сколько градусов составляет центральный угол сектора?
b) Найдите радиус основания и боковую поверхность конуса, образованного этим сектором.
c) Найдите высоту конуса.
d) Найдите полную поверхность конуса.



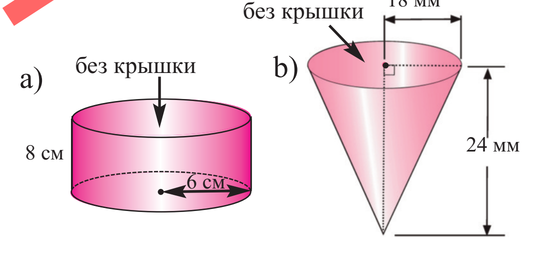
2. По данным рисунка найдите площадь полной поверхности данных конусов.



3. Какую формулу удобнее использовать для нахождения полной поверхности конуса, при вычислении на калькуляторе:
$\pi lr + \pi r^2$ или $\pi r(l + r)$?Запишите свое мнение.

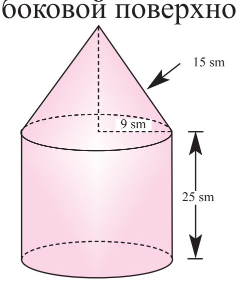
4. Запишите формулу:
a) выражающую зависимость образующей конуса от боковой поверхности и радиуса основания;
b) выражающую зависимость радиуса основания конуса от боковой поверхности и образующей.

5. По данным рисунка, найдите внутреннюю поверхность посуды в виде цилиндра и конуса (



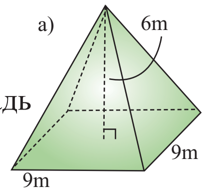
6. **Вопрос открытого типа.** Образующая конуса относится к радиусу как $\frac{5}{14}$. Напишите два значения, соответствующие боковой поверхности конуса.

7. На рисунке представлена фигура, состоящая из комбинации цилиндра и конуса. По данным рисунка найдите полную поверхность фигуры.

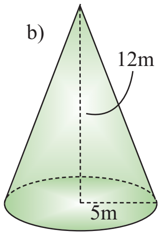


8. Найдите площадь боковой и полной поверхности конуса,высота которого равна 80 см, а диаметр 120 см.

9. По данным рисунка найдите площадь полной поверхности фигур.



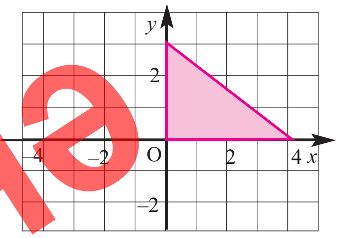
правильная четырехугольная пирамида



10. Найдите поверхность фигуры, полученной вращением прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг гипотенузы.

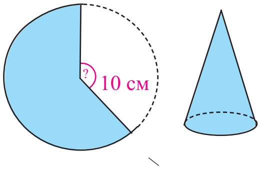
11. Часть плоскости вращается вокруг следующих осей и в каждом случае получается пространственная фигура. Изобразите полученную фигуру. Найдите полную поверхность и запишите ответ при помощи π.

a) вокруг оси y b) вокруг оси x
c) вокруг прямой $x = 4$
d) вокруг прямой $y = 3$



12. Боковая поверхность конуса имеет площадь 10 см^2. Развертка конуса образует сектор, с центральным углом $36°$. Найдите полную поверхность конуса.

13. Боковая поверхность конуса 64π см^2, радиус сектора, являющейся разверткой равен 10 см. Найдите величину центрального угла.

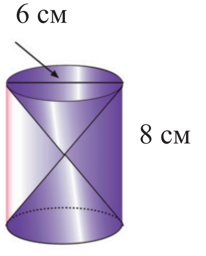


Прикладные задания

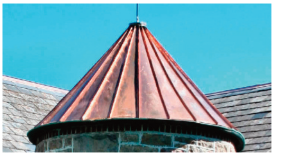
14. Докажите, что площадь боковой поверхности конуса, образованного из полуокружности равна двум площадям основания.

15. Лейла хочет сделать шапку для куклы в форме конуса. Чему равна площадь поверхности бумажной шапки в виде конуса, если радиус основания конуса равен 8 см, а образующая 30 см?

16. Песочные часы сделаны из стекла. Их поместили внутри цилиндра, как показано на рисунке. На что было потрачено больше стекла - на конус или на цилиндр?

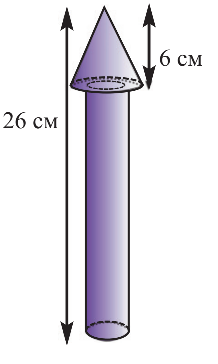


17. Крыша сооружения имеет форму конуса, высота которого 3 м, а радиус основания 1,5 м. Крыша покрыта черепицей. Найдите площадь черепицы.



18. В куб с ребром 10 см вписаны следующие фигуры:
а) правильная пирамида (основание квадрат куба) b) конус
Основание вписанной фигуры находится на одной из граней куба, а вершина на противоположной грани. Изобразите соответствующий рисунок. Найдите боковую и полную поверхность вписанной фигуры.

19. Модель ракеты на рисунке состоит из цилиндра и конуса. Высота цилиндра 20 см, высота конуса 6 см. Диаметр цилиндра 3 см, диаметр конуса 5 см. цилиндрическая часть ракеты должна быть покрашена красным цветом, а часть ракеты в виде конуса - оранжевым. Для каждого из цветов найдите площадь поверхности, которую надо покрасить



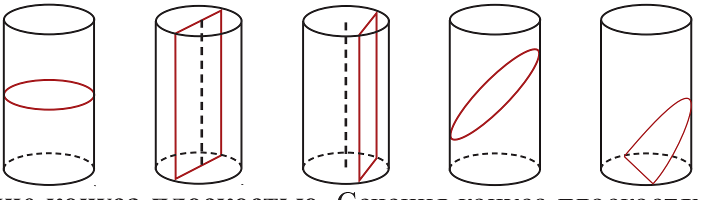
20. Цилиндр и конус имеют и одинаковую высоту равную единице, и одинаковый радиус $\sqrt{3}$ единиц. Обозначьте боковую поверхность цилиндра через x, а боковую поверхность конуса через y. Сравните полученные выражения. записав в виде неравенства.

Теория конических сечений была одной из вершин античной геометрии. Наиболее полное исследование было проведена Аполлоием (3-й в.до н.э.) . При пересечении конуса, образующие которого-лучи с плоскостью получится эллипс (если плоскость пересекает все образующие конуса), парабола (если плоскость параллельна одной из образующих), гипербола(если плоскость параллельна двум из образующих).

Сечение цилиндра плоскостью. Сечения цилиндра плоскостями, параллельными основаниям являются кругами.

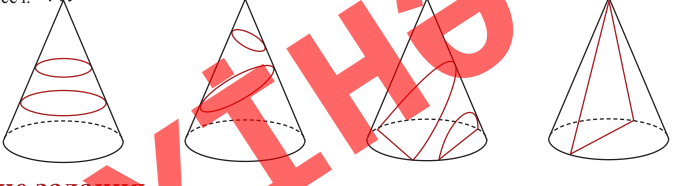
Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось симметрии называется **осевым сечением**. Осевое сечение цилиндра является прямоугольником со сторонами h и $2r$. Значит, $S_{ос.сеч.} = 2\,rh = S_{бок.}/\pi$.

Цилиндр, осевое сечение которого является квадратом ($h = 2r$), называется равносторонним цилиндром. На рисунках ниже представлены различные сечения цилиндра плоскостями.



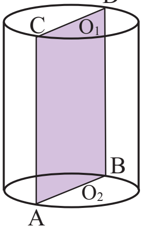
Сечение конуса плоскостью. Сечения конуса плоскостями параллельными основанию являются кругами, сечения параллельные оси симметрии -треугольниками.

Сечение конус, проходящее через ось симметрии называется осевым сечением конуса. Это сечение является равнобедренным треугольников, боковые стороны которого являются образующими, а основание равно диаметру конуса. Если осевое сечение конуса является правильным треугольником (l = r), то конус называется равносторонним конусом. $S_{ос.сеч.}=rh$



Обучающие задания

1. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь осевого сечения цилиндра равна 14 м^2.



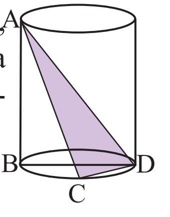
2. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстояние 4 см от нее.

3. Отношение площади основания на площадь осевого сечения конуса равно π. Найдите угол наклона образующего к плоскости основания

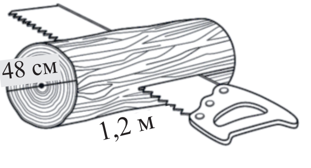
4. Высота конуса 20 см, радиус его основания 25 см. Найдите площадь сечения, проводимого через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равна 12 см.

5. Радиус основания равностороннего конуса равна R. Найдите площадь сечения проходящего через две образующие, угол между которыми 30°.

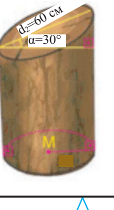
6. Высота цилиндра AB, диаметр BD. Зная, что AB = 4 см, BD = 6 см и CD = 4 см, найдите площадь треугольника ACD. **Указание**: используя теорему о трех перпендикулярах, докажите, что ΔACD прямоугольный.



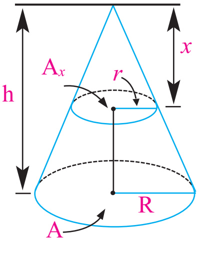
7. Полено имеет форму цилиндра. Диаметр цилиндра равен 48 см, а длина 1,2м. Полено разрезали пополам, как показано на рисунке. Найдите площадь полной поверхности одной части.



8. Пень для рубки дров на рисунке сделан из сломанного дерева при помощи пилы. Найдите радиус основания по данным на рисунке.

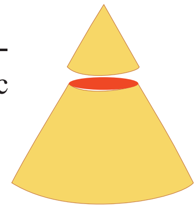


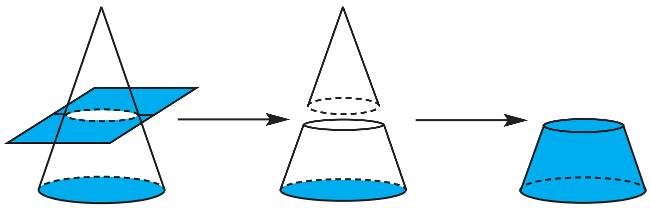
9. Высота конуса равна h. Площадь основания S. На расстоянии x от вершины параллельно основанию проведена плоскость, которая рассекает конус. Если площадь отрезанной части равна S_x, то докажите следующее $\frac{S_x}{S} = \frac{x^2}{h^2}$.

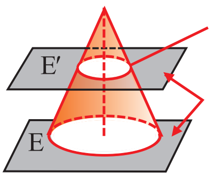


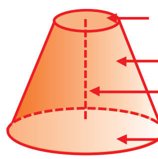
Усеченный конус

Если провести параллельно основанию прямого кругового конуса плоскость, то получим маленький конус и усеченный конус.



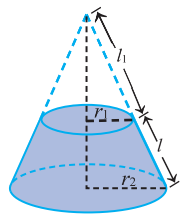






Усеченный конус - это фигура, которая остается между основанием и плоскостью сечения конуса.

Боковая поверхность усеченного конуса равна разности боковой поверхности большого конуса и отделенного от него плоскостью, параллельной основанию маленького конуса. Используя обозначения на рисунке это можно записать так:



$$S_{бок} = \pi r_2(l + l_1) - \pi r_1 l_1 = \pi\,[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

Запишем следующее отношение $\dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{l + l_1}{r_2}$ из подобия треугольников

Тогда подставив $l_1 r_2 = r_1(l + l_1)$ или $(r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$ в формулу для нахождения боковой поверхности, получим:

$$S_{yan} = \pi\,(r_1 l + r_2 l) = \pi\, l(r_1 + r_2)\,.$$

В данной формуле введем обозначение средний радиус усеченного конуса (среднее арифметическое радиусов конуса). Тогда

$$S_{бок} = 2\pi\, r l\,, \text{ здесь } r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Полная поверхность усеченного конуса равна сумме боковой поверхности площадей нижнего и верхнего оснований.

$$S_{tam} = \pi\, l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

Усеченный конус и площадь поверхности

Пример. Конус высотой 8 см и радиусом 6 см рассечен плоскостью, параллельной основанию. Высота полученного усеченного конуса равна 4 см. Найдите площадь боковой и полной поверхностей усеченного конуса

Решение: Дано: $r_2 = 6$, h = 8 см, $h_{ус.кон} = 4$ см

Найти: $S_{бок.} = ?$

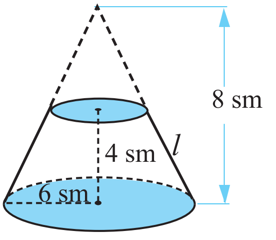
$S_{п.п.} = ?$

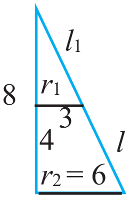
$S_{бок} = \pi\, l(r_1 + r_2)$

$l_1 = l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$S_{бок} = 5(3 + 6)\,\pi = 45\pi$

$S_{п.п.} = 36\pi + 9\pi + 45\pi = 90\pi$





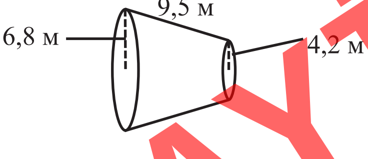
Обучающие задания

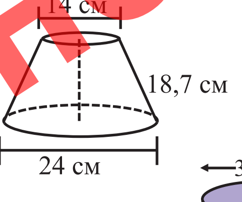
1. a) Образующая усеченного конуса 4 см, длины окружностей основания 18 см и 6 см. Найдите площадь боковой и полной поверхностей конуса. Примите $\pi = \dfrac{22}{7}$.

b) Высота усеченного конуса 4 см, радиусы окружностей основания 3 см и 6 см. Найдите площадь боковой и полной поверхностей конуса.

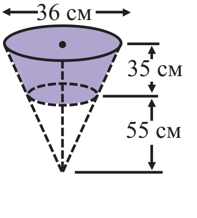
2. Шапка сделана в виде открытого бумажного колпачка в форме конуса. Радиус нижнего основания равен 4 см, радиус верхнего основания равен 10 см. Образующая усеченного конуса 15 см. Сколько квадратных сантиметров бумаги использовали для этой шапки?

3. По данным рисунка найдите площади боковых и полных поверхностей усеченных конусов.

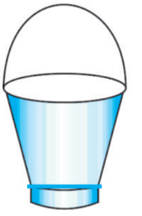




4. По данным рисунка найдите площади боковых и полных поверхностей усеченного конуса.



5. Ведро без крышки имеет форму усеченного конуса. Радиус нижнего основания 20 см, радиус верхнего основания 40 см. Высота ведра 40 см. Сколько манат надо приблизительно тратится на изготовление одного такого ведра, если цена $1 м^2$ материала равна 0,5 манат?



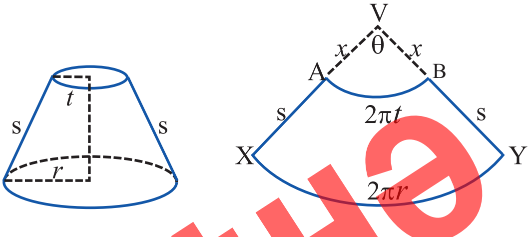
6. Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая находятся в отношении 1:4:5. Зная, что высота конуса равна 8 см, найдите $S_{бок.}$

7. Полная поверхность усеченного конуса равна $572\ \pi м^2$, а радиусы основания 6 м и 14 м. Найдите высоту усеченного конуса.

8. Найдите полную поверхность усеченного конуса, если боковая поверхность равна S, а радиусы оснований R и r .

9. Образующая усеченного конуса равна 5 см, а радиусы оснований 1 см и 5 см. Найдите радиус основания цилиндра, если высота и площадь боковой поверхности которого равна высоте и площади боковой поверхности данного усеченного конуса.

10. Фигура ABYX развертка боковой поверхности усеченного конуса.



a) Запишите зависимость длин дуг AB и XY от угла θ. Покажите, что для θ в радианах справедливо равенство $\theta = \dfrac{2\pi(r-t)}{s}$.

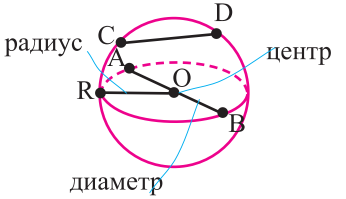
b) Используя равенство выше и подобие треугольников покажите, что $x = \dfrac{st}{r-t}$

c) Найдите площади секторов AVB и XVY и используя это найдите площадь ABYX, другими словами найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

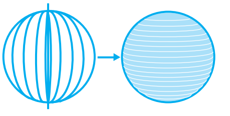
Шар

Шаром называется множество точек пространства находящихся на расстоянии, не большем данного от данной точки. Заданная точка называется **центром шара**, заданное расстояние **радиусом шара**.

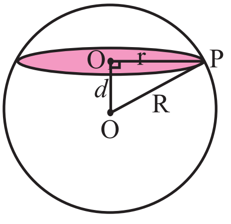
Радиус шара OR, отрезок соединяющий центр шара с любой точкой на поверхности шара.
Прямая, соединяющая любые две точки на поверхности шара называется **хордой** (CD).
Хорда проходящая через центр шара называется **диаметром** шара (AB).



Шар так же как и цилиндр и конус является пространственной фигурой, образованной вращением части плоскости вокруг оси. Шар получается, при вращении полуокружности вокруг диаметра.

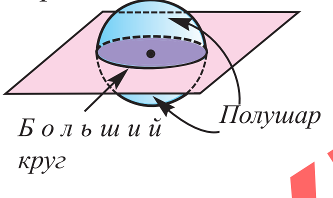


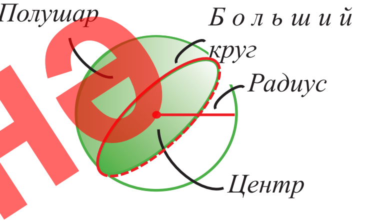
Сечением шара любой плоскостью всегда является круг. Если R-радиус шара, d-расстояние плоскости от центра, r-радиус сечения, верно равенство $r^2 = R^2 - d^2$



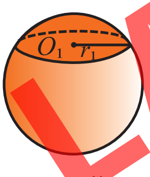
Пример. Шар радиуса 10 см пересечена плоскостью на расстояние 8 см от центра. Вычислите площадь сечения.

Решение: По условую R = 10, d = 8.
Тогда $S_{сеч} = \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - d^2) = \pi \cdot (10^2 - 8^2) = 36\pi(см^2)$
Среди данных плоскостей, плоскость пересекающая центр шара является самым большим кругом и называется **большим кругом**. Центр, радиус и диаметр большего круга равны центру, радиусу и диаметру шара.

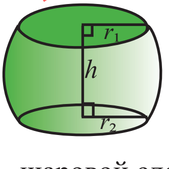




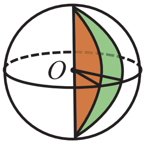
Также для шара известно следующее:



шаровой сегмент



шаровой слой



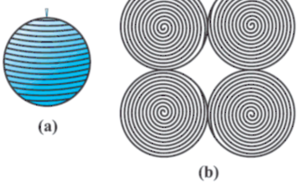
ломтик от шара

Площадь поверхности шара

Практическое занятие. Работа в группах

Покрытие поверхности мяча веревкой.

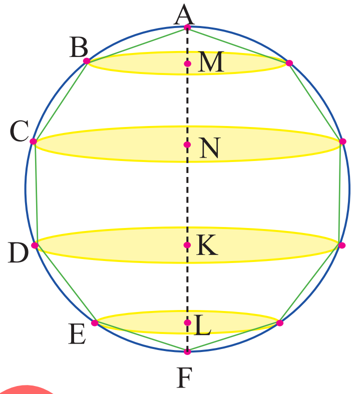
Необходимые материалы: мяч, веревка, лист бумаги.



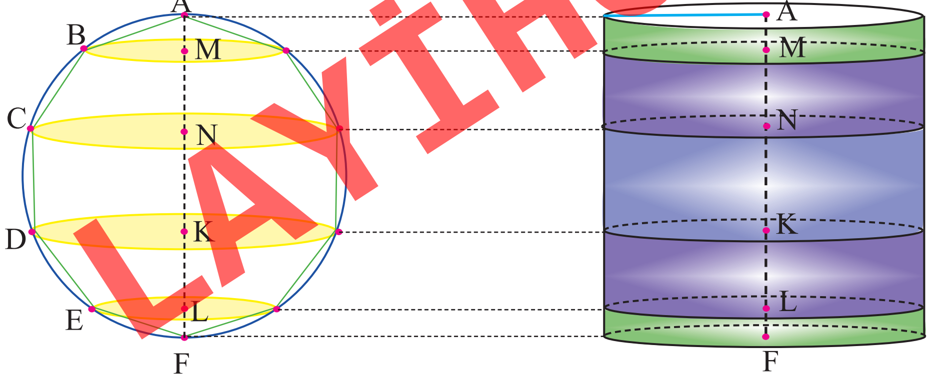
1. Каждой группе дается мяч. Мяч обматывается веревкой таким образом, чтобы не было наложений, но и не оставалось пустот. Мяч из кожи и материи удобнее прикрепить гвоздем и вращать его.
2. Проводятся обсуждения как измерить диаметр мяча. После того как найден диаметр, вычисляется радиус.
3. На листе изображается 4 круга, радиусом, равным радиусу мяча.
4. Раскрывается веревка, которой обмотан мяч. Веревка помещается внутрь четырех кругов. Выдвигается идея формулы, по которой можно найти площадь поверхности шара.

Площадь поверхности шара

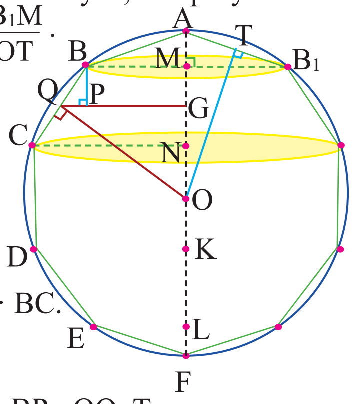
Площадь поверхности шара находится по формуле $S = 4\pi r^2$.
Здесь r радиус шара.



В окружности радиусом r изобразим правильный многоугольник. Поверхность шара, образующаяся кругами, полученными при вращении относительно диаметра, можно рассматривать как сумму пределов (при увеличении количества сторон до бесконечности) боковых поверхностей фигур, образованных сторонами данного многоугольника - конуса,усеченного конуса и цилиндра. Покажем, что при вращении сторон многоугольника вокруг оси получается тело (конус, усеченный конус, цилиндр) площади боковой поверхности которого равна площади боковой поверхности цилиндра которая равна высоте данного тела, радиус основания равен апофеме многоугольника. Обозначим апофему многоугольника через r_1.



Площадь поверхности шара



$S_k = \pi \cdot AB \cdot BM$ - площадь боковой поверхности конуса, с образующей AB. Так как $\Delta AMB_1 \sim \Delta ATO$, то $\frac{AM}{AT} = \frac{B_1M}{OT}$.

Умножим на 2 обе части равенства $AT \cdot BM = AM \cdot OT$. Тогда $2 \cdot AT = AB$, учитывая, что $OT = r_1$, получим $AB \cdot BM = 2r_1 \cdot AM$

Значит, $S_k = \pi \cdot AB \cdot BM = 2\pi r_1 \cdot AM$

$S_{ус.k} = \pi(BM + CN) \cdot BC$ - площадь боковой поверхности усеченного конуса. Зная, что $QG = \frac{BM + CN}{2}$ получим, что $S_{ус.к.} = 2\pi \cdot QG \cdot BC$.

Так как $\Delta BPQ \sim \Delta QGO$, то $\frac{BP}{QG} = \frac{BQ}{OQ}$

Умножим на 2 обе части равенства $QG \cdot BQ = BP \cdot OQ$. Тогда $2 \cdot BQ = BC$ и $2 \cdot BP = MN$. Учитывая,что $OQ = r_1$, получим $QG \cdot BC = r_1 \cdot MN$. Значит $S_{ус.к.1} = 2\pi r_1 \cdot MN$.

Тогда понятно, что площадь боковой поверхности цилиндра с образующей CD равна $S_{бок.} = 2\pi r_1 \cdot NK$. Аналогично получаем, что площадь боковых поверхностей усеченного конуса с образующей DE и конуса с образующей EF можно найти по формулам $S_{ус.к.2} = 2\pi r_1 KL$, $S_{k2} = 2\pi r_1 LF$.

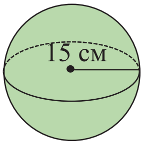
Таким образом, поверхность тела, полученного вращением многоугольника вокруг диаметра равна :

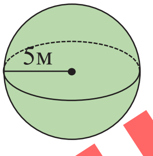
$S = 2\pi r_1 (AM + MN + MK + KL + LF) = 2\pi r_1 \cdot AF = 2\pi r_1 \cdot 2r = 4\pi r r_1$

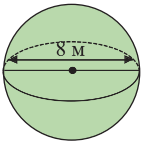
При увеличении количества сторон многоугольника до бесконечности, значение r_1 стремится к радиусу, а площадь поверхности полученного тела, к площади поверхности шара, т.е. $S_{шара} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$.

Обучающие задания

1. Найдите площадь поверхоси шара.

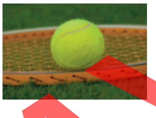
a) 

b) 

c) 

2. Найдите площадь поверхности мячей.

Футбольный мяч $r = 11$ см



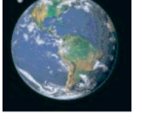
Теннисный мяч $r = 3,3$ см

Мяч для боулинга $r = 10,9$ см

Мяч для гольфа $d = 4,3$ см

Баскетбольный мяч $d = 24,3$ см

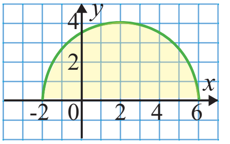
3. Диаметр Луны равен одной четвертой диаметра Земли. Найдите отношение площадей поверхностей этих двух небесных тел.



4. Полуокружность на рисунке повернулась на один оборот вокруг оси x .

a) Какая пространственная фигура получилась?

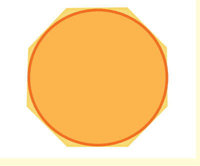
b) По данным рисунка найдите площадь поверхности полученной фигуры.



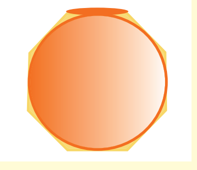
5. Найдите высоту конуса, если площадь поверхности шара с радиусом 5 см в 5 раз больше площади боковой поверхности конуса с радиусом 4 см.

Площадь поверхности шара. Доказательство Архимеда:

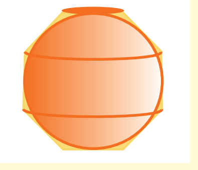
Пусть, в правильный многоугольник вписан круг, как показано на рисунке.



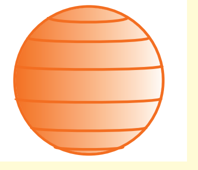
При вращении получается шар и покрывающее шар тело.



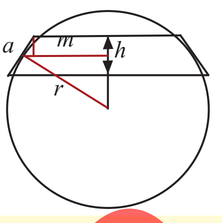
Это тело состоит из двух усеченных конусов и цилиндра.

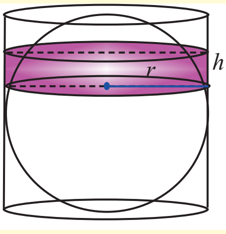


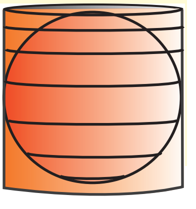
При увеличении количества сторон до бесконечности, тело будет стремится принять форму шара.



Найдя сумму поверхностей усеченных конусов и цилиндра, можно найти площадь поверхности шара. Рассмотрим осевое сечение одного из усеченных конусов. Пусть радиус средней окружности равен m, а высота h, радиус шара r, сторона многоугольника, описанного вокруг большего круга равна a. Площадь боковой поверхности усеченного конуса будет $2\pi ma$, а также $2\pi ma = 2\pi rh$, т.е. поверхность усеченного конуса равна поверхности цилиндра, радиус основания которого равен r и высота h. Значит, фигуру описанную вокруг шара можно принять за цилиндр. Отсюда, получается, что площадь поверхности шара равна площади боковой поверхности цилиндра с основанием r и высотой $2r$.







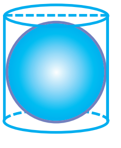
Т.е., $S = S_{\text{бок цил.}} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$

6. Докажите, что отношение площади полной поверхности цилиндра к площади поверхности сферы, которые так удивило Архимеда, равно 3:2.

a) Найдите площадь поверхности шара.

b) Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

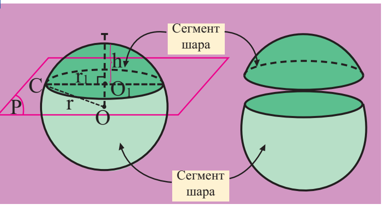
c) Запишите отношение площади цилиндра к площади шара.

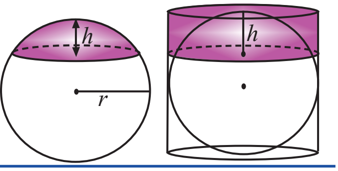


Площадь поверхности сегмента шара

Плоскость сечения делит шар на два сегмента. Плоскость шара является основанием сегмента, которое отсекла данная плоскость. Часть диаметра шара, перпендикулярного основанию сегмента, расположенная внутри него, называется высотой сегмента.

Площадь поверхности сегмента, высотой h, от шара радиуса r вычисляется по формуле $S = 2\pi rh$.



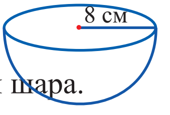


7. Шар радиусом 18 см, рассечен плоскостью отстоящей от центра на расстоянии 5 см. Найдите площадь меньшего шарового сегмента.

8. Шар, площадью 400π см^2 рассечен плоскостью отстоящей от центра на расстоянии 6 см. Найдите площадь большего шарового сегмента.

9. Шар рассечен плоскостью отстоящей от центра на расстоянии 3 см. Найдите площадь поверхности шара и каждого из двух полученных сегментов, если длина окружности круга сечения равна 8π см.

10. a) Найдите площадь плоскости половины шара.



b) Найдите площадь сферической поверхности половины шара.

c) Найдите площадь полной поверхности половины шара.

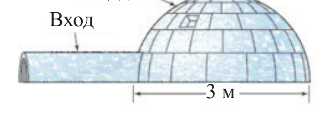
d) Запишите формулу площади полной поверхности половины шара.

11. Найдите радиус полушара, полная поверхность которого равна 154 см^2.

12. Радиус шара 15 см. Найдите площадь видимой поверхности шара, от точки, которая находится на расстоянии 25 см от центра шара.

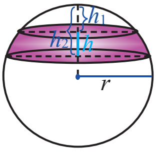
13. **Этнография**. Люди в Канаде, Орлеане и на Аляске живут домах, которые называются иглу. Они построенные изо льда. Жилая площадь такого дома в форме полусферы.

a) По данным рисунка найдите жилую площадь (пол) иглу.
b) Площадь дома, покрытую льдом.

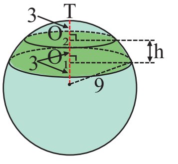


Площадь поверхности шара

Площадь шарового пояса



Шаровой пояс часть поверхности шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями. Расстояние между параллельными плоскостями называется высотой шарового пояса.
Площадь сферической поверхности шарового пояса можно найти как разность площадей сегментов, отсекаемых параллельными плоскостями.
Площадь сферической поверхности шарового пояса высотой *h* шара радиуса *r* вычисляется по формуле $S = 2\pi rh$.



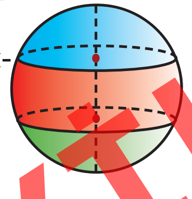
Пример. Радиус шара разбит на три равные части и через эти точки проведены перпендикулярные плоскости. Зная, радиус шара $r = 9$, найдите площадь сферической поверхности шарового пояса.

Решение: если $r = 9$ и $h = 3$, то площадь сферической поверхности шарового пояса будет $S = 2\pi rh = 54\pi$.

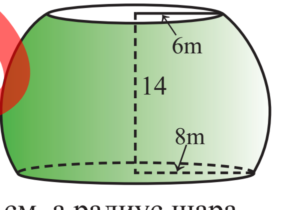
14. Шар радиусом 20 двумя параллельными плоскостями, рассечен шаровым поясом, высотой 8 см.
a) Вычислите площадь сферической поверхности шарового пояса
b) Найдите отношение площади сферической поверхности шарового пояса и площади поверхности шара.

15. Площадь сферической поверхности шарового пояса равна 48π см^2. Найдите радиус шара, если высота шарового пояса равна 8 см.

16. Диаметр шара 30 см, разбитна на три равные части параллельными плоскостями. Найдите площади сферических частей отсекаемых фигур.



17. Найдите площадь шарового пояса.



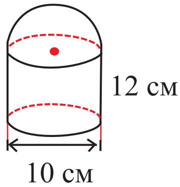
18. Радиусы оснований шарового пояса 20 см и 24 см, а радиус шара равна 25 см. Найдите площадь шарового пояса.

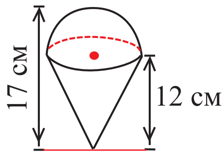
19. Радиусы оснований шарового пояса 16 см и 33 см, а высота равна 7 см. Найдите площадь шарового пояса.

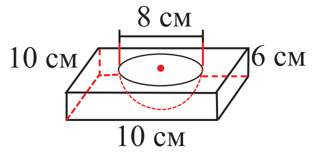
20. Радиус шара равна R. Одно из оснований шарового слоя является больший круг, площадь пояса равна площадей оснований. Найдите высоту шарового пояса.

Площади поверхностей комплексных фигур

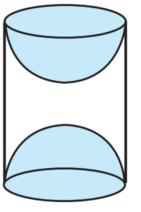
1. Найдите площади полных поверхностей фигур на рисунке.





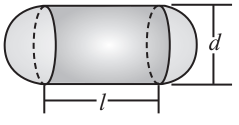


2. Сувенир на рисунке состоит из деревянного цилиндра, высотой 10 см и радиусом основания 4 см. С обеих сторон цилиндра сделаны выемки в форме полушара. Найдите площадь полной поверхности сувенира.

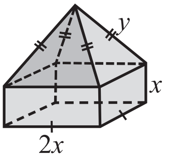


3. Запишите при помощи переменных формулы для вычисления площадей полных поверхностей фигур на рисунке.

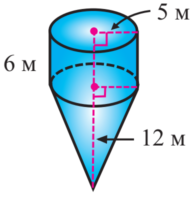
a)

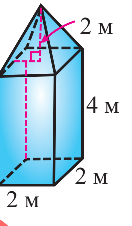


b)

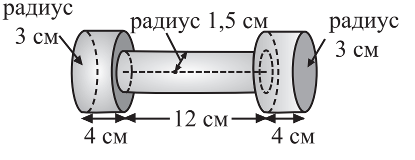


4. Найдите площади полных поверхностей фигур.

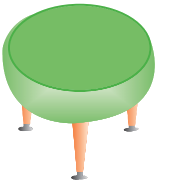




5. Для покрытия металлической конструкции, размеры которой изображены на рисунке, лаком применяется следующая технология - на 1 кв.м расходуется 0,25л лак, при этом, если отрыть банку с лаком, то работу нужно закончить в течение 2 часов. С какой наименьшей скоростью в соответствии с технологией надо выполнять работу? Сколько лака будет при этом использовано?



6. Рашид хочет сделать стул, как показано на рисунке. Сиденье стула имеет форму цилиндра радиусом 30 см и высотой 20 см. Верхнее основание и боковая часть стула должны быть покрыты чехлом. При крои и пошиве чехла материала расходуется на 20% больше. У Рашида есть 1 м² ткани для покрытия. Хватит ли этого материала для чехла?



7. Поверхность футбольного мяча состоит из нескольких сшитых между собой правильных шестиугольников (гексагонов). Размеры шестиугольника указаны на рисунке.

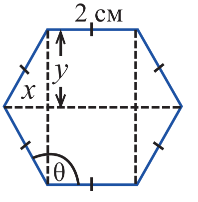
a) Найдите угол θ.

b) Найдите значения переменных x и y.

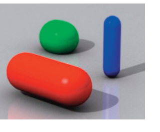
c) Найдите площадь трапеции на рисунке.

d) Найдите площадь шестиугольника на рисунке.

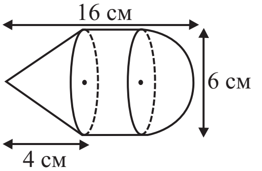
c) Если площадь поверхности мяча равна $192\sqrt{3}$ см², то из скольких шестиугольников сшит мяч?

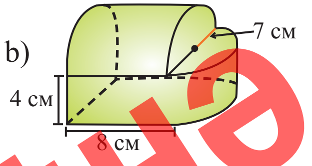


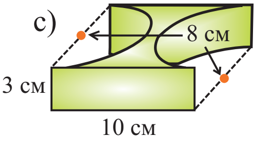
8. Пилюля имеет форму цилиндра и двух полусфер. Высота цилиндра 2 см, диаметр 0,5 см. Для удобства приема пилюли ее покрывают специальным слоем Найдите площадь поверхности покрытия.



9. Найдите площадь поверхности фигур.

a) 

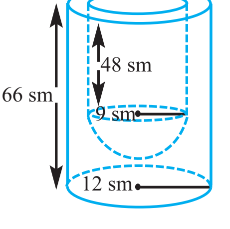
b) 

c) 

10. Посуда из пластика состоит из двух частей - внешней, в форме цилиндра, высотой 66 см и радиусом основания 12 см, и внутренней полой части в форме цилиндра, радиусом 9 см, заканчивающегося сферой.

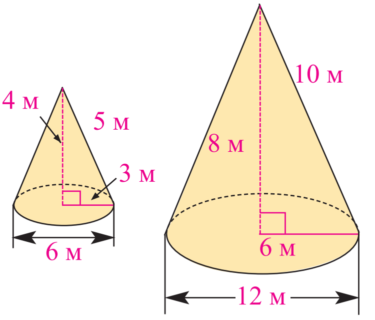
a) Найдите площадь внутренней поверхности.

b) Найдите площадь внешней поверхности.



Площади поверхностей подобных фигур

Если отношение соответствующих линейных размеров пространственных фигур постоянно, то такие фигуры называются подобными фигурами, а постоянное число называется коэффициентом подобия. Например, чтобы проверить подобны или нет конусы на рисунке, найдем отношение соответствующих измерений. Если эти конусы подобны, то отношение радиусов и высот должны быть равны.



$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \qquad \frac{12}{6} = \frac{8}{4} = 2$$

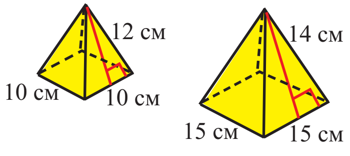
Значит эти конусы подобны и коэффициент подобия равен 2. Это говорит о том, что если все линейные размеры маленького конуса пропорционально увеличить в два раза, то при наложении его на большой конус, получим конгруэнтные фигуры. Или наоборот, пропорционально уменьшив размеры большого конуса в два раза, получим конус, размеры и форма которого будет равны маленькому. Если пропорционально увеличить или уменьшить размеры какой-либо фигуры, то можно получить подобные фигуры.

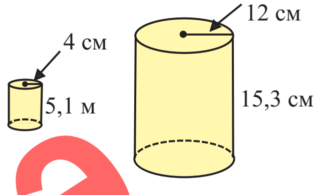
Отношение площадей подобных фигур равно квадрату отношения соответствующих линейных размеров, или квадрату коэффициента подобия.

$F_1 \sim F_2 \Rightarrow S(F_1):S(F_2) = k^2$

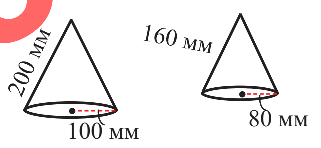
Обучающие задания

1. Определите являются или нет фигуры на рисунках подобными.





2. Конусы на рисунке подобны. Найдите отношение полных поверхностей конусов. Выразите высоту маленького конуса через высоту большого конуса.



3. Радиусы двух шаров относятся как 1:3. Если площадь поверхности большего шара на 15π см^2 больше, то найдите площадь поверхности меньшего шара.

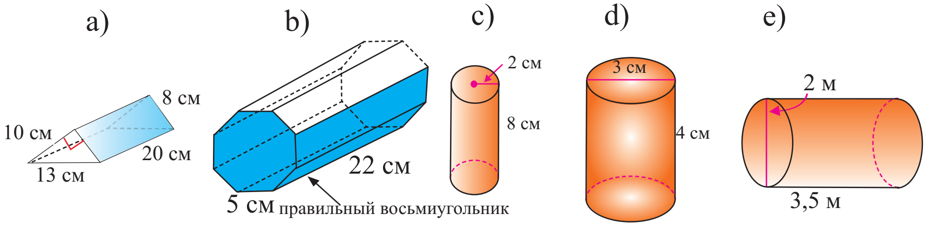
4. Площади поверхностей двух подобных цилиндров равны 96π и 150π. Диаметр и высота каждого из цилиндров равны. Найдите радиусы и высоты цилиндров.

Обобщающие задания

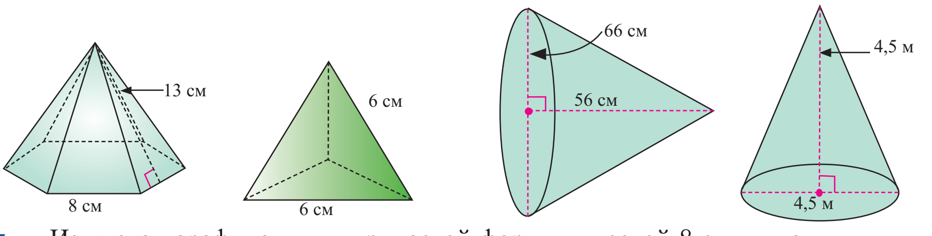
1. Площадь поверхности конуса с радиусом основания 9 см и высотой 6 см, равна площади полной поверхности цилиндра с радиусом основания 12 см. Найдите высоту цилиндра с точностью до десятых.

2. Боковая поверхность конуса в два раза больше площади основания.
a) Запишите зависимость образующей от радиуса (r) основания.
b) Чему равна боковая поверхность конуса, если радиус основания равен 6 см?

3. Найдите площади полных поверхностей призм и цилиндров на рисунке.

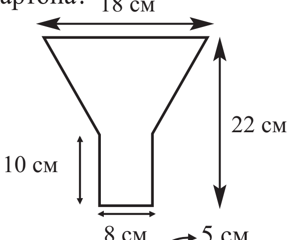


4. Найдите площади полных поверхностей пирамид и конусов.

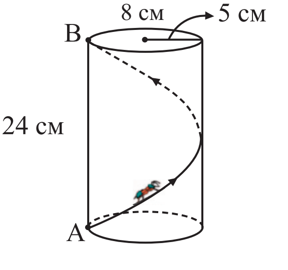


5. Из куска парафина цилиндрической формы, высотой 8 см и диаметром 5 см, вырезают свечи, как показано на рисунке. Затем вся поверхность свечи покрывается специальным пластиком. После этого свечи упаковывают в коробку из картона цилиндрической формы, размеры которой равны размеру парафина. Какое наименьшее количество квадратных метров картона понадобится для 100 свечей, если известно, что при изготовлении теряется 5% картона?

6. Металлическая конструкция на рисунке используется при выгрузке зерна из амбара. Рисунок выполнен в масштабе 1:20. Конструкция состоит из части в виде конуса и цилиндра. По данным рисунка найдите сколько металла потребуется для изготовления данной конструкции.



7. Муравей прополз от точки A основания цилиндра до точки B по винтажной дорожке. Радиус основания цилиндра равен 5 см, высота 24 см. Найдите длину пути муравья.



7

Исследование функции с применением производной

- Производная функции и промежутки возрастания, убывания
- Критические точки функции и экстремумы
- Построение графиков функции с применением производной
- Производная второго порядка и выпуклость функции
- Задачи на оптимитизацию

Математический словарь

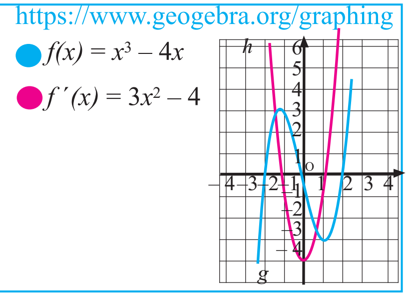
возрастание и убывание функции
критические точки
стационарные точки
точки экстремума
локальный максим
локальный минимум
точки перегиба

Зто интересно!

В маркетинге информация о каком-либо товаре представляется в виде графика “жизненного цикла товара”. За указанное время различают 5 фаз: 1- выход на рынок; 2-рост; 3-зрелость; 4-упадок; 5-самообновление.

Практическая работа. Возрастание и убывание функции.

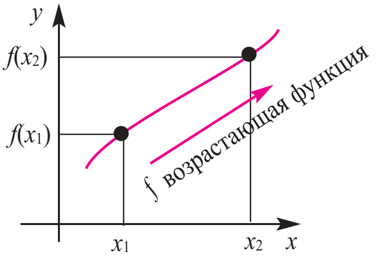
В одной системе координат при помощи графкалькулятора постройте графики функций $f(x) = x^3 - 2x$ и $f'(x) = 3x^2 - 2$.



- На каком интервале функция $f(x)$ возрастает?
- На каком интервале функция $f(x)$ убывает?
- Определите вид угла, который образует касательная кграфику функции $f(x)$ с осью абсцисс на интервале возрастания.
- Определите вид угла, который образует касательная кграфику функции $f(x)$ с осью абсцисс на интервале убывания.

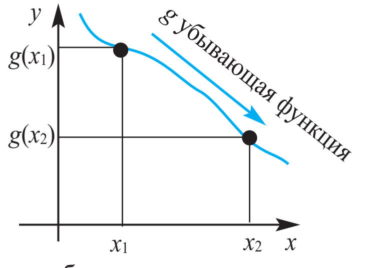
Интервалы возрастания и убывания функции

возрастающая функция



Если для любых x_1 и x_2 из определенного интервала при $x_2 > x_1$ выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$, то на этом интервале функция возрастающая.

убывающая функция

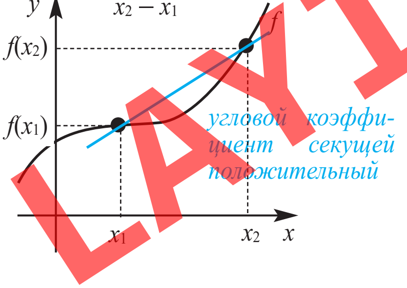


Если для любых x_1 и x_2 из определенного интервала при $x_2 > x_1$ выполняется условие $g(x_2) < g(x_1)$, то на этом интервале функция убывающая.

Связь интервалов возрастания и убывания функции с угловым коэффициентом секущей можно выразить следующим образом.

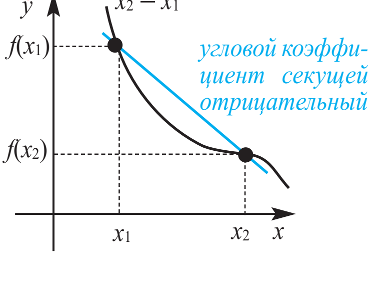
Если на заданном промежутке угловой коэффициент любой секущей положителен, то на этом промежутке функция *f* возрастает.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$



Если на заданном промежутке угловой коэффициент любой секущей отрицателен, то на этом промежутке функция *f* возрастает.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$



Производная функции, промежутки возрастания, убывания

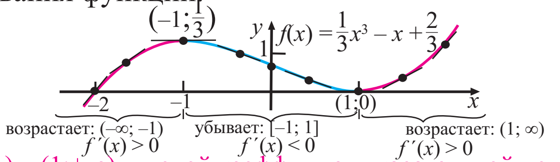
Пусть на определенном промежутке производная функции $y = f(x)$ положительна, т.е. $f'(x) > 0$. Тогда, так как $\text{tg}\alpha = f'(x)$, угловой коэффициент касательной будет положительным. А это значит, что касательная с положительным направлением оси абсцисс образует острый угол и заданный график “поднимается вверх”, т.е. функция возрастает. Если $f'(x) < 0$, тогда касательная с положительным направлением оси абсцисс образует тупой угол, график “спускается вниз”, т.е. функция убывает.

Теорема. Если функция f дифференцируема в каждой точке заданного интервала, то:

- Если $f'(x) > 0$, то функция f на данном промежутке возрастает
- Если $f'(x) < 0$, то функция f на данном промежутке убывает.
- Если $f'(x) = 0$, то функция f на данном промежутке постоянна.

Примечание: если функция f на интервале возрастания или убывания непрерывна в конечных точках, то эти точки входят в интервал.

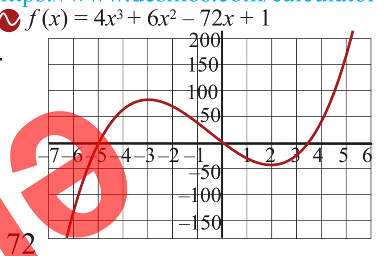
По графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ исследуйте промежутки возрастания и убывания функции.



На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ угловой коэффициент касательной положительный, поэтому на каждом из интервалов $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$ функция f возрастает.

На интервале $(-1; 1)$ угловой коэффициент касательной отрицателен, поэтому на интервале $[-1; 1]$ функция f убывает.

https://www.desmos.com/calculator



Пример 1. При помощи производной определите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$.

Решение: Алгебраический подход

1. Найдем производную функции

$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$

$f'(x) = (4x^3 + 6x^2 - 72x + 1)' = 12x^2 + 12x - 72$

$f'(x) > 0$ функции на промежутке удовлетворяющем неравенству $f(x) > 0$ т.е. $12x^2 + 12x - 72 > 0$ возрастает.

Для решения неравенства, сначало надо решить соответствующее уравнение $12x^2 + 12x - 72 = 0$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = 2, x_2 = -3$,

Значит при $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$ $f'(x) = 0$. Точки $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ разбивают область определения функции на три области: $x < -3$, $-3 < x < 2$ и $x > 2$. В каждом из интервалов выберем контрольную точку для проверки и установим знак производной.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
Контрольная точка	$x = -5$	$x = -3$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$
$f'(x)$	$f'(-4) = 72$ *положительна*	0	$f'(0) = -72$ *отрицательна*	0	$f'(-4) = 72$ *положительна*
$f(x)$	↗ *возрастает*		↘ *убывает*		↗ *возрастает*

Как видно из таблицы, данная функция $f(x)$ возрастает на интервалах $x < -3$ и $x > 2$ и убывает на интервале $-3 < x < 2$. Данное решение соответствует решению представленному по графику.

2. Промежутки возрастания функции можно определить и по графику производной.

На рисунке изображен график производной $f'(x) = 12x^2 + 12x - 72$.

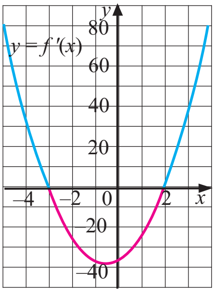


График производной $f'(x)$ при $x < -3$ и $x > 2$ расположен выше оси x, значит $f'(x) > 0$. Для $-3 < x < 2$ график производной расположен ниже оси x, значит $f'(x) < 0$. Так как функция $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ в точках $x = -3$ и $x = 2$ непрерывна, то на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[2; +\infty)$ она возрастает, а в интервале $[-3;2]$ убывает.

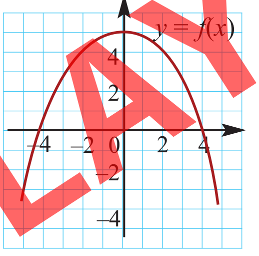
Пример 2. Для заданных условий, изобразите схематично график функций

a) при $x < 0$ $f'(x) > 0$, при $x > 0$ $f'(x) < 0$, $f(0) = 5$

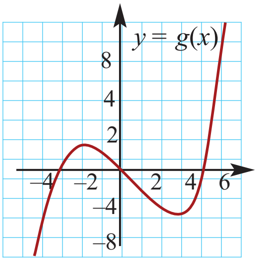
b) *при* $x < -2$ и $x > 3$ $f'(x) > 0$, при $-2 < x < 3$ $f'(x) < 0$, $f(0) = 0$

Решение:

a) при $x < 0$ знак производной положительный: $f'(x) > 0$, значит, функция возрастает. При $x > 0$ знак производной отрицательный: $f'(x) < 0$, значит, функция убывает, при $x = 0$ значение функции равно 5.



b) При $x < -2$ и $x > 3$ знак производной положительный: $f'(x) > 0$, значит функция возрастает. При $-2 < x < 3$ знак производной отрицательный: $f'(x) < 0$,значит, функция убывает, При $x = 0$ значение функции равно 0.



Производная функции, промежутки возрастания, убывания

Обучающие задания

1. a) Функция убывает на интервале $0 < x < 12$. Значение какого выражения больше: $f(3)$ или $f(10)$? Обоснуйте свое мнение.

b) Как можно определить интервалы возрастания и убывания функции, при помощи производной?

c) Верно ли, что “Линейная функция всегда или возрастает или убывает”? Обоснуйте свое мнение на примерах.

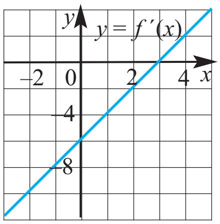
2. Определите интервалы возрастания и убывания функции, используя производную и контрольные точки.

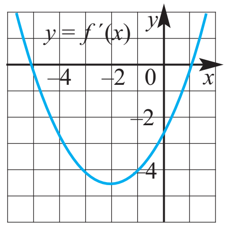
a) $f(x) = 4x + 3$ b) $f(x) = (2x - 3)^2$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ d) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

e) $f(x) = 2x - x^2$ f) $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2x$

3. По графику производной $f'(x)$ найдите интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$.

a) 

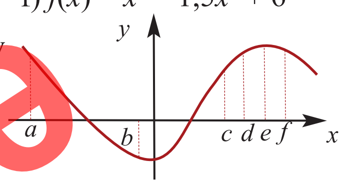
b) 

4. Изобразите графики производной функции $f(x)$ и по графику определите промежутки возрастания и убывания функции.

a) $f(x) = -2x + 1$ b) $f(x) = (x - 3)^2 + 5$ d) $f(x) = (x - 4)^2$

e) $f(x) = x^2 - 4x$ c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ f) $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + 6$

5. При каких значениях аргумента по графику на рисунке производная функции:
a) равна нулю; b) больше нуля;
c)меньше нуля?



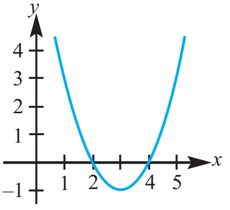
6. a) Постройте график производной $f'(x)$ функции $f(x) = x^3 + x$ и обоснуйте, что функция возрастает на всей действительной оси.
b) Докажите, что функция $f(x) = -x - x^5$ убывает на всей числовой оси.

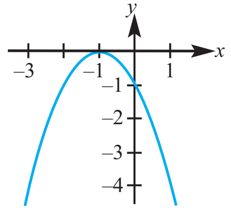
7. По данным таблицы, зная промежутки возрастания и убывания, изобразите схематично график функции непрерывной и дифференцируемой на всей числовой оси.

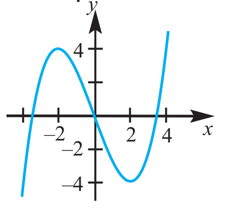
	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$f'(x)$	отрицательна	0	положительна	0	отрицательна
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

8. a) По графику функции запишите промежутки возрастания и убывания.

1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ 2) $f(x) = -(x^2 + 1)^2$ 3) $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$







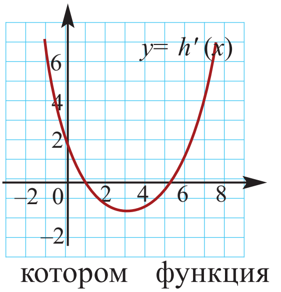
b) Определите промежутки возрастания и убывания функции алгебраически.

9. a) Найдите при каком значении x производная функции равна нулю.
b) Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

1) $f(x) = x^2 + 6x - 3$
2) $f(x) = 2 - 3x - 2x^2$
3) $f(x) = 0.5x^2 + 2x - 11$
4) $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$
5) $g(x) = x^2 + 4x + 5$
6) $g(x) = 5 - x - x^2$
7) $g(x) = 1 + 6x + 3x^2$
8) $g(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

10. На рисунке дан график функции $h'(x)$. Для каждой пары, по графику определите какое из значений функции $h(x)$ больше.

a) $h(3)$, $h(4)$ b) $h(-1)$, $h(2)$
c) $h(5)$, $h(8)$ d) $h(0)$, $h(3)$

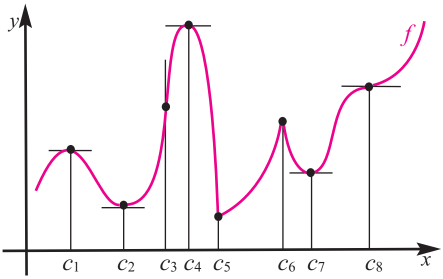


11. a) Существует ли такое значение a при котором функция $f(x) = ax^2 + 2x + 5$ убывет на всей числовой оси?
b) Найдите такое значение b, при котором функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 12x + 3$ возрастает на всей числовой оси.
Указание: запишите производную функции в виде полного квадрата.

12. **Задания открытого типа.** Схематично изобразите графики.
a) Функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$.
b) Функция $g(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; -3]$ и возрастает на промежутке $[-3; +\infty)$.
c) Функция $h(x)$ убывает на промежутках $(-\infty; 3]$ и $[8; +\infty)$ и возрастает на промежутке $[3; 8]$.
d) Производная непрерывной функции $g(x)$ положительна на промежутке $(-\infty; -2)$ и отрицательна на промежутке $(-2; +\infty)$.
e) Производная функции $f(x)$ отрицательна на промежутке $(-\infty; 1)$ и положительна на промежутке $(1; +\infty)$.

Критические точки и экстремумы функции

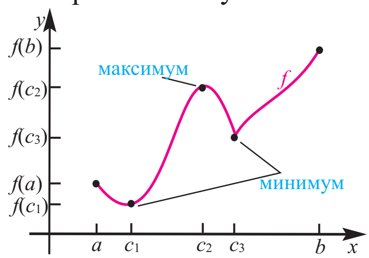
Производная функции в некоторых точках из области определения может быть равна нулю или вообще не существует. Такие точки из области определения называются **критическими точками** функции. Исследуем связь между критическими точками и производной функции. Покажем критические точки на графике заданной функции.



1. В точках x равных c_1, c_2, c_4, c_7, c_8 угловой коэффициент касательной к графику равен 0. Т.е. $f`(x) = 0$. Эти точки являются критическими точками функции.
2. В точках x равных c_3, c_5, c_6 функция не имеет производной. Это тоже критические точки.

В рассматриваемой нами функции точки c_1, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7 являются критическими точками и делят ее область определения на чередующиеся интервалы возрастания и убывания. Точки c_3, c_8 также являются критическими точками, которые не влияют на возрастание и убывание

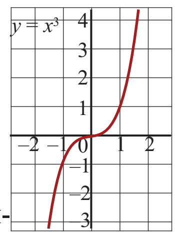
По графику видно, что в точках внутреннего экстремума(c_1 и c_2) производная функции равна нулю, а в точке (c_3) производная не существует. Точки, в которых производная функции равна нулю называются также **стационарными точками**.



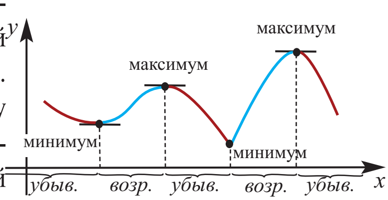
Теорема Фермат.(Необходимое условие существования экстремумов)

Во внутренних точках экстремума производная либо равна нулю, либо не существует.

Однако, если производная какой-либо функции равна нулю, это не значит, что эта точка является точкой экстремума. Например, в точке $x = 0$ производная функции $y = x^3$ равна нулю, но эта точка не является ни точкой максимума, ни точкой минимума.



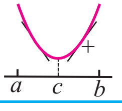
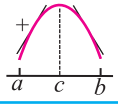
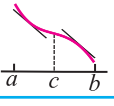
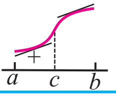
На отрезке непрерывности функция может иметь несколько критических точек, точек максимума и минимума. Существование экстремума в точке зависит значений функции в данной точке и точках близких к данной, т.е. имеет смысл локального (местного) значения. Поэтому иногда используют термин локальный максимум и локальный минимум. Производная $f'(x)$ непрерывной функции при переходе через точку максимума меняет знак с плюса на минус, при переходе через точку минимума - с минуса на плюс.



Поэтому промежутки возрастания и убывания функциии сменяют друг друга. Поэтому точки соответствующие локального максимума и минимума чередуются на графике.

Достаточное условие существования экстемума.
Пусть, функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$.
Если x_0 является критической точкой и в окрестности которой функция дифференцируема, тогда если в этой окрестности:
1) $f'(x)$ слева от x_0 положительна,справа отрицательна, то точка x_0 является точкой максимума.
2) $f'(x)$ слева от x_0 отрицательна, справа положительна, то точка x_0 является точкой минимума
3) $f'(x)$ с каждой стороны от точки x_0 имеет одинаковые знаки, тогда точка x_0 не является точкой экстремума.
Чтобы найти наибольшее значение (абсолютный максимум) или наименьшее значение (абсолютный минимум) функции, имеющей конечное число критических точек на отрезке надо, найти значение функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее или наименьшее.
Соответствующие наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ записывается как $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Ниже представлены примеры определения наибольшего и наименьшего значения в соответствии со знаком производной первого порядка.

графики функций на отрезке $[a;b]$	$f(c)$	знак $f`(x)$ на интервале $(a; c)$	знак $f`(x)$ на интервале $(c; b)$	Возрастание или убывание
	минимум	–	+	на $(a; c)$ убывает, на $(c; b)$ возрастает
	максимум	+	–	на $(a; c)$ возрастает, на $(c; b)$ убывает
	ни максимум и ни минимум	–	–	на $(a; c)$ убывает, на $(c; b)$ убывает
	ни минимум и ни максимум	+	+	на $(a; c)$ возрастает, на $(c; b)$ возрастает

Пример 1. Определите максимумы и минимумы функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ и схематично изобразите график.
Решение: Для решения задания алгебраически сначала надо найти критические точки. Этими точками (стационарными) для данной функции являются точки в которых производная равна нулю.

1. Производная функции: $f\,'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$
2. Критические точки функции: $3x^2 - 3 = 0$, $x = \pm 1$
3. Точки $x = -1$ и $x = 1$ разбивают область определения функции на три промежутка.

Проверим знак $f\,'(x)$ на интервалах выбрав пробные точки.

Для $(-\infty; -1)$ пробная точка $x = -2$: $f\,'(-2) = 3\,(-2)^2 - 3 = 9 > 0$

Для $(-1; 1)$ пробная точка $x = 0$: $f\,'(0) = 3\,(0)^2 - 3 = -3 < 0$

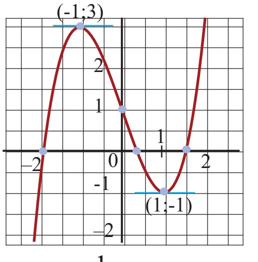
Для $(1; \infty)$ пробная точка $x = 2$: $f\,'(2) = 3\,(2)^2 - 3 = 9 > 0$

Интервал	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; \infty)$
	-1	1	
Пробные точки	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Знак $f\,`(x)$	$f\,`(x) > 0$	$f\,`(x) < 0$	$f\,`(x) > 0$
Возрастание и убывание	на $(-\infty;-1]$ возрастает	на $[-1; 1]$убывает	на $[1; \infty)$ возрастает

в $x = -1$максимум   *в* $x = 1$минимум

При $x = -1$ имеем $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$. $(-1;3)$ - максимум
При $x = 1$ имеем $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$ $(1;-1)$ - минимум

4. Используя полученные для функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ данные и найдя координаты нескольких дополнителных точек построим график функции.



x	-1	$-0{,}5$	0	1	$1{,}5$	2
$f(x$	3	$1{,}2$	1	-1	$-0{,}125$	3

Пример 2: Найдите наибольшее и наименьше значение функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение: Сначала найдем критические точки. Для производной $f\,'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ из уравнения $3x^2 + 6x - 9 = 0$ найдем критические точки $x_1 =$ и $x_2 = -3$. Так как критическая точка $x = -3$ не принадлежит данному отрезку $[-1;2]$, то ее не рассматриваем.
Вычислим значение заданной функции в точке $x = 1$ и на концах отрезка.

$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 1 = -4$
$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 1 = 6$
$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 1 = 5$

Из этих значений наименьшее – 4, наибольшее 6. Таким образом:
$\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 6$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = -4$

Пример 3. Найдите экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - x^4$.

Решение: 1. Производная функции: $f`(x) = (2x^3 - x^4)` = 6x^2 - 4x^3$

2. Критические точки: $6x^2 - 4x^3 = 0$,

$2x^2(3 - 2x) = 0$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 1{,}5$

3. Интервалы, на которые критические точки делят область определения функции:

$$(-\infty;\ 0),\ (0;\ 1{,}5) \text{ и } (1{,}5;\ \infty)$$

Проверим знак $f'(x)$ на интервалах выбрав пробные точки.

Для промежутка $(-\infty; 0)$ возьмем $x = -1$: $f`(x) = 6(-1)^2 - 4(-1)^3 = 10 > 0$

Для промежутка $(0; 1{,}5)$ возьмем $x = 1$: $f`(x) = 6(1)^2 - 4(1)^2 = 2 > 0$

Для промежутка $(1{,}5; \infty)$ возьмем $x = 2$: $f`(x) = 6(2)^2 - 4(2)^3 = -8 < 0$

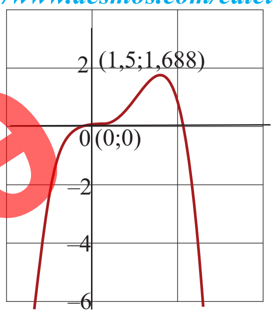
Интервал	$(-\infty; 0)$	$(-1; 1)$	$(1; \infty)$
	0	1,5	
Пробные точки	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
Знак $f`(x)$	$f`(x) > 0$	$f`(x) > 0$	$f`(x) < 0$
Возрастание - убывание	на $(-\infty;0]$ возрастает	на $[0; 1{,}5]$возрастает	на $[1{,}5; \infty;)$убывает

не изменяется $x = 1{,}5$ мксимум

Используя информацию, полученную для функции $f(x) = 2x^3 - x^4$ и найдя значение функции еще в нескольких точках можно построить график функции. При этом следует учитывать, что в точках $x = 0$ и $x = 1{,}5$ пкасательная к графику горизонтальна. На сколько правильно был построен график можно проверит при помощи графкалькулятора.

https://www.desmos.com/calculator

x	$f(x)$, приблизительно
–1	–3
–0,5	–0,31
0	0
0,5	0,19
1	1
1,25	1,46
2	0



- Функция f на промежутке $(-\infty; 0]$ возрастает.
- Точка $x = 0$ критическая точка функции f, но не является экстремумом.
- Функция f на промежутке $[0; 1{,}5]$ возрастает.
- Функция f на промежутке $[1{,}5; \infty)$ убывает.
- $x_{max} = 1{,}5$; $f_{max} = f(1{,}5) \approx 1{,}688$

Пример 3. Найдите экстремумы функции $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$

Решение: 1. Производная $f'(x)=(\sqrt[3]{(x-2)^2})'=((x-2)^{\frac{2}{3}})'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$, $x\neq 2$.

2. Критические точки: для этого надо решить уравнение $f'(x)=0$ или найти точки в которых производная не существует. В точке $x=2$ функция не имеет конечной производной. Однако точка $x=2$ принадлежит области определения. Значит, точка $x=2$ также является критической отчкой функции.

3. Промежутки на которые критическая точка делит область определения функции: $(-\infty;2)$ и $(2;\infty)$

Определим знак $f'(x)$, выбрав пробные точки для каждого промежутка:

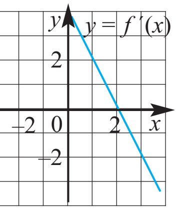
Для $(-\infty;2)$ возьмем $x=0$: $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{0-2}}<0$

Для $(2;\infty)$ возьмем $x=3$: $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(3-2)}}>0$

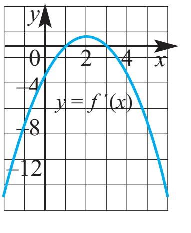
Интервал	$(-\infty;2)$	2	$(2;\infty)$
Пробные точки	$x=0$		1,5 $x=3$
знак $f`(x)$	$f'(x)<0$		$f'(x)>0$
Возрастание - убывание	на $(-\infty;2]$ убывает		на $[2;+\infty)$ возрастает

$x=2$ точка минимума

- Функция f на промежутке $(-\infty;2]$ убывает.
- Функция f на промежутке $[2;+\infty)$ возрастает.
- $x_{\min}=2$ и $f_{\min}=f(2)=0$



Пример 4. По графику функции $f'(x)$ изобразите схематично график самой функции.

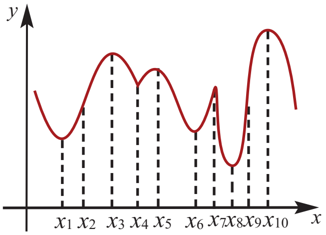


Решение: Производная $f'(x)$ в точке $x=2$ равна нулю, а при $x>2$ отрицательна, значит, на интервале $[2;+\infty)$ функция убывающая. При $x<2$ производная положительна, а это говорит о том, что функция f на промежутке $(-\infty;2]$ возрастает. При переходе от возрастания к убыванию функции соответствует точка $(2;f(2))$ Соответствующий график представлен на рисунке.

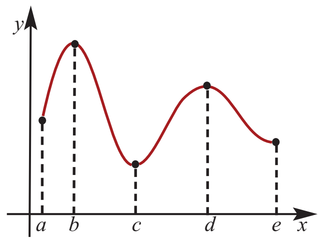
Критические точки и экстремумы функции

Обучающие задания

1. По графику найдите критические точки.



2. По графику найдите промежутки возрастания и убывания функции, знак производной в этих интервалах, максимумы и минимумы.



3. a) Всегда ли верно утверждение “Если $f'(c) = 0$, то точка $x = c$ является точкой экстремума”?
b) Функция f непрерывная убывающая функци на отрезке [–3;8]. При каких значениях аргумента функция принимает наибольшее и наименьшее значение на данном отрезке?

4. Представьте, что вы поднимаетесь в гору и функция $f(t)$ показывает зависимость высоты, на котору вы поднялись от времени. Через определенное время вы остановились, чтобы отдохнуть. Почему в момент t получим $f'(t) = 0$? Как вы сможете связать движение с понятиями локального максимума и локального минимума?

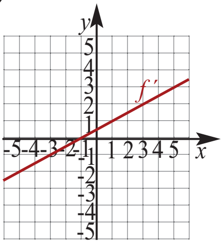
5. $f'(x) = x^3 - 2x^2$ производная некоторой функции.
a) При каких значениях x значение $f'(x) = 0$?.
b) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.
c) Как вы определите, по производной $f'(x)$, что данная функция имеет единственный экстремум?

6. Найдите критические точки, интервалы возрастания и убывания, и схематично изобразите график функции .
a) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$
c) $y = x^4 - 3x^3 + 5$ d) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

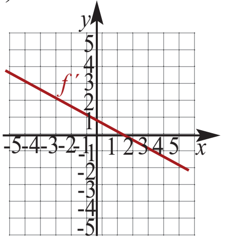
7. Для следующих функций найдите критические точки, наибольшее и наименьше значение функций.
1) $f(x) = x^2 - 4x$ 2) $f(x) = x^2 + 4x + 10$
3) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ 4) $f(x) = -(x^2 + 8x + 12)$
5) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ 6) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$
7) $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ 8) $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$
9) $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{3}$ 10) $f(x) = x^4 - 32x + 4$

8. По графику производной функции найдите промежутки возрастания и убывания и абсциссы экстремумов. Изобразите схематично график функции.

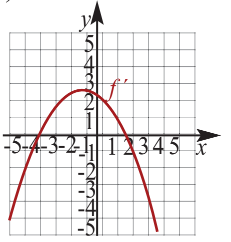
a)



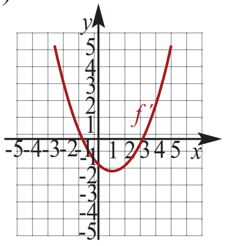
b)



c)



d)



9. Функция f дифференцируемая функция. В таблице для определенных значений x заданы значения $f'(x)$.

x	–1	– 0,75	– 0,50	– 0,25	0	0,25	0,50	0,75	1
$f'(x)$	–10	– 3,2	– 0,5	0,8	5,6	3,6	– 0,2	– 6,7	– 20,1

По таблице значений: a) постройте график функции; b) определите, приблизительно, место критических точек; c) определите, приблизительно, место экстремумов.

10. Найдите критические точки заданных функций. Установите какие из них являются точками минимума, а какие точками максимума. Найдите экстремумы функций.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$ 2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ 4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

5) $f(x) = (x-2)^3$ 6) $f(x) = x^5 - 5x$

7) $f(x) = (x^2 - 5)^3$ 8) $f(x) = (x-2)^4$

9) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ 10) $f(x) = x \cdot \ln x$

11. Найдите экстремумы функции $f(x)$ и схематично изобразите график функции. По графику определите сколько действительных корней имеет уравнение $f(x) = 0$

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$

12. Найдите критические точки функции.

a) $f(x) = x - \sin 2x$ b) $f(x) = \cos x - x$

13. Для функции $f(x)$ на заданном отрезке найдите: a) локальные экстремумы; b) наибольшее и наименьшее значение функции.

a) $f(x) = 3 - 2x$, $[-1;2]$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $[-1;3]$
c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, $[-1;1]$
d) $f(x) = \sqrt{x} - x$, $[0;4]$
e) $f(x) = x^3 - 6x$, $[-1;2]$
f) $f(x) = \sqrt{x} - x^2$, $[0;1]$
g) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, $[-1;1]$
h) $f(x) = x - \ln x$, $[\frac{1}{e};e]$

14. a) При помощи производной докажите, что, абсцисса экстремума функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ равна $x = -\dfrac{b}{2a}$. Найдите экстремум.

b) Сколько экстремумов может иметь функция $y = x^3 + px + q$?

Прикладные задания

15. Затраты на x штук продукции за неделю можно задать функцией $C(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$. Запишите функцию выражающую маржинальные затраты $MC(x) = C'(x)$. В одной системе координат изобразите графики этих функций при помощи графкалькулятора.

16. Периметр прямоугольника со сторонами x и $\dfrac{50}{x}$ зависящий от длины стороны x можно смоделировать функцией $P(x) = 2x + \dfrac{100}{x}$

a) Найдите экстремумы функции $P(x)$.

b) Объясните ситуацию, соответствующую пункту a.

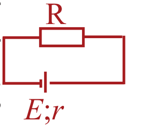
17. a) Найдите положительное число, сумма которого с обратным числом имеет наименьшее значение.

b) Найдите число разность которого со своим кубом имеет наибольшее значение.

c) Найдите число, сумма которого с его квадратомимеет наименьшее значение.

d) Представьте число 18 в виде суммы трех положительных чисел, таких, что второе число в два раза больше первого, а произведение имеет наибольше значение.

18. Силу, генерируемую в замкнутой элетрической цепи, можно расчитать по формуле $P = \dfrac{E^2 \cdot R}{R + r}$. Здесь - внутреннее сопртивление, E - электрическая мощность, R - внешнее сопротивление. При каком значении R мощность, выделяемая для внешней части схемы будет максимальной?



19. В результате наблюдений было установлено, что изменение температуры больного T (по Фаренгейту) в течении t дней определялось при помощи функции $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$; $0 \leq t \leq 12$. Найдите наибольшее и наименьшее значение даной функции и объясните соответствующую ситуацию.

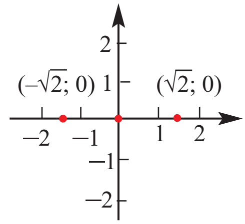
Построение графиков функции при помощи производной

Функция многочлена определена и непрерывна на всей числовой оси

Чтобы построить график функции многочлена надо выполнить следующиеие шаги.

- Определите точки пересечения с осями координат.
- Найдите критические точки.
- Найдите промежутки возрастания и убывания функции.
- Найдите максимум и минимум.
- Постройте график.

Пример 1. Постройте график функции $f(x) = x^4 - 2x^2$.



- Точки пересечения с осями координат :

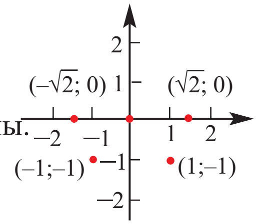
$x^4 - 2x^2 = 0,\ x = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$, $(-\sqrt{2}{:}0),\ (0;0),\ (\sqrt{2}{:}0)$

- Критические точки (точки в которых производная равна нулю): $f'(x) = (x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x$

$4x^3 - 4x = 0 \quad 4x(x^2 - 1) = 0,\ \ x = 0,\ x = \pm 1$

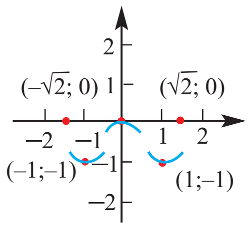
$f(0) = 0, f(-1) = -1$, və $f(1) = -1$,

значит, точки (0; 0), (−1; −1) и (1; −1) расположены на графике.

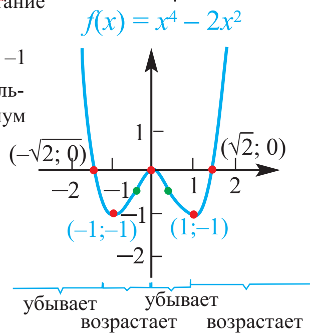


- Промежутки возрастания и убывания. Экстремумы. Критические точки $x = -1,\ x = 0,\ \ x = 1$ делят область определения функции на четыре промежутка. Проверим знаки производной $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0;1)$	1	$(1; \infty)$
Контрольные точки	-2		$-0{,}1$		$0{,}1$		2
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗
Экстремумы		переход с убывания на возрастание		переход с возрастания на убывание		переход с убывания на возрастание	
		$x_{\min=-1}$ $f_{\min} = f(-1) = -1$ (−1;−1) локальный минимум		$x_{\max=0}$ $f_{\max} = f(0) = 0$ (0;0) локальный максимум		$x_{\min=1}$ $f_{\min} = f(1) = -1$ (1;−1) локальный минимум	



- Используя полученную информацию построим график функции.



► График функции $g(x) = x^4 - 8x^2$ постройте самостоятельно.

Пстроение графика функции при помощи производной

Чтобы построить график рациональной функции надо выполнить следующме шаги.

- Найдите область определения.
- Найдите вертикальные или горизонтальные асимптоты (если есть).
- Определите точки пересечения с осями координат.
- Найдите критические точки.
- Найдите промежутки возрастания и убыванияи экстермумы.
- Постройте график.

Пример 5. Постройте график функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$.

- Область определения функции все действительны числа $x \neq 3$.

- Асимптоты. Функция не определена при $x = 3$. Прямая $x = 3$ вертикальная симптота функции. $\lim\limits_{x\to 3^-} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} x = +\infty$

Определим существует ли горизонтальная ассимптота функции.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

т.е. горизонтальной асимптоты не существует.

- Точки пересечения с осямикоординат: $\dfrac{x^2}{x-3} = 0$, $x = 0$, (0;0)

- Критические точки. Точки в которых производная равна нулю или не существует.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-3}\right)' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}, \qquad \frac{x^2-6x}{(x-3)^2} = 0,$$

$$x^2 - 6x = 0 \qquad x(x-6) = 0 \qquad x = 0,\ x = 6$$

$$f(0) = 0,\ f(6) = 12 \qquad (0;0) \text{ и } (6;12)$$

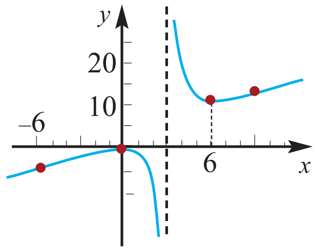
- Промежутки возрастания-убывания. В точке $x = 3$ функция не определена, точки $x = 0$ и $x = 6$ являются критическими точками функции. Определим знаки производной на каждом интервале, который образуют эти точки.

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3)$	$(3; 6)$	$(6; \infty)$
Пробные точки	-1	2	4	7
$f'(x) = \dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}$	$f'(-1) = 7/16 > 0$	$f'(2) = -8 < 0$	$f'(4) = -8 < 0$	$f'(7) = 7/16 > 0$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Экстермумы	*переход от возрастания к убыванию* $x_{max} = 0$, $f_{max} = f(0) = 0$		*знак не меняется*	*переход от убываня к возрастанию* $x_{min} = 6$, $f_{min} = f(6) = 12$

(0;0) локальный максимум *(6; 12) локальный минимум*

Построение графиков функции при помощи производной

- Построим график. Отметим на координатной плоскости точки $(-6;-4)$, $(0;0)$, $(6;12)$, $(9;13{,}5)$. Построим вертикальную асимптоту $x = 3$ и изобразим кривые слева и справа от асимптота.



Внимание! Поблизости точки $x = 0$ функция ведет себя как парабола $y = -x^2$.

Обучающие задания

1. По следующим данным постройте график функции многочлена.

a) $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -5$, $f'(7) = 0$, $f(7) = 10$ və $f(3) = 2$

b) $f'(-3) = 0$, $f(-1) = 8$, $f'(9) = 0$, $f(9) = -6$; $f(2) = 1$

2. По данным таблицы постройте функцию.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
Проба	$x = -4$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$f'(x)$	положительна	0	положительна	0	отрицательна	0	положительна
$f(x)$	убывает	мин.	возрастает	макс.	убывает	мин.	возрастает

3. Постройте графики функций.

a) $h(x) = 2x^2 + 4x + 5$

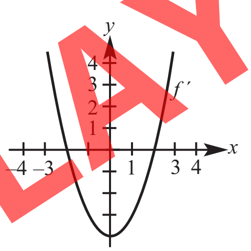
b) $f(x) = x^3 - 6x$

c) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

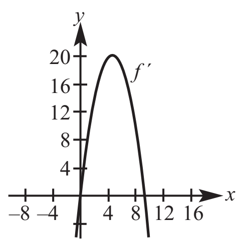
d) $g(x) = -x^4 + 2x$

4. По графику производной постройте график функции.

a)



b)



5. Дана функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 7$.

a) Сколько наибольшее количество экстремумов есть у функции?

b) Найдите критические точки функции, проведите классификацию точек мксимумов и минимумов точек экстремума. Определите интервалы возрастания и убывания функции.

c) Изобразите графики функций. Сравните результаты пунктов а) и b) . Запишите свое мнение.

6. Для следующих функций выполните последовательность шагов, соответствующую заданию 5.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 6$

c) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

d) $t(x) = x^5 - 2x^4 + 3$

7. Постройте графики функций.

a) $f(x) = 2x^2 - x^4$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

d) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

e) $f(x) = x^4 - 2x^3$

f) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 135x$

8. Укажите как график функции $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ отличается от графика функции $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, записав соответствующие преобразования и постройте график. Постройте график функции $f(x)$ при помощи производной.

9. Постройте график функции при помощи производной.

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x-3}$ d) $y = x + \dfrac{1}{x}$

10. В одной системе координат постройте графики себестоимости $C(x) = 4x + 10$, общего дохода $R(x) = 50x^2 - 0,5x$, и соответствющей данным функциям функции прибыли.

11. **Работа в группах. Задания открытого типа.** Для функции $f(x)$ используя следующие данные, выполните следующее:

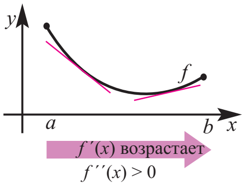
a) Найдите экстремумы.

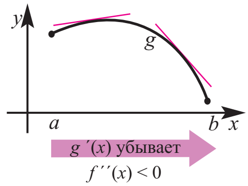
c) Постройте какую-либо функцию, согласно условиям:

x	0	1	2	3
f	0	2	0	–2
f'	3	0	нет	–3

Исследование. Представим, два автомобиля движутся прямолинейно с одинаковой скоростью в одинаковом направлении. Через некоторе время один из автомобилей начинает двигаться с возрастающим ускорением, а другой с убывающим ускорением. Как будут отличаться формы графиков отражающих движение атомобилей?

Чтобы определить форму графиков удобнее всего найти вторую производную. Для этого, используя линейку в качестве модели касательной, "пройдитесь" слева направо по графикам каждой функции или изобразите касаельные.





Как видно, при движении слева направо угловой коэффициент касательной к графику функции f, растет. Это говорит о том, что f' возрастает. А это, в свою очередь, говорит о том, что значение $f''(x)$ положительна. Все касательные расположены снизу от графика. График функции f изогнут вниз (или вогнутый).

Угловые коэффициенты касательных графика функции g при движении слева направо уменьшаются. Это говорит о том, что g' убывает, т.е. значение функции $g''(x)$ отрицательно. Все касательные расположены сверху от графика функции. График функции g изогнут вверх (или выпуклый).

Если функция f на каком-либо промежутке дважды дифференцируема, то:

если $f''(x)>0$, то на заданном промежутке график функции f вогнутый.

если $f''(x)<0$, то на заданном промежутке график функции f выпуклый

Точки, в которых график функции переходит от выпуклости снизу к выпуклости сверху или наоборот, называются **точками перегиба**. При переходе через точки перегиба $f''(x)$ функция меняет знак.

Исследование критических точек при помощи производной.

Пример . Н айдите критические точки функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ и классифицируйте их, при помощи производной второго порядка.

Решение: Чтобы найти критические точки найдем производую первого порядка $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$, $3x^2 - 6x = 0$, $x = 0$ или $x = 2$.

Значения точек $x = 0$ и $x = 2$ являются критическими точками.

Подставим эти значения в функцию и найдем ординаты критических точек:

$f(0) = 0^3 - 3\cdot0^2 + 2 = 2$; $(0; 2)$

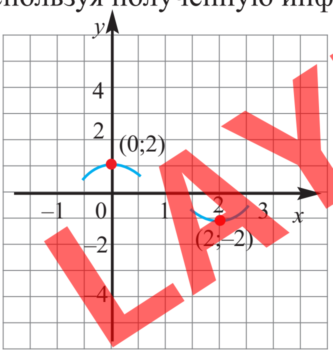
$f(2) = 2^3 - 3\cdot2^2 + 2 = -2$; $(2;-2)$

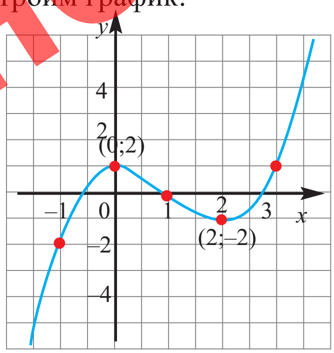
Значит, на графике точки $(0; 2)$ и $(2;-2)$ соответствуют критическим точкам. Чтобы определить какая из точек является точкой максимума или минимума используем производную второго порядка. Найдем производную функции $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Получим $f''(x) = 6x - 6$. При $x = 1$ получим $f''(1) = 0$. При $x < 1$ получим $f''(x) < 0$ и на промежутке $(-\infty;1)$ график функции выпуклый, при $x > 1$ получим $f''(x) > 0$ и на промежутке $(1; +\infty)$ функция вогнутая. При $f''(1) = 0$ в точке $(1; 0)$ меняет направление выпуклости, т.е. точка $(1;0)$ является точкой перегиба.

	$x = 0$	$x = 2$
$f``(x)$	$f``(0) = -6$ отрицательный	$f``(0) = 6$ положительный
$f(x)$	выпуклый	вогнутый

Как видно, критическая точка $x = 0$ принадлежит промежутку выпуклости (производная второго порядка отрицательна, $f''(x) < 0$). Значит, точка $(0; 2)$ на графике является локальным максимумом. Точка $x = 2$ принадлежит промежутку вогнутости (производная второго порядка положительна $f''(x) > 0$), значит точка $(2;-2)$ соответствует точкой локального минимума.

Определим еще несколько точек на графике функции: $(-1;2)$; $(1;0)$; $(3;2)$. Используя полученную информацию построим график:

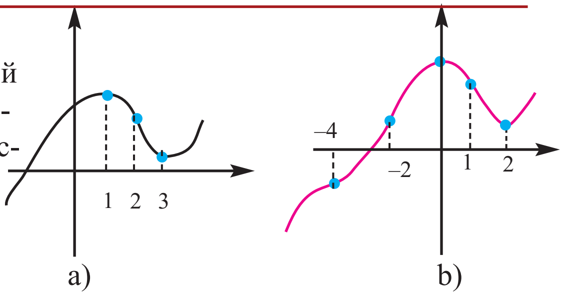




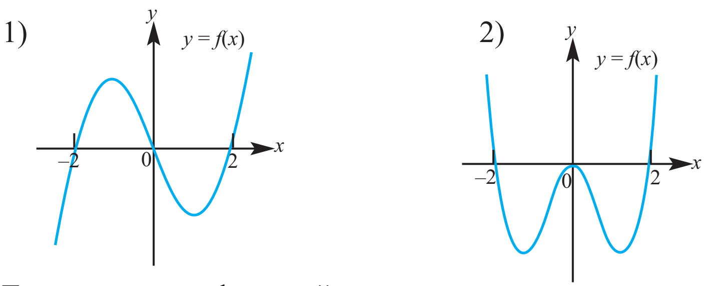
Производная второго порядка. Выпуклость графика функции

Обучающие задания

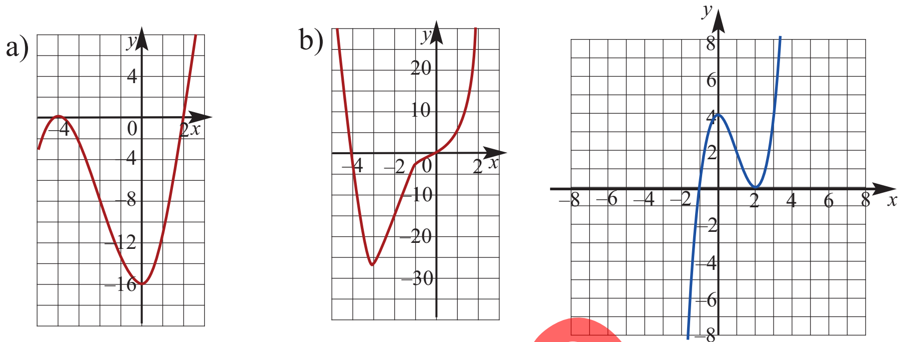
1. Определите знак производной второго порядка для аргументов, соответствующих абсциссам точек на графике.



2. По графику функции f, найдите при каких значениях x значения f' и f'' равны: a) нулю; b) положительны; c) отрицательны.



3. Для каждого графика найдите интервалы выпуклости функции.



4. По данным таблицы избразите график непрерывной функции.

$x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<3$	$2<x<5$
↘	↘	↗	↘
⌒	◡	⌒	◡

5. **Вопрос открытого типа.** По следующей информации схематично изобразите график функции.

a) Функция f возрастая на интервале $(-\infty; 3]$ и выпукла вверх и возрастая на интервале $[3; +\infty)$ и выпукла вниз.
b) Функция f убывая на интервале $(-\infty; 1]$ и выпукла вверх и убывая на интервале $[1; +\infty)$ выпукла вниз.

6. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

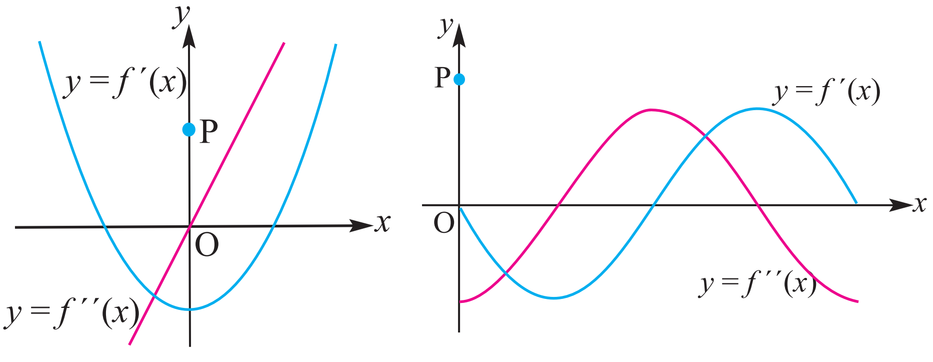
c) $f(x) = x^5 - 30x^3$ d) $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 40x^3 + 120$

7. Для функции найдите: a) промежутки возрастания и убывания; b) критические точки; c) экстремумы; d) точки перегиба; e) промежутки выпуклости. Постройте графики.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ b) $f(x) = (x + 1)^4$

c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}$

8. На рисунке даны графики производных первого и второго порядка функции f. В соответствии с данными графиками изобразите график самой функции f.



9. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)$. Изобразите график функции $s(t)$. Используя производную второго порядка найдите ускорение.Определите вид движения - равноускоренное или равнозамедленное. Как это отражено на графике?

a) $s(t) = 2t^2 + 4t$ b) $s(t) = 40t + 10t - 5t^2$

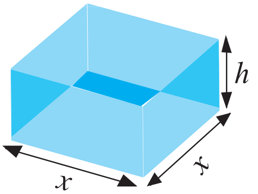
10. Себестоимость x штук изготавливаемой за неделюпродукции можно выразить функцией $C(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$.

a) Найдите маржинальные затраты $MC(x) = C'(x)$. При помощи граф-калькулятора, постройте графики данных функций в одной системе координат .b) Найдите значение $C''(x)$ qimətini tapın. По графику установите связь данного значения и функции MC(x).

Задачи на оптимитизацию

В реальной жизненной ситуации экстремумы функции можно найти применяя производну. Ежедневно, при решении проблем в различных областях, мы часто сталкиваемся с терминами наибольшая прибыль, наименьшие затраты, наибольшее напряжене, наибольший объем, наибольшая площадь и.т.д. Большое экономическое значение в промышленности, при определении дизайна упаковки, имеет вопрос как подобрать размеры упаковки с наименьшими затратами. Такого рода задания связаны с нахождением максимального илиминимального значения величины. Задачи на нахождение максимального и мнимального значения величины называются задачами на оптимитизаци. Понятно, что дл ярешения данных задач применяется производная.

Пример 1. Максимальный объем. Фирма планирует создавать открытую коробку, с квадратным основанием и площадью поверхности 192 см^2. Найдите размеры коробки, при которых объем коробки будет наибольшим?



Решение: так как основанием коробкиявляется квадрат, то ее объем можно вычислить по формуле $V = x^2h$. Используя другие данные задачи, выразим объем только через одну переменную x.
Вычислим площадь поверхности коробки. Она равна 192 см^2 и состоит из 4 площадей боковых граней + площадь основания.

$S_{\text{п.п.}} = 4xh + x^2 = 192$. Тогда выразим $h = \dfrac{192 - x^2}{4x}$ и подставим в формулу $V = x^2h$. Зависимость объема коробки от переменной x можно выразитьследующим образом

$$V(x) = x^2\left(\frac{192 - x^2}{4x}\right) = 48x - \frac{x^3}{4}$$

Теперь, найдем область определения функции $V(x)$, согласно условию задачи.
Понятно, что длина не может быть отрицательной, т.е. $x > 0$. Площадь квадрата в основании коробки должна быть меньше 192, т.е.
$x^2 < 192$ или $x < \sqrt{192}$. Значит, $0 < x < \sqrt{192}$.
Найдем максимальное значение функции $V(x)$ на интервале $(0; \sqrt{192})$
Для этого используем производную первого порядка

$$V'(x) = \left(48x - \frac{x^3}{4}\right)' = 48 - \frac{3x^2}{4}$$

Чтобы найти максимум функции найдем критические точки на заданном интервале.

$$48 - \frac{3x^2}{4} = 0, \qquad 3x^2 = 192, \qquad x = \pm 8$$

x не может принимать отрицательных значений, значит, критической точке соотвтетствет значение $x = 8$. Найдем значение функции в критической точке $x = 8$ и на концах отрезка $[0;\sqrt{192}]$:

$$V(0) = 0,\ V(8) = 256,\ V(\sqrt{192}) = 0$$

Наибольшее значение функции V(x) принадлежит отрезку $[0;\sqrt{192}]$, значит, также принадлежит интервалу $(0;\sqrt{192})$.

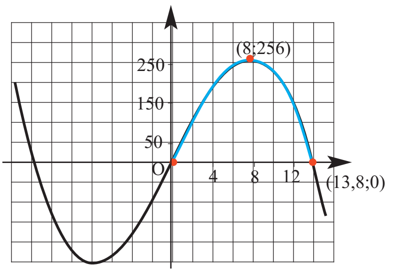
Используя производную второго порядка (при $x = 8$ $V''(8) < 0$) можно показать, что $x_{max} = 8$. Значит, функция $V(x)$ принимает максимальное значение в $x = 8$.

Если стороны основания коробки равны 8 см, то ее высота будет:

$$h = \frac{192 - 8^2}{4\cdot 8} = 4 \text{ см}.$$

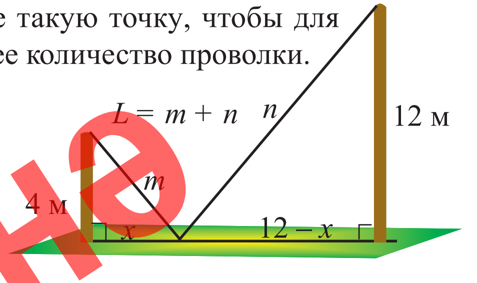
Значит коробка с размерами 8 см × 8 см × 4 см будет иметь максимальный объем.

Построив при помощи графкалькулятора график функции $V(x) = 48x - \frac{x^3}{4}$ также можно увидеть, что при $x = 8$ объем имеет максимальное значение. Постройте график функции при помощи производной и убедитесь в правильности решения.



Пример 2. Нахождение оптимальной точки. Два столба высотой 4 м и 12 м находятся на расстоянии 12 м друг от друга. На земле, они соеденины металическим проводом, от самых высоких точек столбов. На земле найдите такую точку, чтобы для крепления использовалось наименьшее количество проволоки.

Решение: 1) Изобразим рисунок соответствующий условию задачи и обозначим соответствующие данные на рисунке.



2) Аналитически выразим зависимость между переменными.

• Длину проволоки обозначим через L. Часть проволоки от каждого столба обозначим через m и n, тогда $L = m + n$.

• Величина L изменяется взависимлости о очки крепления на земле. Обозначим одно из них через x, тогда другое будет равно $12 - x$.

Выразим величины m и n через переменную x.

По теореме Пифагора: $x^2 + 4^2 = m^2$, $\quad m = \sqrt{x^2 + 16}$

$(12 - x)^2 + 12^2 = n^2$ $\quad n = \sqrt{x^2 - 24x + 288}$

$L = m + n = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288}$

зависимоть функции L(x) от переменной x будет

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 188}\ ,\quad 0 \le x \le 10.$$

Производная функции L(x):

$$L'(x) = (\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}}$$

Найдем критические точки функции L(x):

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}} = 0$$

$$x(\sqrt{x^2 - 24x + 288} = (12 - x)\sqrt{x^2 + 16}$$

$$x^2(x^2 - 24x + 288) = (12 - x)^2(x^2 + 16)$$

$$x^4 - 24x^3 + 288x^2 = (144 - 20x + x^2)(x^2 + 16)$$

$$x^4 - 24x^3 + 288x^2 = 144x^2 - 24x^3 + x^4 + 16\cdot 144 - 16\cdot 24x + 16x^2$$

$$128x^2 - 16\cdot 24x - 16\cdot 144 = 0$$

$$x^2 - 3x + 18 = 0 \qquad x_1 = 3 \quad x_2 = 6$$

Сравнивая значения функции L(x) в точках $x = 0$, $x = 12$, $x = 3$, $x = 6$ (это проверьте самостоятельно) получим, что наименьшее количество проволоки используется при $x = 3$: L(3) = 18 (метр)

При решении задач на оптимитизацию обратите внимание на следующее!

1. Внимательно читайте условие. Сделайте соответствющий рисунок.
2. Задайте список соответствующих переменных и констант, что изменилось, а что нет, какие единицы используются Если на рисунке есть-размеры, обозначьте их.
3. Выберите соответствующи параметр x и выразите искомую величины функцией $f(x)$. Найдите экстремумы данной функции.
4. Полученные значения объясните экспериментально.

Обучающие задания

1. Представьте число 24 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

2. Из проволоки длиной 60 м смоделировали прямоугольник. Какие размеры должен иметь этот прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей?

3. Площадь прямойгольника равна 64 см^2. Какие размеры должен иметь этот прямоугольник, чтобы его периметр был наименьшим?

4. **Максимальная площадь.** Туристы планируют провести соревнования по волейболу на воде. Для ограждения части моря, у них есть специальная веревка с пластиковыми фонариками. Какие размеры будет иметь участок прямойгольной формы, одна сторона кторого расположенва вдоль берега, чтобы площадь была наибольшей?

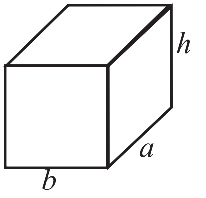
5. Основанием бака в форме параллелепипеда является квадрат. Объем бака должен равняться 108 л. Какие размеры должен иметь бак, чтобы для его изготовления расходовалось как сможно меньше материала?

6. **Максимальная площадь.** Для высадки различных сортов, фермер хочет разделит участок прямоугольной формы на параллельные участки,огородив их имеющимся у него материалом. Сколько квадратных метров, максимально, будет иметь каждый участок, если весь участок разделить на:

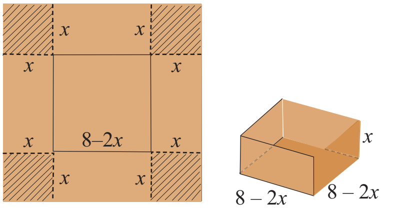
a) два больших, одинаковых по размеру, участка, имея при этом 1000 м материала для огорождения.

b) три больших, одинаковых по размеру, участка, имея при этом 1200 м материала для огорождения.

7. **Уменьшения затрат до минимума.** Длина основания коробки, объемом 50 см^3, в 3 раза больше ширины. 1 см^2 материала для изготовления основания стоит 10 манат, материал для боковых граней стоит 6 манат за 1 см^2. Какие оптимальные размеры должен иметь ящик, чтобы затраты на его изготовление были минимальными?

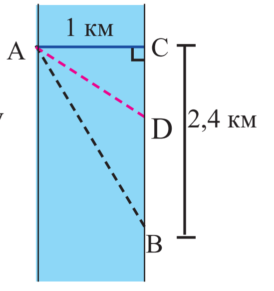


8. **Масимальный объем.** От картона квадратной формы, сторона которого равна 8 см, с четырех сторон вырезали одинаковые по размеру квадраты и склеили коробку, как показано на рисунке. Какую высоту, в сантиметрах, должна иметь коробка с данными размерами, чтобы она имела максимальный объем?



9. **Максимальная площадь.** Окно имеет форму конструкции, состоящей из прямоугольника и полуокружности. Если имеется всего 12 м рамы, то какие размеры нужно выбрать, чтобы площадь попадания света была наибольшей? (Максимальная площадь окна).

10. **Минимальная затрата времени.** Расул должен из точки A на одном берегу канала шириной 1 км, попасть в точку B на другом берегу. Для этого он может выбрать следующие варианты:

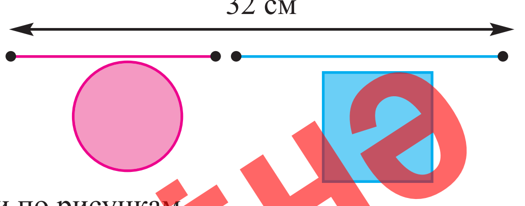


1) Переплыть канал на лодке из точки A в точку C, а потом пешком добраться до точки B.
2) Переплыть канал из точки A в точку B сразу.
3) Переплыть на лодке из точки A в некоторую точку D, расположенную между точками B и C, а потом из точки D пешком дойти до точки B.

Если Расул за час переплывает на лодке 3 км и проходит пешком 5 км, то какой путь он должен выбрать, чтобы, как можно быстрее, добраться до точки B?

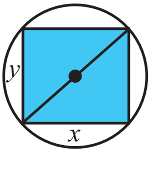
Задачи на конструирование

12. Ученики, из проволоки длиной 32 см, смоделировали квадрат и круг. На отрезки какой длины они должны разрезать проволоку, чтобы площадь полученных фигур была: a) наибольшей; b) наименьшей.

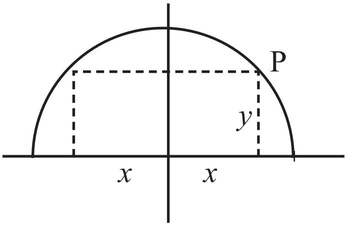


13. Решите задачи по рисункам.

a) Найдите четырехугольник наибольшей площади, вписанный в окружность радиуса 4 см.



b) Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полуокружность, радиусом 6 см, одна сторона которого лежит на диаметре.



Обобщающие задания

1. a) Найдите экстремумы заданных функций.
b) Постройте графики функций

1) $f(x) = 4 - 3x - x^2$ 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

3) $f(x) = \dfrac{-8x}{x^2+1}$ 4) $f(x) = 4 + (x-1)^3$

5) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 3$ 6) $f(x) = 3x^{2/3}$

7) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ 8) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

2. Нахождение наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
1. Найдите производную функции.
2. Найдите критические точки.
3. Вычислите значение функции в критических точках и на концах отрезка.
4. Среди полученных значений выберите наибольшее и наименьшее.

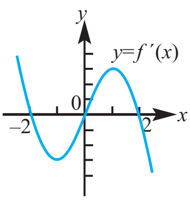
a) $y = -2x + 7, \quad -12 \le x \le 12$ b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 7, \ 0 \le x \le 4$

c) $f(x) = x^3 + x, \ 0 \le x \le 10$ d) $y = (x-3)^2 - 9, \ -8 \le x \le -3$

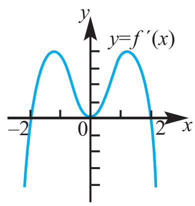
e) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x + 2, \quad -3 \le x \le 3$

3. Используя график производной функции f найдите: a) интервалы возрастания и убывания; b) координаты локальных экстемумов (приблизительно).

a)



b)



4. Согласно заданным условиям, изобразите графики функций.

a) $x < 2$, $f'(x) > 0$, $x > 2$, $f'(x) < 0$ и $f(2) = 5$.

b) $-1 < x < 4$ $f'(x) > 0$, $x < -1$ и $x > 4$ $f'(x) < 0$ и $f(-1) = 0$, $f(4) = 6$

c) $x \neq 1$ $f'(x) > 0$ и $f(1) = 2$

d) $x > -3$ $f'(x) = 2$, $x < -3$, $f'(x) = -2$ и $f(-3) = 1$

5. Для $f(x) = x^4 + x - \sqrt{3}$ vә $g(x) = 8x^2 + x + \sqrt{3}$ решите неравенство $f(x) < g(x)$

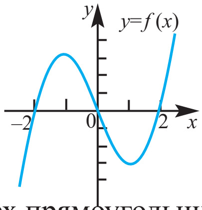
6. Найдие точки, в которых производная функции $f(x) = x \cdot e^{x^2-3x}$ равна 0.

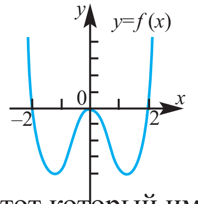
7. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$ параллельной прямй $y = 24$.

8. Найдите такую точку на параболе $y = x^2$, чтобы расстояние между ней и точкой М(21; 9) было наименьшим.

9. В арифметической прогрессии $a_6 = 3$. Найдите при каком значении разности прогрессии произведение $a_1 \cdot a_4 \cdot a_5$ будет наибольшим?

10. По графику функции,приблизительно, определите итервалы в которых производная положительна и отрицательна.

a) 

b) 

11. Среди всех прямоугольников, найдите тот который имеет наибольшую площадь, если их вершины расположены в начале координат и на параболе $y = 4 - x^2$ а, стороны расположены вдоль положительных направлений полуосей Оx и Оy.

12. Среди всех цилиндров с площадью полной поверхности 24 π см^2, найдите высоту цилиндра, который имеет наибольший объем.

13. **Медицина. Максимальная концентрация.** Функция $C(t) = \dfrac{0{,}08t}{t^2 + 2t + 2}$ показывает изменение концентрации лекарственного препарата в крови через время t. Здесь t показывает количество часов, после момента принятия препарата. а) За какое времядостигается максимальна концентрация. b) Определите момент времени, в которое достигается максимальная концентрация.

14. Найдите критические точки и экстремумы функций.

1) $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

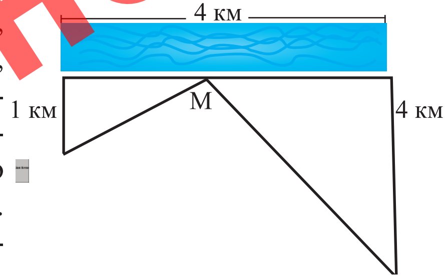
2) $y = x^2\sqrt{3 - x}$

3) $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x \ge 1 \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} 3 - x, & x \le 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

15. Для обеспечения водой двух зданий, расположенных на берегу реки, были установлены специальные водонасосы. Расстояние между зданиями 4 км, расстояние от одного здания до реки 4 км, от другого-1 км. В какой точке вдоль реки нужно расположить насос, чтобы при прокладке было использовано минимальное количество труб?



8 Объем фигур вращения

- Объем цилиндра
- Объем конуса
- Объем усеченного конуса
- Объем шара
- Производная, площадь поверхности и объем фигур вращения
- Подобие пространственных фигур
- Обобщающие задания

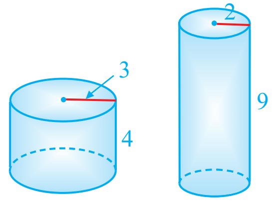
Математический словарь

объем конуса	объем полушара
объем цилиндра	объем шарового сегмента
объем шара	объем шарового слоя
	объем шарового сектора

Объем цилиндра

Как можно при помощи геометрических формул вычислить объем емкости для воды, которую мы используем ежедневно? 1 дм^3 = 1 литр

Говоря об объеме имеют ввиду вместимость пространственной фигуры. Можно ли сделать выводы, емкость какой из цилиндров на рисунке ниже больше? Что вы думаете об этом?

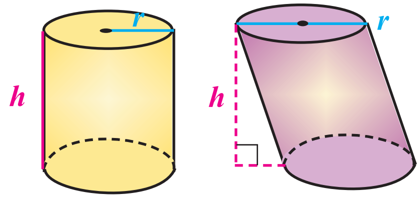


Объем цилиндра

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

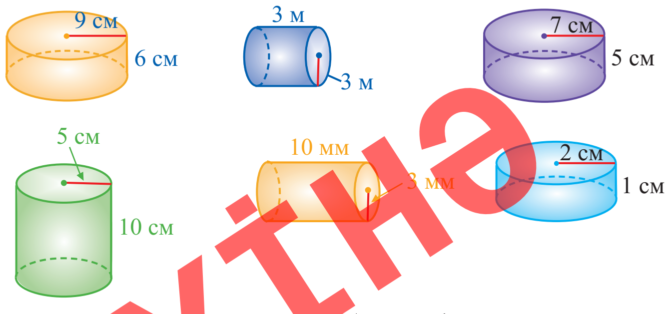
$V = S_{осн.}h$, $S_{осн.} = \pi r^2$

$V = \pi r^2 h$



Обучающие задания

1. Найдите объемы цилиндров на рисунках.

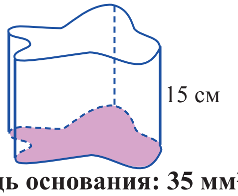


2. По данным на рисунке найдите объемы фигур.

a)

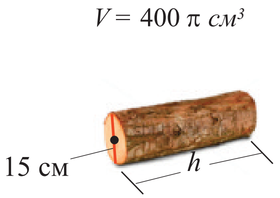
Площадь основания: 25 мм^2

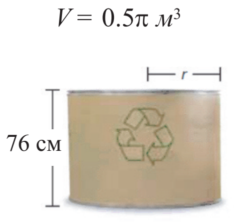
b)



Площадь основания: 35 мм^2

3. По данным на рисунке, найдите неизвестные величины.



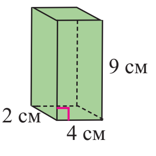


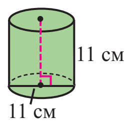
4. Найдите объем цилиндра, площадь боковой поверхности которого 20 π, а высота 10 единиц.

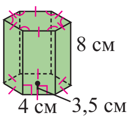
5. Найдите объем цилиндра, высотой 5 см, площадь полной поверхности которого равна 72 π см^2.

6. Высота цилиндра 25 см, а диаметр основания равен 8 см. Как изменится объем этого цилиндра, если от высоты отрезать 5 см, а радиус основания увеличить на 1 см?

7. Найдите площадь полной поверхности и объем фигур на рисунках.







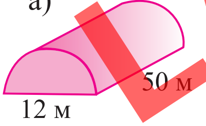
8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна S, длина окружности в основании равна C. Найдите объем цилиндра.

9. Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю 4 см. Найдите объем цилиндра.

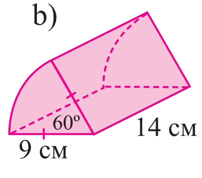
10. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписана цилиндр. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

11. На рисунке представлены части цилиндра, полученные при сечении плоскостью. По данным на рисунке найдите объемы данных частей.

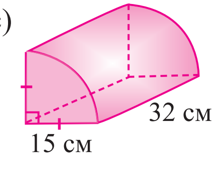
a)



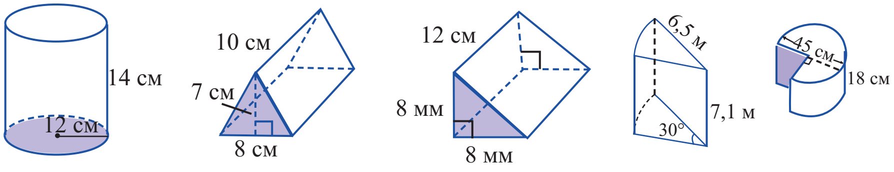
b)



c)



12. По данным на рисунке найдите объемы фигур

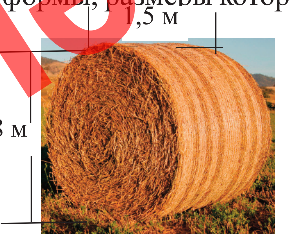


13. a) Как надо изменить высоту цилиндра, не изменяя основания, чтобы объем цилиндра увеличился в два раза?
b) Найдите диаметр цилиндра, площадь боковой поверхности которого (в кв. ед.) равна объему (в куб.ед).

14. Сок налит в сосуд радиус основания которого равен 15 см, а высота 20 см. Продается сок в стаканчике, радиус основания которого равно 3 см, а высота 6 см. Сколько денег выручат от продажи полного сосуда, если цена одного стакана сока равна 3 манатам?

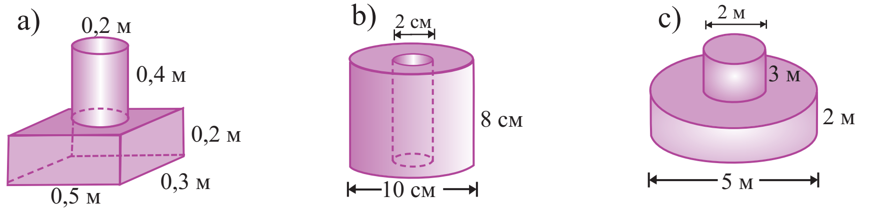
15. Найдите массу трубы длиной 35 см, изготовленной из материала плотность которого равна 0,6 г/см^3, если внутренний диаметр равен 24 см, внешний диаметр равен 28 см.

16. Сено продают в виде спрессованного параллелепипеда, размеры которого равны обычно 40 см × 40 см × 90 см. Однако, иногда сено собирают в форме цилиндра. Сколько параллелепипедов можно получить из стога сена цилиндрической формы, размеры которого указаны на рисунке?



17. Карандаш состоит из деревянной части в форме цилиндра, радиус которого равен 7 мм и графита, радиусом 1 мм. Найдите объем деревянной части карандаша, длина которого равна 14 см.

18. Найдите объемы сложных фигур на рисунках

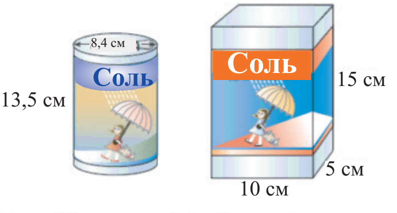


19. Гюльзар утверждает, что для того, чтобы в 2 раза увеличить вместимость бака, радиус основания которого равен 0, 75 м, а высота 0,5 м надо в два раза соответственно увеличит его размеры. Выразите свое отношение к утверждению Гюльзар, подтвердив их соответствующими вычислениями. a) Сколько литров вмещает бак данного размера? b) Какие размеры будет иметь бак, объем которого будет в 2 раза больше?

20. На рисунке изображены две коробки в форме цилиндра и прямоугольного параллелепипеда.

a) Объем какой коробки больше?

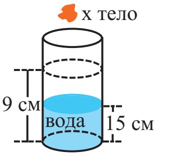
b) Как по вашему, коробки какой формы более удобно складывать друг на друга и транспортировать? Обоснуйте свое мнение.



21. Из массы теста в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами 20 см×15 см ×6 см сделали кексы цилиндрической формы радиус основания которого равен 1 см, а высота 5 см. Сколько кексов возможно сделать из данной массы?

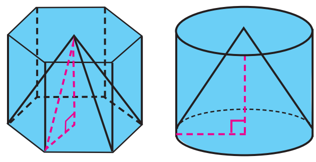
22. Если из наполненной до краев посуды цилиндрической формы высотой 10 см вылить 25 см³ воды, то уровень воды в посуде уменьшится на 2 см. Найдите объем посуды.

23. В сосуд с водой, в форме цилиндра, радиус основания которого равен 4 см, а высота 15 см, помещается нерастворимое в воде тело. При этом, уровень воды увеличивается на 19 см. Найдите объем тела, помещенного в воду.

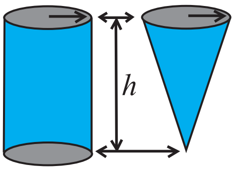


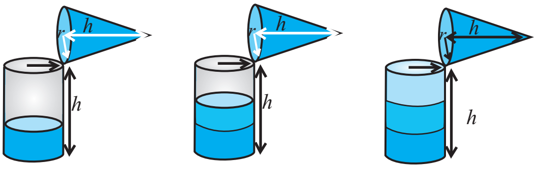
24. Цилиндрический поршень водяного насоса, диаметром 60 мм, совершает движение на расстояние 150 мм. За 1 минуту поршень совершает движение 40 раз. Найдите объем жидкости, которую перекачивает насос за 1 час работы.

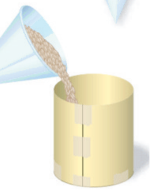
Практическая работа. Существует ли связь между объемами призмы и пирамиды имеющими одинаковую высоту и основание? Можно ли эту связь использовать для соотношения объемов цилиндра и конуса?



Сделайте из картона модели в виде конуса и цилиндра, у которых одинаковы радиусы оснований и высоты. Заполните модель в виде цилиндра при помощи модели в виде конуса песком (рисом, и т.п.). За сколько раз наполнится цилиндр? Верно ли утверждение, что три объема конуса заполняют объем цилиндра?







Обобщите соответствующую информацию о вычислении объемов призмы, цилиндра, пирамиды и конуса, записав ответ в закрашенные ячейки.

Объем призмы и цилиндра:

Объем = площадь основания × ▢

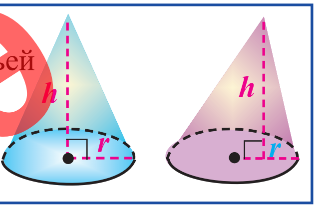
Объем пирамиды и конуса:

Объем = ▢ × объем призмы и цилиндра, имеющих одинаковое основание и высоту.

Объем конуса

Объем конуса равен произведению одной третьей площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} h \text{ , } S_{осн.} = \pi r^2 \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

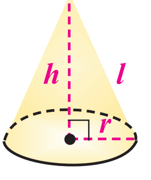


Пример. Образующая конуса 9 см, высота 6 см. Найдите объем конуса.

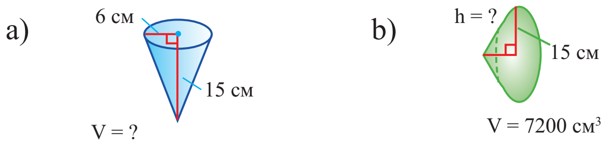
Решение: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h;$ $\quad l = 9$ см; $\quad h = 6$ см

$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

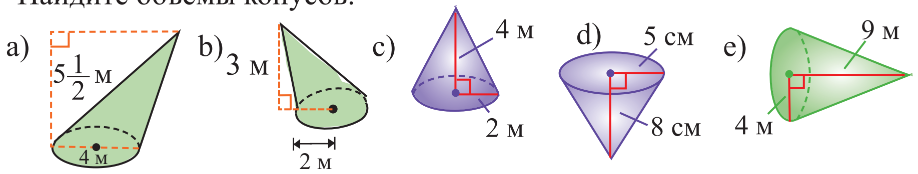
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 45 \cdot 6 = 80\pi$ (см^3)



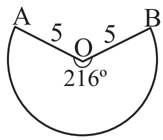
1. По данным на рисунке найдите неизвестные измерения.



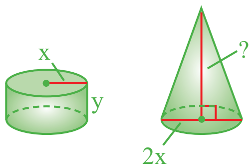
2. Найдите объемы конусов.



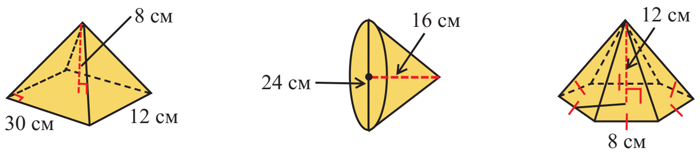
3. На рисунке изображена развертка конуса. Найдите объем конуса, согласно данным указанным на рисунке.



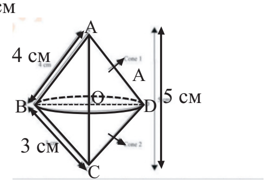
4. Найдите высоту конуса, если его объем равен объему цилиндра.



5. Найдите площадь полной поверхности и объем фигур на рисунке.



6. Найдите площадь поверхности и объем фигуры, полученной при вращении прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг гипотенузы.

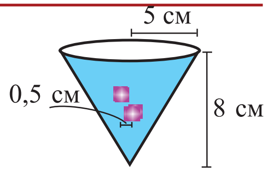


7. Высота усеченного конуса, объемом 96π см^3 , и образующая относится как 4:5. Найдите площадь полной поверхности данного конуса

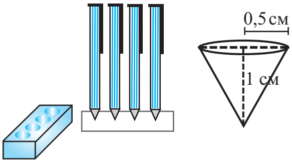
8. Найдите объем конуса, высотой 6 см, если площадь его боковой поверхности равна 24π см^2.

9. Образующая конуса длиной l образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем конуса.

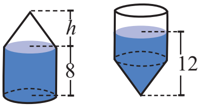
10. В сосуд имеющий форму перевернутого конуса радиусом 5 см и высотой 8 см помещены кубики длина ребра которых равна 0,5 см. При этом из сосуда вылилась одна четвертая часть жидкости. Сколько кубиков было помещено в сосуд?



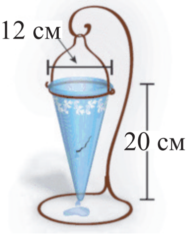
11. Размеры деревянной подставки для карандашей 15 см×5 см×2,5 см. Найдите объем деревянной подставки, если для острия карандаша из нее делается выемка в виде конуса, радиусом 0,5 см и глубиной 1см.



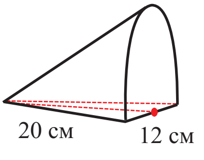
12. Цилиндрическая часть сосуда имеет длину 8 см. К ней прикреплена часть в виде конуса, высотой h, как показано на рисунке. Если сосуд перевернуть, то уровень жидкости составит 12 см. Найдите высоту конуса h.

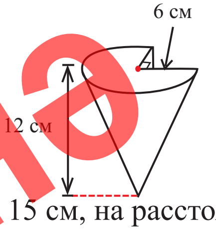


13. Из сосуда в форме конуса за минуту по каплям вытекает 4 см^3 воды. За какое время из полный сосуд опустошится на 80%? Зная, что 1 см^3 = 0,001 *л* выразите объем сосуда в литрах.



14. По данным на рисунке найдите площадь полной поверхности и объем фигур.

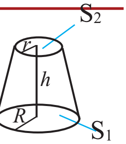




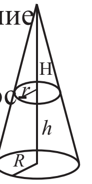
15. От конуса, диаметром 12 см и высотой 15 см, на расстоянии 9 см от основания проведена параллельная плоскость. Найдите разность объемов данного конуса и маленького конуса, отсеченного от данного.

16. Площадь одного из оснований усеченного конуса в 9 раз больше площади другого. Найдите объем полного конуса, если объем усеченного конуса равен 52 см^3 .

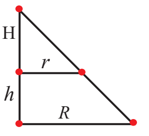
17. Выполнив следующую последовательность, докажите что объем усеченного конуса вычисляется по формуле $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$



1. Изобразите конус радиусом R и высотой h.
2. На расстоянии h от плоскости основания, изобразите сечение конуса плоскостью параллельную плоскости основания.



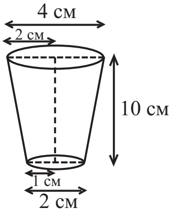
3. Запишите объем данного конуса и конуса, отсекаемого плоскостью параллельной основанию.
4. Найдите разность данных объемов.
5. Запишите разность в виде
$V = \frac{\pi}{3}(R^2h + H(R-r)(R+r))$.



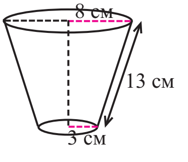
6. Покажите, что $(R-r) = hr$, используя подобие треугольников, полученных радиусами и высотой H.
7. Равенство, полученное в пункте 6 подставьте в равенство пункта 5. Покажите, что объем усеченного конуса находится по формуле
$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ və ya $V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$.

Здесь S_1 и S_2 площади оснований усеченного конуса.

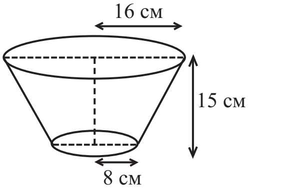
18. Диаметры оснований стакана в форме усеченного конуса равны 4 см и 2 см, а высота 10 см.
a) Найдите объем воды, который может поместиться в стакан в куб сантиметрах.
b) Выразите объем стакана в миллилитрах, зная что 1 $м^3$ = 1000 *л*.



19. Образующая усеченного конуса равна 13 см, а радиусы основания 8 см и 3 см. Найдите площадь полной поверхности и объем.



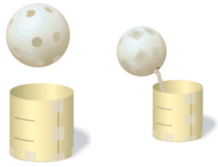
20. Емкость для молока выполнена в виде открытого конуса высотой 15 см и радиусами основания 8 см и 16 см. Сколько денег выручат от продажи полной емкости, если 1 литр молока стоит 1,35 манат? Сколько денег потратят на изготовление емкости для молока, если каждые 100 $см^2$ материала, из которого сделана емкость стоят 0,95 манат?



Объем шара

Практическая работа.

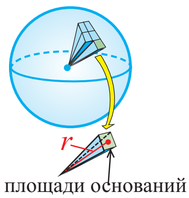
1. Возьмите мяч. Определите его диаметр.
2. Изобразите развертку цилиндра, который имеет диаметр и высоту, равный шару.
3. Вырежьте и сверните полученную развертку в цилиндр. Скрепите ее при помощи клейкой ленты. Разделите высоту цилиндра на 3 равные части и сделайте соответствующие разметки.



4. Оберните мяч фольгой или плотным материалом и сделайте мешок сферической формы. Наполните его песком.
5. Пересыпьте песок в цилиндр. Какая часть цилиндра заполнится?

Если разделить поверхность сферы сеткой из вертикальных и горизонтальных линий и маленький “прямойгольный” кусочек сферы соединить с центром сферы, то можно представить, что сфера состоит из бесконечного множества “маленьких пирамид”.

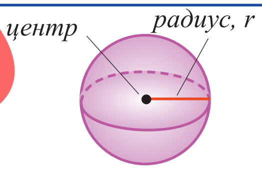
Увеличивая количество пирамид, основания пирамиды будут становиться меньше и меньше. Объем шара можно выразить через сумму объемов “маленьких пирамид” ($\frac{1}{3}S_{осн.}r$) высота которых равна радиусу шара. Сумма площадей оснований пирамид будет равна площади поверхности шара. Принимая во внимание, что площадь поверхности шара равна $4\pi r^2$, получим, что объем шара равен $V = \frac{1}{3}S \cdot r$. Подставив вместо $S = 4\pi r^2$, получим $V = \frac{1}{3}4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$.



Объем шара

Объем шара равен произведению $\frac{4}{3}\pi$ и куба радиуса.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

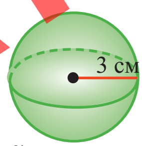


Пример. Найдите:

a) объем шара радиуса 3 см

b) радиус шара объемом 288 см^3

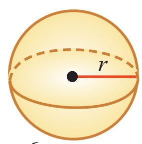
Решение: a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



$r = 3$ см

$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$ (см^3)

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

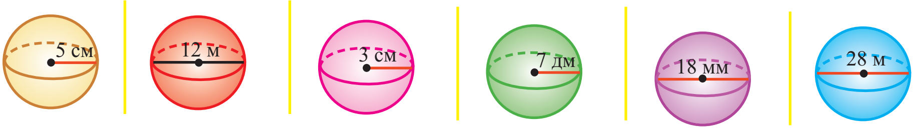


$\frac{4}{3}\pi r^3 = 288$

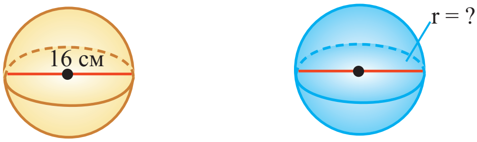
$r^3 = \frac{288 \cdot 3}{4\pi} = \frac{216}{\pi}$, $r = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ (см).

Объем шара

1. Найдите объемы шаров на рисунке.



2. По данным на рисунке, найдите требуемые размеры.



V = ? V = 36π м^3

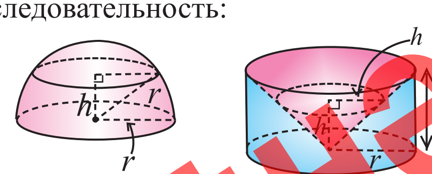
3. a) Сколько кубических сантиметров, как минимум, должна иметь коробка, чтобы в нее можно было поместить шар радиусом 3 см?

b) Шар радиусом 2,4 см переплавили в цилиндр, радиусом 4 см. Найдите высоту цилиндра.

c) Три металлических шара радиусами 3 см, 5 см и 6 см переплавили в один большой шар. Найдите радиус полученного шара. Этот шар переплавили в цилиндр, радиусом 4 см. Найдите высоту цилиндра.

d) Найдите сколько кубических сантиметров коробки, в форме куба с ребром 24 см, останутся пустыми, если в него поместить мяч диаметром 22 см.

4. Определите формулу объема шара по методу Архимеда, выполнив следующую последовательность:



1. Покажите, что площадь поверхности полусферы высотой h равна $\pi(r^2 - h^2)$.

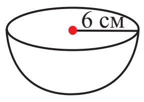
2. Покажите, что площадь кругового сечения конуса, удаленного из цилиндра высотой h, *равна* $\pi(r^2 - h^2)$.

3. Выведите формулу объема, доказав равенство объемов фигур, при помощи принципа Кавальери.

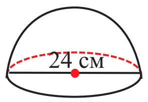
Объем шара

5. 1) Запишите формулу объема полушара.
2) Найдите объемы полушаров.

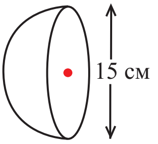
a)



b)



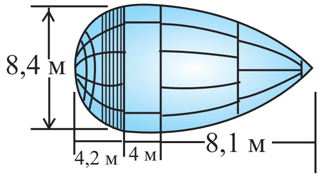
c)



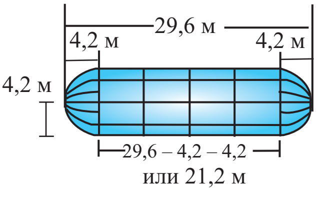
6. Для обеспечения топливом космических кораблей используются шатлы. Они доставляют необходимые грузы на корабли, вращающиеся по орабитам вокруг Земли. Шатлы, в отличии от других космических кораблей, обладают возможностью возвращаться. У них есть цистерны с жидким кислородом и жидким водородом.

Цистерна для жидкого кислорода имеет форму соединенных полусферы, цилиндра и конуса. Цистерна для жидкого водорода - цилиндра, на конце которого расположены полусферы. Найдите объемы цистерн по рисунку.

Цистерна для жидкого кислорода



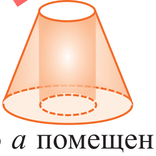
Цистерна для жидкого водорода



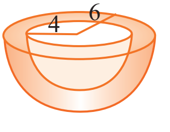
7. На рисунке **A** в полусфере, радиуса 8 см, сделана выемка в форме конуса. Найдите площадь поверхности и объем полученной фигуры.
На рисунке **B,** в усеченном конусе, с диаметрами оснований 10 см и 4 см сделана выемка в форме цилиндра, высота которого равна высоте конуса. Основание цилиндра совпадает с меьшим основанием усеченного конуса. Найдите площадь поверхности и объем полученной фигуры, если высот аконуса равна 4 см.
На рисунке **C** в полушаре, с диаметром 6 см сделана выемка, в форме полушара, с диаметром 4 см. Найдите площадь поверхности и объем полученной фигуры.

A.

B.

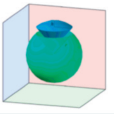


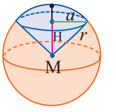
C.



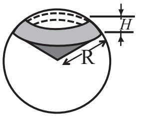
8. В куб, ребро которого равно a помещен шар, который касается всех граней куба. Найдите расстояние от центра шара до грани куба и объем шара. Выпоните соответственный рисунок.

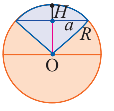
Сектор шара и сегмент шара





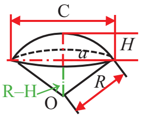
Шаровой сектор — это часть шара, ограниченная конической поверхностью с вершиной в центре шара. Сегмент шара соединяет сектор шара с конусом, выходящим из вершины шара. Так как шар можно рассмотреть как сумму пределов объемов маленьких пирамид, вершины которых находятся в центре шара, а основания соответствуют касательным к сегменту, то





$$V_{\text{сект.}} = \frac{1}{3} S_{\text{сегм}} \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 2\pi RH \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

С другой стороны,



$$a^2 = R^2 - (R-H)^2 = 2RH - H^2 \text{ и т.к.}$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi a^2 H = \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R-H)$$

$$V_{\text{сегм.}} = V_{\text{сект.}} - V_{\text{кон.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R-H) = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$$

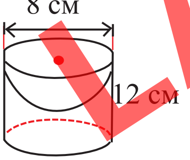
9. Диаметр шара 10 см. Найдите площадь поверхности основания сегмента высотой 1 см и объем соответствующего сектора.

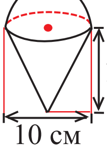
10. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его по части 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?

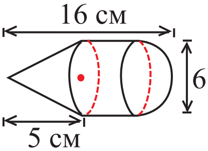
11. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус щара равен 75 см?

12. Радиусы окружностей оснований шарового слоя 3 м и 4 м, а радиус шара равен 5 м. Найдите обьем шарового слоя

13. Найдите объемы фигур.

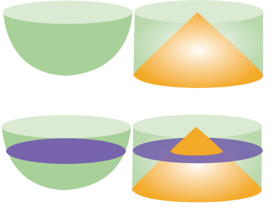






Проектная работа. Как Архимед получил формулу объема шара? Отношение, которое получил Архимед между объемами цилиндра, конуса и шара.

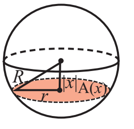
Кольцы полушара. Архимед нашел формулу для нахождения объема шара, исследовав связь объемов цилиндра, описанного вкруг шара радиуса r и конуса вписанного в данный цилиндр. Попробуем и мы выполнить это исследование.



Объясним это при помощи изменения площади колец на следующем примере. Представьте зависимость площади сечения от x (x-расстояние от центра шара до плоскости), выполняя следующие действия.

a) Вычислите следующие значения функции S(x).

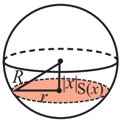
$$S(0)\ ;\ S(1);\ S(3);\ S(4);\ \ S(5)$$



Для примера вычислено значение S(1) :

$$S(1) = \pi r^2 = \pi(R^2 - 1^2) = \pi(5^2 - 1^2) = 24\pi$$

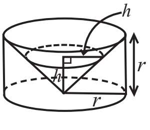
b) Представьте свои рассуждения по поводу значений сечения плоскости S(0) и S(5).



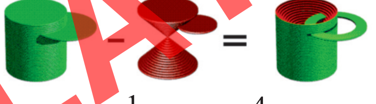
c) Запишите общую формулу для определения площади сечения плоскостью, расположенной на расстоянии x шара радиуса R.

d) Свяжите формулу, полученную в пункте c и следующий рисунок.

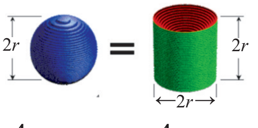
d) Чтобы понять умозаключения Архимеда, вернемся к начальному рисунку.



При “извлечении” конуса из цилиндра в сечении получаем кольца, параллельные основанию. На одинаковом уровне площадь сечения является кругом. По принципу Кавальери площади этих плоскостей сечения равны. Из подобия треугольников можно доказать, что площадь колечек $\pi(r^2 - h^2)$ равна.

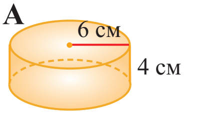


$$\pi r^2 2r - 2\,\frac{1}{3}\,\pi r^2 r = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

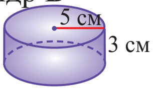


$$\frac{4}{3}\,\pi r^3 = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

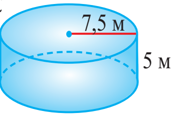
Какой из цилиндров подобен цилиндру A? Цилиндр **A**



Цилиндр **B**



Цилиндр **C**



Отношение линейных размеров подобных фигур должно быть одинаково. Проверим: подобие цилиндра A и цилиндра B:

$$\frac{\text{Высота A}}{\text{Высота B}} = \frac{4}{3} \qquad \frac{\text{Радиус A}}{\text{Радиус B}} = \frac{6}{5}$$

Цилиндры A и B не подобны, так как отношения соответствующих линейных размеров не равны.

Подобие цилиндра A и цилиндра C:

$$\frac{\text{Высота A}}{\text{Высота C}} = \frac{4}{5} \qquad \frac{\text{Радиус A}}{\text{Радиус C}} = \frac{6}{7{,}5} = \frac{4}{5}$$

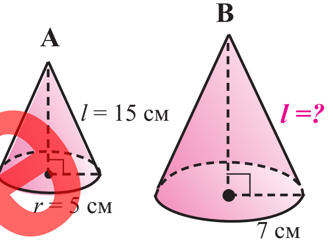
Цилиндры A и C подобны.

Линейные размеры подобных пространственных фигур пропорциональны. Отношение линейных размеров называется коэффициентом подобия. Увеличивая или уменьшая фигуры, в соответствии с коэффициентом подобия можно получить новые подобные фигуры.

По соотвествующим размерам подобных фигур можно найти недостающие размеры.

Пример. Конусы A и B подобны. По данным на рисунке, найдите образующую конуса B.

Решение: Запишем отношение линейных размеров:

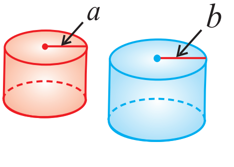


$$\frac{\text{Радиус A}}{\text{Радиус B}} = \frac{\text{Образующая A}}{\text{Образующая B}}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{l} \qquad l = 21 \text{ см}$$

Площади поверхностей подобных пространственных фигур

Отношение площадей поверхностей двух подобных пространственных фигур равно квадрату отношения линейных размеров или квадрату коэффициента подобия:

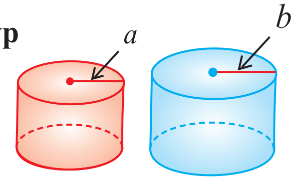


$$A \sim B \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = k^2$$

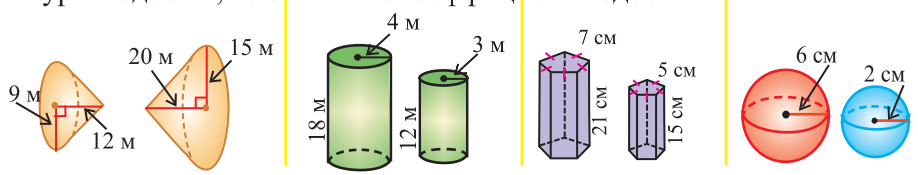
Объемы подобных пространственных фигур

Отношение объемов двух пространственных фигур A и B, равно отношению куба соответствующих линейных размеров или кубу коэффициента подобия:

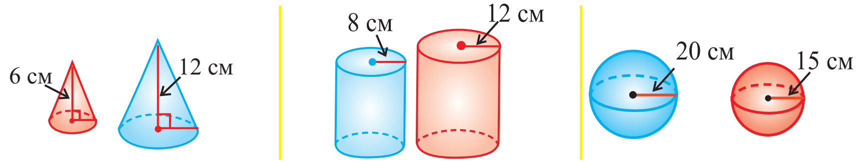
$$A \sim B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = k^3$$



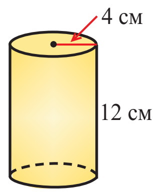
1. Определите являются или нет данные фигуры подобными. Если фигуры подобны, то запишите коэффициент подобия.



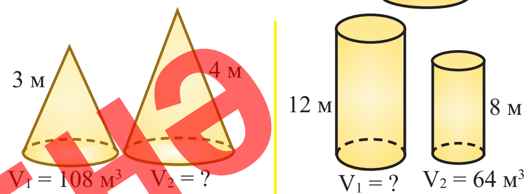
2. Найдите отношение объемов фигур, если они подобны.



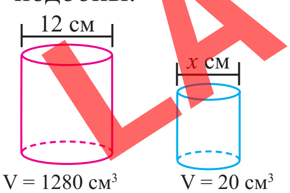
3. Как изменится объем цилиндра радиуса 4 см и высотой 12 см, если его размеры: a) увеличить в 2 раза; b) увеличить в 3 раза?
Изобразите увеличенный цилиндр и запишите новые размеры. Будут ли данные цилиндры подобными?



4. Найдите требуемые размеры, зная, что фигуры подобны.

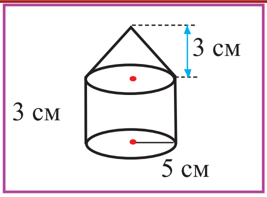


5. Найдите диаметр маленького цилиндра, зная, что цилиндры подобны.

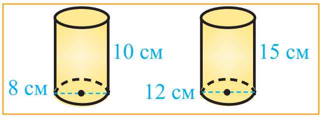


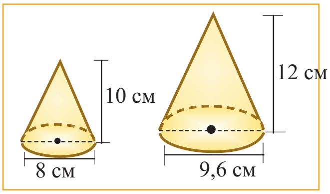
6. Линейные размеры конуса увеличили в два раза.
a) Во сколько раз увеличилась площадь поверхности конуса?
b) Во сколько раз увеличился объем конуса?
c) Найдите отношение объемов двух подобных конусов, если площади поверхностей этих конусов относятся как 9:16.

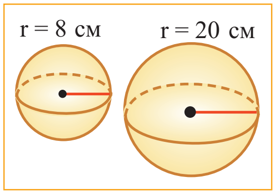
7. На рисунке дан план зернохранилища в масштабе 1 : 100. Найдите действительные размеры зернохранилища.



8. Если линейные размеры маленькой фигуры увеличить в разы, то можно получить соответствующие размеры большой фигуры. Найдите площадь поверхности этих фигур. Определите, во сколько раз увеличились линейные размеры, полная поверхность и объем?



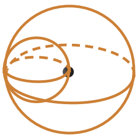




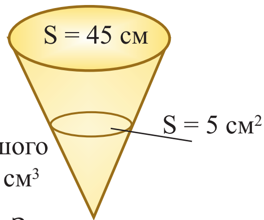
9. Найдите объем маленькой пространственной фигуры, если фигуры на рисунке подобны.

a)

Объем большого шара: 10 литров



b)



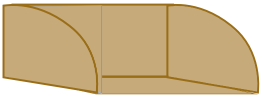
Объем большого конуса: 270 см³

10. Радиус одной из шаров равен диаметру другой. Запишите отношение: a) объемов; b) полных поверхностей.

11. Для изготовления контейнера для жидкости объемом 125 см³ в форме цилиндра было использовано 240 см² материала. Фирма, хочет увеличить радиус и высоту контейнера в одинаковое количество раз, чтобы объем достиг 1 *л* (1000 см³). Сколько материала понадобится для изготовления новых контейнеров?

12. **Долгосрочное задание.** Изготовьте модель полки, на которой можно разместить 30 CD.

1. Конверты для CD обычно выполнены из картона шириной 14,5 см, высотой 12,6 см и толщиной 1 см. Чтобы на полке поместилось 30 CD , какую наименьшую длину должно иметь нижнее основание полки? Не забудьте о местах соединения.



2. При изготовлении боковых поверхностей, примите во внимание высоту CD. На рисунке для примера изображена модель полки. Придумайте свой дизайн.

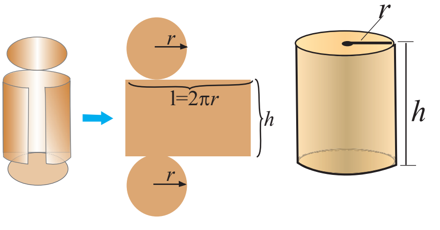
3. Используя масштаб, запишите размеры как для заданного рисунка, так и для вашей полки.

Пример. Минимальные затраты. Для мясных консервов планируется использовать банку в форме цилиндра объемом 250 см³.
a) Каких размеров должна быть банка, чтобы для ее изготовления использовалось как можно меньше материала?
b) Если цена 1 см² материала на круглое основания тратится 0,05 гяпик, а цена 1 см² боковой поверхности 0,12 гяпик, то какие размеры должна иметь банка, чтобы затраты на ее изготовление были минимальными?

Решение: a) По условию задачи объем равен 250 см³. Эти данные дают нам возможность найти зависимость между r и h.

$$\pi r^2 h = 250, \quad h = \frac{250}{\pi r^2}$$

$$S_{səth} = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{основания}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{развертка боковой поверхности прямоугольной формы}}$$



$$S_{\text{п.п.}} = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{250}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}$$

Для функции выражающей площадь поверхности не задан закрытый интервал области определения и при $r > 0$ мы должны найти при каком значении r функция имеет наименьшее значение. Найдем производую функции $S_{\text{п.п.}}$.

$$S'_{səth} = (2\pi r^2 + \frac{500}{r})' = 4\pi r - \frac{500}{r^2}$$

Найдем критические точки функции.

$$4\pi r - \frac{500}{r^2} = 0 \qquad 4\pi r^3 = 500 \qquad r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \approx 3{,}4$$

Если бы функция была определена на закрытом интервале, то мы бы нашли значение функции в конечных и критических точках и нашли бы при каком x функция принимает минимальное значение.

$$S''_{\text{п.п.}} = (4\pi r - \frac{500}{r^2})' = 4\pi + \frac{1000}{r^3} \qquad r > 0$$

$$S''(3{,}41) = 4\pi + \frac{1000}{3{,}41^3} > 0$$

Знак производной второго порядка в критической точке положителен, т.е. в этой точке убывание изменяется на возрастание, значит точка $r = 3{,}4$ точка минимума.

Подставим значение $r = 3{,}4$ в формулу для высоты $h = \dfrac{250}{\pi r^2}$

Получим $h \approx 6{,}9$.

b) $C(r) = 0{,}1\pi r^2 + 0{,}12\dfrac{500}{r} = 0{,}1\pi r^2 + \dfrac{60}{r} \qquad r > 0$

$C'(r) = \left(0{,}1\pi r^2 - \dfrac{60}{r}\right)' = 0{,}2\pi r - \dfrac{60}{r^2}$

$0{,}2\pi r - \dfrac{60}{r^2} = 0 \qquad 0{,}2\pi r = \dfrac{60}{r^2} \qquad 0{,}2\pi r^3 = 60$

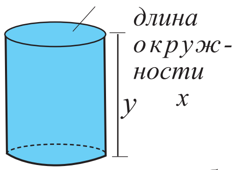
$0{,}2\pi r^3 = 60 \qquad r \approx 4{,}55 \qquad h = \dfrac{250}{\pi r^2} = \dfrac{250}{\pi (4{,}55)^2} \approx 3{,}8$

Размеры при которых затраты на материал будут минимальными будут $r \approx 4{,}55$ см, $h \approx 3{,}8$ см.

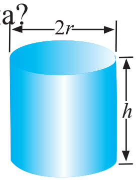
Должны ли совпадать результаты, полученные в пунктах а) и b)? Проведите обсуждение.

1. Найдите высоту цилиндра, имеющего наибольший объем, если площадь поверхности равна 24π см^2.

2. а) Какие размеры x и y должен иметь лист металла, прямоугольной формы, чтобы цилиндр свернутый из прямоугольника с периметром 36 см, имел максимальный объем?

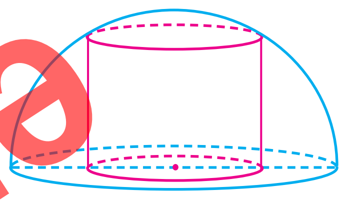


b) Какие размеры h и r нужно выбрать для сосуда цилиндрической формы, объемом 1 литр, чтобы для его изготовления было израсходовано как можно меньше материала?

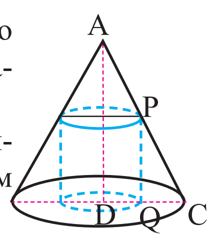


3. Найдите наибольшее значение объема конуса, образующая которого равна 15 см.

4. Найдите наибольшее значение объема цилиндра, вписанного в полушар, радиусом 4 см.

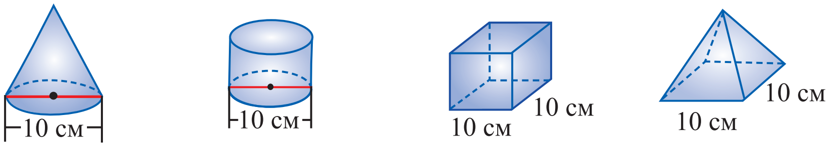


5. Найдите радиус и высоту цилиндра, наибольшего объема, вписанного в конус высотой $AD = a$ и радиусом $DC = b$.
Указание: обозначьте радиус цилиндра $DQ = x$, высоту $PQ = y$ и учитывая, что $\Delta ADC \sim \Delta PQC$. Объем цилиндра находится по формуле $V=\pi r^2 h$.

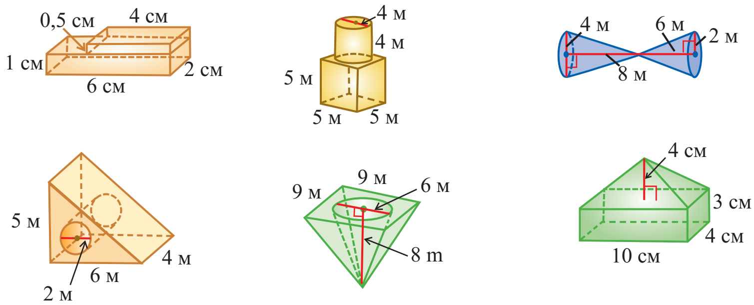


Обобщающие задания

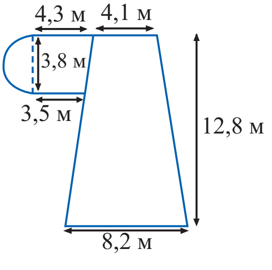
1. Высоты всех фигур на рисунке равны 8 см. Какая из фигур имеет наибольший объем.



2. Найдите объемы фигур.



3. Сколько кубических метров асбетона толщиной 10 см понадобится, чтобы покрыть площадь поверхности на рисунке?

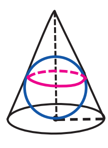


4. Чтобы каток для утрамбовки асфальта был тяжелее его наполняют водой. Найдите сколько тонн воды вмещает барабан высотой 1,85 м и радиуса 0,45 м?

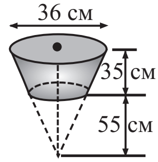
5. Найдите массу металической трубы, плотностью 7,8 т/м^3 цилиндрической формы, если внешний диаметр равен 17 см, а внутренний диаметр равен 15 см. Длина трубы равна 10 м.

6. Диагональное сечение цилиндра квадрат. Найдите радиус основания цилиндра, если его объем равен 169,56 куб ед.

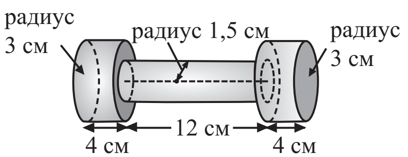
7. Найдите объем шара, с наибольшим радиусом, вписанного в конус. Радиус основания конуса R, высота H.



8. В сосуд, размеры и форма которого указаны на рисунке заполнен водой. Однако, в сосуде есть дырка, через которую за минуту выливается 1,2 *мл воды*. Сколько воды останется в сосуде через 3 часа?



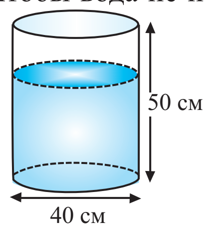
9. Спортивный снаряд, гантели, состоит из металлических цилиндров. Радиус цилиндра на концах равен 3 см, высота 4 см. Радиус цилиндра посередине равен 1,5 см, а высота 12 см. Найдите объем гантели.



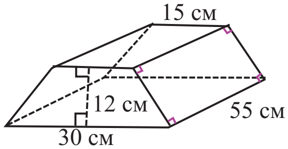
10. В аквариум в форме цилиндра с размерами, указанными на рисунке, налили 55 литров воды.

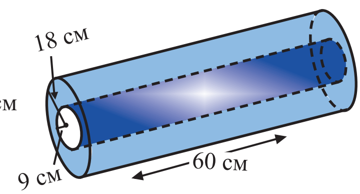
a) Найдите высоту уровня воды в аквариуме.

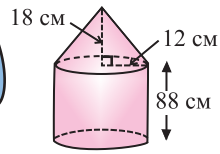
b) В аквариум хотят поместить цветные шары, диаметром 12 мм. Сколько шаров можно поместить в аквариум, чтобы вода не перелилась?



11. Найдите объемы фигур.



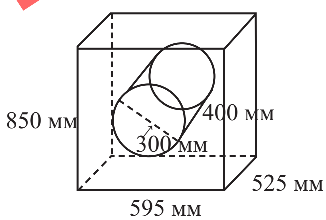




12. Размеры стиральной машины 850 мм ×595 мм ×525 мм. Стирка осуществляется при помощи нержавеющего барабана.

a) Найдите сколько литров воды вмещает барабан.

b) Определите объем стиральной машины, без объема барабана.



9 Интеграл

- Первообразная функция и неопределенный интеграл
- Площадь фигуры ограниченной кривой
- Определенный интеграл
- Формула Ньютона-Лейбница
- Свойства определенного интеграла
- Площадь фигуры, ограниченной кривыми
- Определенный интеграл и среднее значение функции на отрезке
- Определенный интеграл и объем фигур вращения

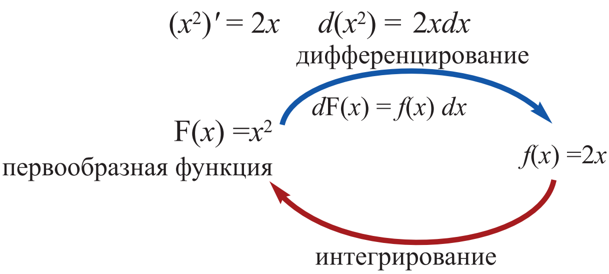
Математический словарь

первообразная функция
знак интеграла
интегрирование
постоянная интегрирования
неопределенный интеграл
определенный интеграл
границы интегрирования
основная теорема интегрирования
среднее значение функции

Это интересно знать!

Центр Гейдара Алиева славится своим архитектурным стилем и является уникальной архитектурной работой. Красота архитектуры была достигнута при помощи решения многих систематических задач. Стены здания выполнены в виде волны и можно сказать, что в проекте не использовались прямые линии. Структура здания крыши, касаясь земли формирует гладкое и гармоничное изображение. Такая структура представляет собой постмодернистскую архитектуру, а также эффект бесконечности. Линии здания символизируют связь прошлого и будущего. Для построения здания были использованы конструкции в виде металлической решетки, общая длина которой составила 90 км. При установки крыши, общая площадь которой составила 4 га, были использованы 12027 штук специальных панелей , имеющих форму треугольников, прямоугольников, трапеций и параллелограммов различных размеров. Если мы захотим найти площадь покрытия крыши или какой-либо части здания в виде волны, то нам придется прибегнуть к интегрированию.

Исследование. Путь, пройденный свободно падающим телом за время t находится по формуле $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. Эта формула была открыта Галилеем экспериментально. Дифференцируя находим скорость: $s'(t) = v(t) = gt$. Дифференцируя второй раз найдем ускорение: $v'(t) = a(t) = g$.
А как найти закон по которому изменяется скорость, зная ускорение, а также закон $s(t)$?
Дифференцирование - это нахождение производной функции, нахождение функции по производной является обратным действием и называется интегрированием. В этом случае, зная производную или дифференциал, надо найти саму функцию, т.е для функции $f(x)$ нужно найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)\,dx$. Такую функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$.
Определение. Функция, удовлетворяющая равенству $F'(x) = f(x)$ для всех точек на заданном промежутке, для функции $f(x)$ заданной на том же промежутке называется первообразной функцией $F(x)$.
Например, функция $F(x) = x^2$ есть первообразная для функции $f(x) = 2x$ на промежутке $(-\infty;\infty)$, так как для всех $x \in (-\infty;\infty)$ справедливо $(x^2)' = 2x$



С другой стороны, $(x^2)' = (x^2 + 2)' = (x^2 - 3)' = 2x$, т.е. вообще для любой постоянной C если $(x^2 + C)' = 2x$, то для каждой из функций x^2, $x^2 + 2$, $x^2 - 3$, $x^2 + C$ функция $f(x) = 2x$ является первообразной. Таким образом, для заданной функции первообразная функция не является единственной.
Если, функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные функции $f(x)$, то так как $g'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, то $g(x) = C$ (здесь C любая постоянная). Отсюда, $F_1(x) = F_2(x) + C$. Таки образом, получаем, что если функция $F(x)$ на заданном промежутке является первообразной для функции $f(x)$, то для любой постоянной C :
1) Функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$- на заданном промежутке.
2) Любая первообразная функция для функции $f(x)$ на заданном промежутке имеет вид $F(x) + C$ и оно называется общим выражением для первообразных функций.

Неопределенный интеграл

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом, обозначается $\int f(x)dx$ и читается как **“интеграл ф от икс де икс”**.

Если функция $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$,то по определению $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + C$.

Здесь $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, x - интегральная переменная, C - постоянная интегрирования. За интегральную переменную можно принять любую переменную.

Примеры. a) $\int 5dx$ b) $\int 3x^2dx$ c) $\int \cos x\,dx$

$\int 5dx = 5x + \mathrm{C}$ $\int 3x^2dx = x^3 + \mathrm{C}$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Так как: $(5x + C)' = 5$ $(x^3 + C)' = 3x^2$ $(\sin x + C)' = \cos x$

Пример. Найдите интеграл $\int x^3\,dx$.

Решение: подумаем, производной какой функции является функция x^3. Например, известно, что производной функции x^4 является функция $4x^3$. Значит, множителем искомой функции является дробь $\frac{1}{4}$, которая потом сократиться с коэффициентом 4 и получится x^3. Такой функцией является функция $g(x) = \frac{1}{4}x^4$. Значит, $\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$

Обучающие задания

1. Покажите, что функция $\mathrm{F}(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке.

a) $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{6}x^4$, $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $x \in (-\infty;+\infty)$

b) $\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0;+\infty)$

c) $\mathrm{F}(x) = (2x-1)^3$, $f(x) = 6\cdot(2x-1)^2$, $x \in (-\infty;+\infty)$

d) $\mathrm{F}(x) = 3x - \cos x$, $f(x) = 3 + \sin x$, $x \in (-\infty;+\infty)$

2. Найдите одну из первообразных функций для заданных на числовой оси функций.

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 3x^2$ c) $f(x) = 8x^3$ d) $f(x) = 5x^4$

3. Из заданных функций найдите такую, что две другие являются для нее производной и первообразной функциями.

$f(x) = 2$ $g(x) = 2x + 1$ $h(x) = x^2 + x$

4. Используя определение, найдите неопределенный интеграл.

a) $\int 2\,dx$ *b)* $\int 4\,dx$ *c)* $\int 2x\,dx$ *d)* $\int 4x^3\,dx$

Интеграл постоянной и степенной функции

Интеграл постоянной: $\int kdx = kx + C$

Интеграл степенной функции

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

$\int kx^n dx = \dfrac{kx^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

Проверьте эти формулы сами

$\int (kx+b)^n dx = \dfrac{1}{k(n+1)}(kx+b)^{n+1} + C$, $n \neq -1$

Пример 1. Найдите неопределенный интеграл $\int 5\sqrt{x}\,dx$

Решение: $\int 5\sqrt{x}\,dx = \int 5x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{5}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + c = \dfrac{5}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

Пример 2. Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = 3\cdot(2x+1)^4$.

Решение: Так как функция x^4 одна из первообразных функции $\dfrac{x^5}{5}$, то одна из первообразных функции $f(x) = 3\cdot(2x+1)^4$ будет

$3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x+1)^{4+1}}{4+1} = \dfrac{3}{10}(2x+1)^5$. Тогда общий вид первообразных имеет вид:

$F(x) = \dfrac{3}{10}(2x+1)^5 + C$. Значит, $\int 3\cdot(2x+1)^4 dx = \dfrac{3}{10}(2x+1)^5 + C$

5. Найдите неопределенный интеграл.

a) $\int(-4)\,dx$ b) $\int 6\,dx$ c) $\int(-4x)\,dx$ d) $\int \dfrac{2}{3}x\,dx$

6. Найдите первообразные функций.

a) $f(x) = 4x^2$ b) $f(x) = 7x^5$ c) $f(x) = 9x^8$ d) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$

7. Вычислите неопределенный интеграл, представив подынтегральную функцию в виде x^m.

a) $\int \dfrac{1}{x^3}\,dx$ b) $\int \dfrac{1}{x^5}\,dx$ c) $\int \dfrac{dx}{x^2}$ d) $\int 5x^{\frac{1}{4}}dx$

e) $\int \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x}dx$ f) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ g) $\int 8\sqrt{x}\,dx$ h) $\int\left(-\dfrac{3x}{\sqrt{x}}\right)dx$

8. a) Покажите, что $((2x+3)^4)' = 8(2x+3)^3$ и вычислите неопределенный интеграл $\int 8(2x+3)^3$.

b) Покажите, что $\dfrac{d}{dx}\sqrt{4x+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$

и вычислите неопределенный интеграл $\int \dfrac{3}{\sqrt{4x+1}}\,dx$.

9. Найдите первообразные функций.

a) $f(x) = (2x + 3)^5$ b) $f(x) = (7 - 3x)^8$ c) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^9$

d) $f(x) = (5x + 2)^{-6}$ e) $f(x) = (9 - 4x)^{-2}$ f) $f(x) = (x + 3)^{-3}$

Свойства неопределенного интеграла

При интегрировании используют следующие свойства:

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

2. $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

3. $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)dx$

4. $\int[f(x) - g(x)]dx = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)dx$

5. $\int k\cdot f(x)dx = \mathrm{k}\cdot\int f(x)dx$

В частном случае при $k = -1$, имеем $\int(-f(x))dx = -\int f(x)dx$

Пример 1. Найдите интеграл $\int(3x^5 + 9x^2 - 5)dx$.

Решение: $\int(3x^5 + 9x^2 - 5)dx = \int 3x^5dx + \int 9x^2dx - \int 5dx =$

$$= 3\frac{x^{5+1}}{5+1} + 9\frac{x^{2+1}}{2+1} - 5x + C = \frac{1}{2}x^6 + 3x^3 - 5x + C$$

10. Найдите общий вид первообразных функций $f(x)$.

a) $f(x) = 7 - 4x$ b) $f(x) = 5 + 6x - 9x^2$

c) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}$

11. Найдите:

a) $(\int 3x^2\,dx)'$ b) $\int(x^3)'\,dx$ c) $(\int\sqrt{x}\,dx)'$

12. Вычислите неопределенный интеграл.

a) $\int\frac{3}{4}x^7dx$ b) $\int(1 - x)\,dx$ c) $\int(2 + x^2)\,dx$

d) $\int(2x - 3x^2)\,dx$ e) $\int(x^3 - 9)\,dx$ f) $\int(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\,dx$

g) $\int(3x^2 - x^{-3})dx$ h) $\int(8x^2 + 3x^{-4})dx$ i) $\int(4x^{-2} - x^{-3})dx$

j) $\int(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}x^2)\,dx$ k) $\int(\frac{3}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})\,dx$ l) $\int(\frac{5}{2}\sqrt{x^3} + 8x)\,dx$

В отличии от производной, у интеграла нет формулы для произведения и частного. Поэтому, если это возможно функцию представляют в виде суммы или разности, а потом находят первообразную.

Пример. Найдите первообразную функции $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

Решение: запишем заданную функцию в виде

$$f(x) = \frac{3x^2}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} = 3x - 2x^{-\frac{1}{2}}$$

Тогда получим, $\quad \mathrm{F}(x) = 3\cdot\dfrac{x^2}{2} - 2\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}x^2 - 4\sqrt{x} + C$.

13. Упростите выражения, которыми заданы функции и найдите первообразные функций, применяя правила интегрирования.

a) $f(x) = (x + 2)(x - 3)$ b) $f(x) = (x^2 - 3x)(x + 1)$ c) $f(x) = (x - 3)^3$

d) $f(x) = (x + 2x^3)(x + 1)$ e) $f(x) = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$ d) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

14. Найдите неопределенный интеграл.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{4u^3 + 5u^2 - 1}{u^2}\,du$ c) $\displaystyle\int \frac{(x + 2)^2}{x^4}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{(t^2 + 1)^2}{t}\,dt$

15. Упростите и найдите первообразные функций.

a) $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 5\right)$ b) $f(x) = (\sqrt[4]{x} - 2x)(\sqrt[4]{x} + 2x)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} + 4z + 1$

16. Для заданных функций найдите первообразные функции.

a) $f(x) = (3x + 2)^4$ b) $f(x) = (2x - 1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3}{(1 - 2x)^2}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{(3x + 1)^3}$

e) $f(x) = (x - 2)(x + 1)$ f) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x}$

17. Упростите и вычислите неопределенные интегралы.

a) $\int (x + \sqrt{x})\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Интегралы показательной функции и функции $1/x$

Интеграл показательной функции

$\int e^x dx = e^x + C$ $\quad$ $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\quad$ $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k\ln a} a^{kx} + C$

Интеграл функции $1/x$:

Так как при $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ получим $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C,\ x > 0;$

при $x < 0$ для $(\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$ получим,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C,\ x < 0.$$

Следовательно: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0$

В общем случае: $\int \frac{1}{kx+b} dx = \frac{1}{k} \ln|kx+b| + C$

Пример 1. $\int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$

Пример 2. $\int \frac{2}{3x+4} dx = 2 \int \frac{1}{3x+4} dx = \frac{2}{3} \ln|3x+4| + C$

18. Найдите неопределенный интеграл.

$\int 3e^{2x} dx$	$\int (-12) e^{3x} dx$	$\int \frac{2}{3} e^{-3x} dx$	$\int \frac{5}{x\ln 3} dx$
$\int \frac{5}{x} dx$	$\int \frac{1}{5x+4} dx$	$\int \frac{1}{\sqrt{5x+4}} dx$	$\int \frac{-3}{5x+4} dx$

19. Найдите первообразные заданных функций.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ $\quad$ b) $f(x) = \frac{4}{2x-3}$ $\quad$ c) $f(x) = 4 \cdot e^{3-2x}$ $\quad$ d) $f(x) = 6 \cdot 2^{3x+1}$

20. Вычислите неопределенный интеграл.

a) $\int (e^x - ex)\, dx$ $\quad$ b) $\int (2^x - \frac{2}{x})\, dx$ $\quad$ c) $\int (e^x + 2x) dx$ $\quad$ d) $\int (e^{-2x} - \frac{5}{x\ln 3}) dx$

Интегралы тригонометрических функций

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \sin kx\,dx = -\dfrac{1}{k}\cos kx + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \cos kx\,dx = \dfrac{1}{k}\sin kx + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 kx}\,dx = \dfrac{1}{k}\operatorname{tg} kx + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 kx}\,dx = -\dfrac{1}{k}\operatorname{ctg} kx + C$

Пример 1. Найдите интеграл $2\sin\dfrac{x}{2}\,dx$

Решение: $\int 2\sin\dfrac{x}{2}\,dx = -2\,\dfrac{\cos(x/2)}{1/2} + \mathrm{C} = -4\cos\dfrac{x}{2} + \mathrm{C}$

При интегрировании тригонометрических функций удобно использовать тригонометрические тождества.

Пример 2. Найдите первообразную функции $f(x) = \sin x \cdot \cos x.$

Решение: так как $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, то $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right) + c =$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + c\,.$$

Пример 3. Вычислите интеграл $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Решение: воспользуемся тождеством $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. Тогда,

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \mathrm{C}.$$

Пример 4. Найдите интеграл $\int \sin 5x\cdot\cos 3x\,dx$.

Решение: воспользуемся формулой

$\sin ax \cdot \cos bx = \dfrac{1}{2}(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x)$:

$$\int \sin 5x\cos 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 8x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + \mathrm{C}.$$

21. Найдите первообразные заданных функций.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x - \cos x$ b) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x}$ c) $f(x) = \dfrac{6}{\sin^2 x}$

22. Найдите неопределенный интеграл.

a) $\int(3\sin x + 2\cos x)\,dx$ b) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$ c) $\int \dfrac{4}{\cos^2 2x}\,dx$

23. Найдите первообразные заданных функций.

a) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos x$ b) $f(x) = \sin^2 3x$ c) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

24. Вычислите неопределенный интеграл.

a) $\int \sin^2 x\, dx$ b) $\int \cos^2 x\, dx$ c) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$

d) $\int \sin 3x \sin x\, dx$ e) $\int \sin 3x \cos x\, dx$ f) $\int \cos 3x \cos 5x\, dx$

25. Найдите первообразные, используя тригонометрические тождества

a) $\int (1 + \operatorname{tg}^2\theta)\, d\theta$ b) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$ c) $\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\, dx$

26. Найдите неопределенный интеграл

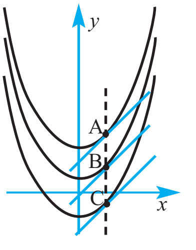
a) $\int (\sin 2x + 3x)dx$ b) $\int (\cos 3x - 2x + 1)dx$

c) $\int (e^{-x} + 2\cos x + 5x^2)dx$ d) $\int (e^{3x} - 8\sin 2x + x^{-4})dx$

Прикладные задания

Задачи на нахождение постоянной интегрирования

Первообразные функций находятся с постоянной точностью. Во многих случаях требуется найти из множества первообразных первообразную, удовлетворяющую определенному условию. Например, общий вид первообразных функции $2x$ имеет вид $x^2 + C$. И по графику видно, что в каждой точке плоскости для определенного значения постоянной C соответствует график одной первообразной (интегральной кривой).



Пример. Найдите первообразную функции $f(x) = 2x,$ график которой проходит через точку M(1;5).

Решение: запишем общий вид первообразной функции $f(x) = 2x$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$: $F(x) = x^2 + c$. По условию $F(1) = 5$, тогда $1 + c = 5$, Отсюда $c = 4$. Значит, функция $F(x) = x^2 + 4$ является первообразной для функции $f(x) = 2x,$ график которой проходит через точку M(1;5).

27. Найдите первообразную функции $f(x)$ удовлетворяющую условию.

a) $f(x) = x^2$, $F(3) = 0$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $F(4) = -2$

28. Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через заданные точки.

a) $f(x) = x$, $M(-1;2)$ b) $f(x) = 4x^3$, $M(-1;3)$

29. Найдите первообразную функции $f(x)$ удовлетворяющую условию:

a) $f(x) = a^{2x}$, $F(0) = 1$ b) $f(x) = 3e^{x-2}$, $F(2) = 0$ c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $F(e) = 5$

d) $f(x) = 2\sin 2x$, $F(\frac{\pi}{2}) = 0$ e) $f(x) = 2\cos x$, $F(\frac{\pi}{6}) = 3$

30. Частица совершает прямолинейное двидение со скоростью $v(t)$. x_0 координата точки в начальный момент t_0. Функция $x(t)$ функция координаты от времени.Найдите:

a) $v(t) = 4$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$; b) $v(t) = 6$, $t_0 = 0$, $x_0 = 2$; c) $v(t) = 2t$, $t_0 = 2$, $x_0 = 3$

31. Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x) = 2x + 1$ и проходит через точку $M(1;0)$. При каких значениях x:

a) $F(x) > 0$; b) $F(x) < 0$?

32. Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через заданную точку.

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $M(1; \dfrac{1}{6})$ b) $f(x) = (2x-1)^3$, $M(2;4)$

33. Запишите функцию, соответствующую условию.

a) $f'(x) = 2x + 1$; $f(1) = -2$ c) $f'(x) = x^2 - 4$; $f(0) = 7$

e) $f'(x) = 8x^2 + 4x - 2$; $f(0) = 6$ f) $f'(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $f(1) = 3{,}5$

34. Определите формулу функции, график которой проходит через точку (3;4) и если угловой коэффициент касательной, в точке с абсциссой x, равен $2x - 2$. Постройте график функции.

Задания на реальную жизненную ситуацию

Пример 1. Движение. Скорость мяча, брошенного с высоты 1 м вверх можно выразить как $v(t) = -9{,}8t + 12$. Здесь t показывает время в секундах. Запишите функцию, которая позволит найти на какой высоте находится мяч через t секунд после начала движения и найдите на какой высоте окажется мяч на 2 минуте.

Решение: так как $h'(t) = v(t)$, то для функции $h(t)$ неопределенным интегралом является функция $v(t)$.

$$h(t) = (\int(-9{,}8t + 12)dt$$
$$h(t) = -4{,}9t^2 + 12t + C$$

Как можно найти постоянную C?

Мяч брошен с высоты 1 м. Т.е. в момент $t=0$ мяч находился на высоте 1 м и $h(0) = 1$. Тогда $1 = -4{,}9\cdot 0 + 12\cdot 0 + C$, отсюда $C = 1$.

Значит, в момент t высота на которой находится мяч можно найти по формуле $h(t) = -4{,}9t^2 + 12t + 1$. При $t = 2$ получим $h(2) = -4{,}9\cdot 2^2 + 12\cdot 2 + 1 = 5{,}4$. Т.е. в момент $t = 2$ секундам мяч будет находится на высоте 5,4 м.

Пример 2. Прирост населения. Статистические исследования показывают, что при помощи отношения $P'(t) = 11{,}7e^{0{,}026t}$ можно найти прирост городского населения за год. Здесь t показывает количество лет после 1960 года, $P(t)$ - численность населения в данный (t-ый) год в сто тыс. человек. Если в 1990 году в городе было 820 тыс. человек, то сколько, приблизительно, тыс. человек будет в городе в 2020 году?

Решение: найдем первообразную для функции $P(t)$, показывающую численность населения, соответствующую функции $P'(t) = 11{,}7e^{0{,}026t}$:

$$P(t) = \int 11{,}7e^{0{,}026t}dt = \frac{11{,}7}{0{,}026}\ e^{0{,}026t} + C = 450e^{0{,}026t} + C$$

$$P(t) = 450e^{0{,}026t} + C$$

Теперь найдем постоянную C.

Например, по условию при $t = 30$ (1960-1990) численность населения достигла 820 тыс. человек. Подставим (30;820) в формулу функции.

$820 = 450e^{0{,}026\cdot 30} + C$. Тогда $C \approx -161{,}2$ и $P(t) = 450e^{0{,}026t} - 161{,}2$.

Численность населения в 2020 году соответствует значению функции $P(t)$ в $t = 60$: $P(60) = 450e^{0{,}026\cdot 60} - 161{,}2 \approx 1980{,}3$

Т.е. в 2020 году численность городского населения будет приблизительно равна 1980300 человек.

35. Движение. Скорость материальной точки движущейся равномерно задана формулой $v(t) = 2t - 3$. Зная, что в начальный момент $t = 0$ точка находится в начале координат, запишите функцию зависимости координаты x от времени t.

36. Размножение бактерий. Наблюдения показывают, что скорость размножения бактерий $P'(t)$ равна $\dfrac{dP}{dt} = 200e^{0{,}1t} + 150e^{-0{,}03t}$.

Здесь t показывает время (час). Если в начале наблюдения количество бактерий равно 200000, то сколько их будет через 12 часов?

37. Экология. Скорость изменения поголовья оленей, установленная группой наблюдателей, описывается уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = 3t^3 + 2t \quad 0 \le t \le 5,$$

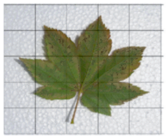
N показывает количество оленей, t показывает время.

Если в начале наблюдения поголовье состояло из 200 оленей, то сколько оленей будет в конце периода наблюдения?

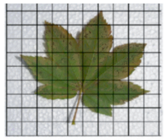
38. Затраты. Маржинальные затраты на производство x единиц товара задано функцией $C'(x) = 50 - 0{,}05x$. Если затраты на единицу продукции равны 40 манат, то каковы затраты на 150 единиц товара?

Площадь ограниченная кривой

Представьте, что вы проводите следующее исследование: определение количества солнечной энергии которую получает растение. Для этого вам необходимо узнать площадь поверхности листа. Разместите лист на бумаге в клетку и приблизительно найдите площадь.



1 клетка 1 кв.см
Количество полных клеток - 1 шт.
Количество неполных клеток - 18 шт.
$1 \leq$ количество клеток ≤ 19
1 кв.см $\leq$ площадь листа $\leq$ 19 кв.см

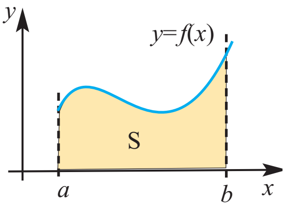


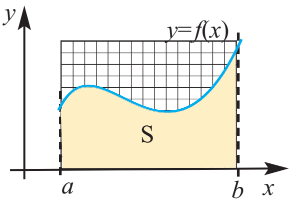
1 клетка 1/4 кв.см
Количество полных клеток - 16 шт.
Количество неполных клеток - 34 шт.
$16 \leq$ количество клеток ≤ 50
4 кв.см $\leq$ площадь листа $\leq$ 12,5 кв.см

Если продолжить уменьшать размер клеток, то площадь листа можно найти посчитав сумму клеток и уменьшая приближения можно достаточно точно найти значение действительной площади.

Применяя этот способ можно найти площади фигур различной формы

Например, можно найти площадь, ограниченную графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$ и ограниченной осью абсцисс x, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$.

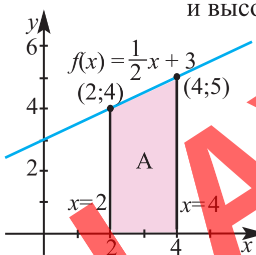




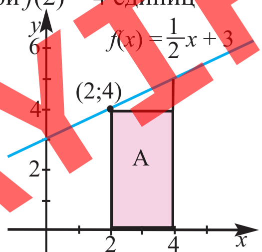
Пример 1. Определите, приблизительно, площадь фигуры ограниченную графиком $y = \frac{1}{2}x + 3$ на отрезке $[2; 4]$.

Решение: на рисунке А изображена площадь, ограниченная график функции $y = \frac{1}{2}x + 3$, осью абсцисс и прямыми $x = 2$ и $x = 4$.

Показанную площадь можно приблизительно найти при помощи прямоугольников высотой $f(2) = 4$ и $f(4) = 5$.

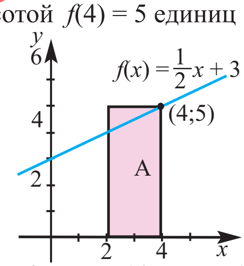


Прямоугольник шириной 4 - 2= 2 и высотой $f(2) = 4$ единиц



Площадь $2 \cdot 4 = 8$ кв.ед. Это меньше действительной площади

Прямоугольник шириной 4 - 2= 2 и высотой $f(4) = 5$ единиц

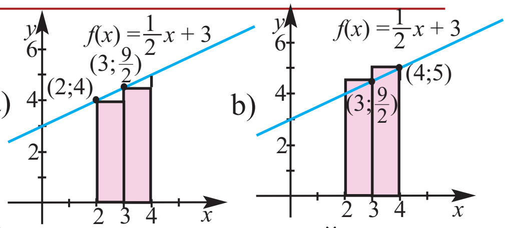


Площадь $2 \cdot 5 = 10$ кв.ед. Это больше действительной площади

Площадь: $8 < S < 10$

Площадь ограниченная кривой

Разбивая показанную площадь на еще более маленькие прямоугольники и найдя сумму площадей полученных прямоугольников, уменьшив приближение, можно найти, достаточно близкие к действительным, значения.



На рисунке площадь отрезка [2; 4] найдена как сумма площадей двух прямоугольников, при помощи деления на два отрезка ([2;3] и [3;4]).

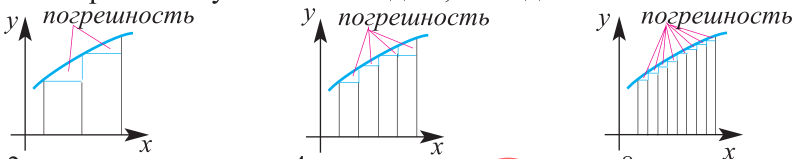
а) по рисунку площади прямоугольников длиной 3 – 2 = 1 и высотой $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 4$ и длиной 4 – 3 = 1 и высотой $f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 3 = \frac{9}{2}$ приблизительно равна: $1 \cdot 4 + 1 \cdot \frac{9}{2} = 8{,}5$

Аналогично сумма площадей прямоугольников на рисунке b), длина и высота которых равны 1 и $f(3) = \frac{9}{2}$ и 1 и $f(4) = 5$ равна.

Площадь (приблизительно): $1 \cdot \frac{9}{2} + 1 \cdot 5 = 9{,}5$ Площадь: $8{,}5 < S < 9{,}5$

В рассмотренном случае площадь достаточно точно можно найти по формуле площади трапеции: $S = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2(4+5) = 9$

Если заданный интервал разделить на еще большее количество малых интервалов, то площадь можно найти как сумму более маленьких прямоугольников и получить достаточно близкое к точному значение. Например, в 1-ом случае количество интервалов $n = 1$ и вычисления отличаются от действительных размеров площади на 1 кв.ед., во 2-ом случае $n = 2$ и разность уменьшается до 0,5 кв.ед.



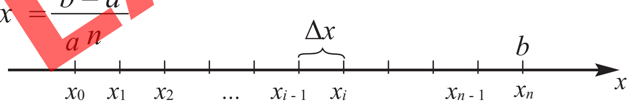
2 подинтервал 4 подинтервал 8 подинтервал

Под площадью фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, понимают площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (это называют площадь криволинейной трапеции). В заданиях мы коротко будем называть это как "площадь, ограниченная кривой".

Здесь функция f должна удовлетворять условиям.

- функция f должна быть непрерывна на отрезке $[a; b]$
- функция f на отрезке $[a; b]$ должна принимать неотрицательные значения
- отрезок $[a; b]$ делится на n одинаковых не перекрывающих друг на друга интервала: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{i-1}; x_i], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$

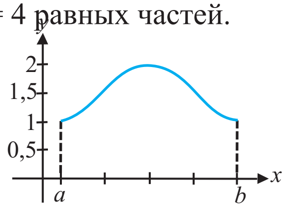
Длина отрезка $[a; b]$ равна $b - a$ и при делении на n равных частей, каждый интервал равен $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

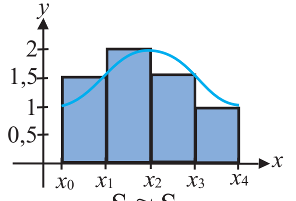


Определенный интеграл и площадь

Площадь, ограниченная графиком функции $f(x)$ приблизительно находится как сумма площадей прямоугольников длиной Δx и высотой $f(x_i)$.

Пример 2. Площадь, ограниченная кривой на рисунке, приблизительно равна площадь 4 прямоугольников, полученных при делении всей площади на $n = 4$ равных частей.





$S \approx S_4$

$S \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x = S_4$

Геометрически эта сумма равна площади ступенчатой фигуры на рисунке и называется суммой интегралов $f(x)$ функции на отрезке $[a;b]$.

Если увеличить количество точек деления, то можно записать:

$S \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x = S_n$. Это можно коротко записать при помощи знака $\sum$ "сигма".

$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = S_n$

Для непрерывной функции f для достаточно больших значений n (т.е. при достаточно малых значениях Δx) объединение построенных прямоугольников и является интересующей нас площадью, "можно сказать, что они равны", т.е. при $n \to \infty$ получим $S_n \to S$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Отметим, что в сумме интегралов вместо значения $f(x_i)$ можно взять произвольную точку c_i из интервала $[x_i; x_{i+1}]$ и значение $f(c_i)$.

Определенный интеграл

Можно показать, что для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f при $n \to \infty$ сумма интегралов S_n является последовательностью стремящейся к определенному числу. Это число называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a; b]$ и записывается как $\int_a^b f(x)\,dx$. Т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Числа a и b являются границами интегрирования, a- нижняя граница, b- верхняя граница. $\int$-знак интеграла. f - подынтегральная функция, переменная x - интегральная переменная.

Таким образом, при $f(x) \geq 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ выражается формулой $S = \int_a^b f(x)dx$

Определенный интеграл и площадь

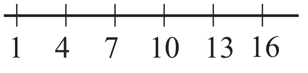
При нахождении площади, ограниченной кривой обратите внимание на следующее:

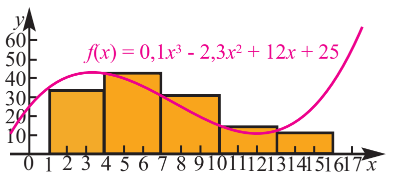
1. Изобразите схематический график функции.
2. Для нахождения длины подинтервалов используйте формулу $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$
3. При вычислении координаты x_i установите используемое левое или правое значение.
4. Вычисления можно проводить если прямоугольники будут находится ниже кривой.
5. Вычисления можно проводить если прямоугольники превосходят фигуру.

Пример 3. Найдите, приблизительно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = 0{,}1x^3 - 2{,}3x^2 + 12x + 25$ на отрезке [1;16], разделив его на 5 равных частей.

Решение. данную задачу можно решить не строя графика функции. Но для наглядности, показан график данной функции, построенный при помощи графкалькулятора.

1. Размер подинтервалов $\Delta x = \dfrac{16-1}{5} = 3$





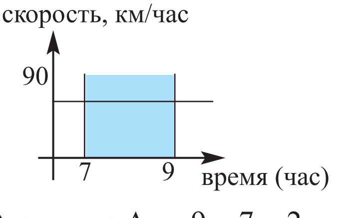
Площадь криволинейной трапеции, приблизительно равна сумме площадей 5 прямоугольников образованных соседними точками каждой части длиной 3 ед. и высотой $f(x_i)$ ед.

$$S \approx \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\,\Delta x = f(1)\cdot 3 + f(4)\cdot 3 + f(7)\cdot 3 + f(10)\cdot 3 + f(13)\cdot 3 =$$
$$= 34{,}8\cdot 3 + 42{,}6\cdot 3 + 30{,}6\cdot 3 + 15\cdot 3 + 12\cdot 3 = 405$$

$$S \approx 405 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 4. Поезд с 07:00 до 09:00 двигался со скоростью 90 км/час.
а) Выразите путь поезда в виде определенного интеграла; b) Найдите соответствующую площадь, при помощи определенного интеграла

Решение: а) $\int_7^9 90\,dt$

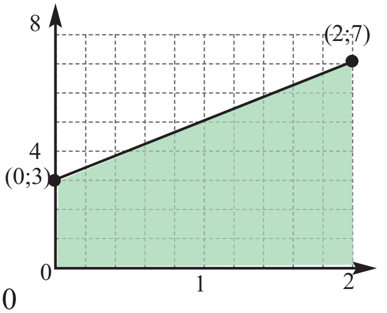


b) Значение пути, проделанного поездом на заданном промежутке $f(x) = 90$ (постоянная скорость) равна площади прямоугольника на отрезке [7;9].

Так как высота данного прямоугольника 90 (км), а длина $\Delta x = 9 - 7 = 2$, то площадь равна: $90 \cdot 2 = 180$, т.е. $\int_7^9 90\,dt = 180$.

Ответ: поезд за 2 часа проделал путь более 180 км.

Пример 5. Вычислите интеграл $\int\limits_0^2 (2x+3)\,dx$.

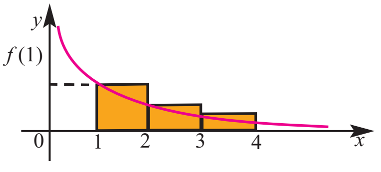


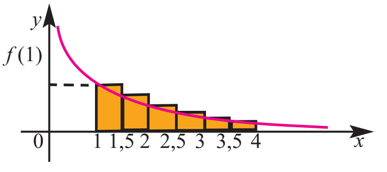
Решение. Площадь заданного определенного интеграла ограниченного функцией $f(x) = 2x + 3$ и интервалом $[0;2]$ известна. Данная площадь имеет форму трапеции и ее можно вычислить при помощи геометрических формул.

$S = \dfrac{3+7}{2} \cdot 2 = 10$, значит $\int\limits_0^2 (2x+3)\,dx = 10$

Обучающие задания

1. Найдите площадь графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[1;4]$, как сумму площадей прямоугольников на рисунках. Результат округлите до сотых. Сравните полученные результаты.





2. Постройте трапецию, ограниченную линиями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.
a) Найдите площадь трапеции по известным вам формулам.
b) Разделите отрезок $[1;2]$ на 5 частей. Найдите приближенное значение фигуры равной площади трапеции, как сумму площадей ступенчатой фигуры и найдите абсолютную погрешность.

3. Изобразите график функции $y = 4 - x^2$ на отрезке $[0, 2]$.
1) Разделите заданный отрезок на 4 равных части и найдите приближенное значение площади, ограниченной кривой:
a) Как сумму площадей прямоугольников содержавшихся в кривой;
b) Сумму площадей прямоугольников с избытком;
2) Выразите соответствующую площадь через интеграл.

4. Вычислите определенный интеграл, на основе геометрических суждений.

a) $\int\limits_0^5 3\,dx$ b) $\int\limits_0^4 2x\,dx$ c) $\int\limits_0^5 \dfrac{1}{2}x\,dx$ f) $\int\limits_{-1}^2 |x|\,dx$

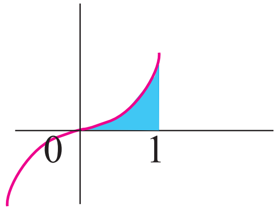
d) $\int\limits_0^3 (2x+3)\,dx$ e) $\int\limits_2^5 (10-2x)\,dx$ f) $\int\limits^6 x\,dx$ h) $\int\limits_{-2}^3 |x-1|\,dx$

5. Запишите следующие суждения в виде определенного интеграла. Изобразите схематично соответствующую площадь:

а) Путь, пройденный автомобилем,движущимся со скоростью 75 км/час с 11:00 до14:00;

b) Объем воды закачиваемый насосом за первый час, если за 1 минуту он закачивает 5 литров воды.

6. Известно, что $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$. Схематическое изображение:

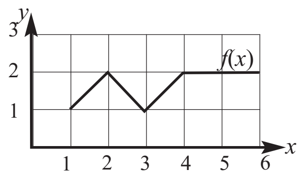


используя свойства параллельного переноса для функции $y = x^3$, а также знания об определенном интеграле и площади найдите значений интеграла и схематично изобразите следующие функции.

а) $\int_0^1 (x^3 + 3)\,dx$ b) $\int_0^1 (x - 1)^3\,dx$

Прикладные задания

7. На графике представлена скорость движения частицы (м/сек). Найдите значение определенного интеграла $\int_1^6 f(x)dx$, выражающего проделанный частицей путь на временном интервале [1;6] как площадь соответствующей фигуры и среднюю скорость движения.



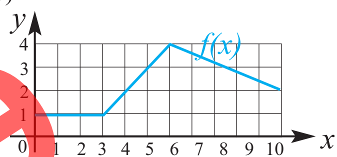
8. Пусть $g(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ некоторая определенная функция.

а) Заполните таблицу для функции g(x) по графику функции $f(x)$;

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$											

b) По значениям функции g(x) постройте ее график;

c) При каком значении функция g принимает минимальное значение?



9. **Скорость и пройденный путь.** Юсиф составил таблицу скорости, с которой бежит собака за 4 секунды.

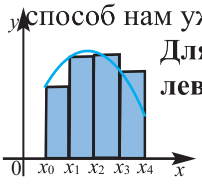
t	0	1	2	3	4
v (м/сек.)	0	8	12	17	18

Определите, приблизительно, наименьшее и наибольшее значение расстояния, которое пробегала собака в течении 4 секунд **Указание:** для вычисления сначала используйте значение в точке (левого конца интервала (меньше действительного значения), а потом значение в точке правого конца интервала (больше действительного значения).

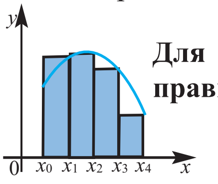
10. Общие затраты, на основе маржинальных затрат. Установлено, что функция $C'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 600$ показывает маржинальные затраты на асфальтирование x пути. Найдите общие затраты на асфальтирование дороги, длиной 40 км, разделив интервал [0;40] соответствующей функции на 4 подинтервала.

11. Долгосрочное задание. Для приблизительного нахождения площади существуют различные методы.

1. Метод прямоугольников. Площадь разбивается на маленькие прямоугольники и находится сумма их площадей (высота отрезки, образуемые точками при делении) для левых или правых концов). Этот способ нам уже известен.

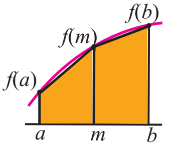


Для значений в левых концах



Для значений в правых концах

2. Метод трапеций.

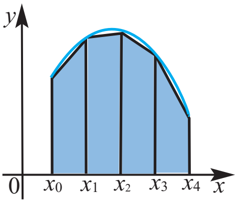


Площадь на заданном интервале находится, приблизительно, как сумма площадей маленьких трапеций.

На рисунке представлена площадь функции f ограниченной на отрезке $[a;b]$ представлена в виде площадей двух трапеций.

$$S_{тр.} \approx \Delta x\frac{f(a)+f(m)}{2} + \Delta x\frac{f(b)+f(m)}{2}$$

$$= \Delta x\left(\frac{f(a)}{2} + f(m) + \frac{f(b)}{2}\right)$$



Если отрезок $[a;b]$ разделить на n равных интервалов,

то $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. и площадь можно найти так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\left(\frac{f(a)}{2} + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

1. Запишите свои суждения, о том как в каждом случае полученные значения площади будут отличаться от реальных.

Изобразите график функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, и разделив его на $n = 6$ равных частей, найдите площадь криволинейной трапеции:

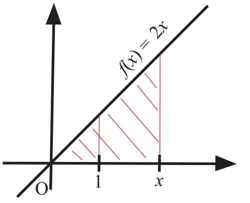
а) методом прямоугольников, b) методом трапеций

а затем найдите приближенное значение интеграла.

1) $\int_0^6 2^x\, d$ 2) $\int_1^4 \ln x\, dx$

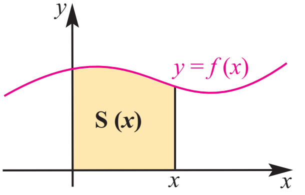
Практическое занятие

1) Постройте в тетради график функции $f(x) = 2x$ fи запишите заштрихованную площадь на рисунке в виде функции, зависящей от x.
2) Покажите, что $S'(x) = f(x)$.

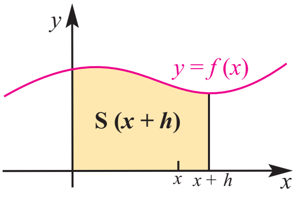


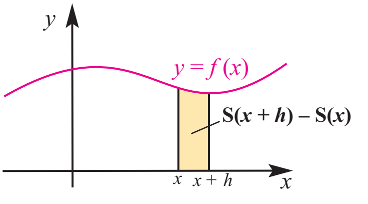
Если для непрерывной на отрезке $[0; x]$ неотрицательной функции $f(x)$ площадь полученной фигуры будет $S(x)$, то $S'(x) = f(x)$.

На отрезке $[0; x]$ рассмотрим непрерывную функцию $S(x)$. Для нахождения производной функции $S(x)$ используем определение производной. $S'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h}$



Для функции f на отрезке $[0; x + h]$ площадь $S(x + h)$, расположенная под графиком равна площади $S(x + h) - S(x)$ функции f на отрезке $[x; x + h]$.





При стремлении h к нулю площадь $S(x + h) - S(x)$ стремится к площади прямоугольника диной h и высотой $f(x)$.

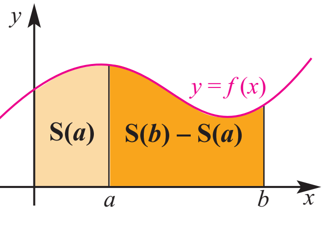
$S(x + h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$ Отсюда, $\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x)$ и

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$$

Эта запись показывает, что $S'(x) = f(x)$.

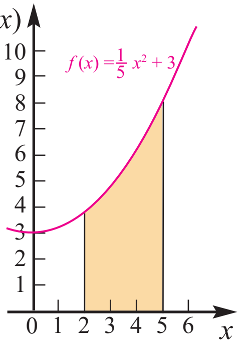
Значит, если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$, то $S(x) = F(x) + C$

По графику также видною что площадь на отрезке $[a; b]$ равна: площадь на отрезке $[0; b]$ минус площадь интервала $[0; a]$.
Т.е.,площадь на отрезке $[a;b]$ равна
$S(b) - S(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$.



Пример 1. Найдите площадь, ограниченную графиком функции

$f(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 3)$ на отрезке [2;5].



Решение: мы уже знаем, что $S'(x) = f(x)$. Значит для того, чтобы найти площадь функции производная которой равна $S'(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$ Найдем интеграл функции $S'(x)$ (первообразную функции) $S(x) = \frac{1}{15}x^3 + 3x + C$.

Теперь мы видим как влияет постоянная C на разность значений функции. Тогда искомая площадь равна

$$S = S(5) - S(2) = \frac{125}{15} + 15 - \left(\frac{8}{15} + 6\right) = 16\frac{4}{5} \text{ кв. ед.}$$

Сравнивая формулы $S = F(b) - F(a)$ и $S = \int_a^b f(x)\,dx$ площади, ограниченной кривой, получаем следующий результат.

Формула Ньютона- Лейбница

Основная теорема интегрального исчисления. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$и функция F одна из первообразных функции f, то справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Эта формула называется формулой Ньютона - Лейбница.

Эта формула также записывается как $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Значит, определенный интеграл приращение первообразной функции (произвольной) на отрезке $[a;b]$.

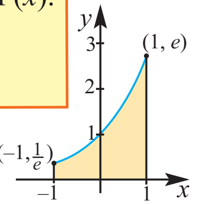
В частном случае, если верхняя и нижняя границы определенного интеграла совпадают, то значение определенного интеграла равно нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Для вычисления определенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx$

1. Для функции $f(x)$ находится какая-либо первообразная $F(x)$.
2. Вычисляются значения $F(x)$ в точках $x = a$ и $x = b$.
3. Находится разность $F(b) - F(a)$.

Пример 2. По рисунку, найдите площадь, ограниченную графиком функции $y = e^x$ на отрезке $[-1;1]$.



Решение: $S = \int_{-1}^{-1} e^x\,dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = e^1 - \frac{1}{e} \approx 2{,}35$(кв.ед.)

Пример 3. Вычислите определенный интеграл.

a) $\int\limits_{-2}^{1} x^2\,dx$ b) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos x\,dx$

Решение: a) $\int\limits_{-2}^{1} x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1} = \dfrac{1^3}{3} - \dfrac{(-2)^3}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3} = 3$

b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \sin\dfrac{\pi}{6} - \sin 0 = \dfrac{1}{2} - 0 = \dfrac{1}{2}$

Пример 4. Объясните ситуацию, соответствующую определенному интегралу.

Функция P = P(t) выражает численность населения через t в мил.

Какую информацию выражает значение интеграла $\int\limits_{0}^{8} P(t)dt = 2$?

Решение: $\int\limits_{0}^{8} P(t)dt = 2$ Данный интеграл показывает, что численность населения за 8 лет достигла 2 мин.

Обучающие задания

1. Вычислите определенный интеграл.

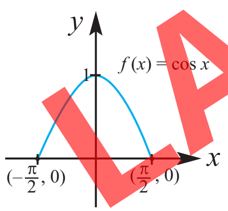
1) $\int\limits_{-1}^{3} dx$ 2) $\int\limits_{0}^{2} 2\,dx$ 3) $\int\limits_{-2}^{4} x\,dx$ 4) $\int\limits_{0}^{1} x^2\,dx$

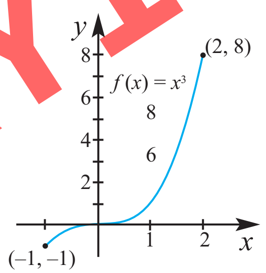
5) $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{1}{x^3}dx$ 6) $\int\limits_{2}^{5} \dfrac{1}{x^2}\,dx$ 7) $\int\limits_{2}^{8} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 8) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{x^2}\,dx$

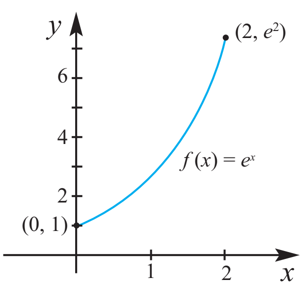
9) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ 10) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$ 11) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$

12) $\int\limits_{0}^{2} e^x\,dx$ 13) $\int\limits_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$ 14) $\int\limits_{1}^{e} \dfrac{1}{x}\,dx$ 15) $\int\limits_{-1}^{8} x^{\frac{2}{3}}\,dx$

2. Вычислите интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ для графика функции $f(x)$ заданного на отрезке $[a;b]$







3. Вычислите определенный интеграл.

a) $\int\limits_1^2 (1-2x)\,dx$ b) $\int\limits_0^1 (2+3x)\,dx$ c) $\int\limits_0^2 (3x^2-2x+1)\,dx$

d) $\int\limits_{-1}^0 (x+2x)\,dx$ e) $\int\limits_1^2 \dfrac{x^3+2x}{x}\,dx$ f) $\int\limits_1^2 \left(x^2-\dfrac{3}{x^4}\right)dx$

g) $\int\limits_0^2 (x\sqrt{x^2}-x)dx$ k) $\int\limits_0^{-1} x^3(x+1)dx$ i) $\int\limits_{-1}^1 (x+1)(x^2-1)dx$

l) $\int\limits_1^4 (\sqrt{x}-1)^2dx$ m) $\int\limits_{-1}^1 (x-x^3)dx$ j) $\int\limits_1^2 \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2dx$

i) $\int\limits_1^3 \left(\dfrac{x^3-x^2+x}{x}\right)dx$ l) $\int\limits_1^4 \sqrt{\dfrac{2}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{2}}\,dx$ g) $\int\limits_1^4 \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

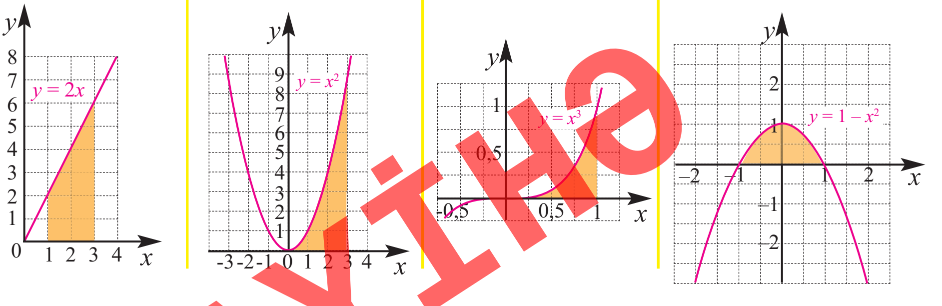
4. Вычислите требуемые площади как предел суммы бесконечного количества прямоугольников.

Площадь ограниченную кривой y = x^2+2x на интервале [0; 2]

Площадь ограниченную кривой y = x^3-1 на интервале [1; 3]

5. По рисунку, найдите площадь закрашенной части, ограниченной графиком функции при помощи определенного интеграла.

$y = 2x$; [1, 3] $y = x^2$; [0, 3] $y = x^3$; [0, 1] $y = 1 - x^2$; [–1, 1]



6. Вычислите площадь ограниченную линиями, при помощи определенного интеграла.

a) $y = x^2+1,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 3$ b) $y = 9-x^2,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 3$

c) $y = \sin 2x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$ d) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

Прикладные задания

Работа изменяющейся силы . Работа, совершаемая постоянной силой F, направленной вдоль прямой s, вычисляется по формуле $A = F \cdot S$.
Если сила переменной остается постоянной на отрезке $[x; x+dx]$ и обозначив ее через $F(x)$, получим, что на длине отрезка dx работа будет равна $dA = F(x)\,dx$.
Тогда на пути (отрезке) $[a;b]$ работа силы $F(x)$ вычисляется по формуле $A = \int_a^b F(x)\,dx$

Пример. Сила F, действующая на тело при растяжении пружины на x вычисляется по формуле $F = kx$. Здесь k коэффициент пропорциональности. При растяжении пружины на 5 см, сила эластичности равна 3Н. Какую работу надо совершить для растяжения пружину на 5 см?
Решение: по условию $3 = k \cdot 0{,}05$. Таким образом, $k = 60$, $F = 60x$ и

$$A = \int_0^{0{,}05} 60x\,dx = 30x^2\Big|_0^{0{,}05} = 30 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}075 \text{ (Джоуль)}$$

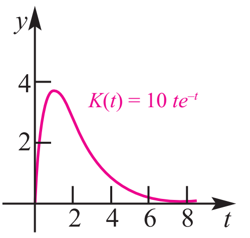
7. Запишите, какие данные выражает определенный интеграл.

a) Функция $R = R(t)$ показывает объем продаж (сто.тыс. манат) фирмы в зависимости от времени (год). Что выражает определенный интеграл $\int_0^2 R(t)dt = 12$?

b) Функция $v = v(t)$ показывает мгновенную скорость (м /сек) в момент времени t. Что выражает определенный интеграл $\int_0^{10} v(t)dt = 4{,}5$?

8. Физика. Функция зависимости скорости частицы от времени $v(t) = -0{,}3t^2 + 9t$ была получена экспериментально. $v(t)$ измеряется в м/сек.
a) Какой путь пройдет частица за первые 5 секунд?
b) Какой путь пройдет частица за следующие 5 секунд?

9. Использование электрической энергии. Зависимость потребления энергии (киловатт) небольшого предприятия за день от времени t можно смоделировать функцией $K(t) = 10\,te^{-t}$. Здесь t - время в часах принадлежит промежутку [0;24].



a) Сколько киловатт электрической энергии использует предприятие в первые T часов (от $t = 0$ до $t = T$)?
b) Сколько киловатт электрической энергии было использовано в первые 4 часа?
Указание: Функция $y = -10\,(t + 1)e^{-t}$ является одной из первообразных для функции $K(t) = 10\,te^{-t}$.

10. Объем продаж. По прогнозам маркетологов изменение объема продаж продукции можно выразить непрерывной функцией $S'(t) = 20\,e^{t}$. $S'(t)$, показывает увлечения объема продаж в t-ый день в манатах.
a) Какой приблизительно объем продаж будет в первые 5 дней?
b) Определите объем продаж со 2-го по 5-ый день. **Указание:** в этом случае границы интегрирования будут от 1 до 5.

11. Частица движется ветикально с начальной скоростью 100 м/сек.Скорость частицы в момент времени t выражена зависимостью $v(t) = 100 - 10t$. Найдите пройденный путь за первые 15 секунд. **Указание:** пройденный путь запишите как сумму путей от 0 до 10 секунды и от 10 до 15 секунды.

12. a) Частица движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 4 - 2t$ м/сек. Здесь $0 \le t \le 2$ м/сек. Найдите перемещение в момент t и пройденный за 2 секунды путь.
b) Частица движется прямолинейно со скоростью $v(t) = t^2 - 3t - 18$ м/сек. Здесь $0 \le t \le 6$. Найдите пройденный за первые 6 секунд путь.
c) Частица движется прямолинейно со скоростью $v(t) = |2t - 6|$ м/сек. Здесь $0 \le t \le 6$. Найдите перемещение и пройденный за 6 сек. путь.

13. Изменение объема. Вода заполняет бак со скоростью $r(t) = 200 - 10t$ *л*/мин. Выразите увеличение объема воды в баке за первые 10 минут при помощи определенного интеграла и найдите его значение.

14. Изменение количества. Скорость изменения количества пользователей платежных терминалов в зависимости от времени можно смоделировать функцией $F(t) = 12 + 6\cdot\cos\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Здесь t *показывает количество минут.* Найдите количество людей, воспользовавшихся платежными терминалами за 60 минут, округлив полученный результат до целого.

15. Очистка озера. Изменение объема (тонн/год) мусора извлеченного из озера можно смоделировать функцией $y = 20\,e^{-0,5t}$. Здесь t показывает количество лет начиная с 2000 года.Найдите объем мусора при очистке озера с 2000 по 2010 года.

16. Физика. Закон Гука. a) Сила в 2 Н сжимает пружину на 1 см. Какую работу нужно совершить чтобы сжать пружину на 2 см?
b) Сила в 3 Н растягивает пружину на 1 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть прижину на 4 см.

Свойства определенного интеграла

Отметим следующие свойства определенного интеграла.

Свойство 1. Значение определенного интеграла независит от подынтегральной переменной.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$$

Свойство 2. Для любого числа k $(k \neq 0)$ справедливо равенство

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Пример. $$\int_1^2 3x^3dx = 3\int_1^2 x^3dx = 3\,\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = 3\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) = \frac{45}{4}$$

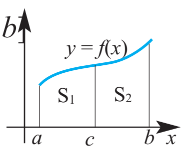
Свойство 3. Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Пример. $$\int_0^1(e^x + x^2)\,dx = \int_0^1 e^xdx + \int_0^1 x^2dx = e^x\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} = (e^1 - e^0) + \frac{1}{3} = e - \frac{2}{3}$$

Свойство 4. *Для* $a \le c \le b$ и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

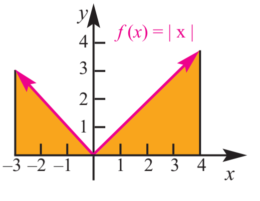


площадь ограниченная функцией $f(x)$ на интервале $[a; b]$ равна сумме площадей $S = S_1 + S_2$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Пример. Вычислите определенный интеграл $\int_{-3}^{4}|x|dx$

Так как $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, то



$$\int_{-3}^{4}|x|dx = \int_{-3}^{0}(-x)dx + \int_0^4 x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2}(0^2 - (-3)^2) + \frac{1}{3}(4^2 - 0^2) = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2}$$

Свойство 5. При изменении границ интегрирования местами знак интеграла меняется на противоположный

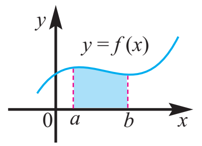
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

На самом деле, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(b) - F(a)) = -\int_b^a f(x)dx$

До настоящего момента говоря о площади, которую ограничивает график функции мы имели ввиду только положительные значения. Что же будет, если площадь, ограниченная графиком функции будет находится как ниже, так и выше оси x? Сможем ли мы найти эту площадь при помощи определенного интеграла? В этом случае надо использовать свойство, представленное выше.

Площадь расположена выше оси x !

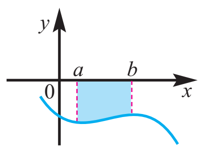
Если при условии $b > a$ из промежутка $a \leq x \leq b$ функция $f(x) \geq 0$, то график функции f расположен выше оси x и значение интеграла, выражающего площадь положительно.



$$S = \int_a^b f(x)dx > 0$$

Площадь расположена ниже оси x !

Если при условии $b > a$ из промежутка $a \leq x \leq b$ функция $f(x) \leq 0$, то график функции f расположен ниже оси x и значение интеграла, выражающего площадь отрицательно.

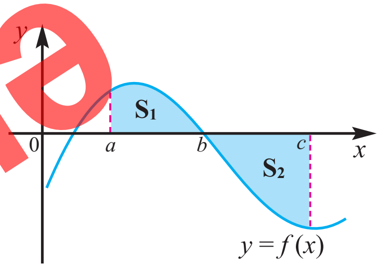


$$\int_a^b f(x)dx < 0$$

Понятно, что площадь не может выражаться отрицательным числом, поэтому при нахождении этого интеграла берется его абсолютное значение.

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

Площадь функции $f(x)$, ограниченной на отрезке $[a;c]$ состоит из двух частей площади S_1 на отрезке $[a;b]$ и площади S_2 на отрезке $[b;c]$.



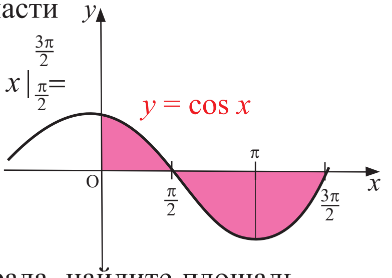
На отрезке $[a;b]$ интеграл $\int_a^b f(x)dx > 0$

На отрезке $[b;c]$ интеграл $\int_b^c f(x)dx < 0$

Общая площадь: $S = S_1 + S_2 \int_a^b f(x)dx + \left|\int_b^c f(x)dx\right|$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Пример . Найдите площадь заштрихованной части



Решение: $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$

$= (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) =$

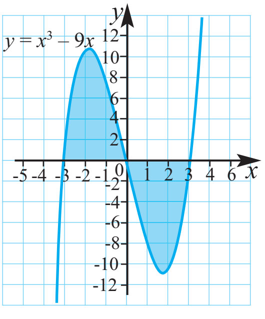
$= (1 - 0) - (-1 - 1) = 3$ (кв.ед.)

Пример . При помощи определенного интеграла, найдите площадь ограниченную функцией $y = x^3 - 9x$ и осью x.

Решение. 1. Найдем точки пересечения с осью x (нули функции)

$x^3 - 9x = 0 \quad x(x^2 - 9) = 0 \quad x = 0$ и $x = \pm 3$

2. Изобразим график и заштрихуем соответствующую площадь.



3. Выразим площадь при помощи интеграла.

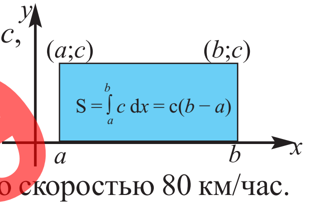
$S = \int_{-3}^{3} (x^3 - 9x)dx$ Отсюда видно, что при сложении положительного и отрицательного значений, значение интеграла равно нулю. Это связано со свойством нечетной функции.

Общую площадь выразим суммой двух площадей $S_1 = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx$ и $S_2 = \left|\int_0^3 (x^3 - 9x)dx\right|$

$\int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} = \frac{81}{4}.$ Вычисляя подобным образом получим

$\left|\int_0^3 (x^3 - 9x)dx\right| = \left|-\frac{81}{4}\right| = \frac{81}{4}.$ Тогда $S = \frac{162}{4} = \frac{81}{2}$

Свойство 6. Если на отрезке $[a;b]$ функции $f(x) = c$, справедливо следующее равенство.



$$\int_a^b c\, dx = c(b - a)$$

Пример. Автомобиль с 07:00 до 09:00 двигался со скоростью 80 км/час. Найдите путь, применяя определенный интеграл.

$$\int_7^9 80\, dx = 80(9 - 7) = 160 \text{ км/час}$$

Обучающие задания

1. 1) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком заданной функции с осью абсцисс.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \le 3 \\ 8 - x, & x > 3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \le 0 \\ 8 - x, & x > 0 \end{cases}$

2. 2) Найдите площадь ограниченную линиями

a) $y = x^2 - 5x + 4$ и $y = 0$ b) $y = 4x - x^2$ и $y = 0$

3. Hesablayın.

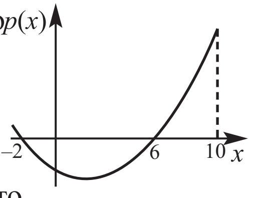
1) $\int_0^2 6x\,dx$ 2) $\int_4^9 5\,dy$ 3) $\int_{-1}^0 (2x-1)\,dx$

4) $\int_{-1}^1 (t^2-2)\,dt$ 5) $\int_1^7 (6x^2+2x-3)\,dx$ 6) $\int_0^1 (t^{1/3}-t^{2/3})\,dt$

8) $\int_1^4 (3-|x-3|\,dx$ 9) $\int_{\pi/2}^{\pi} 4\sin x\,dx$ 7) $\int_0^5 |2x-5|\,dx$

11) $\int_1^2 \frac{x^2-12}{x^4}\,dx$ 12) $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2}\,dx$ 10) $\int_1^e \frac{3}{x}\,dx$

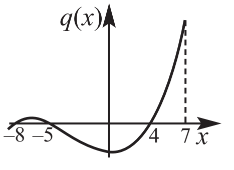
4. a) На рисунке дан график функции $p(x)$. Зная, что $\int_{-2}^{6} p(x)dx = -10$ и $\int^{10} p(x)dx = 2$, *найдите* интеграл $\int_6^{10} p(x)dx$.



b) На рисунке дан график функции $q(x)$. Зная, что

$\int_{-8}^{7} q(x)dx = -3$, $\int_4^7 p(x)dx = 5$ и $\int_{-5}^{7} p(x)dx = -11$

Найдите определенный интеграл $\int_{-8}^{-5} p(x)dx$.



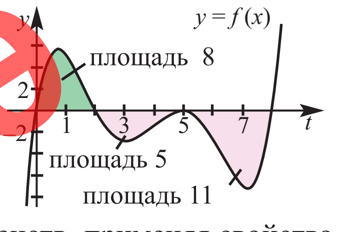
5. *При каких положительных значениях c*:

a) Площадь фигуры, ограниченная линиями $y = 2x$, $y = 0$ и $x = c$ равна 4?

b) Площадь фигуры, ограниченная линиями $y = x^2 + c$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ равна 15?

6. Зная, что $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ найдите:

a) F(2) b) F(5) c) F(8)



7. Покажите справедливость следующих равенств, применяя свойства определенных интегралов.

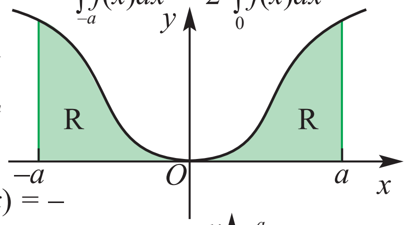
$\int_3^{11} f(x)\,dx - \int_7^{11} f(x)\,dx = \int_3^7 f(x)\,dx$ $\int_0^4 f(x)\,dx - \int_6^4 f(x)\,dx = \int_0^6 f(x)\,dx$

$\int_{-2}^6 f(x)\,dx - \int_3^6 f(x)\,dx = \int_{-2}^3 f(x)\,dx$ $\int_{-1}^3 f(x)\,dx - \int_5^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^5 f(x)\,dx$

Малый проект

Изучение вычисления интегралов четных и нечетных функций.

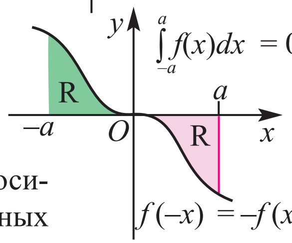
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



Как известно, четная функция удовлетворяет равенству $f(-x) = f(x)$ и ее график симметричен относительно оси ординат.
Например, функции $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^n$ $(n = 2k, k \in Z)$ являются четными.

Для нечетной функции известно, что $f(x) = -f(x)$ и ее график симметричен относительно начала координат.
Например, нечетными являются функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^n$, $(n = 2k + 1,\ k \in Z)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



$$f(-x) = -f(x)$$

Если границы интегрирования симметричны относительно начала координат, то для четных и нечетных функций появляются очень интересные свойства.

Для четной функции: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ Для нечетной функции: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Используя свойство для определенных интегралов четных и нечетных функций, вычислите:

a) $\int_{-2}^{2}(x^4 - 2x^3)dx$ b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x - 4\sin^3 x)dx$

a) Подынтегральная функция $\int_{-2}^{2}(x^4 - 2x^3)dx$ ни четная ни нечетная.
Применим свойства интегралов к данной функции.

$$\int_{-2}^{2}(x^4 - 2x^3)dx = \int_{-2}^{2} x^4\,dx - 2\int_{-2}^{2} x^3dx = 2\int_{0}^{2} x^4dx - 2\underbrace{\int_{-2}^{2} x^3dx}_{0} = 2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{2}{5}(2^5 - 0^5) = \frac{64}{5}$$

b) Здесь функция $\cos x$ четная и ее можно проинтегрировать на интервале $[0;\pi/2]$. Функция $\sin^3 x$ нечетная (так как имеет нечетную степень).

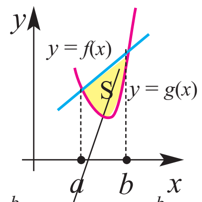
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x - 4\sin^3 x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx - 4\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^3 x\,dx}_{0} = 2\int_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx = 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 2(1 - 0) = 2$$

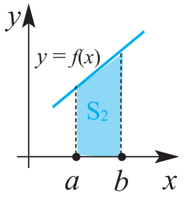
Выполните следующие задания.

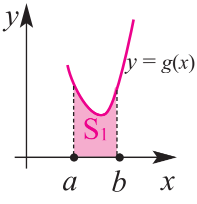
1. Запишите что вы думаете о производных четных и нечетных функций и четных и нечетных функциях.
2. Вычислите интегралы, зная что функции четные или нечетные.

a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$ c) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ d) $\int_{-1}^{1}(1 - |x|)\,dx$

Пусть, требуется найти площадь фигуры, ограниченную графиками функций f и g. Площадь требуемой фигуры S на рисунке можно найти вычитая из площади S_2 площадь S_1. Каждую площадь можно вычислить как определенный интеграл на заданном промежутке.

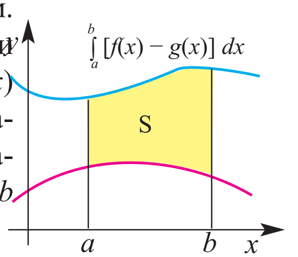






$$S = \underbrace{\int_a^b [f(x)\,dx}_{S_2} - \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{S_1} \qquad S_2 = \int_a^b [f(x)\,dx \qquad S_1 = \int_a^b g(x)\,dx$$

Эти суждения можно обобщить следующим образом. *Так как функции* f и g непрерывны на отрезке [a;b] и на этом отрезке выполняется условие $f(x) \geq g(x)$ (т.е.график всей функции $f(x)$ расположен выше графика функции $g(x)$), то площадь ограниченная графиками функций $f(x)$, $g(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ можно выразить следующим выражением



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

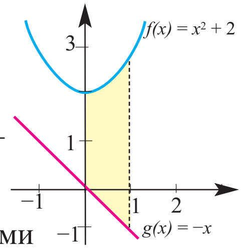
Графики функций не имеют общих точек.

Пример 1. Найдите площадь, ограниченную графиками функций $f(x) = x^2 + 2$ и $g(x) = -x$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$.

Решение:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 + x + 2)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}$$



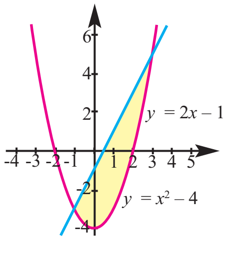
Графики функций пересекаются в двух точках.

Пример 2. Найдите площадь, ограниченную графиками функций $y = 2x - 1$ и $y = x^2 - 4$.

Решение: найдем абсциссы точек пересечения графиков функций.

$$2x - 1 = x^2 - 4, \quad x^2 - 2x - 3 = 0,$$
$$(x - 3)(x + 1) = 0, \quad x = -1 \text{ и } x = 3.$$

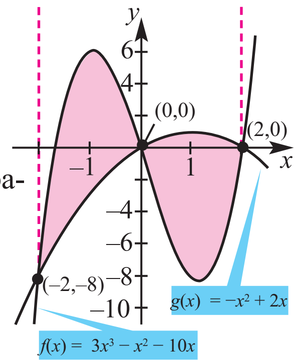
Эти значения x являются границами определенного интеграла.



$$S = \int_{-1}^{3} [(2x - 1) - (x^2 - 4)]\,dx = \int_{-1}^{3} (2x - x^2 + 3)\,dx =$$

Функции имеют более двух точек пересечения.

Пример 3. Найдите площадь, заключенную между графиками функций $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ и $g(x) = -x^2 + 2x$.



Решение: найдем абсциссы точек пересечения графиков.

$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$

$3x^3 - x^2 - 10x + x^2 - 2x = 0$

$3x^3 - 12x = 0$

$3x(x^2 - 4) = 0$

$x = 0,\ x = 2,\ x = -2,$

Значит, графики пересекаются в точках с абсциссами $-2;\ 0;\ 2$.

По графикам функций также видно, что площадь которую мы должны найти состоит из площади, ограниченной графиками на промежутке $[-2;0]$ и промежутке $[0;2]$. На промежутке $[-2;0]$ выполняется условие $f(x) \geq g(x)$, на промежутке $[0;2]$ выполняется условие $g(x) \geq f(x)$ (учождении разности функций).

$$S = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}[(3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2}[(-3x^3 + 12x)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}[(3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2}[(-3x^3 + 12x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} = -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24$$

! Вычислите требуемую площадь при помощи интеграла $\int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx$. Какой результат вы получили?

Пример 4. Члены школьного клуба юных конструкторов работают над созданием нового двигателя для автомобиля, который будет меньше засорять окружающую среду. Изменение количества частиц (млрд), загрязняющих атмосферу, в t-ый год для нового мотора можно выразить следующим образом $E(t) = 2t^2$. Количество загрязняющих частиц для старого мотора выражено как $C(t) = 9 + t^2$.

a) В какой год они будут выбрасывать в атмосферу одинаковое количество частиц?

b) Какая разница между количеством вредных частиц, выброшенных в атмосферу за этот период?

Площадь фигуры, ограниченной кривыми

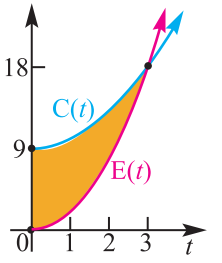
Решение: a) Количество вредных частиц для удовлетворяющего условию года равно E(t) = C(t).

$$2t^2 = 9 + t^2$$

$$t^2 = 9 \quad t = 3 \quad t = -3$$

Количество лет не может быть отрицательным, значит $t = -3$ не рассматриваем. На 3-ий год при использовании новый мотор будет давать такое же количество вредных частиц, как и старый.

b) Разность количества вредных частиц равна разности площадей на промежутке [0;3].



$$\int_0^3 [C(t) - E(t)]\, dx = \int_0^3 [(9 + t^2) - 2t^2]\, dx =$$

$$= \int_0^3 (9 - t^2)\, dx = \left(9t - \frac{t^2}{3}\right)\Big|_0^3 = 27 - 9 = 18$$

Ответ: 18 млрд. частиц.

Обучающие задания

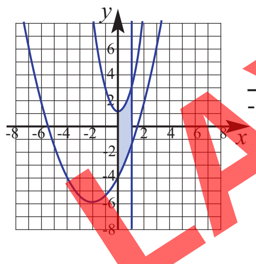
1. *Найдите (если это возможно)абсциссы точек пересечения графиков функций f* и g. Найдите площадь, ограниченную этими функциями и прямыми $x = 0$ и $x = 5$.

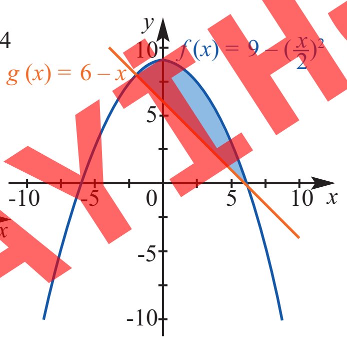
1) $f(x) = 9$, $g(x) = x^2$
2) $f(x) = 8$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$
3) $f(x) = 7$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$
4) $f(x) = -6$, $g(x) = x^2 + 3x + 13$

2. Найдите площадь закрашенной части на рисунке.

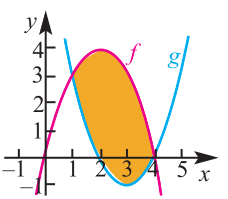
$y = 2x^2 + 1 \quad y = \frac{x^2}{2} + 2x - 4$

$x = 0,\ x = 1$





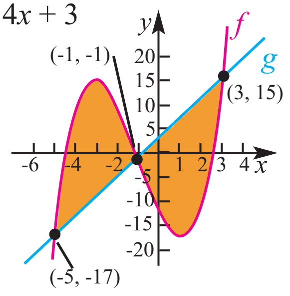
$f(x) = 4x - x^2$, g $(x) = x^2 - 6x - 8$



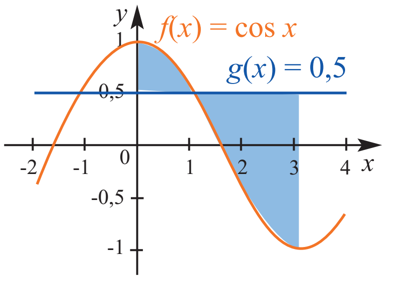
3. Вычистите закрашенную площадь

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$

$g(x) = 4x + 3$



$f(x) = \cos x$ и $y = 0{,}5,\ \ 0 \le x \le \pi$



4. Постройте графики функции и найдите ограниченную ими площадь.

$y = 12 - x,\ y = \sqrt{x}$ *и* $y = 1$

$y = \sin x$ и $y = \cos x$, $\quad x \in [-\pi; \pi]$

$y = x^3$ и $y = x^2 - 2x$, $\quad x \in [-1; 1]$

$y = x^2 + 9$ и $y = 10 + 2x$, $\quad x \in [-1; 1]$

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченную линиями.Изобразите график.

1) $y = x,\ y = x^3,\ x = 0,\ x = 1$

2) $y = x,\ y = x^4$

3) $y = x^2 - 2x,\ y = x$

4) $y = x + 2,\ y = x^2$

5) $y = 6x - x^2,\ y = x$

6) $y = 2x - x^2,\ y = -x$

6. Найдите точки пересечения и вычислите площадь ограниченную кривыми.

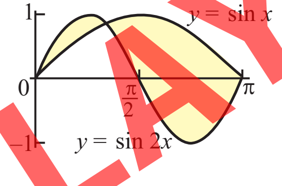
a) $y = x^2 - 2$ və $y = 2$ b) $y = 2x - x^2$ və $y = -3$

c) $y = 7 - 2x^2$ və $y = x^2\ \ 4$ d) $y = -x^3 + 6x$ və $y = -x^2$

7. Найдите площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $(2;-3)$, $(4; 6)$, $(6; 1)$, при помощи определенного интеграла.

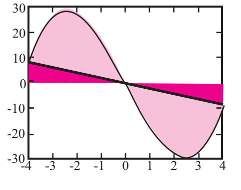
8. 1) Вычислите площадь закрашенной части на рисунке.

a)



2) Вычислите площадь, заключенную между графиками двух функций, закрашенную более светлым цветом.

a) $y = x^3 - 18x$ и $y + 2x = 0$



9. Функция $C'(x) = 1000e^{-x} + 5$ показывает маржинальные затраты при продаже x единиц билетов в парке развлечений и $C(0) = 0$. В этом случае функция $R'(x) = 60 - 0{,}1x$ показывает маржинальный доход и $R(0) = 0$. Зная, что прибыль, полученную от общего дохода это разность между $P(x) = R(x) - C(x)$, найдите доход от продажи 550 билетов. Чтобы найти точки пересечения этих графиков используйте графкалькулятор.

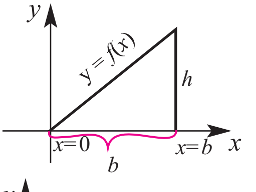
10. Затраты на производство телефонов в количестве x единиц выражается функцией $C(x) = 0{,}01x^2 - 3x + 229$, доход - функцией $R(x) = 429 - 2x$. Найдите площадь образованную этими графиками и прямой $x = 0$. Объясните значение данной площади на примере реальной ситуации.

11. Проектная работа. Определенный интеграл и площадь

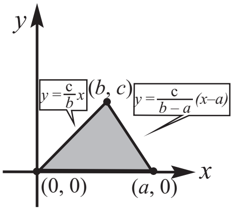
1. Решите задачу при помощи определенного интеграла.
2. Представьте геометрическое доказательство.
3. Придумайте еще несколько задач, которые можно решить при помощи интегрирования.

1) Докажите, что площадь данного треугольника, равная половине произведения основания и высоты, можно найти при помощи площади расположенной между двумя прямыми.

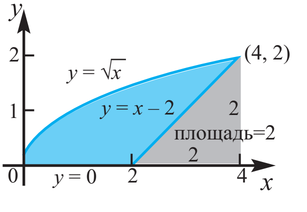
a) Прямоугольный треугольник. Указание: учитывая, что функцию $y = f(x)$ можно выразить через уравнение прямой $y = kx + b$ найдите функцию f.



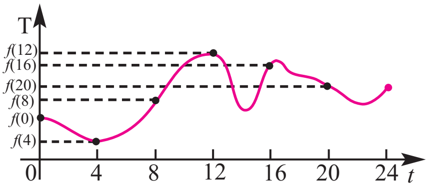
b) Произвольный треугольник. Запишите и объясните как вы получили уравнения прямых, содержащих стороны треугольника.



2) Найдите площадь закрашенной части, как разность площади функции $y = \sqrt{x}$ на заданном интервале и площади треугольника.



Определенный интеграл и среднее значение функции на отрезке



Мы уже знаем как для заданных величин найти среднее значение.
Например, чтобы найти среднюю температуру за сутки, надо измерять температуру в определенные моменты и отметьте ее. Затем сложить эти значения и разделить на количество замеров. Получим среднюю температуру.

В этом случае функция $T = f(t)$ показывает зависимость температуры от времени и находя значение функции в заданные моменты tможно найти среднюю температуру.

$$T_0 = f(0),\ T_1 = f(4),\ T_2 = f(8),\ T_3 = f(12),\ T_4 = f(16),\ T_5 = f(20)$$

$$T_{ср.} = \frac{T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5}{6}$$

По заданному графику, можно установить, что чем больше значений будет задано, тем более точный результат будет получен. Для этого разделим интервал [0;24] на n малых отрезков Δt. Значит, для нахождения среднего значения при условии $n \to \infty$ было бы логично предел значений $T_i = f(t_i)$ разделить на n.

$$T_{orta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

Эта запись близка определению интеграла в виде суммы по Риману.
$\Delta t = \frac{24-0}{n} = \frac{24}{n}$ и используя запись $\frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t$ применим определению интеграла.

$$T_{ср.} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{24} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t =$$

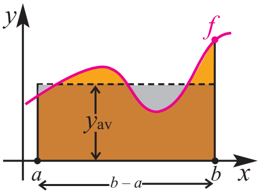
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t =$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t)\, dt$$

Определение: величина $f_{ср.} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Из равенства $f_{ср.} = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ получаем:

$$(b-a)\,f_{or.} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

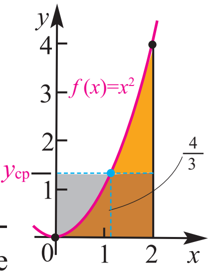


Геометрическое объяснение среднего значения функции.. Произведение$(b-a)\,f_{ср.}$ выражает площадь прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f_{ср.}$ и равно площади ограниченной функцией f на отрезке $[a;b]$.

Пример 1. Найдите среднее значение функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение: по определению $f_{ср.} = \dfrac{1}{2-0}\int\limits_0^2 x^2\,dx$

$$\frac{1}{2-0}\int\limits_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \qquad f_{ср.} = \frac{4}{3}$$



Обратите внимание! Значение функции возрастает на заданном интервале от 0 до 4, однако среднее значение не равно 2. По графику также видно, что среднее значение меньше 1. Можно найти при каких значениях x достигается среднее значение.

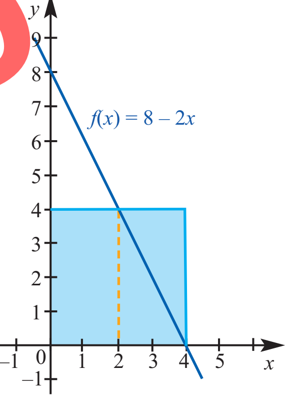
$$x^2 = \frac{4}{3} \qquad x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Пример 2. Найдите среднее значение функции $f(x) = 8 - 2x$ на отрезке $[0; 4]$.

Решение: по определению $f_{ср.} = \dfrac{1}{4-0}\int\limits_0^4 (8-2x)\,dx$

$$\frac{1}{4-0}\int\limits_0^4 (8-2x)\,dx = \frac{1}{4}\left(8x\Big|_0^4 - x^2\Big|_0^4\right) = 4$$

$$f_{ср.} = 4$$



Определим в каких точках функция принимает это значение.

$$8 - 2x = 4\,;\; x = 2$$

На заданном отрезке функция может принимать среднее значение только в одной точке.

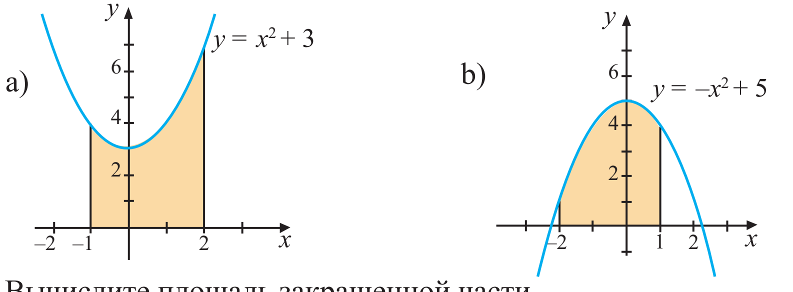
1. Найдите среднее значение на отрезке.

1) $y = 2x^3$; $[-1;1]$ 2) $y = 4 - x^2$; $[-2;2]$
3) $y = e^x$; $[0;1]$ 4) $y = x^2 - x + 1$; $[0;2]$

2. Найдите среднее значение функции на отрезке.

1) $f(x) = \sin x$ $[0;\frac{\pi}{2}]$ 2) 1) $f(x) = \cos x$ $[0;\frac{\pi}{2}]$
3) $f(x) = 1 - x^2$ $[1;-1]$ 4) 1) $f(x) = x + \cos x$ $[0;\frac{\pi}{2}]$

3. Выполните задание по графику



1) Вычислите площадь закрашенной части.
2) Найдите среднее значение заданной функции на отрезке.
3) Объясните полученный результат геометрически.

4. **Среднее количество осадков.** При помощи функции $r(x) = 0.00002(6511 + 366x - x^2)$ можно найти ежедневное количество осадков(см) с начала года (через x дней). Найдите среднее количество осадков в течении 180 дней.

5. **Средний прирост населения.** Пусть, прирост населения страны в t-ый год можно найти при помощи функции $P(t) = 5{,}4e^{0.01t}$. Здесь P численность населения в млн. чел, t - количество лет после 2000. Найдите средней прирост населения с 2001 до 2005.

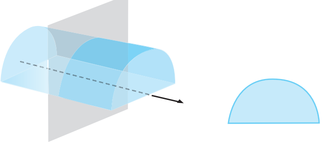
6. **Средняя скорость.** Найдите среднюю скорость $v_{ср.}$ свободно падающего тела на интервале [0;5]. Начальная скорость $v_0 = 0$.

7. **Средняя температура воздуха.** Зависимость температуры от времени выражается в виде $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 34$, $0 \le t \le 10$. Найдите:
a) Среднюю температуру.
b) Минимальную температуру.
c) Максимальную температуру

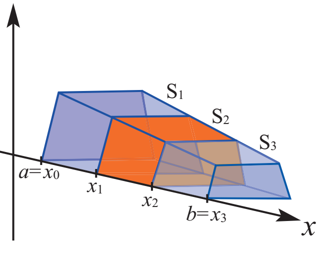
Как известно площадь является числовым выражением фигур на плоскости. Объем является числовым выражением пространственных тел. Для вычисления объемов ряда пространственных фигур были найдены геометрические формулы. Например, нам известны, объемы прямоугольного параллелепипеда (произведение его измерений) V=abc, объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{осн.}h$, объем цилиндра $V=\pi r^2 h$, а также объем шара $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ и объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Формулы для нахождения объемов можно доказать как геометрически, так и при помощи интеграла.

Существуют различные способы нахождения объемов фигур. Один из них способ расслойки (сложение сечений). С этим способом мы познакомились на примере принципа Кавальери. При помощи этого способа можно найти как объем фигуры, сечения которых не изменяются, как например цилиндра, так и объемы фигур с изменяющимися сечениями, например, пирамиды.



поперечное сечение



различные сечения

Объем фигуры можно найти найдя сумму объемов каждого сечения (слоя). Пусть, $S(x_i)$ - площадь сечения проходящая через точку x_i. Например, фигура на рисунке состоит из трех сечений. Значит, если фигура состоит из $i = 1,2,3,...$ сечений и высота каждого сечения равна Δx, то зная, что $S(x_i)$ площадь основания, объем фигуры можно выразить как сумму объемов сечений (V_i).

$$V \approx \sum S(x_i)\Delta x$$

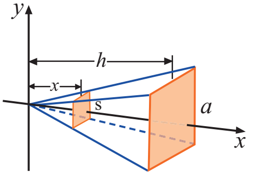
По определению интеграла объем пространственных фигур можно найти по формуле:

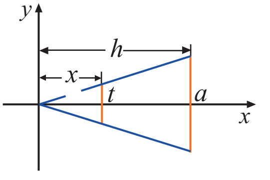
$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x=\int_a^b S(x)dx,$$

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

Для нахождения объемов фигур при помощи метода расслойки надо выполнить следующие действия:
1. Изобразите фигуру и определите форму поперечного сечения.
2. Определите формулу для вычисления площади сечения.
3. Формула площади записывается в определенный интеграл для заданного интервала. После чего вычисляется интеграл.

Пример 1. Найдите объем пирамиды, при помощи метода сечения.





1. Сечением пирамиды с квадратным основанием также является квадрат.

2. Объем пирамиды находится по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h$, $V = \frac{1}{3}a^2h$

По рисунку для нахождения сторон основания каждого сечения запишем соответствующие отношения для подобных треугольников:

$$\frac{t}{a} = \frac{x}{h} \qquad t = \frac{ax}{h}$$

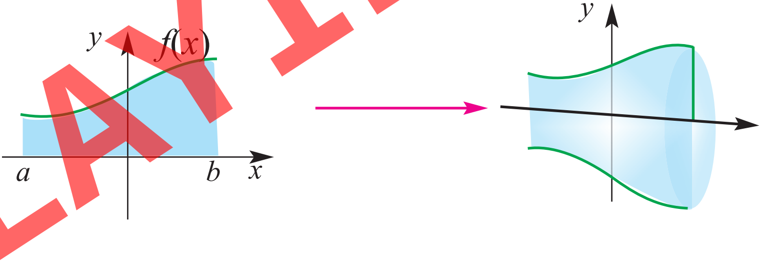
Площадь каждого сечения: $S(x) = (\frac{ax}{h})^2$

Объем пирамиды: $V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h(\frac{ax}{h})^2dx = (\frac{a}{h})^2\int_0^h x^2dx = \frac{a^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{a^2}{3}h$

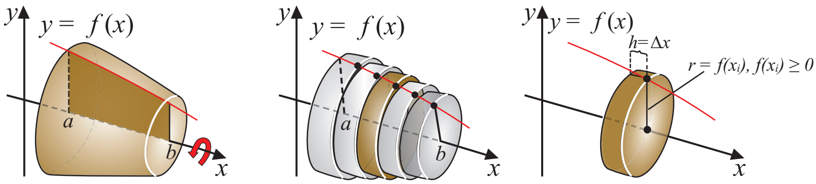
Фигуры вращения, поперечное сечение которых является кругом и их объемы.

При вращении плоских фигур вокруг какой-либо оси получаются пространственные фигуры, как показано на рисунке.

Фигура на рисунке, получена вращением плоскости ограниченной функцией $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ вокруг оси x.



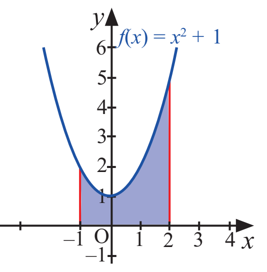
Рассмотрим другой пример, где нужно найти объем фигуры вращения.



Тело вращения на рисунке получено вращением вокруг оси x части плоскости, ограниченной функцией $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Объем фигуры можно приблизительно найти как сумму объемов бесконечно маленьких цилиндров, если разделить отрезок $[a; b]$ на одинаковые по длине отрезки Δx. Объем каждого маленького цилиндра можно выразить как $\pi[(f(x)]^2\Delta x$ полученного вращением фигуры и находится по формуле:

$$V = \pi\int_{a}^{b} (f(x))^2 dx$$

Пример 2. Найдите объем фигуры, полученной вращением плоскости, ограниченной функцией $f(x) = x^2 + 1$ на отрезке $[-1; 2]$ вокруг оси x.

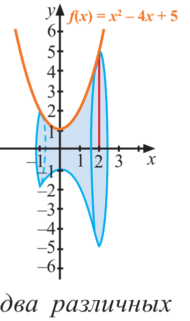


Объем искомой фигуры, согласно формуле объемов фигур вращения, находится так:

$$V = \pi\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)^2 dx = \pi\cdot\int_{-1}^{2}(x^4 + 2x^2 + 1)dx =$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{2} = \pi\cdot\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2\right) - \pi\left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{33}{5} + \frac{18}{3} + 3\right) = \frac{234\pi}{15}$$



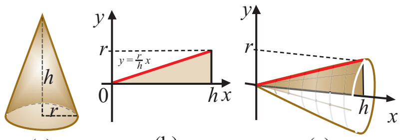
На рисунке представлены два различных вида фигуры, полученной вращением площади, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[-1;2]$ вокруг оси x.

Пример 3. Найдите объем конуса радиус основания которого равен r, а высота равна h.

Так как $f(x) = \frac{r}{h} x$, *то*

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 x\, dx = \pi \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx =$$

$$= \pi \frac{r^2x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$



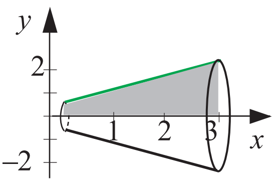
(a) (b) (c)

Объем конуса: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

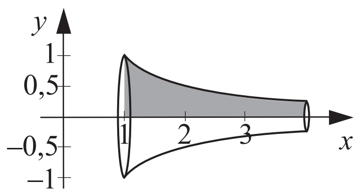
Обучающие задания

1. На рисунке представлены пространственные фигуры, полученные вращением вокруг оси x графика функции на заданном отрезке. Найдите объемы этих фигур.

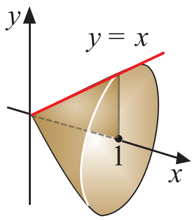
a) $f(x) = x + 1$, $[0;3]$



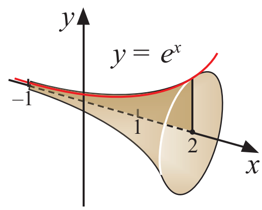
b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $[1;4]$



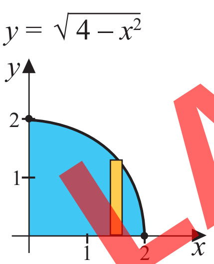
c) $f(x) = x$, $[0;1]$

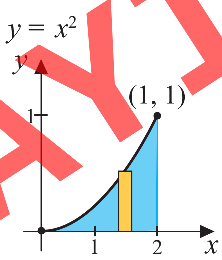


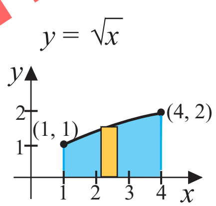
d) $f(x) = e^x$, $[-1; 2]$

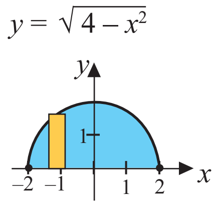


2. Изобразите пространственные фигуры, полученные вращением относительно оси x и найдите их объемы.









3. Найдите объем фигуры, ограниченной линиями, полученной вращением вокруг оси абсцисс.

1) $y = x,\ x = 0,\ x = 2$ 2) $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4$

3) $y = 2x,\ x = 1,\ x = 3$ 4) $y = e^x,\ x = -2,\ x = 5$

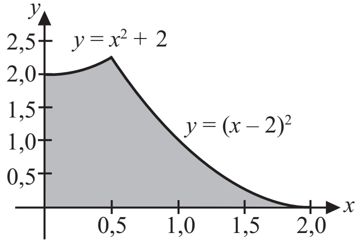
5) $y = e^x,\ x = -3,\ x = 2$ 6) $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = 3$

7) $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = 4$ 8) $y = x + 1,\ x = -1,\ x = 2$

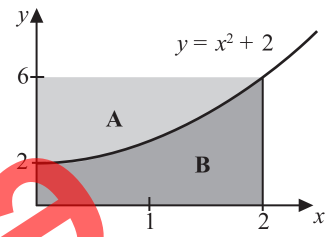
9) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x = 1,\ x = 4$ 10) $y = 4,\ x = 1,\ x = 3$

11) $y = 5,\ x = 1,\ x = 3$ 12) $y = x^2,\ x = 0,\ x = 2$

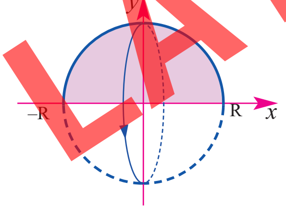
4. a) *Найдите объем фигуры, полученной вращением площади, ограниченной графиками функций* $y = x^2 + 2$ и $y = (x - 2)^2$ вокруг оси x. **Указание**. Вычислите объем как сумму двух интегралов на промежутках [0;0,5] и [0,5;2].



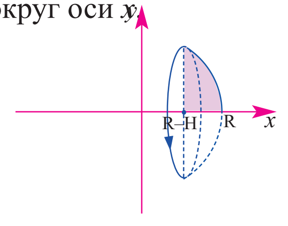
b) Найдите объем фигуры, полученной вращением плоскости, ограниченной графиками функций $y = 6$ и $y = x^2 + 2$ fвокруг оси x **Указание**. Найдите объем вычислив разность интегралов.



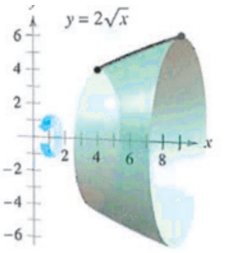
5. a) Выведите формулу нахождения объема шара, полученного вращением плоскости ограниченной линиями $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$, и y=0 вокруг оси x.



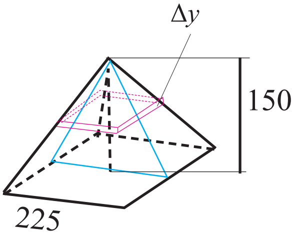
b) Выведите формулу нахождения объема шарового сегмента, полученного вращением плоскости ограниченной линиями $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $R-H \le x \le R$, $y=0$ vә $x=R-H$ $(0<H<R)$ вокруг оси x.

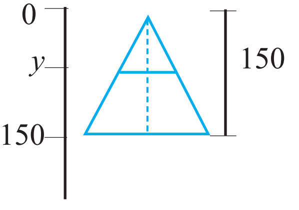


6. Найдите объем фигуры полученной вращением вокруг оси x плоскости, ограниченной графиком функции $y = 2\sqrt{x}$ на отрезке [3; 7].



7. **Долгосрочные задания.** 1) Большая пирамида Гизы находится в Египте и ее размеры на рисунке заданы в фитах (feet). По данным на рисунке найдите объем пирамиды при помощи определенного интеграла.





Выполните задание по решению Примера 1.

1) Сторона основания правильной пирамиды 5 м, высота 3 м. Как будет отличаться объем пирамиды, размеры которой равны половине данных размеров?

2) Основании крыши дома является сечением параллельным поверхности земли и имеет форму прямоугольника. Сечение перпендикулярное плоскости земли имеет форму треугольника. Размеры прямоугольника в основании крыши 1м × 2м, основание треугольника 1 м, высота 0,5 м.

8. Запишите формулу нахождения объема пространственной фигуры, полученной вращением вокруг оси x плоскости, ограниченной линиями.

a) $y = x$, $y = 1$, $x = 0$ b) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 8$

c) $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$ d) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 8$

Обобщающие задания

1. Найдите первообразную, применяя правило интегрирования степенной функции.

a) $f(x) = (2x + 3)^5$ b) $f(x) = (7 – 3x)^8$ c) $f(x) = (\frac{1}{2}x – 2)^9$

d) $f(x) = (5x + 2)^{–6}$ e) $f(x) = (9 – 4x)^{–2}$ f) $f(x) = (x + 3)^{–3}$

g) $f(x) = \frac{–3}{5 – x}$ h) $f(x) = \frac{9}{3 – 6x}$ i) $f(x) = \frac{5}{3x + 2}$

2. Найдите интеграл

a) $\int(x^5 – 2x^3 + 4)\,dx$ b) $\int x^2\sqrt{x}\,dx$ c) $\int\left(t + \frac{1}{2}\right)dt$

d) $\int(1 + \sqrt{x})^2\,dx$ e) $\int\frac{x – 5}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ f) $\int(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta$

3. Известно, что

$$\int_1^3 f(x)dx = 5,\ \int_1^3 g(x)dx = –2,\ \int_3^5 f(x)dx = 2,\ \int_3^5 g(x)dx = 1$$

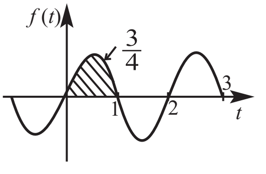
Найдите:

a) $\int_1^3 [f(x) – g(x)]dx$ b) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$ c) $\int_1^3 [5f(x) – 3g(x)]dx$

d) $\int_1^3 [3f(x) + 4g(x)]dx$ e) $\int_1^5 [2f(x) – 3g(x)]dx$ f) $\int_1^5 [f(x) – g(x)]dx$

4. Выполните следующие задания.

1. Основной период нечетной функции $f(t)$ равен 2 и $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{4}$. Найдите следующее:



a) $\int_0^{-1} f(x)dx$ b) $\int_0^{0} f(x)dx$ c) $\int_0^{21} f(x)dx$ d) $\int_0^{3} f(x)dx$

5. Найдите определенный интеграл.

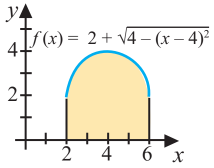
a) $\int_{-6}^{7} 2\,dx$ b) $\int_{-1}^{5} (6x – 7)\,dx$ c) $\int_1^2 (5 + 4x – 6x^2)\,dx$

d) $\int_0^1 (t^2 + 6t – 1)\,dx$ e) $\int_{-1}^{2} (x^3 – x^2 + 4x)\,dx$ f) $\int_0^1 (x^{99} + 1)\,dx$

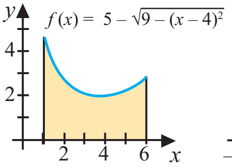
g) $\int_2^3 \frac{1}{t^2}\,dt$ h) $\int_1^4 (x – \sqrt{x})\,dx$

Обобщающие задания

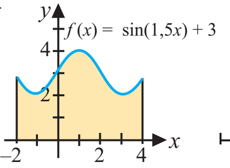
6.

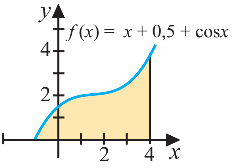


$$\int_2^6 f(x)\,dx$$



$$\int_1^6 f(x)\,dx$$

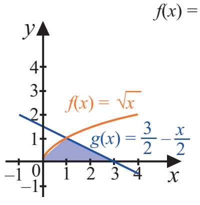




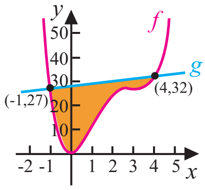
Вычислите интеграл на основе геометрических рассуждений

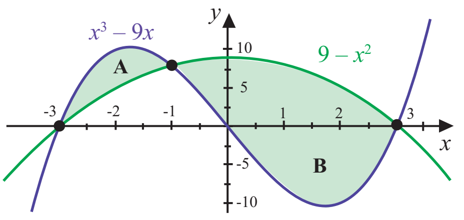
Вычислите площадь закрашенной поверхности при помощи определенного интеграла.

7. Найдите закрашенную площадь расположенную между графиками.



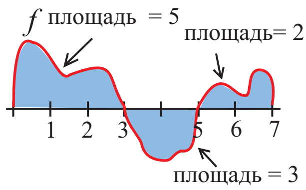
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$, $g(x) = x + 2$





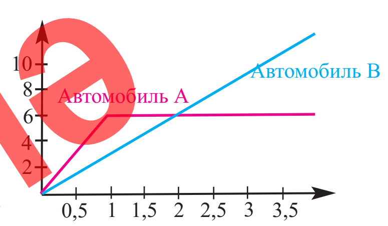
8. Вычислите используя график f.

a) $\int_0^3 f(x)\,dx$ b) $\int_0^5 f(x)\,dx$ c) $\int_3^7 f(x)\,dx$



9. **Движение автомобиля.** На графике показана зависимость скорости (м/сек.) от времени двух автомобилей, которые начали движение по сигналу светофора. Автомобиль A начал движение с большей скоростью, чем автомобиль B.

a) Какой путь прошел автомобиль A за первые 2 секунды? **Указание:** используйте геометрические формулы.



b) За какое время, приблизительно, автомобиль B догонит автомобиль

10. Точка массой m движется вдоль оси Ox под действием силы направленной вдоль данной оси. Зная, что в момент $t = t_0$ скорость v_0 равна координате x_0, запишите формулу $x(t)$. Здесь $F(t)$ измеряется в Ньютонах, t - *в секундах*, v - $\frac{м}{сек}$, *m - в кг.*

a) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$

b) $F(t) = 14 \sin\pi$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$

10 Статистика и вероятность

- Статистические показатели
- Формы распределения информации
- Нормальное распределение
- Диаграмма “ящик с усами”
- Случайные события и вероятность
- Формулы для вычисления вероятности
- Обобщающие задания

Математический словарь

Совокупность
Выборка
Среднее арифметическое
Мода
Медиана
Наибольшая разность
Отклонение
Среднеквадратичное отклонение
Дисперсия
Диаграмма “ящик с усами”

Случайное событие
Эксперимент
Элементарное событие
Пространство элементарных событий
Сложное событие
Независимое событие
Зависимое событие
Условная вероятность

Дисперсия. Стандартное отклонение

Для анализа статистических данных до настоящего момента мы использовали меры центральных тенденций. Это среднее арифметическое и медиана. Известно, что во многих случаях среднее арифметическое не является достаточно точной характеристикой (при очень больших размерах, выходящих за границу), тогда удобнее использовать медиану. Однако и медиана удобна при сравнении ограниченного количества информации. Как распределяется информация показывает наибольшая разность. Этот показатель дает возможность проанализировать каждый из двух значений. По этим причинам, для более точного представления и анализа информации используют такие характеристики, как ***отклонение, дисперсия, стандартное отклонение.*** Изучим эти характеристики на следующих примерах.

Пример. Ниже представлена заработная плата (в ман.) случайным образом выбранных 10 работников фирмы : 120, 160, 90, 175, 110, 80, 220, 150, 300, 95

Зарплата x	Отклонение: $(x-\overline{x})$	Квадрат: $(x_i-\overline{x})^2$
120	–20	400
160	20	400
90	–50	2500
175	35	1225
110	–30	900
80	–60	3600
220	80	6400
150	10	100
300	160	25600
95	–45	2025
Сумма: $\sum x_i = 1400$	Сумма: $\sum(x-\overline{x}) = 0$	Сумма: $\sum(x_n-\overline{x})^2 = 43150$

Решение: 1.Построим таблицу, которая показывает зарплаты и отклонения.

2. Найдем среднее арифметическое. Обозначим среднее арифметическое как $\overline{x}$ (иногда буквой μ – “мью”). Среднее арифметическое 1400 : 10 = 140 (манат).

3. Вычитая из зарплаты среднее арифметическое, найдем отклонение, например, 120 –140 = –20. Вычислим все отклонения и запишем их в новый столбик таблицы. Сумма значений отклонений различной информации равна нулю. Это всегда так, т.е. для совокупности невозможно вычислить среднее отклонение. Поэтому мы используем сумму квадратов отклонений. Вычислим $(x-\overline{x})^2$ и найдем сумму. Этот показатель внесем в таблицу.

4. Чтобы для зарплаты найти **дисперсию**, надо полученную сумму разделить на количество n: $\sum(x_n-\overline{x})^2 = 43150$, $n = 10$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{43150}{10} = 4315$$

5. Чтобы найти **стандартное отклонение** заработной платы надо извлечь квадратный корень. Дисперсия и стандартное отклонение обычно обозначаются буквами одинаковыми буквами **σ** - “сигма” или ***s*** .

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4315} \approx 65{,}69$$

Статистические показатели

Обобщим понятия отклонение, дисперсия и стандартное отклонение.
Отклонением называется разность каких-либо данных и среднего арифметического: $\boldsymbol{x_{откл.} = x - \bar{x}}$, здесь x - заданная информация, $\bar{x}$ - среднее арифметическое.

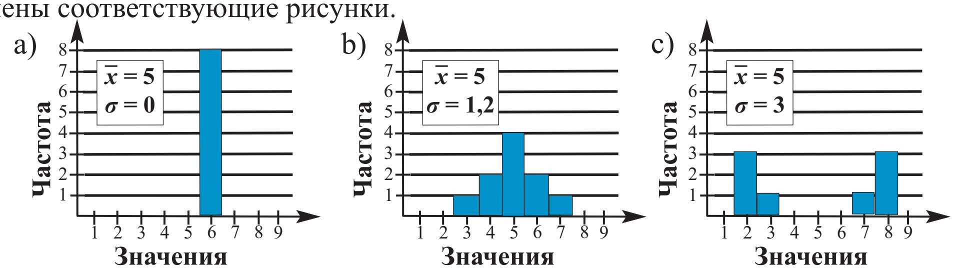
Дисперсия равна отношению суммы квадратов отклонений к их количеству. Для n единиц выбранной информации дисперсия находится по формуле: $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$

Стандартным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Стандартное отклонение один из важных показателей отвечающий за характер распределения.

- Стандартное отклонение показывает распределение информации относительно среднего арифметического.
- Если информация находится друг от друга на большом расстоянии, то стандартное отклонение будет большим.
- Если информация находится друг от друга на маленьком расстоянии, то стандартное отклонение будет маленьким.

Другими словами, если информация сосредоточена вокруг среднего арифметического, то стандартное отклонение будет маленьким. Ниже представлены соответствующие рисунки.



Несмотря на то, что на всех трех диаграммах среднее арифметическое одинаково, но стандартное отклонение различно. На первом графике 1-стандартное отклонение 0. Значение всех 8 данных равно 5. На втором графике стандартное отклонение равно 3, так как данные сходятся к среднему арифметическому.

Использование калькулятора. Чтобы вычислять статистические данные на калькуляторе надо перейти в статистический режим. Для вычисления среднего арифметического $\bar{x}$, дисперсии и стандартного отклонения σ на калькуляторе имеются специальные кнопки. При решении заданий используйте следующие кнопки.

$\boxed{\bar{x}}$ $\boxed{\bar{x}^2}$ $\boxed{\sum x}$ $\boxed{\sum \bar{x}^2}$ $\boxed{\sigma_n}$ $\boxed{\sigma_{n-1}}$

Пример. Найдите стандартное отклонение сгруппированной информации. В таблице представлена информация о количестве пропущенных уроков в течении 50 дней в одном из классов.

Количество пропущенных ежедневно уроков в течении 50 дней					
1	3	1	1	1	1
5	0	1	2	2	1
0	1	1	0	0	0
3	6	2	3	0	1
1	3	0	3	1	1
1	1	6	0	1	3
4	1	1	6	6	1
2	2	2	0	3	0
2	4				

Решение:

1. Сначала сгруппируем данные о пропущенных уроках и запишем их в таблице отклонений. Например, количество дней в которые вообще уроков не пропущено - 10, дней, в которых пропущен 1 урок - 19 и т.д..

По данным таблицы найдем среднее арифметическое.

x_i	f_i	$x_i f_i$
0	10	0
1	19	19
2	7	14
3	7	21
4	2	8
5	1	5
6	4	24
	$\sum = 50$	$\sum = 91$

1. $\bar{x} = \dfrac{\sum x \cdot f}{n} = \dfrac{91}{50} \approx 1{,}8$

2. Для всех данных найдем:

a) отклонение от среднего значения

b) возведем его в квадрат $(x - \bar{x})^2$

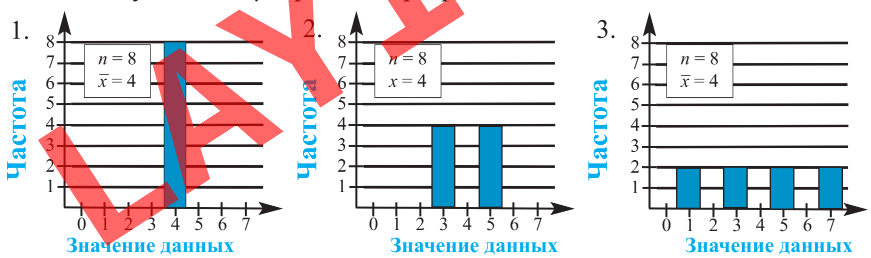
c) Полученный результат умножаем на количество, складываем и делим на n. После чего находим квадратный корень.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{n}} = \sqrt{\frac{145{,}4}{50}} \approx 1{,}71$$

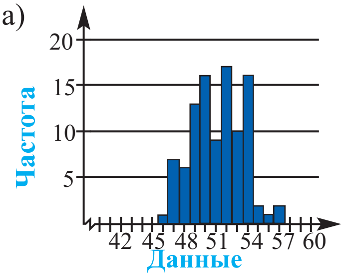
$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
–1,8	3,24	32,40
–0,8	0,64	12,16
0,2	0,04	0,28
1,2	1,44	10,08
2,2	4,84	9.68
3,2	10,24	10,24
4,2	17,64	70,56
		$\sum = 145{,}40$

Как видно, стандартное отклонение количества детей не посещающих школу 1,71, при среднем значении 1,8.

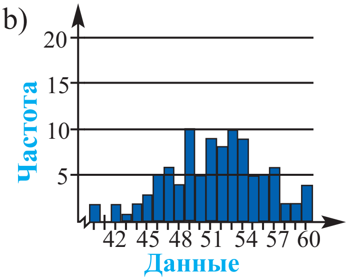
1. Сначала, при помощи письменных вычислений, по графику, найдите, приблизительно, стандартное отклонение совокупности. Потом проверьте полученное приближенное значение, здесь n - количество данных совокупности, μ среднее арифметическое.



2. Среднее арифметическое каждого из двух графиков на рисунке равно 50. Однако стандартное отклонение первого равно 2,4, а второго - 5. Установите соответствие между графиком и стандартным отклонением. a)



b)



3. Фирма по выращиванию роз вывела два новых сорта гибрида роз. По статистике, средняя длина каждого вида равна 10 см, однако стандартное отклонение сорта A равно 5,5 см, а сорта B - 1,25 см.

a) О каком виде роз можно сказать, что их размеры сильно отличаются друг от друга?

b) Айтян хочет, чтобы на одном и том же кусте были розы и длиной 15 см и длиной 5 см. Какой вид роз она должна выбрать?

Какой вид роз выберите вы, если хотите чтобы на кусте было много роз длиной 10 см.

4. Выполните задания для следующих данных

100; 200; 300; 400; 500; 600; 700; 800; 900; 1000;

a) Найдите среднее арифметическое $\bar{x}$ и стандартное отклонение (σ) .

b) Значение всех данных умножьте на 10. Для новых данных найдите $\bar{x}$ и стандартное отклонение (σ)

c) Разделите все данные на 10.

d) Обсудите полученные результаты. Поясните, является или нет стандартное отклонение индикатором для определения среднего арифметического?

5. Ниже представлены результаты, случайным образом выбранных 8 девочек и 8 мальчиков, сдающих экзамен по программе SAT (Scholastic Aptitude Test - экзамен для того, чтобы стать бакалавром американцам и иностранным гражданам в Америке)

Баллы SAT мальчиков: 1059; 1328; 1175; 1123; 923; 1017; 1214; 1042

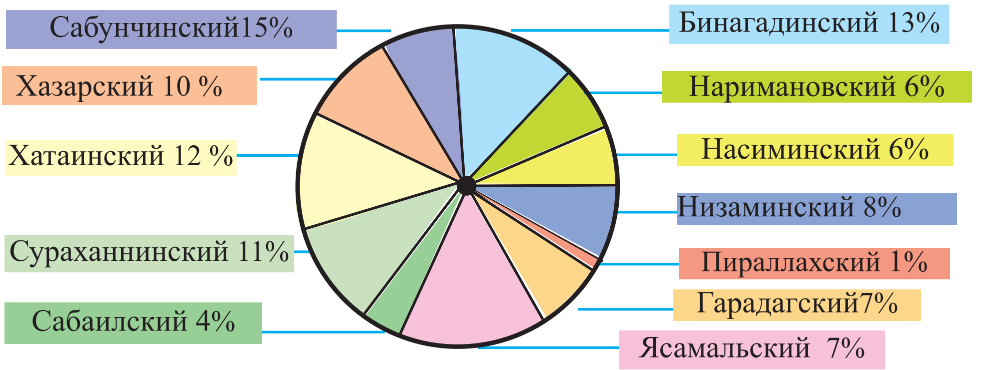
Баллы SAT девочек: 1226; 965; 841; 1053; 1056; 1393; 1312; 1222

a) Для каждой группы найдите наибольшую разность, дисперсию и стандартное отклонение.

b) Объясните результаты.

6. Запишите такое множество из 10 данных, чтобы среднее арифметическое было равно 10, а стандартное отклонение приблизительно 3.

7. На круговой диаграмме представлено распределение учеников получающих образование в городе Баку по районам в 2016 году.



Источник
Азербайджанская Республика
Годовой отчет за 2016 год

a) Найдите среднее арифметическое, наибольшую разность, дисперсию и стандартное отклонение.
b) Какому району соответствует наибольшее стандартное отклонение?
c) Представьте данные в виде гистограммы. К какому типу распространения можно отнести данную информацию?
d) Известно, что количество учащихся Сабунчинского района составляет 59088 человек. Найдите общее количество учеников города Баку.

8. Для следующих данных найдите наибольшую разность, среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение.

a) 11 10 11 7 8 11 6 4 6 7

b) 13 15 13 17 18 13 15 14 13 20 20 18 23 20

9. Представьте, что вы получили приглашение на работу с двух фирм. На одной фирме вам предложили начальную заработную плату 30 манат, при стандартном отклонении 40 манат, на другой - 300 манат, при стандартном отклонении 80 манат. В какой из данных фирм вероятнее получить зарплату в размере 350 манат и более?

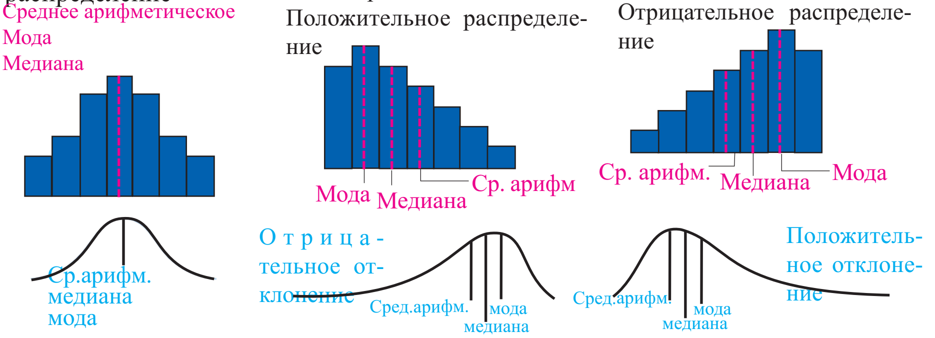
10. Следующие данные отражают заработную плату, случайным образом выбранных работников двух фирм. a) Найдите наибольшую разность, среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение
b) Объясните ситуацию на реальном жизненном примере.

Фирма A: 220 265 290 320 350 230 280 310 180
Фирма B: 210 180 200 210 260 270 240 250 220

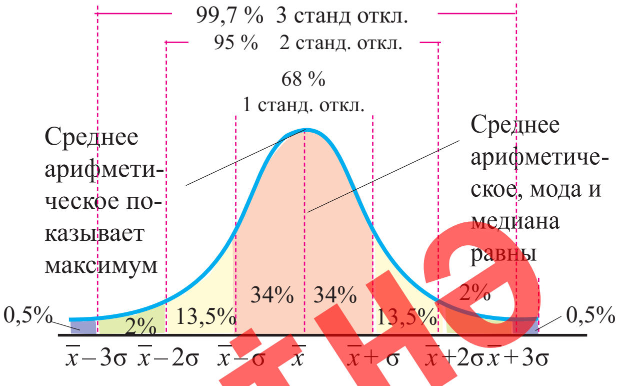
Форма распределения на основе частот

Распределение на основе частот бывает симметричным и асимметричным.

1. Нормальное распределение
2. Распределение с отклонением вправо
Положительное распределение
3. Распределение с отклонением влево
Отрицательное распределение



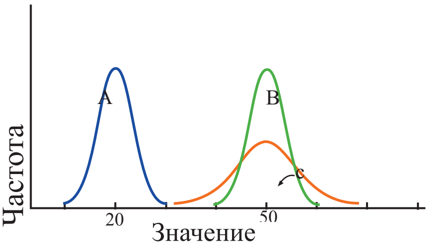
По форме распределения данных можно сформировать мнение о значении среднего арифметического, моды и медианы. При симметричном распределении эти три статистических показателя совпадают. При отклонение вправо (положительное накопление) мода имеет самое маленькое значение, затем следует медиана, а самое большое значение имеет среднее арифметическое. При отклонении влево, среднее арифметическое меньше медианы, медиана меньше моды (самым маленьким является среднее арифметическое).



68% данных входит в первое стандартное отклонение от среднего значения
95% данных входит во второе стандартное отклонение от среднего значения
99% данных входит в третье стандартное отклонение от среднего значения

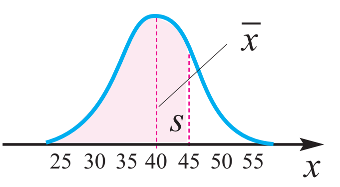
Нормальное распределение по закону 68-95-99 называют просто распределением Среднее число нормальных распределений обычно задано на трех участках стандартного отклонения. Нормальное распределение очень удобно в использовании, так как большая часть (процент) определенных данных находится на одинаковом расстоянии от среднего значения.

Нормальное распределение



В зависимости от среднего значения график нормального распределения может изменяться вправо или влево. При изменении стандартного отклонения, для одних и тех же значений среднего арифметического, график сжимается или растягивается. Например, среднее арифметическое графика В больше среднего арифметического графика А. Для графиков В и С среднее арифметическое одинаково, а стандартное отклонение графика С больше стандартного отклонения графика В.

Пример. Среднее арифметическое совокупности X соответствующее нормальному распределению равно 40, стандартное отклонение 5. Сколько процентов данной совокупности a) меньше 45; b) между 30 и 45?

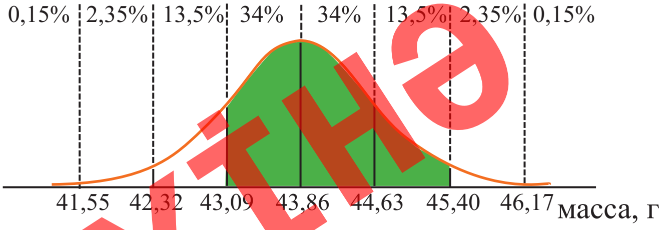


Решение: значение 45 выше среднего арифметического на 1 стандартное отклонение $(\overline{x}+\sigma)$. Значит, $(\overline{x}+\sigma)$расположены слева от всех значений, другими словами, площадь остающаяся левее $(\overline{x}+\sigma)$ под кривой соответствует значениям меньшим *45*. Это приблизительно 84%.

b) значение 30 на 2σ ниже среднего значения и равно $x-2\sigma$, а 45 на 1 стандартное отклонение выше $(\overline{x}+\sigma)$.

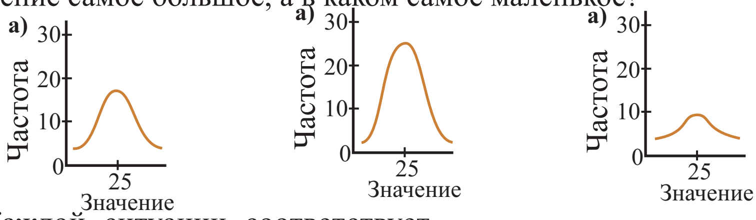
Обучающие задания

1. На рисунке показан график нормального распределения массы яиц нового вида птиц. Средняя масса яйца $\overline{x}$ = 43,86 грамм, стандартное отклонение σ = 0,77(грамм). Представьте информацию о закрашенной части графика.

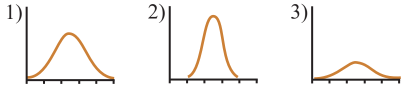


2. Средний балл нормального распределения на испытательном экзамене равен 72 (балла), стандартное отклонение 6 (баллов). Покажите данные:
a) удаленные на 1 стандартное отклонение от среднего значения
b) удаленные на 2 стандартных отклонения от среднего значения
c) удаленные на 3 стандартных отклонения от среднего значения
d) Изобразите кривую, соответствующую нормальному распределению. Покажите каждый интервал в виде процента.

3. 1) В каком нормальном распределении на рисунке, стандартное отклонение самое большое, а в каком самое маленькое?



2) Каждой ситуации соответствует один график. Установите соответствие.



a) Действительная масса пачки чая.

b) Годовая прибыль 16-ти летней молодежи в Азербайджане.

c) Результаты оценивания учащихся по разделу.

4. В одной системе координат постройте кривые нормального распределения. Объясните общие и различные свойства данных графиков.

a) среднее значение 50, стандартное отклонение 10
среднее значение 50, стандартное отклонение 20

a) среднее значение 50, стандартное отклонение 5
среднее значение 40, стандартное отклонение 10

5. Изменение объема одной коробки сока соответствует нормальному распределению.

Проверка показала, что средний объем производимого продукта фирмы A 378 мл, стандартное отклонение 1 мл, средний объем производимого продукта фирмой B также равен 378 мл, а стандартное отклонение 3 мл.

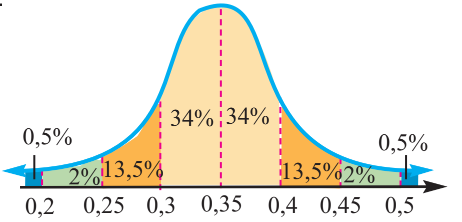
a) Сколько процентов продукта каждой фирмы соответствует объему 375 мл и меньше?

b) Сколько процентов продукта соответствует объему больше 372 мл и меньше 282 мл?

c) На рисунке ниже представлены графики нормального распределения фирм A и B. Представьте информацию о данных в закрашенной части.

6. В результате тестов на координацию, проведенных среди 1200 подростков, было получено соответствующее нормальное распределение, при среднем значении 0,4 секунд и стандартном отклонении 0,05 секунд. Постройте график нормального распределения. a) Про какое количество подростков можно сказать, что их реакция между 0,3 и 0,5 секундами? b) Какова вероятность, что реакция случайно выбранного подростка составляет более 0,5 секунд?

7. На рисунке показаны результаты тестов на координацию, проведенных среди 1800 подростков в виде нормального распределения, при среднем значении 0,35 секунд и стандартном отклонении 0,05 секунд.



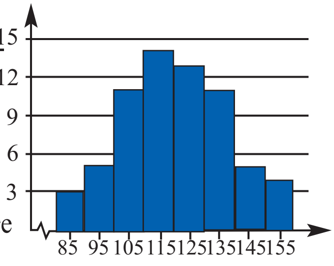
a) Про какое количество подростков можно сказать, что их реакция между 0,25 и 0,45 секундами? b) Какова вероятность, что реакция случайно выбранного подростка составляет более 0,4 секунд?

8. Результаты экзаменов представлены в виде нормального распределения, среднее значение которого равно 70, стандартное отклонение 4,5. Если в экзамене учавствовало 360 человек, для случайно выбранного учащегося найдите вероятность того, что :

a) он окажется среди тех кто набрал 65-80 баллов;
b) он окажется среди тех кто набрал больше 75 или 75 баллов;
c) он окажется среди тех кто набрал меньше 62 баллов.
d) Найдите интервал баллов, которые набрали 90% экзаменующихся.

9. **Задания открытого типа.**

На гистограмме отображена информация о количестве и массе коров, предназначенных на мясо.



a) По гистограмме найдите среднее значение и стандартное отклонение.
b) Постройте кривую нормального отклонения.
c) По кривой нормального распределения,составьте два примера, для которых надо найти вероятность.

10. Информация, о сумме выпавших очков двух зар, представлена в виде таблицы распределения и гистограммы. Покажите вероятность, что гистограмма распределения являться нормальным распределением.

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

a) Вероятность выпадения какой суммы наибольшая? Найдите ее.
b) Чему равна вероятность, что выпадет сумма больше 10?
c) Верно ли, что утверждение, что “наиболее часто выпадает сумма меньшая 8?”

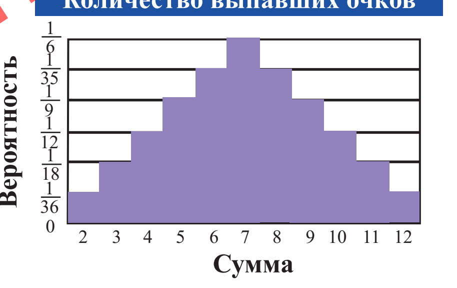
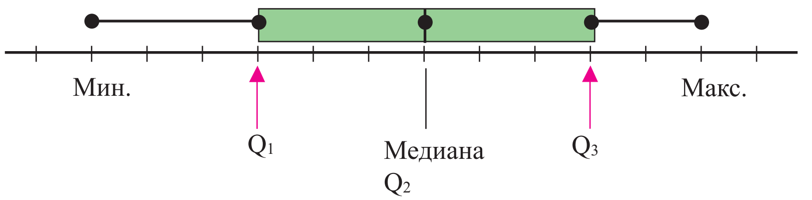


Диаграмма “ящик с усами”

Одним из наиболее удобных графических форм представления статистической информации является диаграмма “ящик с усами” .

Данные разбиваются на 4 части (четверти). Половина данных, 2 средние части,образуют ящик один “ус” которого отражает нижнюю четверть , другой - верхнюю четверть. Также форма графика позволяет наглядно представить наибольшее и наименьшее значение при распределении данных.

Диаграмма “ящик с усами”



На диаграмме “коробка с усами” данные делятся на 4 равные части. Значения, которые делят данные на равные части называются квартиль. Q_1 - 1-ый квартиль, медиана Q_2 - второй квартиль, Q_3 - третий квартиль. Разность третьего и первого квартиля $Q_3 - Q_1$ определяет ящик и охватывает 50 % данных. Часть от значения Q_1 до минимального значения, левый “ус”, от значения Q_3 до максимального значения - правый “ус”. Каждый “ус” отражает 25% данных.

Пример. Ниже представлены баллы, которые набрали 15 работников фирмы на экзамене по нормам безопастности:

13 9 18 15 14 21 7 10 11 20 5 18 37 16 17 .

Постройте диаграмму “ящикс усами”

Решение: 1. Расположим данные в порядке возрастания и найдем медиану Q_2.

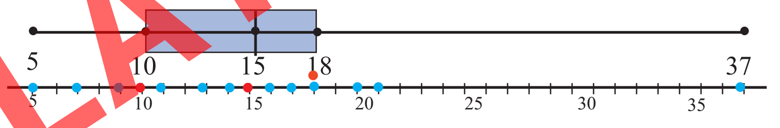
$\underbrace{5\ 7\ 9\ 10\ 11\ 13\ 14}$ 15 $\underbrace{16\ 17\ 18\ 18\ 20\ 21\ 37}$

Q_1 Первый квартиль; Q_2 Медиана; Q_3 Третий квартиль

Разность между третьим и первым квартилем: $Q_3 - Q_1 = 18 - 10 = 8$.

Эта разность образует ящик.

Значит основную часть составляют, те кто набрал от 10 до 18 баллов. Наименьшее значение 5, наибольшее значение 37. Расстояния от ящика до этих значений образуют “усы”.



По диаграмме видно, что половина из 15 человек набрали 10-18 баллов. 25% меньше 10 и 25% больше 18 баллов.

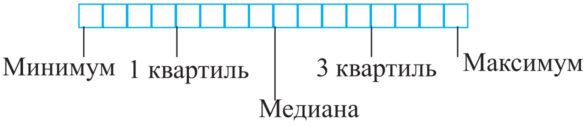
Диаграмма “ящик с усами”

Обобщим шаги определения и построения диаграммы “ящик с усами” на примере.

Из заданной совокупности определяют 5 данных:
Медиану Q_2, квартиль Q_1, с данными значения которых меньше медианы и квартиль Q_3, с данными значения которых больше значения медианы, наибольшее и наименьшее значение.

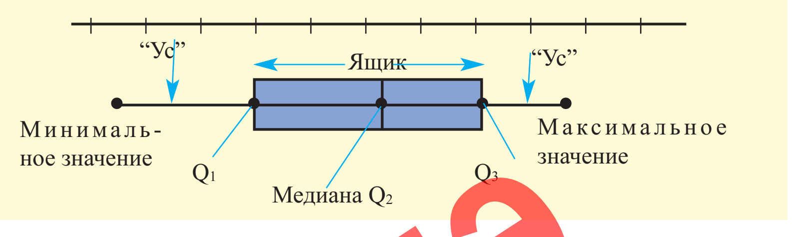
5 данных
- Наименьшее значение
- Нижняя получасть: Q_1
- Медиана: Q_2
- Верхняя получасть: Q_3
- Наибольшее значение

Схематическое представление диаграммы “ящик с усами”



Шаги построения диаграммы ящик с усами”

1. Проводится горизонтальная прямая.
2. В зависимости от диапазона измененная данных проводится деление.
3. На прямой отмечают 5 данных – Q_1,Q_2,Q_3, минимум, максимум.
4. От Q_1 до Q_3 рисуется ящик.
5. Рисуем “усы” от Q_1 до минимального значения и от Q_3 до максимального значения.



Пример. Ниже представлены данные, возраста участниц женской параолимпийской команды по волейболу 24, 30, 30, 22, 25, 22, 18, 25, 28, 30, 25, 27. Представьте данные в виде диаграммы “ящик с усами”.

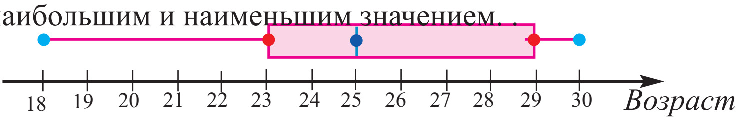
Решение: 1. Расположим данные и найдем медиану и квартили.

Наименьшее значение → 18 22 22 24 25 25 25 27 28 30 30 30 ← Наибольшее значение

Первый квартиль **Q_1= 23** Медиана **Q_2 = 25** Третий квартиль **Q_3= 29**

2. Изобразим числовую ось и отметим эти следующие данные.

3. При помощи разности квартилей $Q_3 – Q_1 = 29 – 23 = 6$ нарисуем ящик и разделим его на две части (при помощи медианы). Соединим ящик с наибольшим и наименьшим значением. .



4. Представление диаграммы. Возраст 50% баскетболистов между 23-29 годами, 25% меньше 23 лет, 25% - больше 29 лет. Длинными или короткими являются “усы” ящика показывает близко ли или далеко расположены друг от друга данные внутри 25% - го интервала. Например, в левый “ус” длиннее, правый - короче. Так как в 25%-интервале значения изменяются между 18-23, а в левом “усе” мы встречаем только два значения 29-30.

Обучающие задания

1. Для каждой из следующих диаграмм “ящик с усами” определите данные:

a) наименьшее значение

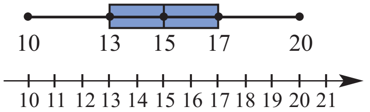
b) наибольшее значение

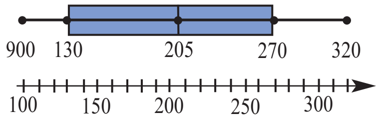
c) первый квартиль, Q_1

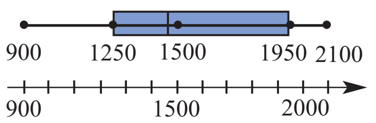
d) медиану

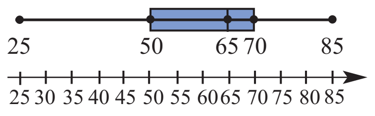
e) третий квартиль Q_3

f) разность квартилей $Q_3 – Q_1$.





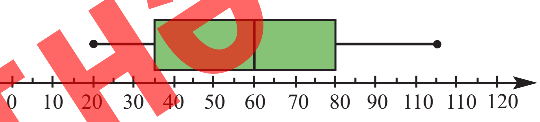




2. Представьте данные в виде диаграммы “ящик с усами”и объясните на примере реальной жизненной ситуации.

206, 173, 198, 241, 179, 236, 181, 231, 215, 222, 228

3. На диаграмме “ящик с усами” представлены результаты оценивания класса. Максимальный балл 120.



a) Сколько баллов соответствует максимальному и минимальному результату?

b) Каким результатам соответствует медиана?

c) Сколько баллов составляет наибольшая разность?

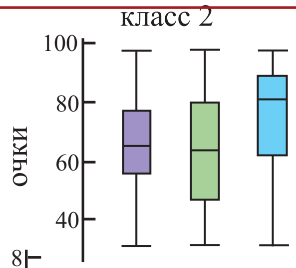
d) Сколько процентов класса набрали 35 и более баллов?

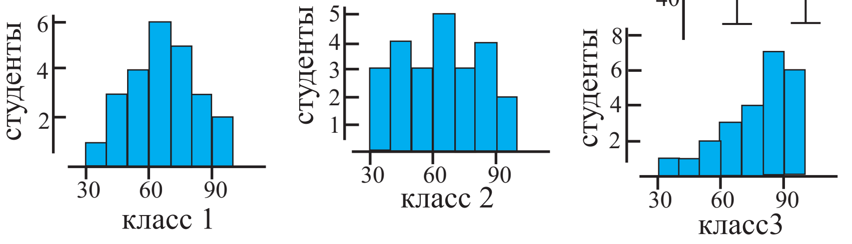
e) Сколько баллов составляет разность квартилей? $(Q_3 – Q_1)$

f) В каком интервале происходит изменение 25% набравших максимальный балл? Принадлежит ли ученик, набравший 63 балла к 25 % набравшим наибольшее количество баллов?

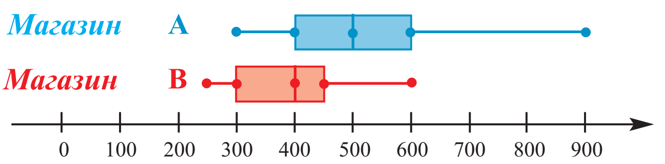
l) Объясните длину от начала правого до конца левого “уса” на реальном примере.

4. Установите соответствие между диаграммой”ящик с усами” и гистограммой.





5. На диаграмме показана цена телевизора. Создайте презентацию, о значении цены телевизора.



Данные которые сильно отличаются от основных данных совокупности называются выбросами. Их можно определить по тому, где они расположены: ниже или выше квартиля. В этом случае выбросом считается, значение в 1,5 раза больше или меньше разности $Q_3 - Q_1$. Например, в рассмотренном нами примере нижний квартиль 23, верхний квартиль 29, разность квартилей 6. Тогда значения $23 - 1{,}5 \cdot 6 = 14$ и $29 + 1{,}5 \cdot 6 = 38$ считаются граничными значениями. Все значения, большие данных называются выбросами.

6. Найдите пограничные значения данных, если медиана равна 32, значение первого квартиля 24, третьего квартиля 43. Проверьте являются или нет значения 63, 20, 12, 53 выбросами.

7. Представьте диаграмму ствол - листья, содержащую данные о возрасте 45 Президентов Америки в виде диаграммы “ящик с усами”.

4	2 3 6 6 7 7 8 9 9
5	0 0 1 1 1 1 2 2 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7 7 7 8
6	1 1 1 1 2 4 4 5 8 9
7	0

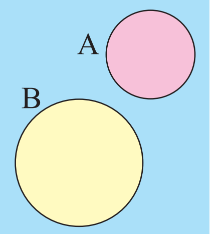
Самым пожилым президентом является 70 -ти летний Дональд Трамп, а самым молодым Теодор Рузвельт, которому было 42 года. Можно ли считать их возраст выбросом?

Мы всегда можем высказать мнение о каком-либо событии. О некоторых событиях мы можем сделать более логические выводы. Например, высказать мнение о температуре воздуха на завтра, исходя из сезона. Однако, существует ряд событий, которые не поддаются логике. Например, событие, что вы в 8 часов вечера сможете купить в магазине свой любимы вид хлеба, зависит от случая.
Но проведя многократные наблюдения, вы сможете оценить данное событие.
Теория вероятности в математике дает возможность оценивать случайные события и создать свое мнение о событии.
Событие которое является результатом опыта или наблюдения называется **случайным событием.** Результат случайного события определяется **экспериментом**. Результат каждого события называется **элементарным событием(*E*)**. Все результаты производимых опытов называются **пространством элементарных событий(*U*)**.

Математическую модель теории вероятности впервые использовали французские ученые, для уменьшения риска проигрыша в игре и увеличении шанса выигрыша. В первую очередь они стали исследовать различные результаты равновероятных событий. Например, вероятности появления каждой из 52 карт колоды одинаковы. В этом случае оценить математическую вероятность очень легко.
Вероятностью события А называется отношение количества благоприятных исходов события к количеству всех возможных исходов:

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных событий}}{\text{количество всех возможных событий}}$$

Если событие при испытании, опыте или наблюдении обязательно произойдет, то оно называется достоверным, а если не произойдет, то оно называется невозможным событием. Вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного события равна 0.
Если во время эксперимента для события **A** получаются результаты не входящие в событие А, то это событие называется противоположным или дополнением события А и обозначается как $\mathbf{A}^C$.
Пи решении задач, связанных с вероятностью надо обратить внимание на следующее:
1. Для какого-либо случайного события **A** справедливо следующее $0 \le P(\mathbf{A}) \le 1$.
2. Сумма всех возможных элементарных событий при эксперименте равна 1.
3. Справедлива формула $P(\mathbf{A}) = 1 - P(\mathbf{A}^C)$.



Вероятность несовместных событий. События не имеющие общих результатов называются несовместными. Вероятность двух несовместных событий A или B равна сумме вероятностей каждого события и записывается как P(A или B) или $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Это правило называется правилом сложения.

Пример. В мешке шары желтого, красного и белого цветов. Вероятность, что из мешка вытащат белый шар 0,25, красный шар - 0,3. Найдите вероятность, что вытащенный шар желтый.

Решение: если из мешка вытащить шар, то вероятность того, что он будет красным или белым равна: P(кр. или бел.) = 0,25 + 0,30 = 0,55 или B. Появление желтого шара означает наступление события A или B.Значит, P(желт.) = P (кр. или бел.)

Вероятность наступления событий A или B с наступлениями других событий равна 1. Тогда P(желт.) = 1 – P (кр. или бел.) = 1 – 0,55 = 0,45. Эти события несовместные события.

Обучающие задания

1. Запишите пространство элементарных событи для каждого испитания:

a) Одновременное бросании двух монет.

b) В семье 3 мальчика или девочки.

2. По информации данной комитетом по защите прав производителей в первый год эксплуатации новых автомобилей ремонта требуют: 1 раз - 17%, 2 раза - 7%, 3 и более раз - 4%. По этим данным, для автомобиля выбранного случайным образом, найдите вероятность, что:

a) вообще не было необходимость ремонта

b) самое больше ремонтировался 1 раз

c) хотя бы один раз пришлось обратиться для ремонта.

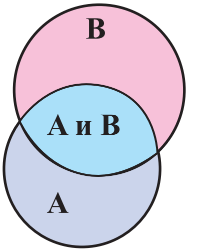
3. Группы крови обозначаются следующим образом O (I группа), A (II группа), B (III группа) и AB (IV группа). По данным организации красного креста при авариях в городе 45% жителей имеют группу крови O, 40% - A, 11% - B, остальные относятся к группе AB.

1) Найдите вероятность того, что добровольный донор имеет группу крови: a) A и B ; b) A или B ; c) O .

2) Найдите вероятность того, что один донор имеет группу A, другой группу B.

Формулы нахождения вероятности

Вероятность двух совместных событий. События, имеющие общие исходы называются совместными. Рассмотрим, правило сложения вероятностей на следующем примере. В мешке имеются карточки с номерами 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Пусть,требуется найти вероятность того, что при вытаскивании из мешка одной карточки на ней окажется нечетное число или число меньшее 6. Событие A является событием появления нечетного числа,а событие B появление числа меньшего 6. Покажем это на диаграмме Венна.



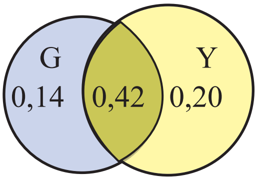
По правилу сложения повторяющиеся события должны учитываться только один раз. В рассматриваемом примере фаза элементарных событий будет равна $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. По определению $C = A \cup B$, тогда вероятность события B равна $P(C) = 0{,}7$. В общем случае, справедлива формула сложения для любых событий A и B

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Пример. 56% студентов института проживают в студенческом городке, а 62% студентов только обедают, а 42% и обедают и проживают. Найдите вероятность, что случайно выбранный студент:

a) Не проживает в студенческом городке и не обедает;

b) Проживает в городке, но не обедает.



Решение: пусть G ={студенты проживающие в городке},

Y ={ студенты обедающие в городке}.

Из диаграммы видно, что часть пересечения равна $P(G \cap Y) = 0{,}42$.

Зная, что $P(G) = 0{,}56$ найдем $P(G \cap Y^C) = 0{,}56 - 0{,}42 = 0{,}14$. Тогда $P(G^C \cap Y) = 0{,}62 - 0{,}42 = 0{,}20$; Сумма $0{,}14 + 0{,}42 + 0{,}20 = 0{,}76$ показывает, что вероятность того, что выбранный студент и проживает, и обедает в городке. Тогда вероятность, что студен не проживает и не обедает в городке равна $P(G^C \cap Y^C) = 1 - 0{,}76 = 0{,}24$.

Вероятность независимых событий. Вероятность независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

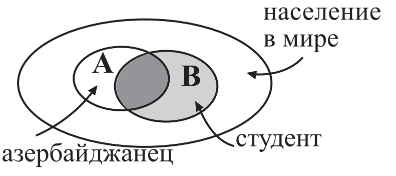
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Это правило справедливо и для числа событий больше 2.

Пример.Фирма по обеспечению продуктами ежедневно должна доставлять в столовую свежий хлеб. Заведующий столовой оценивает вероятность этого события как 0,85. Если вы 4 дня подряд будете завтракать в данной столовой, то вероятность что каждый день вам подадут свежий хлеб равна $0{,}85 \times 0{,}85 \times 0{,}85 \times 0{,}85 = 0{,}522$.

Формулы для вычисления вероятности

Условная вероятность. Если вероятность вычисляется по результатам других событий, то она называется условной вероятностью. Например, если вероятность того, что ребенок будет кашлять в какой-либо из дней равна 5%, то вероятность того, что он начнет кашлять при простуде равна 75%. Здесь вероятность кашля изменяется при простуде. Рассмотрим другой пример. Пусть из всех жителей в мире выбирается один. Какова вероятность, что он является студентом азербайджанцем? Событие A показывает, что человек азербайджанец, событие B - что он студент.



Как видно, вероятность этих события очень мала. Тогда какова вероятность того,что он и студент,и азербайджанец? Рассмотрим условную вероятность на более простом примере.

Условную вероятность удобно объяснить при помощи таблицы распределения информации или разветвляющейся диаграммы. Так как таблица частот и разветвляющаяся диаграмма отражает фазы вероятностей.

Пример. 478 школьников, 1/3часть которых живет в селе, 1/3 - за городом и 1/3 - в центре города, попросили ответить на вопрос “ **Что для вас важнее?” , выбрав один из ответов:**

Стать известным

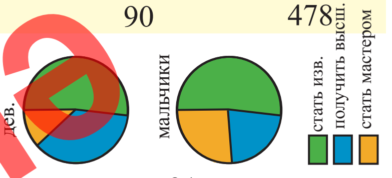
Получить высшее образование

Стать мастером

Результаты опроса представлены в таблице:

	Стать известным	Высшее образование	Стать мастером	**Всего**
Мальчики	117	50	60	227
Девочки	130	91	30	251
Всего	247	141	90	478

Вероятность,что случано выбранный ученик из участников опроса -девочка.



$$P(\text{дев.}) = \frac{251}{478} = 0{,}525$$

вероятность, что девочка и хочет стать известной $P(\text{изв./дев.}) = \dfrac{91}{478} = 0{,}190$,

вероятность, что хочет стать мастером $P(\text{мастер}) = \dfrac{90}{478} = 0{,}188$

Изменится ли вероятность, что хочет стать мастером, если выбрать одну девочку? $P(\text{мастер/дев.}) = \dfrac{30}{251} = 0{,}120$

Вероятность, что хочет стать мастером один из мальчиков. $P(\text{мастер/мальчик}) = \dfrac{60}{227} = 0{,}264$

Формулы для вычисления вероятности

Если вероятность события B зависит от вероятности события A, то вероятность события B записывается как P(B/A) и читается как ***вероятность события A, при условии наступления события B.***

Вычислим заново некоторые вероятности, которые были вычислены выше. Например,

$$P(\text{мастер/дев}) = \frac{30/478}{251/478} = \frac{30}{251}$$

Значит, $$P(\text{мастер/дев}) = \frac{P(\text{дев. и мастер.})}{(\text{дев.})}$$ или

$$P(\text{дев./выс. обр. }) = \frac{91/478}{141/478} = \frac{91}{141}$$

Значит, $$P(\text{дев./выс. обр. }) = \frac{P(\text{ высш. обр и дев.})}{P(\text{выс.обр.})}$$

Обобщая полученные примеры, запишем формулу условной вероятности.

$$P\,(B/A) = \frac{P\,(A \text{ и } B)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P\,(B/A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(A)}$$

Пример. В семье два ребенка. Если один из них мальчик, то найдите вероятность, что мальчиками окажутся оба ребенка.

Решение: введем обозначения мальчик - o, девочка - q. Найдем фазу элементарных событий S = {oo, oq, qo, qq}и обозначим через E событие, что оба ребенка мальчики, а через F - событие, что хотя бы один ребенок мальчик. Тогда,E = {oo}, F = {oo, oq, qo}, $E \cap F$ = {oo}

$$P(F) = \frac{3}{4} \quad P(E \cap F) = \frac{1}{4} \quad P\,(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Формула условной вероятности не связана с зависимостью или независимостью событий. Любую сложную вероятность можно вычислить по данной формуле.

Вычисление вероятности зависимых событий.

Пример. В общежитии студенческого городка на 3 этаже расположены самые комфортабельные комнаты, 3 из которых пустые. Всего , а потом общежитии 12 комнат и студенты, чтобы получить право занять комнату, тянут номера. Сначала номер вытянул Эльмир, а затем его другом. Какова вероятность того, что они оба попадут на 3-й этаж. .

Решение: найдем вероятность, что и Эльмир и его друг попадут на 3 этаж. Понятно, что номер, который вытащил Эльмир не возвращается, поэтому его друг будет выбирать уже из 11 номеров. Вероятность, что Эльмир попадет на 3 этаж равна $\frac{3}{12}$. Если Эльмир получит комнату, которую он хотел, то шанс получить комнату его другу будет равен $\frac{2}{11}$, в противном случае шанс равен $\frac{3}{11}$. Значит, одно событие может увеличивать или уменьшать шанс другого события. Такие события называются зависимыми.

А, можно ли найти вероятность, что и Эльмир и его друг попадут в одну комнату на 3 этаже? Здесь используем формулу условной вероятности.

$$P\,(B/A) = \frac{P\,(A \text{ və } B)}{P(A)}, \qquad P(A \text{ и } B) = P(A) \times P(B\,/\,A),$$

$$P(El. \text{ və } D) = P(E) \times P(D\,/El.) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} = 0{,}045 \text{ или } 0{,}068.$$

Известно, что формула умножения P(A и B) = P(A) × P(B) справедлива для независимых событий. Формула условной вероятности справедлива как для зависимых так и для независимых событий. Если события независимы, то P(B) = P(B/A). Т.е событие не влияет на вероятность события B. При помощи этого равенства, также можно устанавливать зависимыми или независимыми являются события.

Обучающие задания

1. В семье двое детей. Если известно, что оба ребенка девочки, то найдите вероятность, что: a) младший ребенок девочка; b) одна девочка

2. 70 % детей, которые обращаются к врачу имеют жалобы на озноб, а 30% на боль в горле. Найдите вероятность, что у случайно выбранного ребенка и болит горло и озноб.

3. Пусть вероятность того, что какой-либо человек доживет до 80 лет равна P (B) = 0,3 90, а до 90 лет P (A) = P (A ∩ B) = 0,2.
a) Найдите вероятность, что человек доживший до 80 лет, доживет до 90 лет.b) Если вероятность P(B/A) равна 1, то обоснуйте это предложение и объясните на примере.

4. Зара брошена 3 раза. При этом получились следующие события:
A : на каждом третьем броске выпадает 4 очка; **B :** каждый первый бросок дает 6 очков, каждый второй 5 очков. Найдите вероятность события A при условии события B.

5. Группа ученых подготовила таблицу вероятности заболеваний холестерина и кровяного давления или и того и другого.
Согласно условию для случайно выбранного человека найдите вероятность:
a) обоих заболеваний
b) кровяного давления
c) у человека с повышенным давлением также повышен холестерин
d) зная, что в крови повышен холестерин, повышено и давление

		Давление	
		Высокое	Норма
Холестерин	Высокий	0,11	0,21
	Норма	0,16	0,52

6. 2% изготавливаемых на фирме колес для автомобиля имеют дефект. Найдите вероятность, что из 4 купленных вами колес данной фирмы, хотя бы одно будет иметь дефект.

Обобщающие задания

1. Для заданной совокупности найдите среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение.

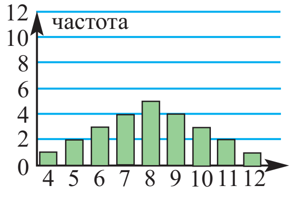
1. 11 10 8 4 6 7 11 6 11 7

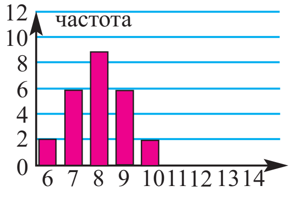
2. 13 23 15 13 18 13 15
14 20 20 18 17 20 13

3. 15 8 12 5 19 14 8 6 13

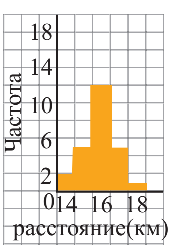
4. 24 26 27 23 9 14 8
8 26 15 15 27 11

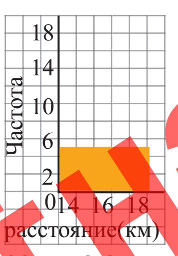
2. На графиках ниже данные распределены симметрично.
а) Определите при помощи вычислений, для каких статистических данных стандартное отклонение имеет большее значение.
b) Для каждого случая найдите среднее арифметическое и стандартное отклонение.
c) Изобразите диаграмму нормального распределения.

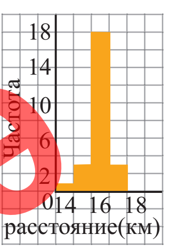




3. Не прибегая к вычислениям, выскажите свое мнение о том, на каком из графиков стандартное отклонение имеет большее значение

a)


b)


c)


4. Продукты в магазине расфасовывают в вакуумные упаковки. Срок хранения таких продуктов в магазине, соответствует нормальному распределению в среднем равным 180 суткам и стандартному отклонению равному 30 суткам. Время хранения скольких продуктов в процентах:
а) между 150 суток и 210 суток
b) между180 сутками и 210 суток;
c) менее 90 суток;
d) более 210 суток?

4. В мешке 10 черных и 5 белых шаров. Из него, не глядя, вытаскивают два шара подряд, не возвращая их на место. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? .

5. Результаты опроса о том, сколько времени в сутки они смотрят телевизор, среди 28 человек, представьте в виде диаграммы “ящика с усами”

2	4	3	1	5	7	1	4	3	2	6	4	5	5
2	0	3	5	9	4	5	2	1	3	6	7	2	4

Убедитесь, что 75 % не смотрят телевизор больше нескольких часов
Сколько процентов смотрят телевизор более 4-х часов?
Какова вероятность того, что случайно выбранный из опрошенных людей человек не смотрит телевизор более 2- х часов?

6. В школе 1000 учащихся, 430 из которых - девочки. !0% девочек усатся в 8 классе. Какова вероятность, что случайно выбранный ученик является девочкой, которая учится в 8 классе?

7. Еженедельная заработанная плата 100 случайным образом выбранных работников фирмы по производству пластиковых игрушек, представлена в виде таблицы частот.

Классы	Частота
150 – 158	5
159 – 167	16
168 – 176	20
177 – 185	21
186 – 194	20
195 – 203	15
204 – 212	3

a) Информацию из таблицы частот представьте в виде кривой нормального распределения.
b) Найдите вероятность, что заработная плата случайно выбранного из данных 100 человек работника будет в интервале более 170 манат.

8. Найдите вероятность того, что при бросании двух зар, на верхней грани одного из них будет 3 очка, а другого 5 очков.

9. В ящике находятся карточки на каждой из которых записана одна из букв Азербайджанского алфавита. Из ящика достают случайную карточку . Найдите вероятность того, что:
a) P(2 гл.) b) P(2 согл.) c) P(1 гл., 1 сог.)

10. По следующим данным найдите форму распределения.

a) среднее арифметическое = 35 медиана = 40 мода = 45
a) среднее арифметическое= 50 медиана = 51 мода = 38

11. При нормальном распределении среднее арифметическое равно 27, стандартное отклонение 5. Если случайно выбрать одно значение, то какова вероятность,что оно будет находится в интервале:
a) между 22 и 32 b) как минимум 37
c) как максимум 32 d) между 27 и 37

Иррациональные уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком радикала (или возведенную в степень с дробным показателем), называется иррациональным уравнением.

Пример. $\sqrt[3]{x+2} - x = 3; \qquad \sqrt{x-1} = 5$

Обычно, для решения рационального уравнения применяют возведение в степень. При этом надо иметь ввиду следующее:

- Решение иррационального уравнения ищут на множестве действительных чисел.
- Для радикалов четной степени берут арифметические значения, для радикалов нечетных степеней - действительные значения.
- Если возвести обе части уравнения в нечетную степень, то получим эквивалентное уравнение.
- Если возвести обе части уравнения в четную степень то множество значений нового уравнения может расшириться. В результате некоторые из полученных корней не будут удовлетворять уравнению. Поэтому значения переменных, полученные при возведении в четную степень надо проверять.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x-3} + x = 5$.

Решение: $\sqrt{x-3} = 5 - x$

$x - 3 = (5 - x)^2$

$x - 11x + 28 = 0$

$x_1 = 4, x_2 = 7$

Уединим радикал, возведем обе части в квадрат, упростим и решим.

Проверка. при $x = 4$ получим $\sqrt{4-3} + 4 = 5;\ 5 = 5$

при $x = 7$ получим $\sqrt{7-3} + 4 = 5;\ 9 \neq 5$

$x = 7$ не удовлетворяет уравнению. Ответ: $\{4\}$

Обучающие задания

1. Решите уравнения.

a) $\sqrt{x+3} - 3 = 1$ b) $\sqrt{3t+4} + 2 = 1$ c) $\sqrt{x^2-7} - 1 = 2$

d) $\sqrt[3]{1-2x} + 1 = 4$ e) $\sqrt[4]{x^2+16} = \sqrt{5}$ f) $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x+2}} = 3$

g) $\sqrt{x-2} + x = 8$ h) $\sqrt{x^2-x-4} = x + 2$ i) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

2. Решите уравнения различными способами.

a) $\sqrt{x^2+4x+4} = 3$ b) $\sqrt{x^2-2x+1} = 2x + 1$ c) $\sqrt{x^2+6x+9} = x + 5$

3. Сколько действительных корней имеет уравнение?

a) $(x^2 - 1)\sqrt{x+5} = 0$ b) $(x^2 - 4)\sqrt{x-1} = 2x^2 - 8$ c) $\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-4} = 3$

Иррациональные неравенства

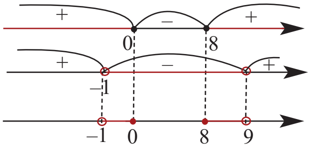
Неравенство, содержащее переменную под знаком радикала называется иррациональным неравенством. Решения иррационального неравенства ищут на множестве действительных чисел и используя свойства приводят к решению системы рациональных неравенств.

Пример. Решите неравенство $\sqrt{x^2-8x}<3$.

Решение: решение данного неравенства на множестве допустимых значений неравенства, т.е. при условии, что $x^2-8x\geq 0$, выполняется возведем обеих частей неравенства в квадрат $x^2-8x<9$. Другими словами сводится к решению следующей системы: $\begin{cases} x^2-8x\geq 0 \\ x^2-8x<9 \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы методом интервалов и найдем пересечение полученных решений:

$\begin{cases} x^2-8x\geq 0 \\ x^2-8x<9 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x(x-8)\geq 0 \\ (x-9)(x+1)<0 \end{cases}$



Ответ: $(-1{:}0]\cup[8;9)$

Пример: Решите неравенство $\sqrt{x+3}>x+1$.

Решение: для знака правой части рассмотрим два случая.

1) если $x+1<0$, то условию неравенства $x+3\geq 0$ удовлетворяют все x. Значит надо решить систему,

$$\begin{cases} x+1<0 \\ x+3\geq 0 \end{cases}$$

Ее решением является промежуток $[-3;-1)$.

2) если $x+1\geq 0$, то возведя обе части неравенства в квадрат получим систему:

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+3>(x+1)^2 \end{cases}$$

Решением системы является промежуток $[-1;1)$.

Решением данного неравенства будет $[-3;-1)\cup[-1;1)=[-3;1)$.

Обучающие задания

4. Решите неравенства.

1) $\sqrt{x-3}\geq 2$ 2) $\sqrt{2t-3}>1$ 3) $\sqrt{2x+3}<3$ 4) $\sqrt{x-4}\leq 2$

5) $\sqrt{x^2+15x}>4$ 6) $\sqrt{x^2-3x}\leq 2$ 7) $\sqrt[3]{x^2-2x}>2$ 8) $\sqrt[4]{x^2-3x}<\sqrt{2}$

9) $(x^2-4x)\cdot\sqrt{3-x}\leq 0$ 10) $\sqrt{x^2-6x+8}\geq -1$ 11) $\sqrt{x^2-x-2}>0$

12) $\sqrt{x^2-6x+9}\leq 2$ 13) $\sqrt{x^2-4x+3}>3$ 14) $\sqrt{x^2+18}\geq 2-x$

15) $\sqrt{24-5x}<x$ 16) $\sqrt{x+2}>x$ 17) $\sqrt{x^2-2x}>1-x$

Система показательных уравнений

Решение системы показательных уравнений не отличается от решения систем других уравнений. Здесь также применяются метод замены, алгебраического сложения, графический метод и т.д..д.

Пример 1: Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$

Решение: данную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3 \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases}$$

Приравняв показатели степеней каждого уравнения, получим систему линейных уравнений. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ Решением данной системы является пара (2;1).

Пример 2: Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$

Решение: из первого уравнения можно записать $x = y + 1$. Подставим полученное выражение во второе уравнение вместо y. Получим уравнение $2^{y+1} + 2^y = 12$. Отсюда $2^y \cdot (2 + 1) = 12$ или $2^y = 4$.

Тогда $y = 2$, а $x = 2 + 1 = 3$. Таким обрезом, решением данной системы является пара (3; 2).

Пример 3: Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{y-x} - 5^y = 3 \\ 2^{y-x} + 5^{y-1} = 9 \end{cases}$

Решение: первое уравнение системы умножим на (–1) и почленно сложим со вторым уравнением. Получим уравнение $5^y + 5^{y-1} = 6$. Тогда можно написать,что $5^y(1 + \frac{1}{5}) = 6$. Отсюда найдем, что $y = 1$. Подставим это значение в первое уравнение. Получим

$$2^{1-x} - 5 = 3; \quad 2^{1-x} = 8; \quad 1 - x = 3; \quad x = 2$$

Значит, решением данной системы является пара (–2;1).

Обучающие задания

1. Решите системы уравнений.

a) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ 5^{x+3y} = 0{,}2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18 \\ 2^y \cdot 3^x = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^x - 2^{x+y} = 1 \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x-y} = 128 \\ 3^{3x+2y-3} = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3^x - 3^y = 8 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$

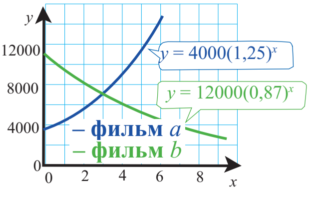
f) $\begin{cases} 2^{y-x} - 5^y = 3 \\ 2^{y-x} + 5^{y-1} = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 36 \\ x - y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2^x + 3^{y-1} = 17 \\ 2^{x+2} - 3^y = 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 10 \\ x - y = 1 \end{cases}$

2. График на рисунке показывает зависимость количество (x) зрителей, посмотревших в 2004 году два различных фильма. Запишите мнение по поводу того, как изменяются графики в зависимости от количества зрителей.



Система логарифмических уравнений

При решении логарифмических систем также используют способ замены, алгебраического сложения и т.д. и свойства логарифмических функций. Рассмотрим это на примерах:

Пример. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

Решение: понятно, что $x > 0$ и $y > 0$.

Из первого уравнения системы получим $y = 6 - x$, из второго уравнения можно написать $\log_2 (xy) = 3$ или $xy = 8$.

Таким образом, получаем систему, $\begin{cases} y = 6 - x \\ xy = 8 \end{cases}$

Подставим $y = 6 - x$ в уравнение $xy = 8$. Тогда получим квадратное уравнение $x^2 + 6x + 8 = 0$. Его корнями являются числа $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Подставим их в $y = 6 - x$,получим $y_1 = 4$, $y_2 = 2$. Решением данной системы является пара (2; 4) и (4;2).

Пример. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 1 \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$

Решение: Sиз первого уравнения системы имеем $x - y = 2$. Выполним замену: во второе уравнение $2^{2+y} \cdot 3^{y+1} = 72$ вместо x подставим $x = 2 + y$. Тогда можно записать $3^{y+1} \cdot 2^{y+1} = 36$. Отсюда $6^{y+1} = 6^2$ и получим, что $y = 1$. Тогда $x = 3$. Таим образом, решением данной системы является пара (3; 1).

Обучающие задания

1. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_2 (x + y) = 3 \\ \log_4 (x - y) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 1 \\ \log_3 (xy) = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4 \\ \lg x - \lg y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 324 \\ \log_2 (x - y) = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3^{x+1} \cdot 2^y = 24 \\ \log_3 (y - x) = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log_2 x + 2^{\log_2 y} = 5 \\ y^x = 625 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 12 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

Решение систем тригонометрических уравнений

Рассмотрим решение системы уравнений, одно из которых алгебраическое, а другое уравнение - тригонометрическое.

Пример. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ sinx + cosy = 0 \end{cases}$.

Решение: Выполним следующую замену. Во второе уравнение из первого вместо y подставим $y = \dfrac{\pi}{2} - x$. Тогда $sinx + sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = 0$.

По формулам приведения получим $sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = cosx$

$$sinx + cosx = 0$$

т.е. однородное уравнение. Разделим каждый член на $cosx$. Получим $tgx + 1 = 0$.

Решением уравнения $tgx = -1$ является $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ $(n \in Z)$ Выполним замену $y = \dfrac{\pi}{2} - (-\dfrac{\pi}{4} + \pi n)$, т.е. $y = \dfrac{3}{4}\pi - \pi n$, $(n \in Z)$.

Таким образом, решением данной системы будут

$$(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3}{4}\pi - \pi n) \ (n \in Z).$$

Как видно, множество целых значений данной системы зависит только от одного параметра n.

Обычно, решение систем тригонометрических уравнений с двумя переменными зависит от двух параметров.

Пример. Решите систему уравнений $\begin{cases} sinx - cosy = 1 \\ sin^2x - cos^2y = 1 \end{cases}$

Решение: разложим левую часть второго уравнения на множители и учитывая первое уравнение получим следующую систему

$$\begin{cases} sinx - cosy = 1 \\ sinx + cosy = 1 \end{cases}$$

Здесь $sinx = 1$, $cosy = 0$.

Решениям данных уравнений соответствуют,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z$$

Тогда решение системы будет

$$(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k) \ (n,k \in Z).$$

Система тригонометрических уравнений

Обучающие задания

1. Решите систему тригонометрических уравнений.

a) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$

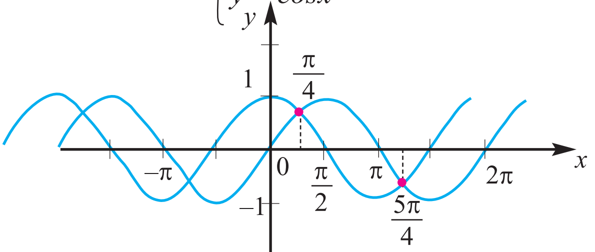
c) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ tgx + tgy = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \cos(x - y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \sin(x + y) = 1 \\ \sin(y - x) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

i) $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \sin y \cos x = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ j) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4} \\ tgx\,tgy = 3 \end{cases}$

2. a) По графику, запишите решение системы $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases}$ на интервале $0 < x < 2\pi$



b) Решение системы $\begin{cases} y = \sin x - 1 \\ y = \cos x + 1 \end{cases}$ представьте в виде графика, как показано в пункте а. Имеет ли система решение?

c) Решение системы $\begin{cases} y = \sin 2x \\ y = \cos x \end{cases}$ представьте в виде графика, как показано в пункте а и запишите его на интервале $0 < x < 2\pi$

3. Резините систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1{,}5 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1{,}25 \end{cases}$ выполнив замену $\sin x = u$, $\cos y = v$

4. Покажите, что решение системы $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2} \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$ можно привести к решению системы $\begin{cases} x + y = 2\pi n \pm \pi, \ n \in Z \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$ линейных уравнений

Обобщающие задания

1. Зная, что $\sin x\,(\cos y + 2\sin y) - \cos x\,(2\cos y - \sin y) = 0$, найдите $\operatorname{tg}(x + y)$.

2. При решение тригонометрических уравнений выразите переменные x действительными числами, переменные θ градусами.

$\sin 2\theta + 2\cos\theta = -2,\ 0° \le \theta \le 360°$

$\cos 2\theta + \cos\theta = 0,\ 0° \le \theta \le 360°$

$\cos 2\theta + \sin^2\theta = 0,\ 0° \le \theta \le 360°$

$\cos x = \operatorname{ctg} x,\ 0 \le x \le 2\pi$

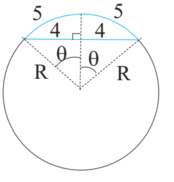
$2\sin^2\theta + \sin 2\theta = 0,$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta,$

$\operatorname{tg} x = -2\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

$4\cos^2 2x - 4\cos 2x + 1 = 0,\ 0 \le x \le 2\pi$

3. Найдите длину дуги окружности, стягиваемой хордой, если радиус равен 5 см, а хорда 8 см. Результат округлите до десятых.



4. Выполните деление и найдите остаток.

$(x^3 + 3x^2 - 67x + 27) : (x + 10)$

$(x^3 + 8x^2 - 8x - 2) : (x - 1)$

$(3m + 4 - 11m^2 + 5m^3) : (4 + 5m)$

$(54n^3 + 36n^2 + 54n - 16) : (9n - 3)$

5. Проверьте является или нет двучлен множителем многочлена.

1) $(n^5 + 6n^4 + 7n^2 + 33n - 54) \div (n + 6)$

2) $(x^5 - 3x^4 - 78x^3 + 84x^2 - 31x - 88) \div (x - 10)$

3) $(b^5 + 8b^4 - 11b^2 + 10b - 8) \div (b - 1)$

6. Запишите многочлен наименьшей степени, корнями которого являются заданные числа.

a) 1; 4; 3 b) –1; 3; –5 c) 3; $-3i$; 1

7. Найдите остальные корни многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, один из корней которого равен 1.

8. Из прямоугольного листа картона открытую коробку сделали, вырезав из каждого угла одинаковые квадраты. Чему равна сторона квадрата, отрезанного от картона с размерами 15 см × 13 см, если объем коробки равен 185 см^3?

9. Если возможно вычислите предел сразу, в противном случае выполните эквивалентные преобразования

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 8}{x^4 - 2x^3 + x - 2}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

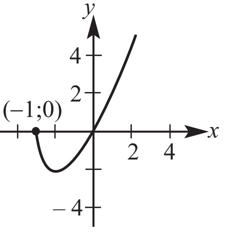
10. Согласно заданным условиям, изобразите график какой-либо функции $f(x)$.

a) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 1$ и $f(5) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 3$ и $f(-1) = 5$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -4$ и $f(2) = -4$

11. Запишете на каком промежуток непрерывности функции $f(x) = x\sqrt{x + 1}$.



12. Вычислите предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

13. Служба по доставке бандеролей курьером на велосипеде, предоставляет следующие условия, в зависимости от массы бандероли. Бандероль больше 3 кг не принимается.

Если $m \le 100$ г цена 15м

Если 100 г $< m \le 200$ г цена 20м

200 г $< m \le 500$ г цена 25м

200 г $< m \le$ 3 кг цена 45м

Изобразите график соответствующей ситуации

Какому типу принадлежит данная функция?

Запишите мнения по поводу непрерывности графика.

14. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}\right)$

Обобщающие задания

15. Найдите производную функции.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$	$f(x) = e^x \cos 2x$	$f(x) = \sqrt{e^{4x} + 1}$
$y = \dfrac{3}{\sqrt{2x+1}}$	$y = \sin^2(3x-2)$	$y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$y = x^3 \sin 2x$	$y = (1+\cos 2x)^2$	$y = x^2 e^{3x}$

16. Для следующей функции определите следующее $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$:
a) Критические точки.;
b) Промежутки возрастания и убывания функции.
c) Экстремуму;
b) Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[-2; 2]$.

17. Тело движется прямолинейно с ускорением $a(t) = 2t$ (см/с^2). Если начальная скорость 9 см/сек., Найдите:
a) Скорость тела $v(t)$.
b) Расстояние, пройденное телом за промежуток $0 \le t \le 5$.

18. При утечке нефть образует на поверхности озера пятно круглой формы, площадь которого увеличивается со скоростью 10 м^2 за минут. С какой скоростью изменяется радиус нефтяного пятна, при на площади 100м^2 ?

19. На графике функции $y = x^2$ найдите такую точку, чтобы график касательной к функции в данной точке был параллелен графику функции, $2x + y = 0$.

20. Найдите наименьшее значении функции $\frac{x^3}{3} - x - 3$ на отрезке $[-2; 2]$.

21. На каком промежутке функция $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$ возрастает?

22. В фирмах по обслуживанию автомобилей движение клапана вверх и вниз по очистки мотора от масла описывается по закону периодического движения $f(x) = \sin x \cos x$ (см/сек).
a) Найдите амплитуду гармонического колебания клапана.

23. Вычислите интеграл.

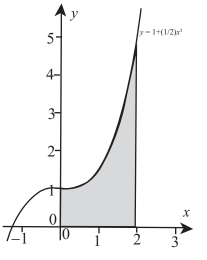
$$\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}dx \qquad \int \sin^2 x \cos x\, dx \qquad \int_{-1}^{1} e^{-3x}\, dx$$

$$\int_{e^2}^{e^{-3}} \frac{1}{x}\, dx \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \qquad \int_{0}^{1} x(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x})dx$$

24. Установите соответствие.

1. $f(x) = 2e^{2x}$ A) Первообразная функция $\mathrm{F}(x) = e^{x} + c$
2. $f(x) = 2xe^{x^2}$ B) Первообразная функция $\mathrm{F}(x) = e^{2x} + c$
3. $f(x) = 2x\, cos\, x^2$ C) Первообразная функция $\mathrm{F}(x) = sin\, x^2 + c$

25. Найдите площадь, ограниченную графиком функции $y = 1 + \frac{1}{2}x^3$



26. Тело движется $v(t) = 6t + 6$ (м/сек). Найдите какое расстояние оно преодолело от $t = 0$ до $t = 5$ секунды.

27. Если $\int_0^6 f(x)dx = 8$ и $\int_0^4 f(x)dx = 2$, вычислите интеграл $\int_4^6 f(x)dx$

28. Объем продаж сельскохозяйственной продукции с 1990 по 2000 гг можно смоделировать по формуле $M(x) = 2{,}2 + 1{,}1^t$. Здесь t - количество лет с 1990. Найдите объем продаж с 1990 по 1994 гг.

29. Для сжатия пружины на 3 см необходима сила в 25 Н. Вычислите работу,совершаемую при сжатии пружины на 7 см.

30. Ежедневные маржинальные затраты можно смоделировать функцией $C'(x) = 0{,}000006x^2 - 0{,}006x + 4$. Здесь, $C'(x)$ цена одной единицы продукции в манатах. Если ежедневно предусмотрен расход в размере 100 манат, то найдите:

a) себестоимость первых 500 единиц продукции.

b) себестоимость продукции с 201 единицы по 400 единицу.

31. Найдите координаты точки, полученной при параллельном переносе точки A (1;4), расположенной на функции $f(x)$, на 3 единицы влево и отображении относительно оси x.

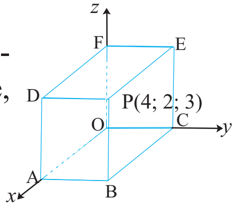
32. Координаты вершин треугольника равны A (–1; –5; 2), B (–4; –2; 1) и C (–1; 0; 2). Найдите:
a) $\angle$ B.
b) Площадь треугольника.
c) Единичный вектор, перпендикулярный плоскости треугольника.

33. 1) Запишите каноническое уравнение прямой, проходящей через точки A(1; 0; −2) и B(4; −2; 3).
2)Уравнение прямой, параллельной прямой $x = 3 - t$, $y = 6t$, $z = 7t + 2$, заданной в параметрической форме и проходящей через точку P (0; 1; 2).

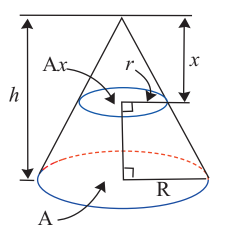
34. Запишите уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $3x - y + 2z = 10$ и проходящей через точку P (1; 4; −2).

35. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки A(0; 3; 4), B(1; 2; 0) и C(−1; 6; 4).

36. Найдите координаты других вершин параллелепипеда в трехмерной систем е координат на рисунке, если координаты вершины P(4; 2; 3).



37. Параллельно плоскости основания конуса с радиусом R, площадью S и высотой h на расстоянии x единиц от вершины проведена плоскость. Докажите, справедливость следующих равенств, если площадь полученного круга равна S_x, а радиус r.



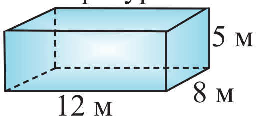
a) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{x}{h}$ b) $S_x : S = x : h$

38. Постройте в трехмерной системе координат:

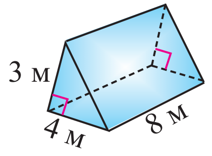
a) точку A(−1; 2; 3); b) точку плоскости $y = 4$;

39. За покраску внутренней поверхности бака цилиндрической формы заплатили 2000 манат, из расчета 20 манат за 1 кв. метр. Глубина бака 10 м.
a) Найдите площадь внутренней поверхности.
b) Найдите радиус основания бака.
c) Вычислите объем бака.

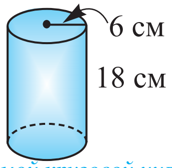
40. По следующим данным найдите площадь полной поверхности и объем фигуры.



прямоугольный параллелепипед



прямая призма



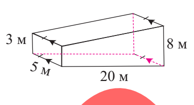
прямой круговой цилиндр

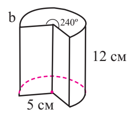
41. Стороны прямоугольного треугольника равны 5 см, 12 см и 13 см. Найдите объем конуса, полученного вращением a) вокруг стороны длиной 12 см; b) стороны длиной 5 см; c) найдите отношение объемов фигур, найденных в пунктах a и b.

42. Найдите объем параллелепипеда, заданного компонентами векторов $\langle 1; 0; 0\rangle$, $\langle 0; 2; 0\rangle$, $\langle 0; 0; 6\rangle$.

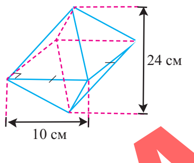
43. Объем конуса 9856 см^3, а радиус 28 см. Найдите: a) высоту; b) образующую; c) площадь полной поверхности данного конуса.

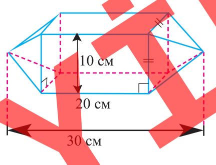
44. По данным на рисунке найдите:
a) объем;
b) площадь полной поверхности.

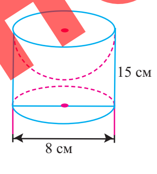


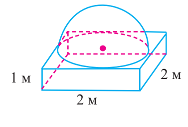


45. Найдите объемы фигур по данным на рисунке.









46. Объем прибора 60000 м^3. Представьте данный объем в кубических сантиметрах и результат запишите в стандартном виде.

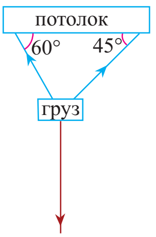
47. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных компонентами. Определите вид угла, образованного данными векторами: острый, тупой или 90°.

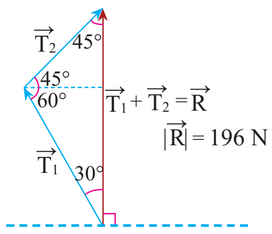
1) $\vec{a}=\langle -2;\ 1\rangle, \quad \vec{b}=\langle 1;\ 2\rangle$

2) $\vec{a}=\langle 2;\ 3;\ -1\rangle, \quad \vec{b}=\langle 4;\ 3;\ -17\rangle$

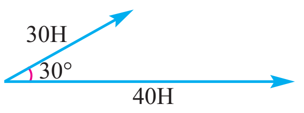
3) $\vec{a}=\langle 1;\ -2;\ 5\rangle, \quad \vec{b}=\langle 3;\ -2;\ -2\rangle$

48. Груз, массой 20 кг, подвешен к потолку на двух канатах под углами 60° и 45° к плоскости потолка. Сила натяжения канатов равна силе тяжести груза. Найдите силу натяжения каждого каната. **Указание:** каждый килограмм груза создает силу 9,8 Н. Примените теорему синусов к полученному треугольнику и изобразите соответствующую ситуацию при помощи векторов.





49. К телу приложены две силы 20 Н и 40Н под углом 30º. Найдите равнодействующую этих сил. **Указание**: используйте теорему косинусов.



50. Диагонали параллелограмма заданы векторами $\vec{a}=\langle 3;3;0\rangle$ и $\vec{b}=\langle -1;1;2\rangle$

a) Покажите, что этот параллелограмм ромб.

b) Запишите вектор, выражающий стороны ромба и найдите длины этих сторон.

c) Найдите углы ромба.

51. Запишите уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые $x=4+t_1$, $y=2t_1$, $z=1-3t_1$ и $x=4-3t_2$, $y=3t_2$, $z=1+2t_2$

52. Покажите пересекаются или нет прямые $x=1+2t_1$, $y=3t_1$, $z=5t_1$ и $x=6-t_2$, $y=2+4t_2$, $z=3+7t_2$.

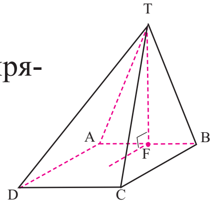
53. Найдите точки пересечения прямой $x=2t$, $y=3t$, $z=-2t$ и сферы $x^2+y^2+z^2=16$.

54. Для векторов $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ və $\vec{y} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ найдите:

a) $3\vec{x} - 2\vec{y}$ b) $|\vec{x} - 2\vec{y}|$ c) $4\vec{x} + 2\vec{y}$

55. Для функции $y = x^4 - 4x^3$ найдите:
a) Точки пересечения с осью x.
b) Критические точки функции.
c) Промежутки возрастания и убывания функции.
d) Точки максимума и минимума.
c) Постройте график функции.

56. Для пирамиды на рисунке известно следующее:

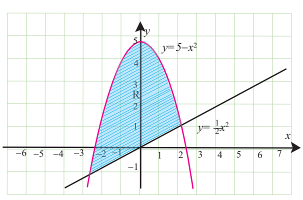


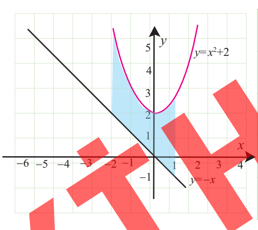
Точка F середина отрезка AB. TF = 5 м, ABCD - прямоугольник и AB = 6 м, BC = 8 м.
a) Найдите площадь поверхности пирамиды.
b) Объем пирамиды.

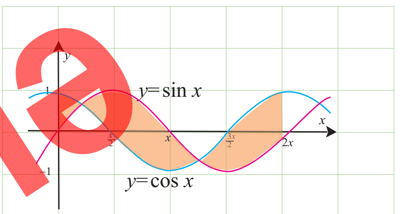
57. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = -x^3 + 2$, $x = 0$ и $x = 6$.

58. Найдите объем фигуры ограниченной отрезком [–2; 2] и полученной при вращении функции $y = 4 - x^2$ вокруг оси x.

59. Найдите площадь заштрихованной части на графике.







60. Дана функция $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$.
a) Решите уравнение $f(x) = -\frac{3}{4}$.
b) Найдите наименьшее значение функции.

61. В классе 14 учеников, из них двое выбираются для встречи гостей, прибывающих на мероприятие.
a) Найдите количество возможных вариантов.
b) Наргиз является ученицей класса. Она хочет быть выбранной или с Сеймуром или с Гюльнар. Найдите вероятность данного события.

62. 1) Вычислите выражения.

a) ${}_5P_3$, ${}_8P_6$, ${}_{11}P_8$, ${}_{12}P_5$, b) ${}_{15}C_8$, ${}_4C_1$, ${}_8C_6$, ${}_{12}C_3$,

2) Что больше ${}_8P_r$ или ${}_8C_r$?

3) Запишите связь между ${}_nP_r$ и ${}_8C_r$.

4) Докажите, что ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

63. В классе, где учится Гюльназ учитель ежедневно выбирает одного из учащихся, для объяснения домашнего задания. Ученик, который объясняет домашнее задание, уже однажды на этой неделе выполнял это. В классе 20 учащихся. Равновероятны ли события, что если Гюльназ будет выбрана для выполнения этой работы в понедельник и в четверг?

64. Для кода на замке использовали пять цифр от 1 до 9. Сколько существует вариантов, если цифры могут повторяться?

65. Выигрыш в лотереи определяется тремя неповторяемыми цифрами из барабана от 0 до 9. определяется. Какова вероятность того, что три цифры, которые отметил Агиль будут выигрышными?

66. a) В мешке 5 белых и 4 красных шара. Из мешка случайным образом вытаскивают один за другим два шара, не возвращая их на место.
a) Найдите вероятность, что как минимум один шар будет белого цвета. b) Запишите формулу, удовлетворяющую условию и приведите пример.

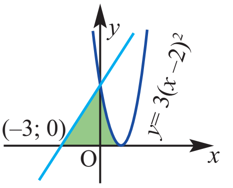
67. a) По данным таблицы вычислите дисперсию и стандартную отклонение

x	6	7	10	11	11	13	16	18	18	всего
$x-\bar{x}$	–7	–6	–3	–2	–2	0	3	5	12	
$(x-\bar{x})^2$	49	36	9	4	4	0	9	25	144	280

b) По следующим данным задайте таблицу как показано в пункте a. Найдите дисперсию и стандартную отклонение.

74, 72, 83, 96, 64, 79, 88, 69 ₼326, ₼438, ₼375, ₼366, ₼419, ₼424

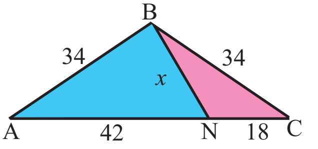
68. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось абсцисс в точке $(–3;\ 0)$ и пересекает ось ординат в пересечения с параболой $y= 3(x –2)^2$.



a) В какой еще точке прямая пересекает параболу?

b) Найдите площадь закрашенной части.

69. По данным на рисунке найдите периметр и площадь каждой из закрашенной части.



70. Для размещения 40 туристов разбиты трехместные и двухместные палатки. Если всего разбито 12 палаток, то сколько из них трехместные?

71. В арифметической прогрессии $a_3 = 3$, $a_7 = 17$. Найдите пятый член прогрессии. Найдите сумму членов меньших 30.

72. Лятиф за 20 минут прочел 24 страницы. a) Сколько страниц он прочтет за 35 минут? b) За сколько времени он прочтет 360 страниц?

73. Решите неравенства.

a) $2(5–x) > 3x$ b) $\dfrac{x-3}{2-\sqrt{3}} > \sqrt{3}+2$ c) $4 < 2 - 3x \le 8$ d) $||x-3| - 1| < 3$

74. Дана функция $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$.

a) найдите область определения; b) запишите обратную функцию и множество значений; c) решите неравенство $f(x – 1) \le 0$.

75. Решите уравнения.

a) $4 \sin^2 x – 3 \cos x = 3$ b) $\mathrm{tg}\, x – 3\, \mathrm{ctg}\, x – 2 = 0$

c) $\sin 3x + \sin 5x = 0$ d) $\cos 3x – \cos x = 0$

76. a) Для функции $y = 2 + \sqrt{x-1}$ найдите обратную функцию.

b) Найдите область определения функции $y = \sqrt{2 \cos x - 1}$.

c) Найдите множество значений функции $y = \log_{\frac{1}{2}} (3 + 2 \sin 2x)$

77. Для следующих функций найдите обратные функции. Покажите область определения и множество значений заданной и обратной функции.

a) $y = 2^{x-3} + 1$ b) $y = 1 – \log_2(x + 1)$

78. Вычислите. a) $\dfrac{\text{НОК}\ (84;\ 126)}{\text{НОД}\ (84;\ 126)}$ b) $\dfrac{\text{НОК}\ (54;\ 72)}{\text{НОД}\ (54;\ 72)}$

79. Найдите значение выражения:

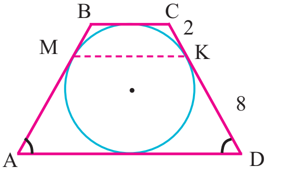
a) $(3x + y)^2 + 2\,(3x + y)\,(x - y) + (x - y)^2$,при $x = \sqrt{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{2} - ab^2}{1 + b^2} + \dfrac{\sqrt{2}b^2 - a}{1 + b^2}$, при $a = \sqrt{5}–1$

80. В мешке шары белого и черного цвета. Количество черных шаров к белым относится как 3:2. Если вытащить половину черных шаров, то количество оставшихся белых шаров будет в 3 раза больше, чем черных.

1) Сколько шаров в мешке? 2) Если не заглядывая в мешок, вытащить два шара, то найдите вероятность того, что: a) оба шара будут белыми; b) оба шара будут разного цвета.

81. По данным рисунка найдите периметр и площадь равнобедренной трапеции, а также длину отрезка MK, соединяющего точки касания боковых сторон и окружности.



82. a) Стороны треугольника относятся как 5 : 5 : 6. Зная, что периметр треугольника равен 32 см, найдите длины сторон и высот треугольника.

b) Найдите периметр, площадь, радиус вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника, если основание равно 12 см, а боковая сторона 15 см.

83. a) Найдите периметр, площадь, высоту и радиус вписанной окружности ромба с диагоналями 12 см и 16 см. .

b) Найдите площадь параллелограмма, периметр которого равен 32 см, а высоты равны 3 см и 5 см.

84. Вычислите.

a) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} - \sqrt{117^2 - 108^2}$ b) $(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 - 6\sqrt{8}$ c) $\sqrt{3 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{11 - 6\sqrt{2}}$

85. a) Найдите сумму квадратов корней уравнения $3x^2 - x - 1 = 0$.

b) Сумма корней уравнения $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ больше произведения на 1. Найдите m и решите уравнение.

86. a) Какое число получится, если число 200 сначала уменьшить на 30%, а затем вновь увеличить на 30 %?

b) Как изменится цена товара, если ее сначала увеличить на 10%, а потом уменьшить на 10 %?

87. Расположите числа в порядке возрастания. $a = \dfrac{31}{32}$, $b = \dfrac{32}{33}$, $c = \dfrac{35}{34}$, $d = \dfrac{36}{35}$

88. Установите соответствие (c_n является n членом, S_n - сумма первых n членов)

1. $S_n = n^2 + 3n$ A) $c_2 = 6$ B) $c_2 = 5$ C) $c_2 = 4$
2. $S_n = n^2$ D) геометрическая прогрессия E) $c_n = 2n - 1$
3. $S_n = 2^n - 1$

89. Найдите сумму $a + b$, если $a, b \in$ N, $a : b = 3 : 4$, НОД(a; b) + НОК(a; b) = 39 .

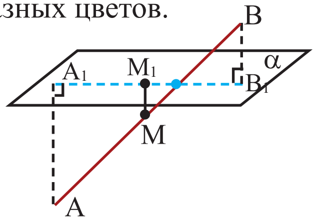
90. 1) При каком значении c уравнение $(c^2 - 4)x = c + 2$ имеет:
a) одно решение;
b) бесконечно много решений;
c) не имеет решения?

2) При каком значении c система уравнений $\begin{cases} 2x + y = c \\ y = x^2 \end{cases}$ имеет единственное решение

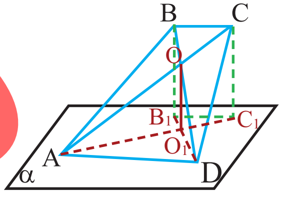
91. На окружности отмечено 12 точек. Сколько можно построить треугольников с вершинами в данных точках?

92. В коробке 6 черных и x белых шара. Если вероятность того, что случайно взятый из коробки шар белого цвета равна $\frac{2}{5}$, то найдите x. Найдите вероятность того, что 2 шара разных цветов.

93. Концы отрезка, пересекающего плоскость, удалены от плоскости на расстоянии 8 см и 2 см. Найдите расстояние от точки M середины отрезка до этой плоскости.



94. Расстояние от точки пересечения диагоналей O трапеции ABCD до плоскости α, проходящей через основание AD равно 2 см. Зная, что AD:BC = 3:2, найдите расстояние от основания BC до плоскости α.



95. Шар с диаметром 6 см и конум с радиусом основания 10 см находятся на плоскости α. На расстоянии 8 см параллельно плоскости α проведена плоскость β. При этом сечениями щара и конуса являются конгруэнтные круги. Найдите высоту конуса.