

RIYAZIYYAT

9

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_k + (n - k)d$$

$$l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r$$

LAYTHƏ



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadırız!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

LAYIHƏ



HEYDƏR ƏLİYEV
AZƏRBAYCAN XALQININ ÜMUMMİLLİ LİDERİ

LAYIHƏ

LAYIHƏ

Nayma Qəhrəmanova
Məhəmməd Kərimov
İlham Hüseynov

RİYAZİYYAT 9

Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə
DƏRSLİK

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi radius_n@hotmail.com və derslik@edu.gov.az elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur.
Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!



Radius

LAYIHƏ

Mündəricat

1-ci bölmə

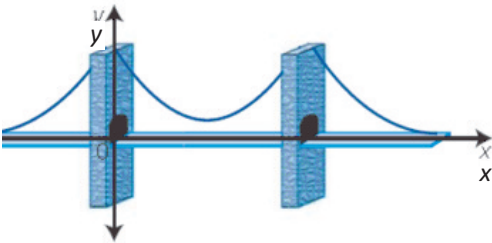
Həqiqi ədədlər	6
n -ci dərəcədən kök	12
n -ci dərəcədən kökün xassələri.....	16
Rasional üstlü qüvvət	21
Rasional üstlü qüvvətin xassələri	22
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	26

2-ci bölmə

Mərkəzi bucaq. Çevrə qövsü.....	28
Vətərin xassələri	31
Çevrə daxilinə çəkilmiş bucaq.....	36
Çevrəyə toxunan.....	39
Kəsən və toxunanların əmələ gətirdiyi bucaqlar	42
Çevrəni kəsən parçalar	46
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	49

3-cü bölmə

Kvadratik funksiya	51
Kvadratik funksiyanın qrafiki	52
Kvadratik funksiyanın tətbiqi ilə məsələ həlli.....	67
$y = x $ funksiyası	70
$y = x^3$ funksiyası.....	74
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	75



4-cü bölmə

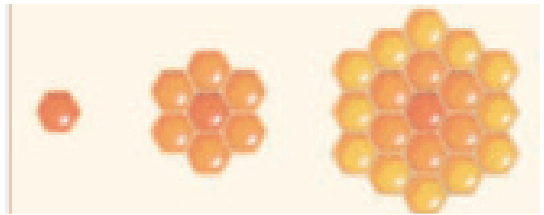
İki nöqtə arasındakı məsafə.....	77
Çevrənin tənliyi.....	82
Sektor və seqmentin sahəsi.....	90
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	92

5-ci bölmə

Yüksək dərəcəli tənliklər	94
Rasional tənliklər. Rasional tənliklərin tətbiqi ilə məsələ həlli	98
Modul işarəsi daxilində dəyişəni olan tənliklər	100
İrrasional tənliklər.....	103
Tənliklər sistemi.....	106
Tənliklər sisteminə gətirilən məsələlər.....	114
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	116

6-cı bölmə

Çoxbucaqlılar	118
Çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarının cəmi	120
Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlılar	123
Düzgün çoxbucaqlının sahəsi	132
Ümumiləşdirici tapşırıqlar.....	137



7-ci bölmə

Xətti bərabərsizliklər sistemi	139
Bərabərsizliklər heyəti	141
Modul işarəsi daxilində dəyişəni olan sadə bərabərsizliklər	143
Kvadrat bərabərsizliklər	145
İntervallar üsulu.....	153
İrrasional bərabərsizliklər	157
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	159

LAYIHƏ

8-ci bölmə

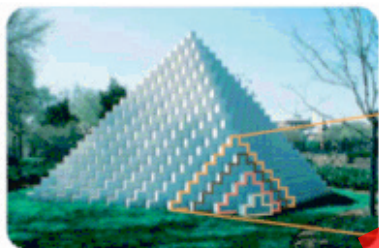
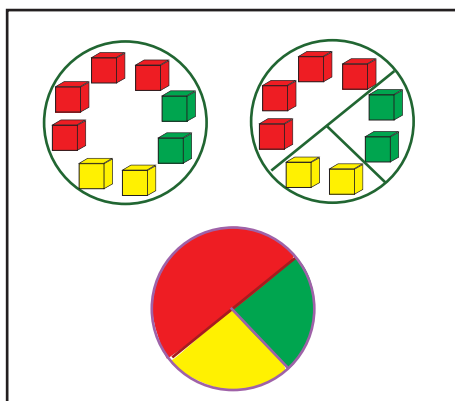
Vektorlar	162
Dekart koordinat müstəvisində	
vektorlar	164
Vektorun istiqaməti	167
Vektorların toplanması və çıxılması	171
Vektorun ədədə vurulması	179
Komponentləri ilə verilmiş vektorlar	
üzərində əməllər	180
Paralel köçürmə	182
Hərəkət və konqruent fiqurlar	185
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	188

10-cu bölmə

Məlumatın qruplaşdırılması.	
Məlumatın tezliyi	218
Məlumatın təqdimi. Məlumatın	
paylanması qrafikləri	221
Məlumatın analizi	226
Permutasiya	229
Kombinezon	234
Ehtimalın hesablanmasına aid məsələ	
həlli	236
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	242
Bölmələr üzrə ümumiləşdirici	
tapşırıqlar	243

9-cu bölmə

Ədədi ardıcılıqlar	190
Ədədi silsilə	194
Ədədi silsilənin n -ci həddinin	
düsturu	195
Ədədi silsilənin hədlərinin	
xassələri	199
Ədədi silsilənin ilk n həddinin	
cəmi düsturu	201
Həndəsi silsilə	205
Həndəsi silsilənin n -ci həddinin	
düsturu	207
Həndəsi silsilənin hədlərinin	
xassələri	210
Həndəsi silsilənin ilk n həddinin	
cəmi düsturu	211
$ q < 1$ olduqda sonsuz həndəsi	
silsilənin cəmi	214
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	216



LAYIHƏ

1

n-ci dərəcədən kök və rasiional üstlü qüvvət

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

- ✓ Həqiqi ədədlər üzərində əməllərin xassələrini
- ✓ *n*-ci dərəcədən kök və onun xassələrini
- ✓ Rasiional üstlü qüvvət və onun xassələrini.

1-1

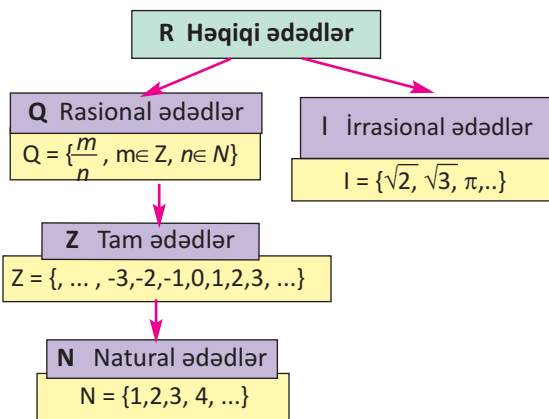
Həqiqi ədədlər

Natural ədədlər çoxluğu (N) tam ədədlər çoxluğunun (Z), tam ədədlər çoxluğu rasiional ədədlər çoxluğunun (Q) alt çoxluğudur: $N \subset Z \subset Q$

Rasiional ədədlər və irrasiional ədədlər həqiqi ədədlər çoxluğunu əmələ gətirir: $R = Q \cup I$

Həqiqi ədədi sonsuz onluq kəsr kimi ifadə etmək olar.

İki həqiqi ədədin cəmi, fərqi, hasil və nisbəti (bölən sıfırdan fərqli olmaqla) həqiqi ədəddir.



Cədvəldə həqiqi ədədlər üzərində əməllərin xassələri verilmişdir.

$a + b = a + b$	$a \cdot b = b \cdot a$	Yerdəyişmə xassəsi
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Qruplaşdırma xassəsi
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		Paylama xassəsi
$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \ (a \neq 0)$	Əks ədədin və tərs ədədin varlığı
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0, \ a \cdot 1 = a$	Sıfırın və vahidin varlığı
$-(-a) = a$	$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$	Mənfi ədədlər üzərində
$a + (-b) = a - b$	$(-a) \cdot (-b) = ab$	əməllərin xassələri
$a - (-b) = a + b$	$a \cdot (-\frac{1}{b}) = a : (-b) = -\frac{a}{b}$	

Nümunə $2 - \sqrt{3}$ ədədinin tərsi ilə əksinin cəmini tapın.

Həlli. $a = 2 - \sqrt{3}$ ədədinin tərsi $\frac{1}{a} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$,

Əksi isə $-a = -(2 - \sqrt{3}) = -2 + \sqrt{3}$ olduğundan alırıq:

$$\frac{1}{a} + (-a) = (2 + \sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

Öyrənmə tapşırıqları

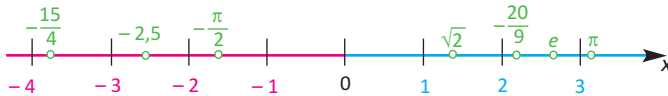
- 1 > Verilən həqiqi ədədlərin hansı natural; tam; rəşional; irrasional ədəddir?
a) $\sqrt{16}$ b) $-\frac{9}{11}$ c) $1,(7)$ d) $\sqrt{8}$ e) $-\sqrt{9}$
- 2 > $x^2 = a$ tənliyində a -nın yerinə elə ədəd yazın ki, tənliyin:
a) iki rəşional kökü olsun; b) iki irrasional kökü olsun; c) həqiqi kökü olmasın.
- 3 > n -in 2; 3; 4; 5 qiymətlərindən hansında $\sqrt{n}$ rəşional ədəddir?
- 4 > İfadənin qiymətinin rəşional və ya irrasional ədəd olduğunu müəyyən edin.
a) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3)$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$ c) $(2 - \sqrt{2})^2$
- 5 > Elə iki irrasional ədəd yazın ki: a) cəmi rəşional; b) hasilı rəşional olsun.
- 6 > Verilmiş ədədin tərsi ilə əksinin fərqi tapın.
a) $0,(3)$ b) $\sqrt{2} + 1$ c) $2 - \sqrt{3}$



Ədəd oxu

Üzərində hesablamə başlanğıcı, uzunluq vahidi və müsbət istiqamət seçilmiş düz xəttə ədəd oxu deyilir.

✓ Ədəd oxunun hər bir nöqtəsinə müəyyən bir həqiqi ədəd uyğundur və tərsinə, hər bir həqiqi ədədi ədəd oxu üzərindəki nöqtə ilə göstərmək olar.



a və b həqiqi ədədləri üçün $a > b$, $a = b$, $a < b$ münasibətlərindən biri doğrudur. Ədəd oxu üzərində sağda yerləşən nöqtəyə uyğun olan ədəd, solda yerləşən nöqtəyə uyğun ədəddən böyükdür.



✓ İki həqiqi ədəd arasında sonsuz sayda həqiqi ədəd var. Verilən ədədləri sonsuz onluq kəsr şəklində ifadə etməklə bunu aydın görmək olar.

Nümunə $a = 7 + \sqrt{2}$ ədədi ədəd oxu üzərində hansı iki ardıcıl tam ədəd arasında yerləşir?

Həlli. $1 < \sqrt{2} < 2$ bərabərsizliyinin hər tərəfinə 7 əlavə edək: $8 < 7 + \sqrt{2} < 9$.
Deməli, verilmiş ədədə uyğun nöqtə 8 və 9 arasında yerləşir.

Ədədi aşmayan ən böyük tam ədədə verilmiş ədədin tam hissəsi deyilir.

Ədədin kəsr hissəsi isə ədədlə tam hissənin fərqinə bərabərdir.

a ədədinin tam hissəsi $[a]$, kəsr hissəsi isə $\{a\}$ ilə işarə olunur.

Nümunə a) 7,2; b) -7,2 ədədinin tam və kəsr hissələrini tapın.

Həlli. a) $[7,2] = 7$, $\{7,2\} = 7,2 - [7,2] = 7,2 - 7 = 0,2$

b) $[-7,2] = -8$, $\{-7,2\} = -7,2 - [-7,2] = -7,2 - (-8) = 0,8$

Öyrənmə tapşırıqları

7 > Verilən ədədləri ədəd oxu üzərində iki ardıcıl tam ədəd arasında göstərin.

$$-\frac{9}{4} \quad 1,6 \quad \sqrt{5} \quad -0,(8) \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{\pi}{4}$$

8 > Ədədləri müqayisə edin:

$$\text{a) } -2\sqrt{3} \text{ və } -\sqrt{9} \quad \text{b) } -\frac{7}{12} \text{ və } -\frac{7}{\sqrt{12}} \quad \text{c) } \sqrt{14} \text{ və } 3 \quad \text{d) } \sqrt{\frac{8}{3}} \text{ və } \pi$$

9 > a) 0,63-dən böyük olan həqiqi ədədlərdən ən kiçiyi varmı?

b) 0,9 ədədindən kiçik olub, onluq kəsr şəklində yazılışında 9 rəqəmi iştirak etməyən ən böyük həqiqi ədədi göstərin.

10 > Nemət deyir ki, $-2 + \sqrt{3}$ və $-1 + \sqrt{2}$ ədədlərinin hər ikisi ədəd oxunun mənfi ədədlərə aid hissəsində yerləşir. Siz necə fikirləşirsiniz?

11 > Verilən ədədlər üçün hansı hökm doğrudur?

$$1) -\sqrt{3}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{2}.$$

$$2) \sqrt{\frac{36}{5}}, \sqrt{\frac{49}{8}}, \sqrt{\frac{81}{11}}.$$

a) -1-dən böyükdürlər

a) 1 ilə 2 arasındadırlar

b) -2 ilə -1 arasındadırlar

b) 2 ilə 3 arasındadırlar

12 > Ədədləri artan sıra ilə düzün.

$$1) -\sqrt{49}; -\sqrt{7}; 0; -\sqrt{51}; -6,8$$

$$2) -\sqrt{8}; -3,1; \sqrt{15}; (-2)^2; -\sqrt{11}$$

13 > $\frac{1}{3}$ və $\frac{1}{2}$ ədədləri arasında yerləşən bir neçə:

a) rasional; b) irrasional ədəd yazın.

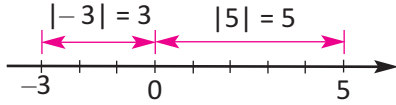
14 > Ədədlərin tam və kəsr hissələrini tapın.

$$\text{a) } 2,3 \quad \text{b) } -6,2 \quad \text{c) } 2,(3) \quad \text{d) } -2,(3) \quad \text{e) } 2,1(6) \quad \text{f) } \sqrt{3} \quad \text{g) } \sqrt{5} - 1$$

✓ Həqiqi ədədin mütləq qiyməti

✓ Həqiqi ədədin mütləq qiyməti ədəd oxu üzərində bu ədədə uyğun nöqtənin koordinat başlanğıcından məsafəsini göstərir.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{əgər } a > 0 \\ -a, & \text{əgər } a < 0 \\ 0, & \text{əgər } a = 0. \end{cases}$$



● Nümunə

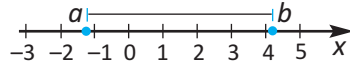
Verilən həqiqi ədədlərin mütləq qiymətini yazın.

a) $|3| = 3$ b) $|-3| = -(-3) = 3$ c) $|0| = 0$ d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$

Mütləq qiymətin xassələri

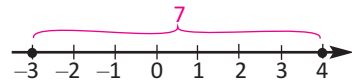
xassə	nümunə	sözlə ifadəsi
1. $ a \geq 0$	$ -3 = 3 > 0$	Ədədin mütləq qiyməti mənfi deyil
2. $ a = -a $	$ 5 = -5 $	Qarşılıqlı əks ədədlərin mütləq qiymətləri bərabərdir
3. $ ab = a b $	$ -2 \cdot 5 = -2 5 $	Hasilin mütləq qiyməti vuruqların mütləq qiymətləri hasilinə bərabərdir
4. $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$	$\left \frac{12}{-3}\right = \frac{ 12 }{ -3 }$	Nisbətin mütləq qiyməti mütləq qiymətləri nisbətinə bərabərdir

✓ Ədəd oxu üzərində a və b nöqtələri arasındakı məsafə $|a - b|$ kimi tapılır. $|a - b| = |b - a|$ olduğuna diqqət edin.



● **Nümunə.** Ədəd oxu üzərində -3 və 4 nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

Həlli. $|4 - (-3)| = |7| = 7$



Öyrənmə tapşırıqları

15 > Ədədləri müqayisə edin.

a) $|-4|$ və $|4|$

b) $-(-3)$ və $|-3|$

c) $1 - \sqrt{2}$ və $|1 - \sqrt{2}|$

16 > Hesablayın.

a) $|-2, (2) - (3)|$

b) $|-2\frac{1}{3} \cdot (-3\frac{6}{7})|$

c) $\frac{|-4 - (-3)|}{|-2|}$

17 > Sadələşdirin.

a) $|\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 1|$

b) $|\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} + 1|$

c) $|\pi - 3| - |3 - \pi|$

18 > a və b nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

a) $a = 2, (3), b = 3, 5$

b) $a = -\frac{2}{3}, b = 0, (3)$

c) $a = \sqrt{2} - 1, b = 3 + \sqrt{2}$



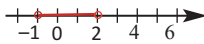
Ədədi çoxluqlar və təqdim formaları

Bütün elementləri həqiqi ədədlər olan çoxluğa ədədi çoxluq deyilir. Ədədi çoxluqlar bərabərsizliklə və ya aralıq şəklində verilə bilər. $(-\infty; +\infty)$ yazılışı bütün həqiqi ədədlər çoxluğunu ifadə edir.

Aralıq	Bərabərsizliklə yazılış	Ədəd oxu üzərində
$(a; b)$	$a < x < b$	
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a; b)$	$a \leq x < b$	
$(a; b]$	$a < x \leq b$	
$(a; +\infty)$	$a < x$	
$[a; +\infty)$	$a \leq x$	
$(-\infty; b)$	$x < b$	
$(-\infty; b]$	$x \leq b$	
$(-\infty; +\infty)$	R (bütün həqiqi ədədlər)	

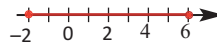
1. Nümunə Bərabərsizliyi ödəyən ədədlər çoxluğunu koordinat düz xətti üzərində təsvir edin, aralıq şəklində yazın.

Həlli. a) $-1 < x < 2$



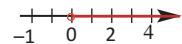
$(-1; 2)$

b) $-2 \leq x \leq 6$



$[-2; 6]$

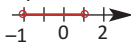
c) $x > 0$



$(0; +\infty)$

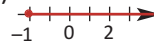
2. Nümunə Verilmiş aralığı ədəd oxu üzərində təsvir edin, bərabərsizliklə təqdim edin.

Həlli. d) $(-1; 1)$



$-1 < x < 1$

e) $[-1; +\infty)$



$-1 \leq x < +\infty$

Öyrənmə tapşırıqları

19 Bərabərsizliyi ödəyən həqiqi ədədlər çoxluğunu ədədi aralıq şəklində yazın.

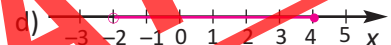
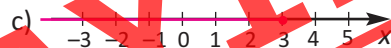
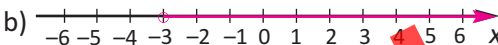
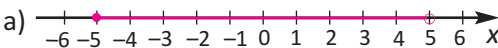
a) $x \leq 2$

b) $-2 < x \leq 5$

c) $-2 \leq x \leq -1,5$

d) $x \geq 10$

20 Ədəd oxu üzərində təsvir edilmiş aralıqları yazın.



21 > Təkliflərə uyğun bərabərsizliklər yazın.

- a) n ədədi -1 -dən böyükdür, 12 -dən kiçikdir;
 b) k ədədi 3 -dən böyük deyil; c) m ədədi mənfə deyil;
 d) a ədədi ən azı -10 , ən çoxu 22 ola bilər;
 e) b ədədi 5 -dən kiçikdir, lakin -3 -dən kiçik deyil.



Ədədi çoxluqların xassələri

Çoxluqların kəsişməsi və birləşməsinin bəzi xassələri ədədlər üzərində toplama və vurma əməllərinin yerdəyişmə, qruplaşdırma və paylama xassələrinə oxşardır.

$$1) A \cup B = B \cup A$$

$$2) A \cap B = B \cap A$$

$$3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Öyrənmə tapşırıqları

22 > Aralıqların birləşməsini və kəsişməsini yazın.

Nümunə. $(-2; 4] \cup [0; 9] = (-2; 9];$ $(-2; 4] \cap [0; 9] = [0; 4]$

- a) $(-2; 4] \cap [0; 9]$ b) $(-2; 4] \cup [0; 9]$ c) $(-\infty; \infty) \cap [-\pi; 21]$
 d) $(-\infty; 4] \cap (-1; \infty)$ e) $[3; 4] \cup [4; 9]$ f) $(-\infty; 4] \cap (0; \infty)$

23 > Əməlləri yerinə yetirin.

- a) $Q \cap Z$ b) $N \cup R$ c) $N \cup Z \cap Q$ d) $(-4, 8; -3, 5) \cap Z$

24 > Verilmiş aralığı ədəd oxu üzərində təsvir edin və bu aralığa daxil olan rəasional ədəd və irrasional ədəd göstərin ($\in$ işarəsindən istifadə edin).

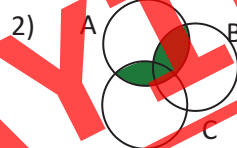
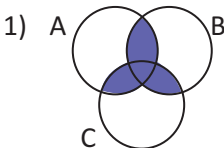
- a) $[1; 5]$ b) $(-3; 0)$ c) $[-2; \infty)$

25 > R həqiqi ədədlər çoxluğunun $A = [-2; 1]$, $B = [0; 3]$ və $C = [-1; 2]$ alt çoxluqları verilmişdir. Ədəd oxu üzərində təsvir etməklə aşağıdakı bərabərliklərin doğru olduğunu yoxlayın.

$$1) A \cup B = B \cup A; \quad 2) A \cap B = B \cap A; \quad 3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

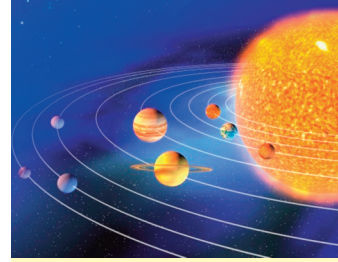
$$4) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad 5) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

26 > Rəngli hissəyə uyğun çoxluğu yazın.



LAYİHƏ

Araşdırma Planetlərdən Günəşə qədər məsafəni $d = \sqrt[3]{6t^2}$ düsturu ilə hesablamaq olar. Burada d planetdən Günəşə qədər məsafəni milyon millə, t isə planet ilini Yer günlərinin sayı ilə göstərir. Marsda bir planet ilinin 687 Yer günü olduğunu nəzərə almaqla Günəşdən məsafəsini hesablayın. Aldığınız nəticəni kosmik tədqiqatlardan alınan məlumatla müqayisə edin.



1-2

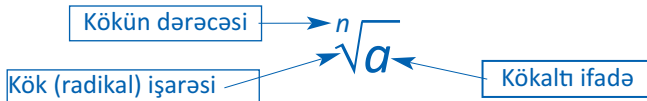
 n -ci dərəcədən kök

n -ci qüvvəti ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) a -ya bərabər olan b ədədinə (yəni $a = b^n$ olarsa), a -nın n -ci dərəcədən kökü deyilir.

Məsələn, 32-nin 5-ci dərəcədən kökü 2-dir, çünki $2^5 = 32$.

81-in 4-cü dərəcədən kökü 3 və -3 ədədləridir, çünki $3^4 = 81$ və $(-3)^4 = 81$.

✓ Mənfi olmayan ədədin n -ci dərəcədən mənfi olmayan kökünə hesabi kök deyilir, $\sqrt[n]{a}$ ilə işarə edilir və belə oxunur: " a -nın n -ci dərəcədən kökü."



✓ Xüsusi halda $n = 2$ olarsa, kvadrat kök, $n = 3$ olarsa kub kök deyilir.

Nümunə $\sqrt[4]{81} = 3$, çünki $3^4 = 81$ və $3 > 0$
 $\sqrt[3]{8} = 2$, çünki $2^3 = 8$ və $2 > 0$

n cüt olduqda $\sqrt[n]{a}$ ifadəsinin $a \geq 0$ olduqda mənası var. Müsbət a ədədinin cüt dərəcədən iki həqiqi kökü var: $\sqrt[n]{a}$ və $-\sqrt[n]{a}$

n tək olduqda istənilən a ədədinin n -ci dərəcədən bir həqiqi kökü var və bu kök a ilə eyni işarəlidir.

Mənfi ədədin tək dərəcədən kökünü əks ədədin həmin dərəcədən hesabi kökü ilə ifadə etmək olar. Məsələn, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$

n -ci dərəcədən kök			
a həqiqi ədəd	$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$	a -nın kökü	Nümunə
$a > 0$	n cüt ədəddir	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[4]{81} = 3$, $-\sqrt[4]{81} = -3$
$a > 0$ və ya $a < 0$	n tək ədəddir	$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
$a < 0$	n cüt ədəddir	həqiqi kökü yoxdur	$\sqrt{-9}$ həqiqi ədəd deyil
$a = 0$	n cüt və ya tək ədəddir	$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[5]{0} = 0$

$\sqrt[n]{a}$ ifadəsinin mənalı olduğu bütün qiymətlərdə $(\sqrt[n]{a})^n = a$ bərabərliyi doğrudur.

1. Nümunə Hesablayın. a) $(2\sqrt[4]{3})^4$; b) $(3\sqrt[3]{2})^3$

Həlli. a) $(2\sqrt[4]{3})^4 = 2^4 \cdot (\sqrt[4]{3})^4 = 16 \cdot 3 = 48$

b) $(3\sqrt[3]{2})^3 = 3^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 = 27 \cdot 2 = 54$

$a > b > 0$ isə, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

2. Nümunə

$\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{8} > \sqrt[4]{5}$

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Hesablayın.

a) $\sqrt{121}$

b) $\sqrt[3]{125}$

c) $\sqrt[4]{256}$

d) $\sqrt[3]{0}$

e) $\sqrt[4]{1}$

f) $\sqrt{0,64}$

g) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

h) $\sqrt[5]{-32}$

i) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$

j) $\sqrt[3]{0,064}$

2 > İki qrupa- mənası olan və mənası olmayan ifadələrə ayırın.

a) $\sqrt[5]{-27}$

b) $-\sqrt[3]{-19}$

c) $\sqrt[4]{(-2)^4}$

d) $\sqrt[4]{-12}$

e) $\sqrt[6]{(-3)(-7)}$

3 > İfadənin qiymətini tapın. a) $5 \cdot \sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 13,5}$ c) $\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{8}}$

d) $(4 - \sqrt[3]{-64}) : \sqrt[3]{0,125}$ e) $\sqrt[3]{31 - \sqrt[3]{64}}$ f) $\sqrt[3]{60 + \sqrt{16}}$ g) $\sqrt[3]{130 - \sqrt[3]{125}}$

4 > *n*-in bir neçə elə natural qiymətlərini göstərin ki, $\sqrt[n]{n}$ ifadəsinin qiyməti:

a) rəşional ədəd; b) irrasional ədəd olsun.

5 > Ədədlərdən hansı rəşional, hansı irrasional ədəddir?

a) $\sqrt{11}$

b) $\sqrt{16}$

c) $\sqrt[3]{-64}$

d) $\sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$

f) $\sqrt[3]{0,027}$

6 > Verilən ədədlərin ədəd oxu üzərində təxmini yerini müəyyən edin.

a) $\sqrt[3]{19}$

b) $\sqrt[3]{-20}$

c) $\sqrt[3]{30}$

d) $\sqrt[3]{36}$

e) $\sqrt[3]{\frac{63}{8}}$

Nümunə $8 < 19 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{27}$, buradan isə $2 < \sqrt[3]{19} < 3$ olur.

Yəni $\sqrt[3]{19}$ ədədi 2 və 3 arasında yerləşir.



7 > Rəngli xanaların yerinə >, < işarələrini yazın.

a) $\sqrt[3]{7} \square \sqrt[3]{9}$

b) $\sqrt[3]{9} \square 2$

c) $\sqrt[3]{25} \square 3$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \square \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

e) $0,01 \square \sqrt[3]{0,001}$

8 > Fərqi işarəsini müəyyən edin.

a) $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt[3]{10} - 2$ c) $\sqrt[3]{24} - 3$

9 > Ədədləri artan sıra ilə düzün.

a) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{7}$, 2 , $\sqrt[3]{12}$
b) $-\sqrt[3]{5}$, -2 , $-\sqrt[3]{4}$, -3

10 > Verilmiş ədəd hansı iki ardıcıl tam ədədin arasında yerləşir?

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[5]{28}$ d) $\sqrt[4]{0,7}$ e) $\sqrt[4]{15}$

11 > Ədədin tam hissəsini tapın.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{20}$ c) $\sqrt[5]{38}$ d) $\sqrt[4]{17}$ e) $-\sqrt[4]{17}$ f) $\sqrt[4]{17} - 1$

12 > Əvvəlcə ədədin tam hissəsini tapın, sonra onun kəsr hissəsini göstərin.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt[4]{12}$ d) $\sqrt[5]{33}$ e) $\sqrt[3]{28} - 2$

13 > Hesablayın.

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ c) $\sqrt{7 + \sqrt[3]{7 + \sqrt[4]{1}}}$ d) $\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{256}}$
e) $(4\sqrt[3]{3})^2$ f) $(5\sqrt[3]{2})^3$ g) $(-2\sqrt[4]{3})^4$ h) $(-2\sqrt[5]{4})^5$

14 > İfadələrin təqribi qiymətlərini kalkulyatorla tapın.

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[4]{6^3}$ c) $\sqrt{10^3}$ d) $\sqrt[3]{16}$



n-ci dərəcədən qüvvətin n-ci dərəcədən kökü

n cüt ($n = 2k$) olduqda istənilən a üçün $a^{2k} = |a|^{2k}$ olduğundan, hesabi kökün tərifinə görə $\sqrt[2k]{a^{2k}} = \sqrt[2k]{|a|^{2k}} = |a|$ olur.

n tək ($n = 2k + 1$) olduqda istənilən a ədədinin n -ci dərəcədən yeganə həqiqi kökü olduğundan bu halda $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$ olur.

Nümunələr.

$\sqrt[4]{(-7)^4} = |-7| = 7$, $\sqrt[6]{(-\pi)^6} = |-\pi| = \pi$, $\sqrt[4]{(1 - \sqrt{3})^4} = |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

$\sqrt[8]{(x - 1)^8} = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \text{ olduqda} \\ 1 - x, & x < 1 \text{ olduqda} \end{cases}$

$\sqrt[3]{7^3} = 7$, $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$, $\sqrt[7]{x^7} = x$, $\sqrt[3]{(x - 1)^3} = x - 1$

15 > Hesablayın.

a) $3\sqrt[4]{(-2)^4}$ b) $\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[3]{(-3)^3}$ c) $\sqrt[6]{(-8)^2}$ d) $2\sqrt[3]{(-4)^3}$ e) $\sqrt{(-7)^2}$

16 > Sadələşdirin: a) $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ ($x > 0$) b) $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ ($x < 0$)

17 > Sadələşdirin. a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2} - 1)^4}$ b) $\sqrt[3]{(\sqrt{2} - 3)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2} - 3)^4}$

18 > $1 < x < 2$ olduqda sadələşdirin: $\sqrt[3]{(x - 1)^3} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

19 > Ədədləri artan sıra ilə düzün: a) $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[4]{15}$, 2 b) $\sqrt[5]{9}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[5]{3}$

20> Dəyişənin hansı qiymətlərində bərabərlik doğrudur?

a) $\sqrt[3]{x+1} = 3$ b) $\sqrt[4]{x-1} = 2$ c) $\sqrt[6]{x-7} = -1$ d) $\sqrt[5]{x-3} = -2$

21> Tənlikləri həll edin.

a) $x^3 = 64$ b) $x^6 = -16$ c) $x^4 = 81$ d) $\frac{1}{8}x^4 - 2 = 0$ e) $\frac{1}{2}x^5 + 16 = 0$

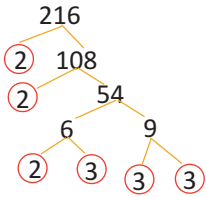
Nümunə 1) $x^3 = 27$ *tək dərəcəli tənliyinin bir həqiqi kökü var:* $x = \sqrt[3]{27} = 3$

2) $x^4 = -81$ *Həqiqi kökü yoxdur, çünki cüt dərəcədən qüvvət mənfəi ədədə bərabər ola bilməz.*

3) $x^4 = 16$ *iki həqiqi kökü var:* $x = \pm\sqrt[4]{16}$ $x = \pm 2$

Tətbiq tapşırıqları

22> a) Ədədlərin sadə vuruqlarını üç eyni qrupa ayırmaqla hər hansı ədədin kubu şəklində yazın.



$$216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6^3$$

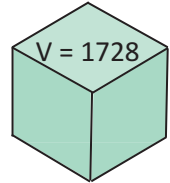
1) 216 2) 512 3) 1000 4) 2744

b) Ədədlərin sadə vuruqlarını iki eyni qrupa ayırmaqla hər hansı ədədin kvadratı şəklində yazın.

1) 144 2) 225 3) 484 4) 256

23> 1) Sadə vuruqlarına ayrılışdan istifadə etməklə şəkildə göstərilmiş kubun tilinin uzunluğunu tapın.

2) Həcmi 64 m^3 olan kubun tam səthinin sahəsini tapın.



24> **Biologiya.** Ağacın hündürlüyünü $h \approx 35 \sqrt[3]{d^2}$ düsturu ilə təxmini müəyyən etmək olar. Burada d ağacın gövdəsinin diametri, h isə hündürlüyüdür. Gövdəsinin diametri 1,1 m olan ağacın hündürlüyü təqribən neçə metrdir? Parkda, bağda uyğun ölçmələri aparmaqla düsturun doğruluğunu yoxlayın.

25> **Həndəsə.** Kürənin həcmi $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ düsturu ilə hesablanır. Həcmi 528 m^3 olan kürənin radiusunu yüzdəbir dəqiqliklə hesablayın.

26> Təlləri 3 sm və 4 sm olan iki dəmir kub əridilərək, bir kub şəklinə salınmışdır. Bu kubun tilinin uzunluğunun təqribi qiymətini tapın. Nəticəni ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

LAYIHƏ

***n*-ci dərəcədən kökün xassələri**

$a \geq 0$ və $b \geq 0$, $m \geq 2$ və $n \geq 2$ natural ədəd olduqda *n*-ci dərəcədən kök üçün cədvəldə verilən xassələr doğrudur.

Riyazi yazılış	Xassə	Nümunə
1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	Mənfi olmayan vuruqların hasilinin <i>n</i> -ci dərəcədən kökü bu vuruqların <i>n</i> -ci dərəcədən kökləri hasilinə bərabərdir.	$\sqrt[3]{27 \cdot 64} =$ $= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64}$ $= 3 \cdot 4 = 12$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Surəti mənfi olmayan, məxrəci isə müsbət olan kəsrin <i>n</i> -ci dərəcədən kökü surət və məxrəcin <i>n</i> -ci dərəcədən kökləri nisbətinə bərabərdir.	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$	Kökün üstünü və kökaltı ifadənin qüvvət üstünü eyni bir natural ədədə vursaq və ya bölsək, kökün qiyməti dəyişməz.	$\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$
4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	Kökün qüvvəti kökaltı ifadənin qüvvətinin kökünə bərabərdir.	$(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
5. $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = a$	Kökədən kök almaq üçün kökaltı ifadə saxlanılır, köklərin üstləri vurulur	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

Öyrənmə tapşırıqları

27 > İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $\sqrt{25 \cdot 64}$ b) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$ d) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ e) $\sqrt[5]{\frac{1}{32} \cdot 243}$

28 > Hesablayın. a) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$ d) $\frac{4\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{0,1}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{81}}{3\sqrt[3]{3}}$

29 > Hesablayın. a) $\sqrt[4]{32 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 27}$ b) $\sqrt[4]{8 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 27}$ c) $\sqrt[5]{16 \cdot 9} \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 27}$

LAYIHƏ

- 30>** Xassə 1 və Xassə 2-də verilən eynilikləri sağdan sola oxuduqda üstləri bərabər olan kökləri vurma və bölmə qaydaları alınır. Bu qaydalarda buraxılmış sözləri tamamlayın.
- 1) Üstləri olan kökləri bir-birinə vurmaq üçün kökaltı ifadələri kökün üstünü əvvəlki kimi kafidir.
- 2) Üstləri olan kökləri bir-birinə bölmək üçün bölüb, kökün üstünü

- 31>** İfadənin qiymətini hesablayın.

Nümunə: $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{54 \cdot 32} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot 32} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

- a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{200}$ b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ c) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ d) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$
- e) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13,5}$ f) $\sqrt[4]{80} \cdot \sqrt[4]{125}$ g) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{162}$ h) $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{96}$

- 32>** $a \geq 0, b \geq 0$ olduqda $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ bərabərliyinin aşağıdakı isbatını tamamlayın.

Təklif	Əsası
1. $a \geq 0, b \geq 0$	1. verilir
2. $\sqrt[n]{a} \geq 0, \sqrt[n]{b} \geq 0$	2.
3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$	3.
4. $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n$	4. Hasilın qüvvəti
5. $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$	5.
6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	6.

- 33>** İfadənin qiymətini hesablayın.

- a) $(\sqrt{8} - \sqrt{4,5}) \cdot \sqrt{2}$ b) $(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{4}$ c) $\frac{\sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ d) $\frac{\sqrt[5]{486} - \sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$
- e) $(\sqrt[4]{8} - 2 \cdot \sqrt[4]{0,5}) \cdot \sqrt[4]{2}$ f) $(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{16}) : \sqrt[3]{2}$ g) $(\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{121,5}) \cdot \sqrt[5]{2}$

- 34>** Hesablayın.

- a) $\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}$ b) $\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}}$ c) $\sqrt[5]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 + \sqrt{17}}$

- 35>** Verilmiş ifadələrin qiymətlərini müqayisə edin.

- a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ və $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{64}$ və $\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt[4]{2^8}$, $\sqrt[4]{2^8}$ və $\sqrt[8]{2^8}$

36> Dəyişənlərin müsbət qiymətlər aldığını bilərək sadələşdirin.

- a) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$ d) $\sqrt[9]{x^6}$ e) $\sqrt[2n]{a^{4n}}$
 f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}$ g) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{c^5}}$ h) $\sqrt[5]{\sqrt{n}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{z^{12}}}$ j) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{y^6}}$ k) $\sqrt[5]{\sqrt{n^5}}$

37> Dəyişənlərin müsbət qiymətlər aldığını bilərək sadələşdirin.

- a) $(\sqrt[6]{x^2})^3$ b) $(\sqrt[4]{a^2})^2$ c) $(\sqrt{ab})^3 \cdot \sqrt{a^3b^3}$ d) $\sqrt[4]{z^2} \cdot \sqrt[4]{81z^6}$
 e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ f) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ g) $\sqrt[n]{a^n} \cdot (\sqrt[n]{a})^n$ h) $\frac{(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y})^3}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}$

38> Uzunluğu $\sqrt[4]{8}$ m, eni $\sqrt[4]{2}$ m olan düzbucaqlının sahəsini tapın.

39> n tək ədəd olduqda 1-ci və 2-ci xassələr a və b mənfi ədədləri üçün də doğrudur. Bunu nümunələr üzərində göstərin.

40> $\sqrt[3]{\frac{5}{64}}$ ədədi $\sqrt[3]{\frac{5}{256}}$ ədədindən neçə dəfə böyükdür?

41> Əməlləri yerinə yetirin.

- a) $(\sqrt[6]{8})^2$ b) $(\sqrt[4]{4})^2$ c) $-3 \cdot (\sqrt[4]{9})^2$ d) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{8})^2$

42> Sadələşdirin.

- a) $\frac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt{x^5y^3}}$ b) $\frac{\sqrt[4]{a^5b^{10}}}{\sqrt[4]{ab^2}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{n^4m}}{\sqrt[3]{nm^4}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{x^6z^3}}{\sqrt[4]{x^2z^3}}$

43> Kökdən azad edin. Çoxhədli şəklində yazın.

- a) $\sqrt[3]{(a+2)^6}$ b) $\sqrt[4]{(x-3)^8}$ c) $\sqrt[3]{(x^2-1)^3}$ d) $\sqrt[4]{(x^2+2)^4}$



Vuruğun kök işarəsi altından çıxarılması

Vuruğun kök işarəsi altından çıxarılmasında kökün xassələri və $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$ düsturları tətbiq edilir.



Nümunə a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[3]{a^5b^6}$ c) $\sqrt[4]{48a^6}$

Həlli.

- a) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
 b) $\sqrt[3]{a^5b^6} = \sqrt[3]{a^3b^6a^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{a^2} = ab^2\sqrt[3]{a^2}$
 c) $\sqrt[4]{48a^6} = \sqrt[4]{16 \cdot 3 \cdot a^4 \cdot a^2} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{3a^2} = 2|a|\sqrt[4]{3a^2}$

LAYIHƏ

44> Vuruğu kök işarəsi altından çıxarın.

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{24}$ c) $\sqrt[4]{32}$ d) $\sqrt[5]{128}$ e) $\sqrt[3]{\frac{108}{250}}$

45> Dəyişənlərin qiymətinin müsbət olduğunu qəbul edərək sadələşdirin.

a) $\sqrt{16x^3}$ b) $\sqrt[3]{27a^5}$ c) $\sqrt[6]{64a^7}$ d) $\sqrt[3]{54a^5b^7}$ e) $\sqrt{\frac{81a^2b^4}{3b}}$

46> Sadələşdirin. Dəyişənin mümkün qiymətlərini (DMQ) göstərin.

a) $\sqrt{36x^3}$ b) $\sqrt[4]{36x^5y^8}$ c) $\sqrt[5]{8xy^7} \cdot \sqrt[5]{16x^6}$ d) $\sqrt[3]{4yz^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2z^4}$
 e) $\sqrt[3]{\frac{x^6y^8}{x^3y^4}}$ f) $\frac{\sqrt[5]{x^9y}}{\sqrt[5]{x^3y^8}}$ g) $\sqrt{\frac{9x^3}{32y^4}}$ h) $\sqrt[4]{x^3y} \cdot \sqrt[4]{\frac{16x^4y}{y}}$

47> Ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarmaqla sadələşdirin.

a) $2\sqrt[5]{y} + 7\sqrt[5]{y}$ b) $\sqrt[5]{64x^8} - x\sqrt[5]{2x^3}$ c) $-\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x}$ d) $\sqrt[3]{16y^4} - 3y\sqrt[3]{2y}$



Vuruğun kök işarəsi altına daxil edilməsi

İstənilən vuruğu tək dərəcədən qüvvətə yüksəldərək, həmin dərəcədən kök altına daxil etmək olar.

Müsbət vuruq cüt dərəcədən qüvvətə yüksəldilərək, həmin dərəcədən kök altına daxil edilir, vuruq mənfi olduqda isə əvvəlcə -1 ilə müsbət ədədin hasilı şəklində yazılır, müsbət vuruq kök altına daxil edilir, kökün qarşısında “ $-$ ” işarəsi saxlanılır.

n təkdirsə, $a = \sqrt[n]{a^n}$ n cütdürsə, $a \geq 0$ olduqda $a = \sqrt[n]{a^n}$
 $a < 0$ olduqda $a = -\sqrt[n]{a^n}$



Nümunə Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin.

a) $2\sqrt[3]{5}$ b) $\frac{3x}{\sqrt[4]{x}}$ c) $a \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{a^3}}$

Həlli. a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

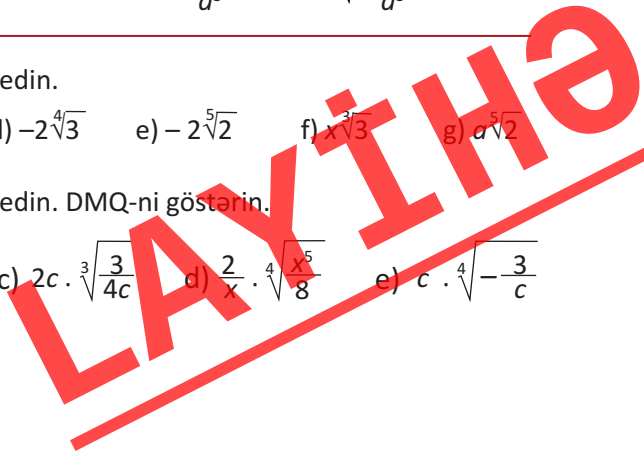
b) $\frac{3x}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{\frac{(3x)^4}{x}} = \sqrt[4]{81x^3}$ c) $a \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{a^3}} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{a^3}} = -\sqrt[4]{-3a}$

48> Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin.

a) $3\sqrt[3]{2}$ b) $2\sqrt[4]{2}$ c) $3\sqrt[5]{5}$ d) $-2\sqrt[4]{3}$ e) $-2\sqrt[5]{2}$ f) $x\sqrt[3]{3}$ g) $a\sqrt[5]{2}$

49> Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin. DMQ-ni göstərin.

a) $x \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x}}$ b) $x \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{x}}$ c) $2c \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4c}}$ d) $\frac{2}{x} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^5}{8}}$ e) $c \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{c}}$



50> Fərqi işarəsini müəyyən edin. a) $\sqrt[6]{2} - \sqrt[3]{10}$ b) $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{5} - \sqrt[6]{7}$

51> Ədədləri müqayisə edin. a) $\sqrt[3]{4}$ ilə $\sqrt[4]{3}$ b) $2\sqrt[3]{3}$ ilə $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt[4]{3}$ ilə $3\sqrt[4]{2}$

52> Eyni dərəcədən kökə gətirib, əməli yerinə yetirin.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[6]{4} : \sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt[3]{x} : \sqrt[5]{x}$

53> İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}}$ b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}}$

54> Sadələşdirin. a) $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[4]{a-b}} - \frac{\sqrt{a+\sqrt{ab}}}{\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}}$ b) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{b}}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}}$

55> Kökün xassələrini tətbiq edərək sadələşdirin.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6 b^3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}} (a \geq 0)$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} (a \geq 0)$

56> $a < 0$ olduqda hansı bərabərlik doğrudur?

a) $\sqrt[5]{a^5} = a$ b) $\sqrt[5]{a^5} = -a$ c) $\sqrt[4]{a^4} = -a$ d) $\sqrt[6]{a^6} = |a|$

57> Ədədləri artan sıra ilə düzün. a) $\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[3]{3}$. b) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{5}$.

58> Məxrəci irrasionalıqdan azad edin. a) $\frac{9}{\sqrt[4]{27}}$ b) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{4}{\sqrt[5]{8}}$

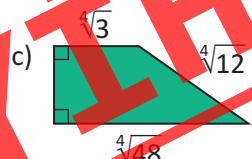
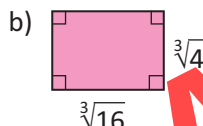
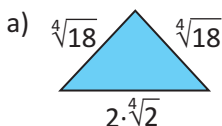
59> Əməlləri yerinə yetirin.

a) $\frac{\sqrt[4]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}-4} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{5}+4}}{\sqrt[3]{0,5}}$

60> Tənlikləri və ya bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\sqrt[3]{x} = 4$; $\sqrt[3]{x} > 4$; $\sqrt[3]{x} < 4$ b) $\sqrt[4]{x} = 2$; $\sqrt[4]{x} > 2$; $\sqrt[4]{x} < 2$
c) $\sqrt[5]{x-3} = 2$ d) $\sqrt[3]{x+5} = -1$ e) $\sqrt[4]{x+1} = 3$ f) $\sqrt[6]{x+2} = -5$

61> Fiqurların sahələrini tapın.



LAYIHƏ

Araşdırma

- 1) $\sqrt[3]{2^6}$ ifadəsinin qiymətini tapın.
- 2) $\frac{6}{3} = 2$ olduğunu nəzərə alıb, $2^{\frac{6}{3}}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.
- 3) 1-ci və 2-ci addımdakı nəticələri müqayisə edin.
- 4) m ədədi n ədədinə tam bölünmürsə, $a^{\frac{m}{n}}$ ifadəsinin qiymətini necə hesablamaq olar?

1-3**Rasional üstlü qüvvət**

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ bərabərliyinin (burada $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) $\frac{m}{n}$ kəsr ədəd olan hal üçün də doğru olduğunu qəbul etsək, tam üstlü qüvvət üçün doğru olan bütün xassələr, əsası müsbət olan kəsr üstlü qüvvət üçün də ödənilir.

Tərif a – müsbət ədəd, $\frac{m}{n}$ – kəsr ədəd olarsa (burada m - tam, n - natural ədəddir, $n \geq 2$), onda :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
Nümunə

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}; \quad 2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$m > 0$ olduqda ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) $\sqrt[n]{0^m} = 0$ olduğundan, $\frac{m}{n} > 0$ olduqda $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Mənfi ədədlər üçün kəsr üstlü qüvvətə baxılmır.

Məsələn, $(-4)^{\frac{1}{2}}$ ifadəsinin mənası yoxdur.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Rasional üstlü qüvvətləri köklərlə əvəz edin.

a) $5^{\frac{2}{3}}$; $3^{\frac{3}{4}}$; $8^{-\frac{3}{4}}$; $9^{0,25}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$; $y^{1,5}$; $8^{-0,5}$; $c^{-2,5}$ c) $3x^{\frac{1}{2}}$; $(8y)^{\frac{1}{3}}$; $(4c)^{-0,5}$

- 2 > Hesabi kökü rasional üstlü qüvvətlə əvəz edin (dəyişənlərin qiymətləri müsbətdir).

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\sqrt[5]{a^3}$; $\sqrt[6]{b^5}$; $\sqrt[3]{2x}$; $\sqrt[8]{2x^3}$

- 3 > Hesablayın.

a) $100^{\frac{1}{2}}$ b) $9^{-\frac{1}{2}}$ c) $8^{\frac{1}{3}}$ d) $27^{\frac{1}{3}}$ e) $81^{\frac{3}{4}}$ f) $2 \cdot 125^{\frac{1}{3}}$
g) $25^{\frac{1}{2}} \cdot 0,001^{\frac{1}{3}}$ h) $8^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{1}{3}}$ i) $16^{\frac{1}{4}} + 32^{\frac{1}{5}}$

- 4 > Lətif və Sevil $(-8)^{\frac{1}{3}}$ ifadəsinin qiymətini aşağıdakı kimi hesabladılar.

Lətif: $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ Sevil: $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

Bu nəticələrə görə "Mənfi ədədlər üçün kəsr üstlü qüvvətə baxılmır" fikrini izah edin.

- 5 > Hesablayın. a) $(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}$ b) $(8^{\frac{2}{3}} + 9^{\frac{3}{2}} + 125^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$
- 6 > Lalə və Ənvər kalkulyatorda $4,1^{2,5} \approx 34,0376557653$ olduğunu hesabladılar və sonra bu hesablamaları belə izah etdilər.
Lalənin izahı: $4,1^{2,5} = 4,1^{\frac{5}{2}} = 4,1 \cdot 4,1 \cdot \frac{4,1}{2}$ kimi yazıb hesablasaq təxminən 34 alınar.
Ənvərin izahı: $4,1^{2,5} = 4,1^{\frac{5}{2}}$. Bu isə hər biri 4,1-ə bərabər olan 5 sayda vuruğun hasilinin 2-ci dərəcədən kökü deməkdir.
Kimin izahı doğrudur?
- 7 > Ədədləri müqayisə edin.
a) $5^{\frac{1}{2}}$ ilə $3^{\frac{1}{2}}$ b) $0,1^{\frac{1}{2}}$ ilə $0,2^{\frac{1}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{2}}$ ilə $3^{\frac{1}{3}}$ d) $4^{\frac{1}{3}}$ ilə $4^{\frac{1}{4}}$
- 8 > Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası var?
a) $x^{\frac{1}{3}}$ b) $\sqrt[3]{x}$ c) $(x-1)^{-\frac{1}{4}}$ d) $(x+1)^{\frac{2}{3}}$



Rasional üstlü qüvvətin xassələri

Tam üstlü qüvvətin bizə məlum olan xassələri əsası müsbət həqiqi ədəd olan istənilən rasional üstlü qüvvət üçün də doğrudur.

Adı	Yazılışı	Nümunə
Qüvvətlərin hasili	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 5^2 = 25$
Qüvvətin qüvvəti	$(a^p)^q = a^{pq}$	$(3^{\frac{5}{2}})^2 = 3^{\frac{5}{2} \cdot 2} = 3^5 = 243$
Hasilin qüvvəti	$(ab)^p = a^p b^p$	$(16 \cdot 9)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 3 = 12$
Mənfi üstlü qüvvət	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$36^{-0,5} = \frac{1}{36^{0,5}} = \frac{1}{(6^2)^{0,5}} = \frac{1}{6}$
Sıfır üstlü qüvvət	$a^0 = 1$	$213^0 = 1$
Qüvvətlərin nisbəti	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$\frac{4^{\frac{5}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}} = 4^2 = 16$
Nisbətin qüvvəti	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4}$

Burada a və b müsbət həqiqi ədədlər, p və q istənilən rasional ədədlərdir.

$p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (n və l natural ədədlər, m və k tam ədədlərdir) olduqda $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ olduğunu isbat edək.

$$\begin{aligned}
 a^p \cdot a^q &= a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{nk}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{nk}} = \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{nk}} = \sqrt[nl]{a^{ml+nk}} = a^{\frac{ml+nk}{nl}} = \\
 &= a^{\frac{ml}{nl} + \frac{nk}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}} = a^{p+q}
 \end{aligned}$$

Digər xassələr də oxşar qayda ilə isbat edilir.

LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

9> Rasional üstlü qüvvət şəklində göstərin.

a) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$

b) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$

c) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}$

d) $a^{0,8} \cdot a^{-5,1} \cdot a^{7,3}$

10> Sadələşdirin

a) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{3}}$

b) $y : y^{\frac{2}{3}}$

c) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{2}{3}}$

d) $c^{1,2} : c^{-0,8}$

11> Rasional üstlü qüvvətin xassələrini tətbiq edərək sadələşdirin.

a) $(a^{\frac{5}{7}})^{1,4}$

b) $(m^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$

c) $(b^{0,8})^{0,5}$

d) $(c^{0,7})^{0,5} \cdot c^{0,15}$

e) $y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{2}{3}} : y^{-0,5}$

f) $(a^{-\frac{3}{4}})^{\frac{5}{9}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$

12> Hesablayın.

a) $2 \cdot 4^{0,4} \cdot 4^{\sqrt[5]{2}}$

b) $4^{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[6]{2}$

c) $25^{0,7} \cdot 5^{0,4}$

d) $3^{0,2} \cdot 3^{-0,25} \cdot 3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}}$

13> İfadənin qiymətini tapın.

a) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$

b) $(\frac{1}{8} \cdot 27^{-1})^{\frac{1}{3}}$

c) $(0,01 \cdot \frac{1}{49})^{-\frac{1}{2}}$

d) $(\frac{49}{144})^{\frac{1}{2}}$

14> Sadələşdirin. a) $(125 x^6)^{-\frac{2}{3}}$ b) $(27 x^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $(64 c^6)^{-\frac{1}{3}}$ d) $(\frac{1}{81} x^8)^{-\frac{1}{4}}$

15> Müəyyən ifadənin kvadratı şəklində göstərin ($x > 0$): $x; x^8; x^{\frac{1}{4}}; x^{-\frac{1}{3}}$

16> Müəyyən ifadənin kubu şəklində göstərin ($a > 0$): $a; a^6; a^{\frac{1}{4}}; a^{-\frac{1}{3}}; \sqrt{a}$

17> $234^{\frac{1}{2}} = a$ olduğunu bilərək, aşağıdakı ədədləri a ilə ifadə edin.

a) $2,34^{\frac{1}{2}}$

b) $0,0234^{\frac{1}{2}}$

c) $23400^{\frac{1}{2}}$

18> $x > 0, a > 0$ olduğunu bilərək, x dəyişənini a ilə ifadə edin.

a) $a = x^{\frac{1}{2}}$

b) $a = x^{-\frac{1}{3}}$

c) $a = x^{\frac{2}{3}}$

19> Tənlikləri həll edin. a) $x^{\frac{1}{2}} = 3$ b) $x^{-\frac{1}{3}} = 2$ c) $x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{4,4} = 9$

Nümunə. $x^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 8$

20> İfadəni rasional üstlü qüvvət kimi göstərin.

a) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$

c) $\sqrt[3]{x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}}$

21> Sadələşdirin.

$$a) x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$b) \frac{c^{0,4} \cdot \sqrt[5]{c}}{\sqrt{c}}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{5}}}$$

$$d) \frac{\sqrt[4]{x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{8}}}$$

22> Sadələşdirin.

$$a) (x^{\frac{1}{2}} - 3) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}$$

$$b) (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \cdot (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) \quad c) (y^{\frac{1}{3}} - 1) \cdot (y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 1)$$

23> Cəm şəklində göstərin.

$$a) (c^{\frac{3}{4}} + 2c^{\frac{1}{4}})^2 - 4c$$

$$b) \sqrt{x} + \sqrt{y} - (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^2$$

$$c) (c^{\frac{2}{9}} - 1)(c^{\frac{4}{9}} + c^{\frac{2}{9}} + 1) \cdot (c^{\frac{2}{3}} + 1)$$

Nümunə

$$\begin{aligned} (1 - a^{\frac{1}{2}})^2 + 2 \cdot a^{0,5} &= \\ = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot a^{\frac{1}{2}} + (a^{\frac{1}{2}})^2 + 2 \cdot a^{0,5} &= \\ = 1 + a. \end{aligned}$$

24> Vuruqlara ayırın.

$$a) b + b^{\frac{1}{2}}$$

$$b) (ab)^{\frac{1}{3}} - (ac)^{\frac{1}{3}}$$

$$c) c^2 - 3$$

$$d) a - b, (a > 0, b > 0)$$

$$e) x^{\frac{1}{2}} - 4$$

$$f) x^{\frac{1}{3}} + 8$$

$$g) x^{\frac{2}{3}} - 9$$

$$h) y - 27 \quad (y > 0)$$

25> Kəsri ixtisar edin.

$$a) \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$$

$$b) \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3}{x - 9}$$

$$c) \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a - b}$$

$$d) \frac{b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{6}}}$$

26> Dəyişənin verilmiş qiymətində ifadənin qiymətini tapın.

$$a) \frac{a - 4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} - 2a^{\frac{1}{2}}}, a = 81$$

$$b) \frac{c^{\frac{1}{2}} - 4c^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{3}} - 2c^{\frac{1}{6}}}, c = 64$$

27> İsbat edin ki, ifadənin qiyməti dəyişəndən asılı deyil.

$$a) \frac{(9^n - 5 \cdot 9^{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(27^{n-1} - 19 \cdot 27^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$$

$$b) \frac{(8^{n-2} - 7 \cdot 8^{n-3})^{\frac{1}{3}}}{(5 \cdot 16^{n-1} + 16^{n-2})^{\frac{1}{4}}}$$

Tətbiq tapşırıqları

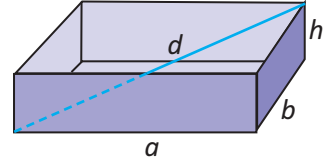
28> Çay, qəhvə və şokoladın tərkibində kofein vardır. $100 \cdot (0,5)^{\frac{n}{5}}$ ifadəsi ilə insan orqanizmində istifadədən n saat sonra qalan kofeinin miqdarını (%-lə) hesablamaq olar. Çay və ya qəhvə qəbul etdikdən:

1) a) $\frac{1}{2}$ saat; b) 1,5 saat sonra orqanizmdə neçə faiz kofein qalar?

2) Neçə saatdan sonra orqanizmdə qalan kofein 50% olar?

29> Həcmi 2187 m^3 olan kub şəkilli neft çəni hazırlanmışdır. Bir qutu boya 20 m^2 sahəni rəngləməyə çatarsa, bu çənin tam səthini rəngləmək üçün neçə qutu boya lazımdır?

30> Düzbucaqlı paralelepiped şəklində olan qutunun şəkildə göstərilmiş diaqonalının uzunluğunu $d = (a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}$ düsturuna görə tapmaq olar.



a) Uzunluğu $a = 20 \text{ sm}$, eni $b = 12 \text{ sm}$, hündürlüyü $h = 6 \text{ sm}$ olan qutunun göstərilən diaqonalının uzunluğunu tapın

b) Uzunluğu $a = 4 \text{ sm}$, eni $b = 3 \text{ sm}$, diaqonalı $d = 13 \text{ sm}$ olan qutunun hündürlüyünü (h) tapın.

31> Ölçüləri $2^{\frac{1}{3}} \text{ sm}$, $4^{\frac{1}{3}} \text{ sm}$, $8^{\frac{1}{3}} \text{ sm}$ olan düzbucaqlı paralelepipedin həcmi tapın. Bu paralelepipedin həcmi tili $5^{\frac{1}{4}} \text{ sm}$ olan kubun həcmi ilə müqayisə edin.

32> **Biologiya.** Bioloqlar canlılar üzərində müxtəlif istiqamətlərdə müqayisəli tədqiqatlar aparırlar. Məsələn, məməlilər sinfindən olan canlıların "səthinin sahəsini" (sm^2) təxmini olaraq $S \approx k \cdot m^{2/3}$ düsturu ilə hesablayırlar. Burada m canlınin kütləsi (qramla), k isə hər bir canlı üçün qəbul edilmiş sabit əmsaldır. Cədvəldə məməlilər sinfindən olan bəzi canlılar üçün k əmsalı verilmişdir.

Adı	Siçan	Pişik	İt	İnək	Dovşan	İnsan
k əmsalı	9,0	10,0	11,2	9,0	9,75	11,0

Kütləsi: a) 2 kq olan pişiyin; b) 12 kq olan itin; c) 6 kq olan dovşanın dərisinin səthi neçə kvadrat santimetrdir?

33> 1) Bir kvadrat çəkin. Sahəsini elə ədəd qəbul edin ki, onun perimetri:

a) rasional ədəd;

b) irrasional ədəd olsun.

2) Bir kub çəkin və həcmi elə ədəd qəbul edin ki, tam səthinin sahəsi:

a) rasional ədəd;

b) irrasional ədəd olsun.

34> Verilən düsturlara görə tələb olunan kəmiyyəti digərləri ilə ifadə edin.

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g}}$ olduqda m -i;

b) $R = \sqrt{d^2 + k^2}$ olduqda k -ni;

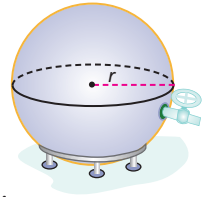
c) $K = \sqrt{1 - \frac{x^3}{u^3}}$ olduqda u -nu;

d) $A = \sqrt{1 + \frac{a^3}{b^3}}$ olduqda b -ni;



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > İfadənin qiymətini tapın.
- a) $(\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32}) : \sqrt[3]{4}$ b) $(\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{0,5}) \cdot \sqrt[4]{2}$
- c) $\frac{4 - 3\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2}$ d) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}}{\sqrt{3} - \sqrt{8}}$
- 2 > Ədədləri artan sıra ilə düzün.
- a) $\sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[15]{30}$ b) $\sqrt[5]{4}, \sqrt[10]{25}, \sqrt[6]{3 \cdot \sqrt[5]{3}}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$
- 3 > Kəsrin məxrəcini irrasionallıqdan azad edin.
- a) $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{6}{\sqrt[5]{8}}$ c) $\frac{6}{\sqrt[4]{32 + \sqrt[4]{2}}}$ d) $\frac{9}{\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{3}}}$
- 4 > $A = \{ \sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{8}; \sqrt{2}; -4 \}$, $B = \{ \sqrt[3]{8}; -4; \sqrt[3]{5}; \sqrt{0,4} \}$ və
 $C = \{0,2; \sqrt[4]{\frac{4}{9}}; \sqrt[3]{7}; -4; \sqrt[3]{8}\}$ çoxluqlarından elə ikisini seçin ki :
a) fərqi irrasional ədədlərdən; b) kəsişməsi rəşional ədədlərdən ibarət olsun. Eyler-Venn diaqramı qurmaqla həll edin.
- 5 > Radiusu r olan kürənin həcmi $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ düsturu ilə hesablanır.
- a) Radiusu 1,5 m olan kürəşəkilli çənin həcmi hesablayın.
- b) Həcmi $\frac{28\pi}{3} \text{ m}^3$ olan kürəşəkilli çənin radiusunu tapın. Nəticəni ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.
- 6 > Hesablayın.
- a) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt[6]{2 + \sqrt{3}}}$ b) $\frac{\sqrt[6]{4 - \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}}$
- 7 > Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin.
- a) $2\sqrt[4]{3}$ b) $-3\sqrt[4]{2}$ c) $a\sqrt[4]{3}, a > 0$ d) $a\sqrt[4]{3}, a < 0$ e) $c\sqrt[4]{\frac{2}{c}}$ f) $c\sqrt[4]{-\frac{2}{c}}$
- 8 > Sadələşdirin.
- a) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{b^3\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[3]{b}}$
- 9 > Sadələşdirin:
- a) $\frac{a^{\frac{1}{6}} + 5}{25 - a^{\frac{1}{3}}}$ b) $\frac{b - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$



LAYIHƏ

10> Tənlikləri həll edin .

a) $0,5x^4 + 1 = 9$

b) $\sqrt[3]{2x-4} = 1$

c) $\sqrt[4]{3x+4} = 1$

11> Bərabərliklər üçün uyğunluğu müəyyən edin.

1. $\sqrt[4]{a^4} = a$ 2. $\sqrt[3]{a^3} = -a$ 3. $\sqrt[6]{a^6} = |a|$

a) a -nın istənilən qiymətlərində doğrudur.

b) Yalnız $a \geq 0$ olduqda doğrudur.

c) Yalnız $a = 0$ olduqda doğrudur.

12> $a < 0$ olduqda, sadələşdirin : $a^2 \cdot \sqrt{a^2} + \sqrt[3]{a^9} - 2\sqrt[4]{a^{12}}$

13> $\sqrt[8]{3} = a + 1$ olarsa, $(\sqrt[8]{3} + 1) \cdot (\sqrt[4]{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$ hasilini a ilə ifadə edin.

14> Tənlikləri həll edin.

a) $2x^3 - 1 = 15$

b) $\frac{1}{2}x^3 - 1 = 31$

c) $(x-1)^3 + 1 = 9$

15> Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası var?

a) $\sqrt[8]{x-3}$

b) $\sqrt[5]{x-1}$

c) $\sqrt[4]{2-x}$

d) $\sqrt[6]{-x}$

16> P manat pul mürəkkəb faiz artımı ilə t ildən sonra A manat olmuşdur. Bu zaman illik artımı $r = \left(\frac{A}{P}\right)^{1/t} - 1$ düsturu ilə hesablamaq olar.

a) Müştərinin banka qoyduğu 10 000[Ⓜ] əmanət 7 il ərzində 18 000[Ⓜ] olmuşdur. Bankın tətbiq etdiyi faiz artımını hesablayın. Cavabı ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırmaqla yazın.

b) Başqa bir müştərinin 10 000[Ⓜ] əmanət isə 5 il ərzində 16 802[Ⓜ] olmuşdur. Bankın tətbiq etdiyi faiz artımını hesablayın. Cavabı ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırmaqla yazın.

c) Hansı seçimdə illik faiz artımı daha çoxdur?

17> Rəngli xanaların yerinə elə ədədlər yazın ki, bərabərlik doğru olsun.

$(5 + \sqrt[3]{\blacksquare})(5 - \sqrt[3]{\blacksquare}) = 21$

18> **Biologiya.** Bioloqlar $b \approx 0,01 \sqrt[3]{m^2}$ düsturundan məməli heyvanların beyin kütləsini hesablamaq üçün istifadə edirlər. Burada m heyvanın kütləsini, b isə beyinin kütləsini göstərir.

a) Kütləsi 27 kq olan itin; b) Kütləsi 200 kq olan qütb ayısının beyin kütləsini hesablayın.

LAYIHƏ

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

- ✓ Çevrə qövsünün dərəcə ölçüsünü və uzunluğunu hesablamağı;
- ✓ Çevrənin vətərləri haqqında teoremləri;
- ✓ Çevrə daxilinə çəkilmiş bucaqları;
- ✓ Çevrənin kəsənləri və toxunanları arasındakı bucaqları;
- ✓ Çevrəyə toxunanların xassələrini;
- ✓ Çevrəni kəsən parçaların uzunluqları haqqında teoremləri.



2-1

Mərkəzi bucaq. Çevrə qövsü

Mərkəzi bucaq. Təpə nöqtəsi çevrənin mərkəzində olan bucağa mərkəzi bucaq deyilir.

Şəkilə O nöqtəsi çevrənin mərkəzi olduqda $\angle AOB$ mərkəzi bucaqdır.

Çevrənin bir neçə radiusu çəkildikdə alınan orta q daxili nöqtəsi olmayan bütün mərkəzi bucaqların cəmi 360° -dir. Məsələn, şəkilə verilənlərə görə $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$ olar.

Çevrə qövsü. Çevrə üzərindəki hər hansı iki nöqtə onu iki qövsə ayırır: nöqtələr diametrin ucları deyilsə, böyük qövsə (major qövs) və kiçik qövsə (minor qövs). Çevrə üzərindəki iki nöqtə diametrin uc nöqtələri olarsa, hər iki qövs yarımçevrə olur.

Şəkiləki O mərkəzli çevrədə $\frown AB$ kiçik qövs, $\frown ACB$ isə böyük qövstür.

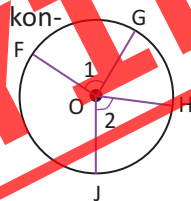
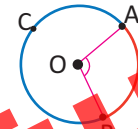
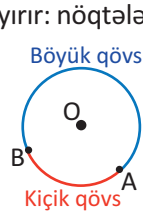
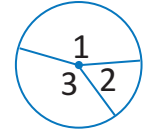
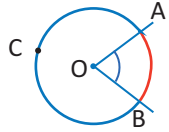
C nöqtəsi AB qövsünün hər hansı nöqtəsidirsə, onda $\frown ACB = \frown AC + \frown CB$.

Çevrə qövsünü xarakterizə edən kəmiyyətlərdən biri qövsün dərəcə ölçüsüdür. Qövsün dərəcə ölçüsü uyğun mərkəzi bucağın dərəcə ölçüsünə bərabərdir: $\frown AB = \angle AOB$

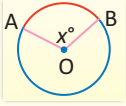
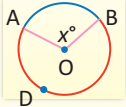
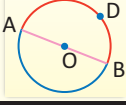
Çevrədə konqruent mərkəzi bucaqlara uyğun qövslər konqruentdir və tərsinə.

$\angle 1 \cong \angle 2$ olarsa, onda $\frown FG \cong \frown HJ$.

$\frown FG \cong \frown HJ$ olarsa, onda $\angle 1 \cong \angle 2$.



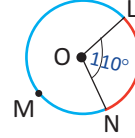
LAYIHƏ

Çevrə qövsləri və onların ölçüləri		
Qövslər	Ölçüləri	
Minor qövs, kiçik qövs	Minor qövsün dərəcə ölçüsü 180° -dən kiçikdir və uyğun mərkəzi bucağın dərəcə ölçüsünə bərabərdir: $\smile AB = \angle AOB$	
Major qövs, böyük qövs	Major qövsün dərəcə ölçüsü 180° -dən böyükdür və onun qiyməti 360° ilə uyğun minor qövsün fərqi bərabərdir: $\smile ADB = 360^\circ - \smile AB$	
Yarımçevrə	Yarımçevrənin dərəcə ölçüsü 180° -dir: $\smile ADB = 180^\circ$	

Nümunə. Mərkəzi O olan çevrədə $\angle LON = 110^\circ$ olarsa, LMN qövsünün dərəcə ölçüsünü tapın.

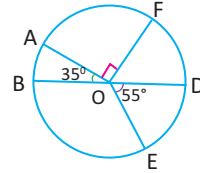
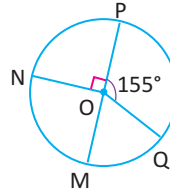
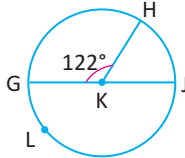
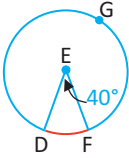
Həlli. $\smile LN$ minor qövsdür: $\smile LN = \angle LON = 110^\circ$

$\smile LMN$ major qövsdür: $\smile LMN = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$



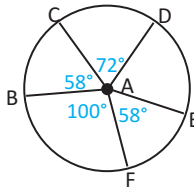
Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Şəkində verilənlərə görə minor, major qövslərin və ya yarımçevrənin adlarını yazın, dərəcə ölçülərini müəyyən edin.

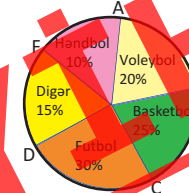


- 2 > Qövslərin dərəcə ölçülərini müəyyən edin. Hansı qövslər konqruyentdir?

1. $\smile BC$ və $\smile EF$
2. $\smile BC$ və $\smile CD$
3. $\smile CD$ və $\smile DE$
4. $\smile BFE$ və $\smile CBF$



- 3 > Dairəvi diaqrama görə hər bir məlumata uyğun qövsün dərəcə ölçüsünü tapın.



LAYIHƏ

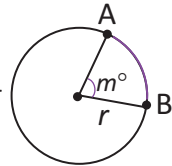


Qövsün uzunluğu

Mərkəzi bucaq tam bucağın (360° -nin) hansı hissəsidirsə, uyğun qövsün uzunluğu da çevrənin uzunluğunun həmin hissəsidir.

Radiusu r olan çevrənin uzunluğu $2\pi r$, 1° -li qövsün uzunluğu çevrənin uzunluğunun $\frac{1}{360}$ hissəsidir.

m° -li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğu çevrənin uzunluğunun $\frac{m}{360}$ hissəsini təşkil edir: $l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r$



Qövsün uzunluğu uzunluq ölçü vahidləri ilə (mm, sm, m və s.) ifadə edilir.

- 1. Nümunə.** Uzunluğu 72 sm olan çevrədə 45° -li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğunu tapın.

Həlli. 45° -li mərkəzi bucaq tam bucağın $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ hissəsi olduğundan, uyğun

qövsün uzunluğu çevrənin uzunluğunun $\frac{1}{8}$ -nə bərabərdir:

$$l = \frac{1}{8} \cdot 72 = 9 \text{ (sm)}$$

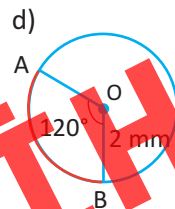
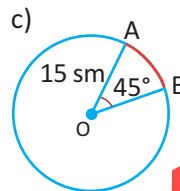
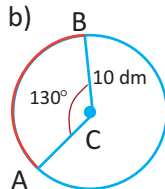
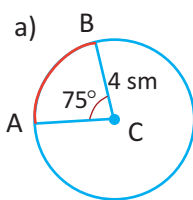
- 2. Nümunə.** Radiusu 15 sm olan çevrədə 72° -li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğunu hesablayın.

Həlli. $m = 72$, $r = 15$ qiymətlərini qövsün uzunluğu düsturunda yerinə yazaq:

$$l = \frac{72}{360} \cdot 2\pi \cdot 15 = 6\pi \approx 18,85 \text{ (sm)}$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 4 >** Şəkində verilən mərkəzi bucağa uyğun AB qövsünün uzunluğunu tapın. Nəticəni yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



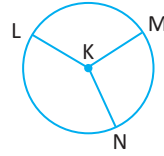
- 5 >** Çevrənin radiusuna və mərkəzi bucağına görə uyğun qövsün l uzunluğunu tapın. Cavabı yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

a) $r = 3 \text{ sm}$, $m = 45^\circ$

b) $r = 7 \text{ m}$, $m = 80^\circ$

c) $r = 8 \text{ m}$, $m = 120^\circ$

- 6 > Radiusu 5 sm olan çevrə L, M və N nöqtələri ilə 5 : 3 : 4 nisbətində qövlərə ayrılmışdır. Bu qövs-lərin: a) dərəcə ölçülərini; b) uzunluqlarını tapın.

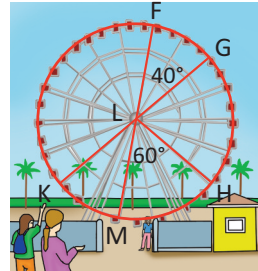


- 7 > Saatin dəqiqə əqrəbinin uzunluğu 20 sm-dir. Saat 12:00-dan 12:30-a qədər müddətdə bu saatin dəqiqə əqrəbinin uc nöqtəsi neçə santimetr uzunluğunda qövs cızır?



- 8 > FM karuselin diametridir və 30 m-ə bərabərdir. Şəkildə verilənlərə görə qövs-lərin uzunluqlarını hesablayın.

- | | |
|--------------|---------------|
| 1) $\sim FG$ | 5) $\sim FKH$ |
| 2) $\sim MF$ | 6) $\sim GHM$ |
| 3) $\sim GH$ | 7) $\sim MKG$ |
| 4) $\sim MH$ | 8) $\sim HGF$ |



2-2

Vətərin xassələri



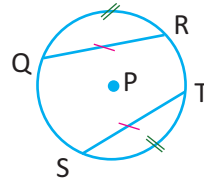
Konqruyent vətərlər haqqında teorem

Teorem 1. Çevrənin konqruyent qövs-lərini gərən vətərləri konqruyentdir.

$$\sim QR \cong \sim ST \text{ olarsa, } QR \cong ST$$

Tərs teorem 1. Çevrənin konqruyent vətərlərinin gərdikləri qövs-lər konqruyentdir.

$$QR \cong ST \text{ olarsa, } \sim QR \cong \sim ST$$



Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > a) Teorem 1-in isbatını araşdırın. Dəftərinizdə uyğun nöqtələri başqa hərflərlə işarələməklə teoremin isbatını yenidən yazın.

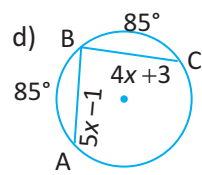
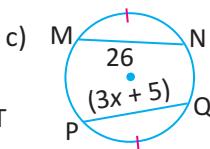
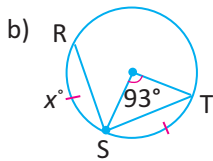
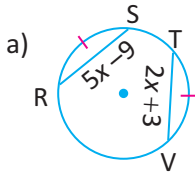
Teorem 1-in isbatı: $\sim QR \cong \sim ST$ olarsa, $QR \cong ST$

Təklif	Əsası
1. $\sim QR \cong \sim ST$	1. Verilir
2. $\angle QPR \cong \angle SPT$	2. Konqruyent qövs-lərə uyğun mərkəzi bucaqlar konqruyentdir
3. $QP \cong RP \cong SP \cong TP$	3. Çevrənin radiuslarıdır
4. $\Delta QPR \cong \Delta SPT$	4. TBT əlamətinə görə
5. $QR \cong ST$	5. Konqruyent üçbucaqların uyğun tərəfləridir

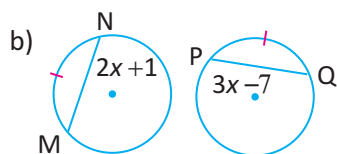
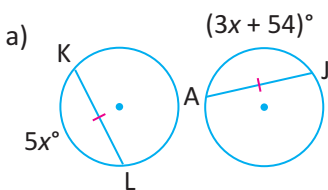


2 > Analoji qayda ilə tərs teorem 1-i isbat edin.

3 > Şəkində verilənlərə görə x dəyişənini tapın.



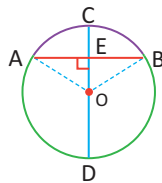
4 > Verilmiş çevrələrin konqruyent olduqlarını bilərək, x dəyişənini tapın.



Vətərin orta perpendikulyarı haqqında teorem

Teorem 2. Vətərə perpendikulyar olan diametr bu vətəri və uyğun qövsü yarıya bölür.

$CD \perp AB$ olarsa, $AE \cong EB$ və $\frown AC \cong \frown CB$

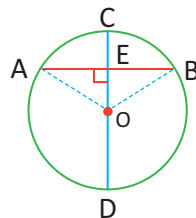


Teorem 2-nin isbatı.

Verilir: O mərkəzli çevrə, $CD \perp AB$

İsbat edin: $AE \cong EB$, $\frown AC \cong \frown CB$,

Çevrənin OA və OB radiuslarını çəkin.



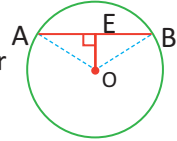
Təklif	Əsası
1. $AB \perp CD$	1. Verilir
2. $\angle AEO$ və $\angle BEO$ düz bucaqlardır.	2. Perpendikulyar düz xətlər düz bucaq altında kəsişirlər.
3. $OA \cong OB$	3. Çevrənin radiusları konqruyentdir.
4. $\triangle AOE \cong \triangle BOE$	4. Hipotenuz və katetə görə düzbucaqlı üçbucaqların konqruyentliyi
5. $AE \cong BE$	5. Konqruyent üçbucaqların uyğun tərəfləri
6. $\angle AOE \cong \angle BOE$	6. Konqruyent üçbucaqların uyğun bucaqları
7. $\frown AC \cong \frown CB$	7. Konqruyent mərkəzi bucaqlara uyğun qövslər konqruyentdir.

Nəticə 1. Çevrənin mərkəzindən keçən və vətərə perpendikulyar olan düz xətt həm vətəri, həm də onun qövsünü yarıya bölür.

Nəticə 2. Çevrənin mərkəzi vətərin orta perpendikulyarı üzərindədir. Vətərin orta perpendikulyarı çevrənin mərkəzindən keçir.

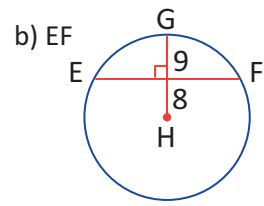
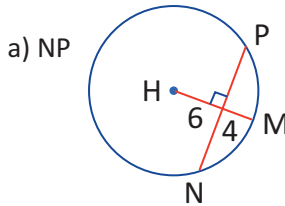
Nümunə. Radiusu 17 vahid olan çevrədə uzunluğu 30 vahid olan vətərin mərkəzdən məsafəsini tapın.

Həlli. $OE \perp AB$ olarsa, $AE = EB = 30 : 2 = 15$. $\triangle AOE$ -dən Pifaqor teoreminə görə $OE^2 = OA^2 - AE^2 = 17^2 - 15^2 = 64$, $OE = 8$



Öyrənmə tapşırıqları

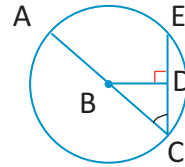
- 5 > Şəkilə verilənlərə görə H mərkəzli çevrədə vətərin uzunluğunu tapın.



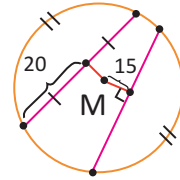
- 6 > Mərkəzi B nöqtəsində yerləşən çevrənin diametri 30 vahiddir.

$\angle ACE = 45^\circ$ olduğuna görə tapın:

- a) BD parçasının uzunluğunu;
b) DC parçasının uzunluğunu;
c) CE vətərinin uzunluğunu.

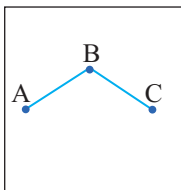


- 7 > Şəkilə verilənlərə görə çevrənin radiusunu tapın. M nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

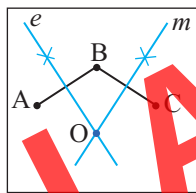


- 8 > Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən keçən çevrənin qurulması.

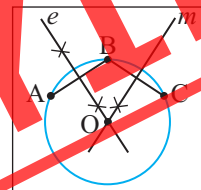
1. Bir düz xətt üzərində olmayan A, B, C nöqtələrini qeyd edin, AB və BC parçalarını çəkin.



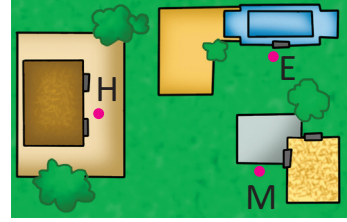
2. AB və BC parçalarının orta perpendikulyarlarını qurun. Orta perpendikulyarların kəsişmə nöqtəsini O hərfi ilə işarə edin.



3. O nöqtəsini mərkəz seçməklə A, B, C nöqtələrindən keçən çevrəni çəkin.



- 9 > Proqram təminatı və texniki dəstəklə məşğul olan şirkət planda göstərilən H, M və E şirkətlərinə xidmət göstərir və yeni ofis binası kirayələməyi planlaşdırır. Planı dəftərinizə köçürün və bu şirkətin yeni ofisini planda elə yerləşdirin ki, hər üç şirkətdən bərabər məsafədə olsun.



Mərkəzdən bərabər məsafədə olan vətərlər haqqında teorem

Teorem 3. Çevrənin konqruyent vətərləri mərkəzdən eyni məsafədədir.

$AB \cong CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ olarsa, $OE \cong OF$

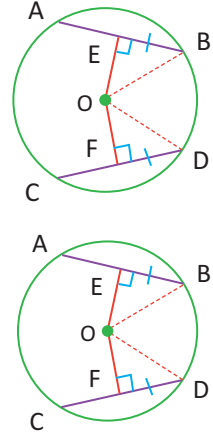
Tərs teorem 3. Çevrənin mərkəzindən eyni məsafədə olan vətərlər konqruyentdir.

Teorem 3-ün isbatı.

Verilir: O mərkəzli çevrə, $AB \cong CD$

$OE \perp AB$ $OF \perp CD$

İsbat edin: $OE \cong OF$



İsbatı (mətnlə): Çevrənin mərkəzindən keçən və vətərə perpendikulyar olan düz xətt vətəri və onun gərdiyi qövsü yarıya bölür. OE və OF konqruyent AB və CD vətərlərinin orta perpendikulyarlarıdır. Konqruyent vətərlərin yarıları olduqlarından, $EB \cong FD$. Çevrənin OB və OD radiuslarını çəkək:

$OB \cong OD$. Hipotenuz və katetə görə $\triangle OEB$ və $\triangle OFD$ düzbucaqlı üçbucaqları konqruyentdir. OE və OF bu konqruyent üçbucaqların uyğun tərəfləri olduqlarından: $OE \cong OF$. Teorem isbat olundu.

Nümunə. AD və BC vətərləri mərkəzdən bərabər məsafədədir: $OE = OF = 9$. Çevrənin radiusu 41 vahid olarsa, AD və BC-ni tapın.

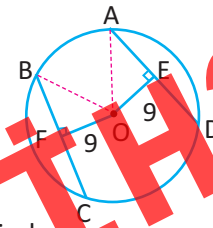
Həlli. AD və BC vətərləri mərkəzdən bərabər məsafədə olduqları üçün konqruyentdir: $AD \cong BC$.

$OE \perp AD$ və $OF \perp BC$. A və B nöqtələrini O nöqtəsi ilə birləşdirək.

$\triangle AEO$ düzbucaqlı üçbucağında: $AE^2 + OE^2 = OA^2$

$AE^2 + 9^2 = 41^2$; $AE^2 = 1600$; $AE = 40$; $AD = 2 \cdot AE = 2 \cdot 40 = 80$

$AD \cong BC$ olduğundan $BC = 80$.



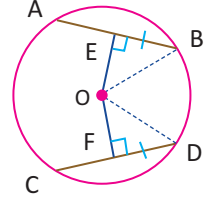
Öyrənmə tapşırıqları

10 > Tərs teorem 3-ü isbat edin.

Verilir: O mərkəzli çevrə, $OE \cong OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$

İsbat edin: $AB \cong CD$.

İsbat üçün plan: Üçbucaqların konqruentliyindən istifadə edin.

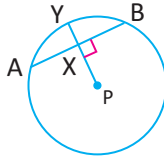


11 > P mərkəzli çevrədə verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

a) **Verilir:** $PY = 13$

$AB = 10$

Tapın: $BX = ?$; $PX = ?$

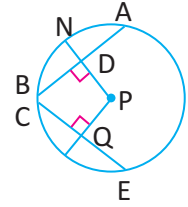


b) **Verilir:** $PD = 10$

$PQ = 10$

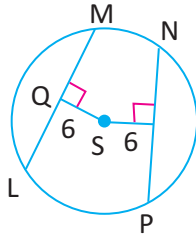
$QE = 24$

Tapın. $AB = ?$, $PN = ?$

12 > a) **Verilir:** Mərkəzi S olan çevrədə:

$LM = x + 8$ və $PN = 2x$

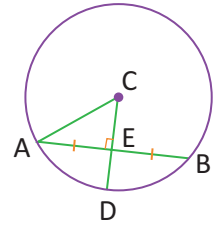
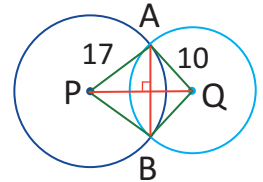
Tapın: çevrənin radiusunu



b) **Verilir:** Mərkəzi C olan çevrədə $CD \perp AB$

$AB = 8$ sm, $CD = 5$ sm

Tapın: $CE = ?$

13 > P və Q mərkəzli çevrələr A və B nöqtələrində kəşisir. $AP = 17$, $AQ = 10$, $AB = 16$ vahid olarsa, PQ -nü tapın.

14 > Radiusu 5 sm olan çevrədə uzunluqları 6 sm və 8 sm olan iki paralel vətər arasındakı məsafəni tapın. Neçə hal mümkündür?

15 > Uyğun şəkillər çəkməklə məsələləri həll edin.

a) Çevrənin diametri 30 sm, vətərin uzunluğu isə 18 sm-dir. Vətər çevrənin mərkəzindən hansı məsafədədir?

b) Çevrənin uzunluğu 12 sm olan vətəri mərkəzdən 8 sm məsafədədir. Çevrənin radiusunu tapın.

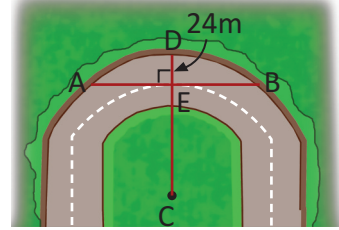
c) Çevrənin diametri 52 sm, vətərin mərkəzdən məsafəsi 10 sm-dir. Vətərin uzunluğunu tapın.

LAYIHƏ

16 > Açıq tipli sual. 1) Çevrənin bərabər olmayan iki vətərini və onların orta perpendikulyarlarını çəkin. Hansı vətər mərkəzə daha yaxındır: uzun vətər, yoxsa qısa vətər?

2) Müxtəlif radiuslu iki çevrə çəkin. Hər bir çevrənin elə vətərini çəkin ki, onların uzunluqları bərabər olsun. Bu vətərlərin gərdikləri minor qövlərə uyğun mərkəzi bucaqları göstərin. Hansı mərkəzi bucaq daha böyük oldu? Fikrinizi izah edin.

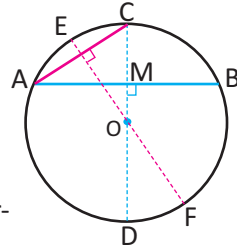
17 > Yolun əyrixətli hissəsi mərkəzi C nöqtəsində yerləşən və radiusu 120 m olan çevrənin bir hissəsidir. DE-nin uzunluğu 24 m olarsa, AB parçasının uzunluğunu tapın.



18 > Hər hansı çevrənin mərkəzini necə tapmaq olar?

Aşağıdakı addımları yerinə yetirməklə bu suala cavab verin.

- 1) Çevrənin AB vətərini çəkin.
- 2) AB vətərini orta M nöqtəsində kəsən və ona perpendikulyar olan CD diametrini çəkin.
- 3) AC vətərini və ona orta perpendikulyar olan EF diametrini çəkin.
- 4) CD və EF diametrlərinin kəsişmə nöqtəsini qeyd edin.



2-3

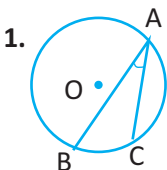
Çevrə daxilinə çəkilmiş bucaq

Tərəpi çevrə üzərində, tərəfləri çevrəni kəsən bucağa çevrə daxilinə çəkilmiş bucaq deyilir. Çevrə daxilinə çəkilmiş bucağa aid olan qövsə bu bucağın söykəndiyi qövs deyilir.

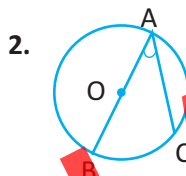
Şəkildə $\angle BAC$ O mərkəzli çevrənin daxilinə çəkilmiş bucaq, BC qövsü isə bu bucağın söykəndiyi qövstdür.

Aşağıda çevrə daxilinə çəkilmiş üç müxtəlif bucaq təsvir edilmişdir.

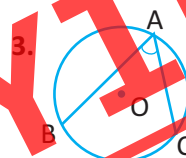
Çevrənin mərkəzi daxilə çəkilmiş bucağın xaricindədir.



Çevrənin mərkəzi daxilə çəkilmiş bucağın tərəfi üzərindədir.



Çevrənin mərkəzi daxilə çəkilmiş bucağın daxilindədir.



LAYIHƏ

Teorem 1. Çevrə daxilinə çəkilmiş bucağın dərəcə ölçüsü sۆykəndiyi qövsün dərəcə ölçüsünün yarısına bərabərdir: $\angle ABC = \frac{\text{AC}}{2}$

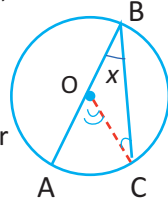
İsbatı (mətnlə). İsbatı 2-ci hal üçün yerinə yetirək. OB və OC çevrənin radiuslarıdır və $\triangle BOC$ bərabəryanlı üçbucaqdır. Deməli, $\angle B = \angle C$.

$\triangle BOC$ -nin xarici bucağı olduğundan $\angle AOC = \angle B + \angle C$.

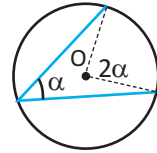
$\angle B = \angle C = x$ qəbul etsək, $\angle AOC = 2x$ olar.

Mərkəzi bucağın və sۆykəndiyi qövsün dərəcə ölçüləri bərabər olduğundan $\text{AC} = \angle AOC = 2x$. Buradan $\angle ABC = \frac{\text{AC}}{2}$.

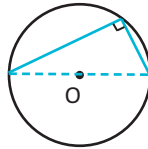
Teoremin isbatını ikisütunlu cədvəl şəklində yazın.



Nəticə 1. Çevrə daxilinə çəkilmiş bucaq uyğun mərkəzi bucağın yarısına bərabərdir.



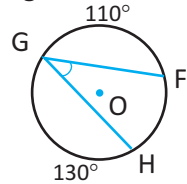
Nəticə 2. Diametrə (yarımçevrəyə) sۆykənən daxilə çəkilmiş bucaq düz bucaqdır.



Nümunə. $\angle GF = 110^\circ$, $\angle GH = 130^\circ$ olarsa, FGH bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

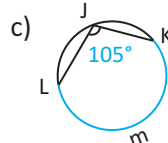
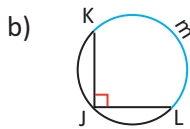
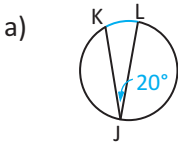
Həlli. $\angle FH = 360^\circ - (110^\circ + 130^\circ) = 120^\circ$ olduğundan

$$\angle FGH = \frac{\angle FH}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

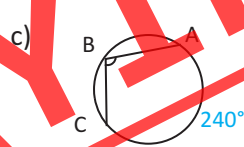
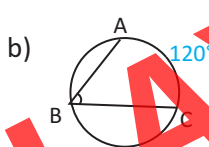
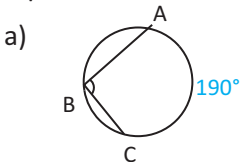


Öyrənmə tapşırıqları

1 > Bucağın sۆykəndiyi çevrə qövsünün dərəcə ölçüsünü tapın.



2 > Verilən çevrə qövsünə görə çevrə daxilinə çəkilmiş bucağın dərəcə ölçüsünü tapın.



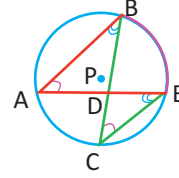
LAYIHƏ



Çevrə daxilinə çəkilmiş konqruent bucaqlar

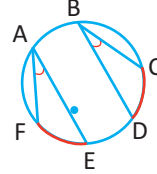
Nəticə 3. Eyni qövsə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar konqruyentdir.

$$\angle EAB \cong \angle BCE, \angle ABC \cong \angle AEC.$$



Nəticə 4. Söykəndikləri qövsləri konqruyent olan daxilə çəkilmiş bucaqlar konqruyentdir.

$$\sim FE \cong \sim CD \text{ olarsa, } \angle FAE \cong \angle DBC$$

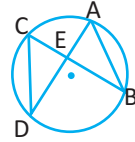


Öyrənmə tapşırıqları

3 > Verilir: $CD \cong AB$

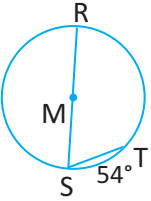
İsbat edin: $\triangle CDE \cong \triangle ABE$

İsbat üçün plan: iki bucaq və bir tərəfinə görə (BTB) üçbucaqların konqruyentlik əlamətindən istifadə edin.

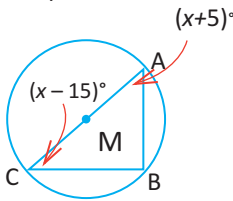


4 > Şəkilə verilənlərə görə tapın (M çevrənin mərkəzidir).

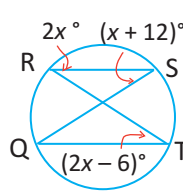
1) $\angle S$



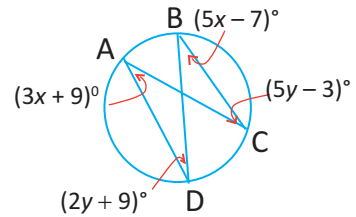
2) $\sim CB$



3) $\angle Q, \angle T$

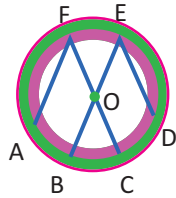


4) $\angle D, \angle B$



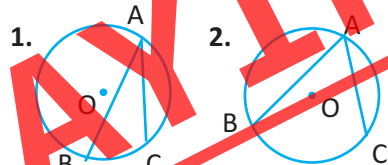
5 > 1) Kommersiya nişanları olaraq bir çox hallarda dairəşəkilli loqolardan istifadə edilir. Şəkilə iki daxilə çəkilmiş bucaq və mərkəzi bucaqla dizayn edilmiş loqo təsvir edilmişdir. a) Bu bucaqların adlarını yazın.

b) $\sim AC \cong \sim BD, \sim AF = 90^\circ, \sim FE = 45^\circ, \sim ED = 90^\circ$ olarsa, $\angle AFC$ və $\angle BED$ -ni tapın.



6 > Çevrə dörd nöqtə ilə 3:4:5:6 nisbətində bölünmüşdür. Təpələri həmin nöqtələrdə olan dördbucaqlının bucaqlarını tapın.

7 > Teorem 1-in isbatı 2-ci hal üçün səhifə 37-də verilmişdir. Bu teoremi daxilə çəkilmiş bucağın 1-ci və 3-cü vəziyyətinə görə də isbat edin.



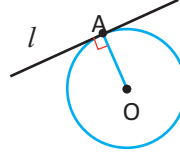
LAYIHƏ

2-4

Çevrəyə toxunan

Tərif. Çevrə ilə yalnız bir ortaq nöqtəsi olan düz xəttə çevrəyə toxunan deyilir.

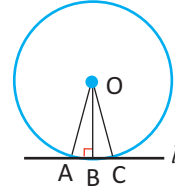
Teorem 1. Çevrəyə toxunan düz xətt (parça) toxunma nöqtəsinə çəkilmiş radiusa perpendikulyardır.



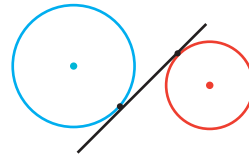
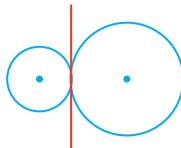
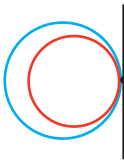
l düz xətti çevrənin toxunanıdır.
Deməli, $l \perp AO$

Tərs teorem (toxunanın əlaməti): Çevrənin nöqtəsindən keçən və bu nöqtəyə çəkilmiş radiusa perpendikulyar olan düz xətt çevrəyə toxunandır.

Teorem 1-in isbatı: l düz xətti çevrəyə toxunandırısa, deməli, çevrə ilə yeganə ortaq nöqtəsi vardır. Fərz edək ki, l düz xətti A toxunma nöqtəsinə çəkilmiş OA radiusuna perpendikulyar deyil. $OB \perp l$ çəkək və l düz xətti üzərində $AB = BC$ parçası ayıraq. Onda BTB əlamətinə görə $\triangle AOB \cong \triangle COB$ olduğundan $OC = OA = r$ olur. Deməli, C nöqtəsi də çevrənin üzərindədir. Yəni l düz xəttinin çevrə ilə iki ortaq nöqtəsi var. Bu isə şərtə ziddir. Deməli, $l \perp OA$.



Hər iki çevrəyə toxunan düz xəttə bu çevrələrin ortaq toxunanı deyilir. Çevrələr bir-birinə daxildən və ya xaricdən toxunmaqla bir nöqtədə eyni toxunana malik ola bilərlər. Həmçinin eyni toxunana müxtəlif nöqtələrdə də toxuna bilərlər.



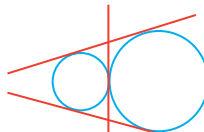
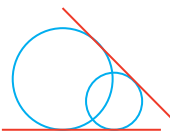
İki çevrənin bir neçə ortaq toxunanı da ola bilər və ya heç bir ortaq toxunanı olmaya da bilər.

2 ortaq toxunanı var.

3 ortaq toxunanı var.

4 ortaq toxunanı var.

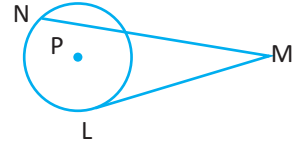
Ortaq toxunanları yoxdur.



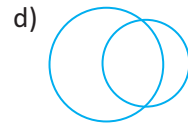
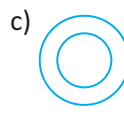
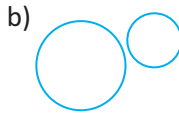
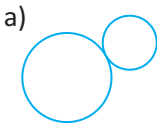
LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

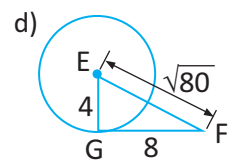
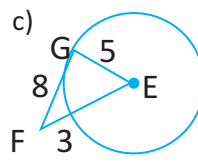
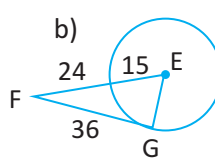
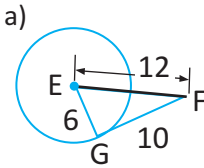
- 1 > Şəkilə görə izah edin: nə üçün MN-ə P mərkəzli çevrəyə toxunan demək olmaz, ML-ə isə toxunan demək olar?



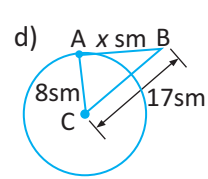
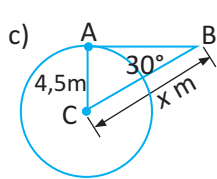
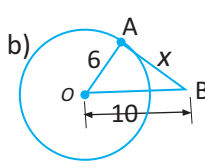
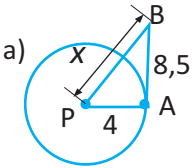
- 2 > Dəftərinizdə şəkildə verildiyi kimi çevrələr və onların ortaq toxunanlarını çəkin. Ortaq toxunanı olmayanları qeyd edin.



- 3 > Hansı şəkildə GF parçasının çevrəyə toxunan olduğunu söyləmək olar? Bu suala cavab vermək üçün Pifaqor teoreminə tərs teoremi yazın və məsələnin həllinə tətbiq edin. E nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

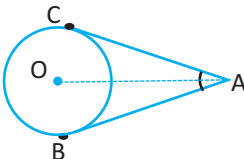


- 4 > AB-nin çevrəyə toxunan olduğunu bilərək, şəkildə verilənlərə görə x-i tapın.



Eyni nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanların xassəsi

Teorem 2. Eyni nöqtədən çevrəyə çəkilmiş iki toxunanın toxunma nöqtələrinə qədər olan parçaları konqruentdir və çevrənin mərkəzi toxunanların əmələ gətirdiyi bucağın tənböləni üzərində yerləşir.



AB və AC O mərkəzli çevrəyə A nöqtəsindən çəkilmiş toxunanlardır.
 $AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

LAYIHƏ

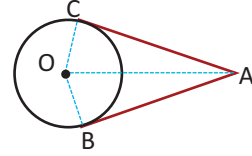
Öyrənmə tapşırıqları

- 5 > Teorem 2-ni isbat edin.

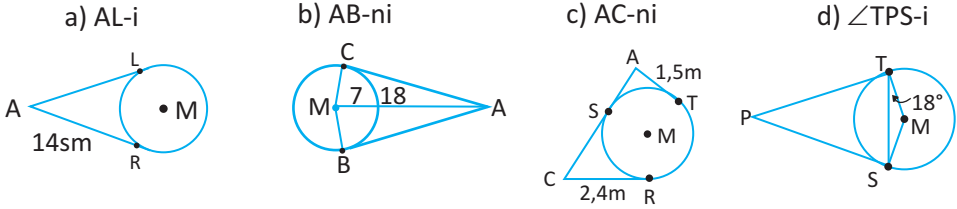
Verilir: AB və AC A nöqtəsindən O mərkəzli çevrəyə çəkilmiş toxunanların toxunma nöqtələrinə qədər olan parçalarıdır.

İsbat edin: $AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

İsbat üçün plan: Çevrənin OB və OC radiuslarını və AO parçasını çəkin, uyğun üçbucaqların konqruyentliyindən istifadə edin.

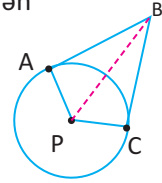


- 6 > Şəkində çevrə xaricindəki nöqtədən M mərkəzli çevrəyə toxunanlar çəkilmişdir. Verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

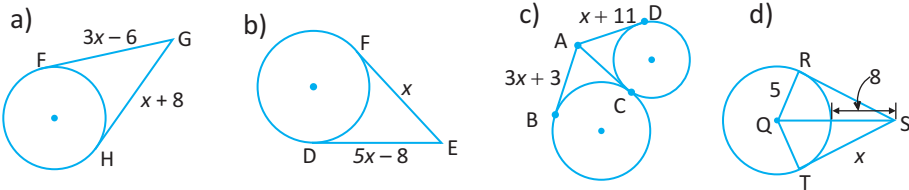


- 7 > B nöqtəsindən P mərkəzli çevrəyə toxunanlar çəkilmişdir. Verilən təkliflərdən hər birinin hansı əsasla doğru olduğunu yazın.

- a) $BA \cong BC$ b) $PA \cong PC$ c) $\triangle PAB \cong \triangle PCB$



- 8 > Çevrə xaricindəki nöqtədən çevrəyə toxunanlar çəkilmişdir. Verilənlərə görə dəyişəni tapın.

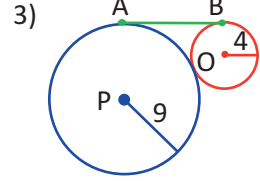
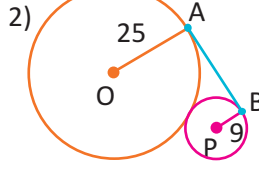
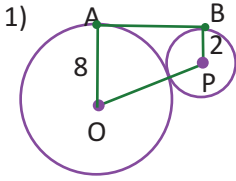


- 9 > Şəkində verilənlərə görə çoxbucaqlıların tərəflərinin uzunluqlarını və perimetrini tapın.



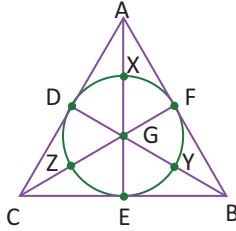
LAZIMƏ

- 10 > AB bir-birinə xaricdən toxunan O və P mərkəzli çevrələrin ortaq toxunanıdır. AB parçasının uzunluğunu tapın.

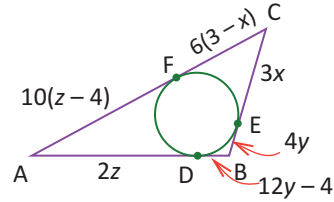


- 11 > Şəkilə verilənlərə görə $\triangle ABC$ -nin perimetrini tapın.

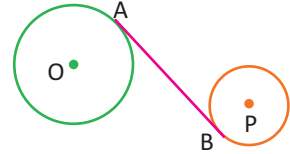
- a) $BY = CZ = AX = 2,5$
çevrənin diametri $EX = 5$



- b)



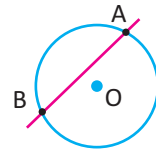
- 12 > AB O və P mərkəzli çevrələrə toxunandır. Çevrələrin radiusları uyğun olaraq 15 sm və 12 sm-dir. $OP = 36$ sm olarsa, AB parçasının uzunluğunu tapın.



2-5

Çevrənin toxunanı və kəsən arasında qalan bucaqlar

Çevrə ilə iki ortaq nöqtəsi olan düz xəttə çevrənin kəsəni deyilir. Şəkilə AB düz xətti çevrənin kəsənidir.



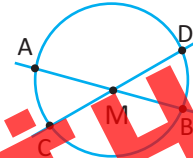
İki kəsənin arasındakı bucaqlar

Bucağın təpəsi çevrə daxilində yerləşir

Teorem 1. Çevrəni kəsən iki düz xəttin əmələ gətirdiyi bucağın təpəsi çevrə daxilində olarsa, onun dərəcə ölçüsü bu bucağın söykəndiyi qövslə onun qarşılıqlı bucağının söykəndiyi qövslün dərəcə ölçüləri cəminin yarısına bərabərdir.

$$\angle AMC = \frac{\text{qovsu } AC + \text{qovsu } DB}{2}$$

$$\angle AMD = \frac{\text{qovsu } AD + \text{qovsu } BC}{2}$$



LAYIHƏ

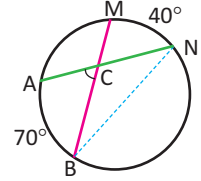
Nümunə.

Şəkilə verilənlərə görə $\angle ACB$ -nin dərəcə ölçüsünü tapın.

Həlli. Teorem 1-ə görə alırıq: $\angle ACB = \frac{\text{şəh}AB + \text{şəh}MN}{2}$

Doğrudan da, BN xəttini çəksək, $\angle ACB$ $\triangle BCN$ -in xarici bucağı olduğu üçün alırıq:

$$\angle ACB = \angle CBN + \angle CNB = \frac{\text{şəh}AB}{2} + \frac{\text{şəh}MN}{2} = \frac{70^\circ + 40^\circ}{2} = 55^\circ$$

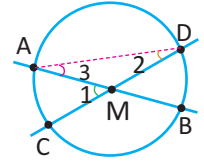


Öyrənmə tapşırıqları

1 > Teoremin isbatını dəftərinizdə tamamlayın.

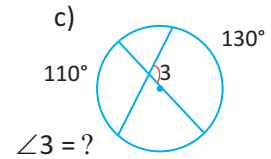
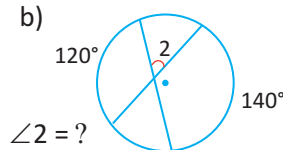
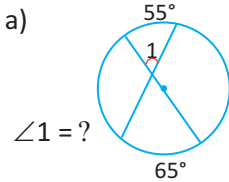
Verilir: AB və CD çevrənin kəsənləridir.

isbat edin: $\angle 1 = \frac{\text{şəh}AC + \text{şəh}DB}{2}$



Təklif	Əsası
1. $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$	1. $\angle 1$ $\triangle AMD$ -nin _____ bucağıdır
2. $\angle 2 = \frac{\text{şəh}AC}{2}$	2. _____
3. $\angle 3 = \frac{\text{şəh}DB}{2}$	3. _____
4. $\angle 1 = \frac{\text{şəh}AC + \text{şəh}DB}{2}$	4. _____

2 > Şəkilə verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

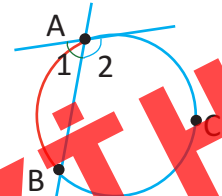


Toxunan və kəsənin arasındakı bucaqlar

Bucağın təpəsi çevrənin üzərində yerləşir

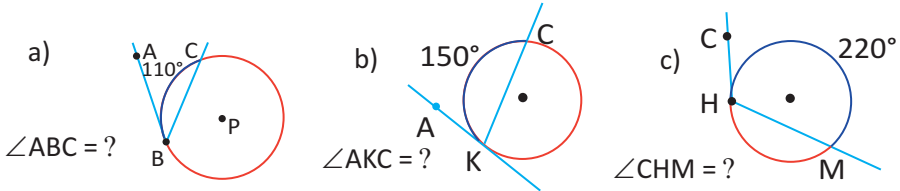
Teorem 2. Çevrənin toxunan və kəsəninin əmələ gətirdiyi bucağın təpə nöqtəsi çevrə üzərində olarsa, onun dərəcə ölçüsü bu bucağın söykəndiyi qövsün dərəcə ölçüsünün yarısına bərabərdir.

$$\angle 1 = \frac{\text{şəh}AB}{2} \quad \angle 2 = \frac{\text{şəh}ACB}{2}$$



LAYIHƏ

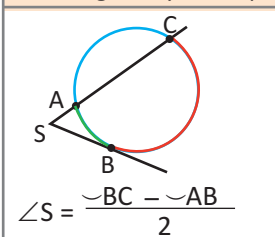
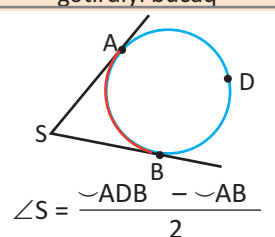
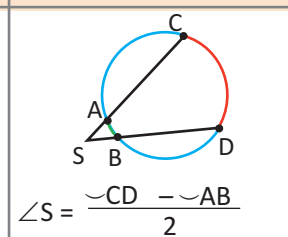
3 > Şəkində verilənlərə görə toxunanla kəsən arasındakı bucağı tapın.



Toxunan və kəsənin əmələ gətirdikləri bucaqlar

Bucağın təpəsi çevrə xaricində yerləşir

Teorem 3. Çevrədə kəsən və toxunanın, iki toxunanın, iki kəsənin əmələ gətirdiyi bucağın (təpəsi çevrənin xaricində yerləşirsə) dərəcə ölçüsü bucağın tərəflərinin arasında qalan qövslərin dərəcə ölçüləri fərqi yarıya bərabərdir.

1. Toxunan və kəsənin əmələ gətirdiyi bucaq	2. İki toxunanın əmələ gətirdiyi bucaq	3. İki kəsənin əmələ gətirdiyi bucaq
 $\angle S = \frac{\text{qövs } BC - \text{qövs } AB}{2}$	 $\angle S = \frac{\text{qövs } ADB - \text{qövs } AB}{2}$	 $\angle S = \frac{\text{qövs } CD - \text{qövs } AB}{2}$

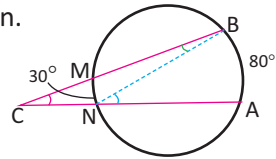
Nümunə.

Şəkində verilənlərə görə $\angle C$ -nin dərəcə ölçüsünü tapın.

Həlli. Teorem 3-ə görə alırıq: $\angle C = \frac{\text{qövs } AB - \text{qövs } MN}{2}$

Doğrudan da, BN xəttini çəksək, $\angle ANB$ $\triangle BCN$ -in xarici bucağı olduğu üçün alırıq: $\angle ANB = \angle C + \angle CBN$. Buradan

$$\angle C = \angle ANB - \angle CBN = \frac{\text{qövs } AB}{2} - \frac{\text{qövs } MN}{2} = \frac{80^\circ - 30^\circ}{2} = 25^\circ$$



LAYIHƏ

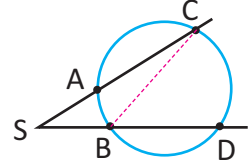
Öyrənmə tapşırıqları

- 4 > Teorem 3-ün isbatını 3-cü hal üçün tamamlayın, 1-ci və 2-ci hallar üçün isə özünüz yazın.

3. İki kəsənin əmələ gətirdiyi bucaq

Verilir: SC və SD çevrənin kəsənləridir.

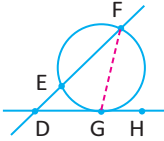
İsbat edin: $\angle S = \frac{1}{2}(\sim CD - \sim AB)$



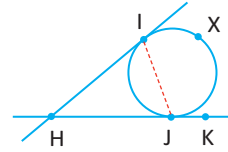
İkisütunlu cədvəllə isbatı:

Təklif	Əsası
1. $\angle CBD = \angle CSB + \angle SCB$	1. $\angle CBD$ $\triangle SBC$ -nin xarici bucağıdır.
2. $\angle CBD = \frac{1}{2} \sim CD$	2. _____
3. $\angle SCB = \frac{1}{2} \sim AB$	3. _____
4. $\angle CSB = \angle CBD - \angle SCB$	4. _____
5. $\angle CSB = \frac{1}{2} \sim CD - \frac{1}{2} \sim AB$	5. _____

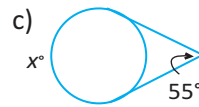
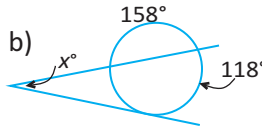
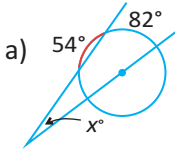
1. Kəsən və toxunanın əmələ gətirdiyi bucaq



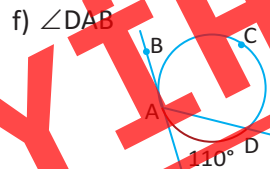
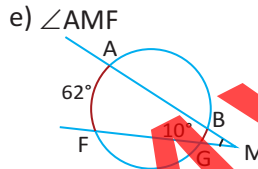
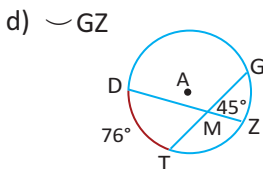
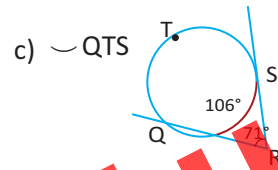
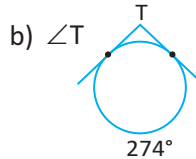
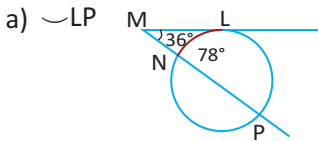
2. İki toxunanın əmələ gətirdiyi bucaq



- 5 > x-lə işarə edilmiş bucağı və ya qövsü tapın.

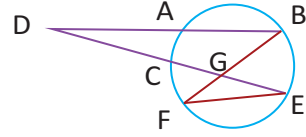


- 6 > Tələb edilən bucağı və ya qövsü tapın.

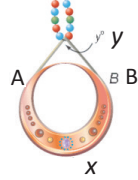


LAYTHA

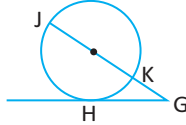
- 7 > Verilir: $\sphericalangle AB = 108^\circ$, $\sphericalangle FE = 118^\circ$,
 $\sphericalangle EGB = 52^\circ$, $\sphericalangle EFB = 30^\circ$
 Tapın: a) $\sphericalangle AC$ b) $\sphericalangle CF$ c) $\sphericalangle EDB$



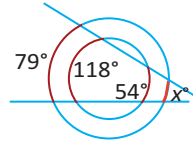
- 8 > Dairəvi şəkildə olan medalyonun ipləri uyğun çevrənin toxunanlarıdır. x -lə işarələnmiş qövs 220° olarsa, iplərin yaratdığı bucağın dərəcə ölçüsünü tapın.



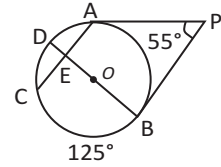
- 9 > 1) JK çevrənin diametri, GH isə toxunanıdır. a) $\sphericalangle G$ -nin qiymətinin dəyişmə intervalını izah edin.
 b) $\sphericalangle G = 32^\circ$ olarsa, $\sphericalangle HK$ və $\sphericalangle HJ$ -ni tapın.



- 2) Şəkildə konsentrik çevrələr təsvir edilmişdir. Verilənlərə görə x -i tapın.



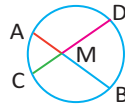
- 10 > Verilir: PA və PB toxunanlar, BD diametrdir.
 $\sphericalangle APB = 55^\circ$, $\sphericalangle CB = 125^\circ$
 Tapın: a) $\sphericalangle AB$ b) $\sphericalangle DEC$ c) $\sphericalangle AD$ d) $\sphericalangle PBD$ e) $\sphericalangle PAC$



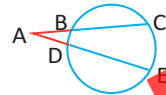
2-6

Çevrəni kəsən parçaların uzunluqları

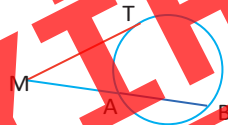
Teorem 1. Çevrənin iki vətəri kəşirsə, kəsişmə nöqtəsinin birinci vətərdən ayırdığı parçaların hasili, ikinci vətərdən ayırdığı parçaların hasilinə bərabərdir. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$



Teorem 2. A nöqtəsindən çevrəni uyğun olaraq B, C və D, E nöqtələrində kəsən iki düz xətt çəkilərsə, $AC \cdot AB = AE \cdot AD$ bərabərliyi doğrudur.



Teorem 3. M nöqtəsindən çevrəni A və B nöqtələrində kəsən düz xətt və çevrəyə T nöqtəsində toxunan çəkilmişsə, $MT^2 = MA \cdot MB$ bərabərliyi doğrudur.

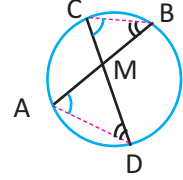


LAYIHƏ

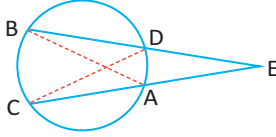
Öyrənmə tapşırıqları

1 > Teorem 1-in isbatını tamamlayın.

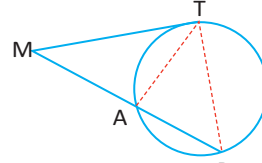
Təklif	Əsası
1. $\angle A \cong \angle C$	1. Eyni qövsə _____
2. $\angle D \cong \angle B$	2. Eyni _____
3. $\triangle AMD \sim \triangle CMB$	3. _____
4. $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$	4. _____
5. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$	5. _____



2 > Teorem 2-ni verilən şəklə görə yenidən yazın və isbat edin.

Verilir: EB və EC kəsənlərdir.**İsbat edin:** $EB \cdot ED = EC \cdot EA$ **İsbat üçün plan:** $\triangle ABE$ və $\triangle DCE$ -nin oxşarlığından istifadə edin.

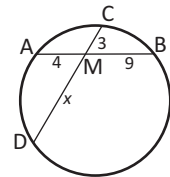
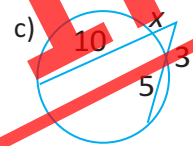
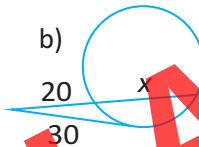
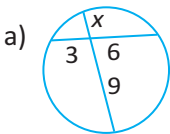
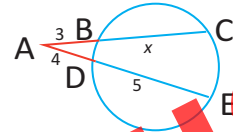
3 > Teorem 3-ü isbat edin.

Verilir: MT toxunan, MB isə çevrənin kəsənidir.**İsbat edin:** $MT^2 = MA \cdot MB$ **İsbat üçün plan:** $\triangle MTA$ və $\triangle MBT$ -nin oxşarlığından istifadə edin.

4 > Verilən nümunələri araşdırın. Çevrəni kəsən parçaların uzunluqlarına aid tapşırıqları həll edin

Nümunə. Çevrənin AB və CD vətərləri M nöqtəsində kəsişir.

AM = 4, MB = 9, CM = 3 olarsa, MD-ni tapın

Həlli. Teorem 1-ə görə $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Verilənləri bərabərlikdə yerinə yazaq: $4 \cdot 9 = 3 \cdot MD$. Buradan $MD = 12$ **Nümunə.** Şəkildə verilənlərə görə BC vətərinin uzunluğunu tapın.**Həlli.** Teorem 2-yə görə $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.Buradan alırıq: $4 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot (3 + x)$ $x = 9$ 

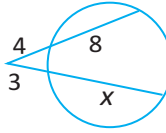
LAYİHƏ

5 > Verilənlərə görə dəyişəni tapın.

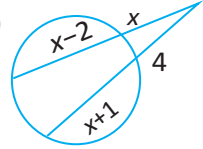
a)



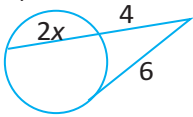
b)



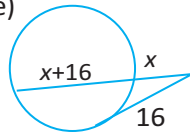
c)



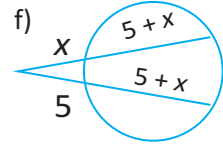
d)



e)

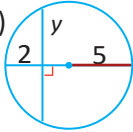


f)

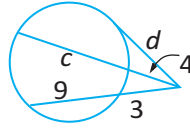


6 > Verilənlərə görə dəyişəni tapın.

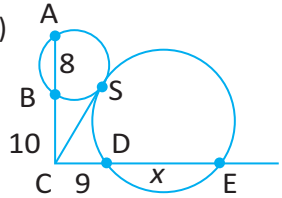
a)



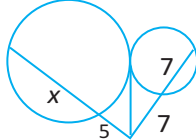
b)



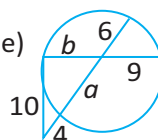
c)



d)

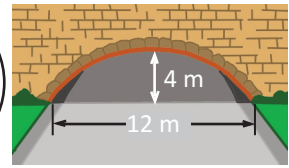
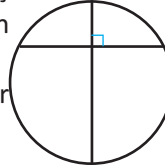


e)



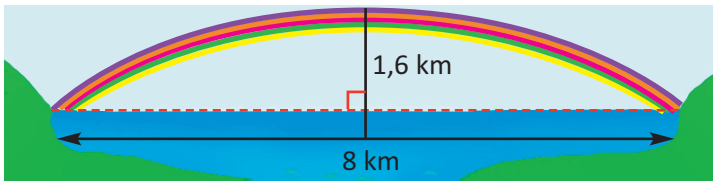
7 > Tunelin planı üzərində verilmiş ölçülərə görə qövsvari hissəyə uyğun çevrənin radiusunu tapın.

Göstəriş: uyğun sxematik təsvir üzərində ölçüləri yazın və həll edin.



8 > Göy qurşağı əslində tam bir çevrədir. Biz isə yalnız onun bir hissəsini, qövsünü görə bilirik. Şəkildə verilən ölçülərə görə tapın:

- a) göy qurşağı qövsünə uyğun çevrənin radiusunu;
b) göy qurşağı çevrəsinin uzunluğunu.



9 > **Ölçmə.** Leyla ağacdən 4 m məsafədə, Kənan isə ağacın dibində dayanmışdır. Leyla ilə Kənan arasındakı məsafə 5 m-dir. Bu situasiyanı sxematik təsvir edin və ağacın diametrini tapın. Sxemdə Leyla və Kənanın durduğu nöqtələri birləşdirən parçanı çevrənin toxunanı qəbul edin.



LAYIHƏ

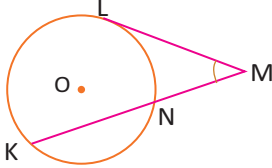


Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > Verilir: ML O mərkəzli çevrənin toxunanı, MK isə kəsəndir.

$$\sim LN : \sim NK : \sim KL = 3 : 4 : 5$$

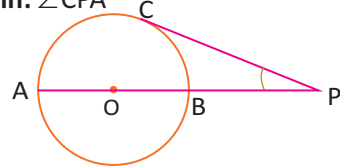
Tapın: $\angle LMK$



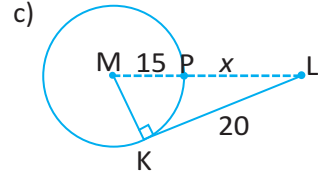
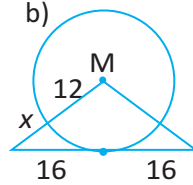
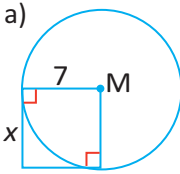
- 2 > Verilir: CP O mərkəzli çevrənin toxunanı, AP isə diametri üzərində saxlayan kəsəndir.

$$\sim AC : \sim CB : = 7 : 2$$

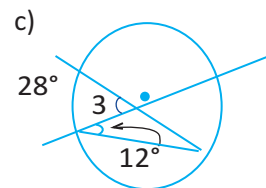
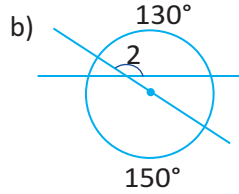
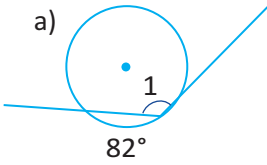
Tapın: $\angle CPA$



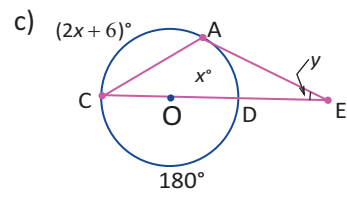
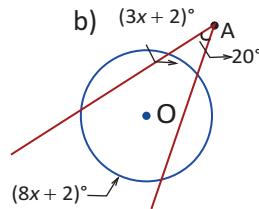
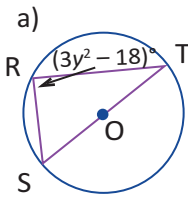
- 3 > Verilənlərə görə dəyişəni tapın. M nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



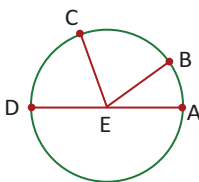
- 4 > Rəqəmlərlə işarələnmiş bucaqların dərəcə ölçülərini tapın.



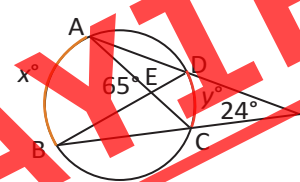
- 5 > Verilənlərə görə dəyişəni tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



- 6 > Diametri 12sm olan E mərkəzli çevrədə $\angle AEB : \angle BEC : \angle CED = 2 : 3 : 4$. Bu bucaqlara uyğun qövsələrin uzunluqlarını tapın.

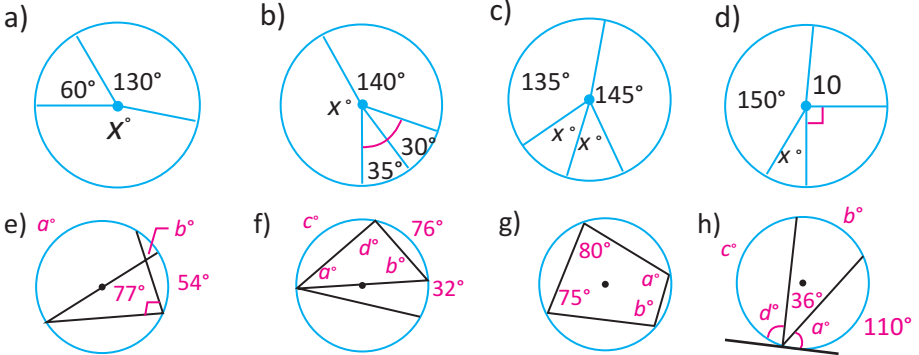


- 7 > Şəkində verilənlərə görə AB və CD qövsələrinin dərəcə ölçülərini tapın.



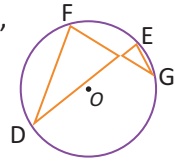
LAYIHƏ

- 8 > Verilənlərə görə dəyişənləri tapın. Çevrənin mərkəzi nöqtə ilə göstərilib.

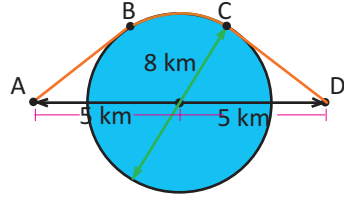


- 9 > O mərkəzli çevrədə DF, FG, EG, ED vətərləri elə çəkilibdir ki,
 $\text{DF} : \text{FE} : \text{EG} : \text{GD} = 5 : 2 : 1 : 7$.

Şəkilə görə konqruent bucaqları müəyyən edin və ölçülərini tapın.



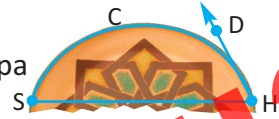
- 10 > Bələdiyyə şəhər kənarındakı gölün təmizlənməsi üçün hər il velosiped yarışı keçirir. İdmançılar burada qət etdikləri hər kilometr məsafə üçün könüllü olaraq müəyyən miqdar pul ödəyirlər. Kənan da bu il yarışda iştirak edir və hər kilometr məsafə üçün 5 manat ödəyəcəyini təşkilatçılara bildirmişdir. Yarış yolu şəkildə göstərilmiş ABCD üzrə müəyyən edilmişdir. A və D nöqtələri dairəvi gölün müxtəlif tərəflərində olmaqla mərkəzdən 5 km məsafədə yerləşirlər. Gölün diametri 8 km-dir. AB və CD toxunanlar, BC yolu isə gölün kənarı boyu qövsvari yoldur. a) Yarış yolunun uzunluğu neçə kilometrdir? Cavabı ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



- b) Kənan xəyriyyə məqsədilə təxminən neçə manat ödəyəcək?
- 11 > Bir çox hallarda arxeoloqlar əşyaların hissələrini aşkar edir, daha sonra bir sıra ölçmələr, araşdırmalar aparmaqla onun əsl formasını bərpa edə bilirlər.

a) Şəkildə təsvir edilən boşqabın üzərində göstərilmiş bucaq $\angle SHD = 60^\circ$ olarsa, SCH -in dərəcə ölçüsünü tapın (HD boşqabın çevrəsinə toxunandır).

b) Tutaq ki, siz boşqabın SCH qövsünün uzunluğunu ölçərək 9,5 sm olduğunu müəyyən etmişiniz. Bu məlumata görə boşqabın tam çevrəsinin uzunluğunu necə müəyyən edərdiniz?



3

Funksiyalar

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

- ✓ Kvadratik funksiyanın qrafikini qurmağı;
- ✓ Verilmiş qrafikinə görə kvadrat funksiyanın düsturunu yazmağı;
- ✓ Kvadratik funksiyanın tətbiqi ilə məsələ həll etməyi;
- ✓ $y = |x|$ funksiyası və onun qrafikini qurmağı;
- ✓ $y = x^3$ funksiya və onun qrafikini qurmağı.



Məsələ. Vurulan zərbədən sonra topun qalxdığı hündürlüyün (metrlə) t uçuş zamanından (saniyə ilə) asılılığı $h(t) = -5t^2 + 12t$ düsturu ilə verilmişdir.

- a) $t = 1$ san anında top hansı hündürlükdə olar?
- b) Zamanın hansı anında top yerdən 2,2 metr hündürlükdə olar?
- c) Topun qalxdığı ən yüksək hündürlüyü necə tapmaq olar?



3-1

Kvadratik funksiya

$a \neq 0$ olduqda $y = ax^2 + bx + c$ şəklində funksiya kvadratik funksiya deyilir.

Nümunələr. $y = 3x^2 + x$, $y = -2x^2 + 5$, $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0,5x^2$

Kvadratik funksiya argumentin (x -in) bütün qiymətlərində təyin olunmuşdur.

Nümunə. $y = x^2 - 2x + 2$ funksiya verilmişdir.

- a) $x = 2$ olduqda funksiyanın qiymətini tapın.
- b) Argumentin hansı qiymətində funksiyanın qiyməti 5-ə bərabər olar?

Həlli. a) $x = 2$ qiymətini funksiyanın düsturunda yerinə yazaq: $y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$

b) Şərtə görə $y = 5$ olduğundan $5 = x^2 - 2x + 2$ tənliyindən tapırıq: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Hansı kvadratik funksiya?
 - a) $y = 2x^2 + x - 3$
 - b) $y = 2x^2 - 5$
 - c) $y = 5x + 2$
- 2 > a) $x = -1$; b) $x = -2$; c) $x = 0$ olduqda $y = x^2 - 2x + 1$ funksiyanın qiymətini hesablayın.

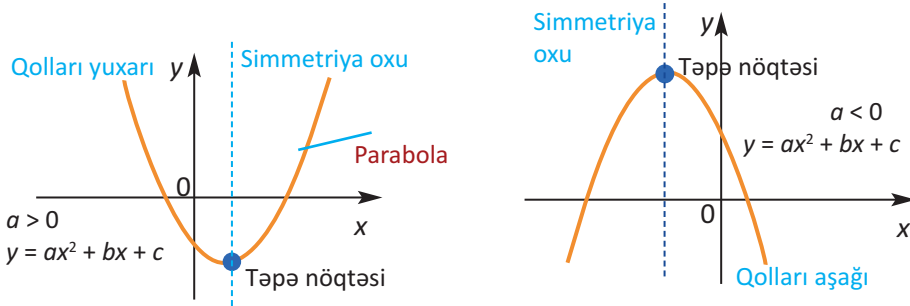
LAYIHƏ

- 3 > Arqumentin hansı qiymətlərində $y = x^2 - x - 3$ funksiyanın qiyməti:
a) -1 -ə; b) 3 -ə; c) -3 -ə bərabər olur?
- 4 > $f(x) = x^2 - 2x + c$ funksiyası verilmişdir. $f(1) = 3$ olarsa, $f(-1)$ -i tapın.



Kvadratlik funksiyanın qrafiki

Kvadratlik funksiyanın qrafiki paraboladır. Parabolanın simmetriya oxu vardır. Simmetriya oxu ilə parabolanın kəsişməsi təpə nöqtəsi adlanır. a , b , c əmsallarının qiymət və işarələrindən asılı olaraq parabola koordinat müstəvisində müxtəlif vəziyyətlərdə yerləşə bilər.

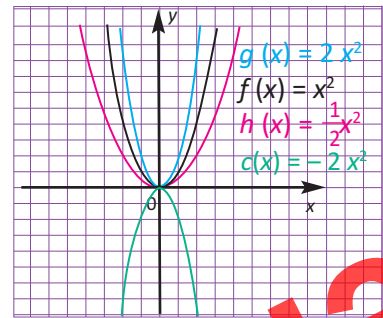


Kvadratlik funksiyanın xüsusi hallarına baxaq.

1. $y = ax^2$ funksiyanın qrafiki

Nümunə. $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$ funksiyaları üçün qiymətlər cədvəlini araşdırın. Şəildəki hər bir qrafikin hansı funksiya aid olduğunu müəyyən edin.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 2x^2$	$h(x) = \frac{1}{2}x^2$	$y = -2x^2$
-3	9	18	4,5	-18
-2	4	8	2	-8
-1	1	2	0,5	-2
0	0	0	0	0
1	1	2	0,5	-2
2	4	8	2	-8
3	9	18	4,5	-18



Həlli. Cədvəldən görüldüyü kimi, $y = x^2$ parabolası üzərindəki hər bir nöqtənin absisini dəyişmədən ordinatını 2 dəfə artırırsa, $y = 2x^2$ funksiyanın qrafiki üzərindəki nöqtələr alınır. Bu halda parabola daralır.

$y = x^2$ parabolası üzərindəki hər bir nöqtənin absisini dəyişmədən ordinatını 2 dəfə azaltsa, $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiyanın qrafiki üzərindəki nöqtələr alınır. Bu halda parabola genişlənir.

LAYIHƏ

$y = -x^2$ parabolası $y = x^2$ parabolasının absis oxuna nəzərən simmetriya çevrilməsi ilə alınır. Oxşar qayda ilə $y = -2x^2$ və $y = 2x^2$ parabolaları absis oxuna nəzərən simmetrikdir.

$y = ax^2$ funksiyanın qrafiki təpə nöqtəsi koordinat başlanğıcında yerləşən, simmetriya oxu ordinat oxu olan parabola.

- $a > 0$ olduqda, parabolanın qolları yuxarı, $a < 0$ olduqda isə aşağı yönəlir.
- $|a| > 1$ olduqda parabola absis oxundan şaquli istiqamətdə dartılır və budaqları daha dik olmaqla $y = x^2$ parabolasına nəzərən “daralır”.
- $|a| < 1$ olduqda parabola absis oxuna şaquli istiqamətdə sıxılır, $y = x^2$ parabolasına nəzərən “genişlənir”.

Öyrənmə tapşırıqları

5 > $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ funksiylarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun və müqayisə edin. Hansı parabola daha “geniş”, hansı daha “dardır”?

6 > $y = x^2$ parabolasının köməyi ilə aşağıdakı funksiyların qrafiklərini qurun. Bu qrafikləri qrafikalkulyatorla da qurun.

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -4x^2$ c) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

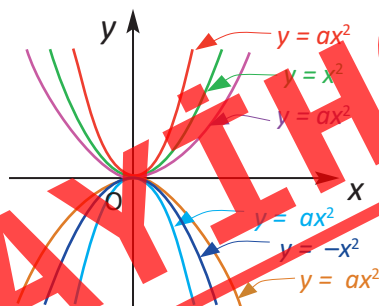
7 > Eyni koordinat müstəvisində $y = \frac{1}{2}x^2$ və $y = \frac{1}{2}x + 1$ funksiylarının qrafiklərini qurun və onların kəsişmə nöqtələrini göstərin.

8 > $y = ax^2$ parabolası $A(-6; 9)$ nöqtəsindən keçir.

1) a əmsalını müəyyən edin;

2) Bu parabola: a) $B(3; 5)$, b) $C(-2; 1)$ nöqtəsindən keçirmi?

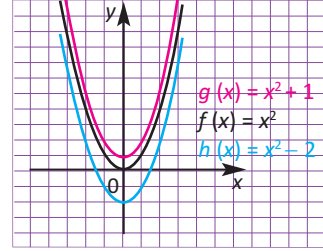
9 > Şəkildə təsvir edilmiş qrafiklərə görə a -nın qiymətinin dəyişmə intervalını müəyyən edin.



2. $y = x^2 + n$ funksiyanın qrafiki

Nümunə. $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$ funksiyları cədvəllə və qrafiklə təqdim edilmişdir. Cədvəli və qrafiki dəftərinizdə çəkin. $y = x^2 + n$ funksiyanın qrafikinə n -in qiymətindən asılı olaraq necə dəyişdiyini araşdırın.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 1$	$h(x) = x^2 - 2$
-3	9	10	7
-2	4	5	2
-1	1	2	-1
0	0	1	-2
1	1	2	-1
2	4	5	2
3	9	10	7



Həlli. $y = x^2$ parabolasını quraq və onu Oy oxu boyunca 1 vahid yuxarı sürüşdürək. Parabolanın təpə nöqtəsi $(0; 1)$ olacaq, simmetriya oxu isə Oy olaraq qalır. Hər bir nöqtənin absisi əvvəlki kimi qalır, ordinatı isə 1 vahid artır. Yəni, yeni parabolada absisi x olan nöqtənin ordinatı $x^2 + 1$ olur: $y = x^2 + 1$

$y = x^2 + 1$ funksiyanı uyğun parabola $y = x^2$ parabolasının Oy oxu boyunca 1 vahid yuxarı sürüşdürülməsidir. Təpə nöqtəsi $(0; 1)$

$y = x^2$ və $y = x^2 - 2$ funksiylarına uyğun parabolaları müqayisə edək.

$y = x^2 - 2$ funksiyanı uyğun parabola $y = x^2$ funksiyanı uyğun parabolanı Oy oxu boyunca 2 vahid aşağı sürüşdürməklə alınır. Təpə nöqtəsi: $(0; -2)$

Göründüyü kimi, n həddinə görə parabolanın vəziyyəti Oy oxu boyunca şaquli olaraq dəyişir. Parabolanın təpə nöqtəsinin düzgün qeyd edilməsi önəmlidir.

$y = ax^2 + n$ funksiyanın qrafiki $y = ax^2$ parabolasının Oy oxu boyunca sürüşdürülməsidir.

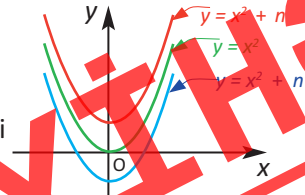
- Parabola Oy oxu boyunca $|n|$ vahid; $n < 0$ olduqda aşağı, $n > 0$ olduqda yuxarı sürüşdürülür.
- Parabolanın təpə nöqtəsi $(0; n)$ nöqtəsində yerləşir.
- $x = 0$ düz xətti parabolanın simmetriya oxudur.

Öyrənmə tapşırıqları

10 $y = x^2$ funksiyanın qrafikini sürüşdürməklə verilmiş funksiyların qrafiklərini sxematik təsvir edin.

- a) $y = x^2 - 2$ b) $y = x^2 + 3$ c) $y = x^2 + 2$
d) $y = x^2 - 3$ e) $y = x^2 + 0,5$ f) $y = x^2 - 1,5$

11 Şəkilə təsvir edilmiş qrafiklərə görə n -nin işarəsini müəyyən edin.

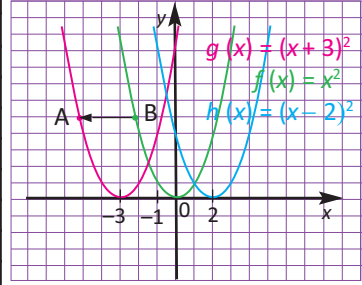


12 $y = x^2 + n$ funksiyanında n -ə müxtəlif qiymətlər verməklə nümunələr yazın və qrafiklərini qrafikalkulyatorla qurun.

3. $y = (x - m)^2$ funksiyaının qrafiki

- 3. Nümunə.** $y = x^2$, $y = (x + 3)^2$, $y = (x - 2)^2$ funksiyaları cədvəllə və qrafiklə təqdim edilmişdir. Cədvəli və qrafiki dəftərinizdə çəkin. $y = (x - m)^2$ funksiyaının qrafikinə m -in qiymətindən asılı olaraq necə dəyişdiyini araşdırın.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 3)^2$	$h(x) = (x - 2)^2$
-5	25	4	49
-4	16	1	36
-3	9	0	25
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0
3	9	36	1
4	16	49	4



Həlli. $y = x^2$ parabolasını 3 vahid sola sürüşdürək. Parabolanın təpə nöqtəsi $(-3; 0)$ olar. Sürüşdürülmüş parabola üzərində $A(x_1; y_1)$ nöqtəsi verilən parabola üzərində B nöqtəsindən 3 vahid sola sürüşdürməklə alınıb. Ona görə B nöqtəsinin absisi $x_1 + 3$ olar, ordinatı isə A-nın ordinatı ilə eynidir. Verilən parabola üzərində istənilən nöqtənin ordinatı absisinin kvadratına bərabər olduğundan, $y_1 = (x_1 + 3)^2$ alınar. Yəni, sürüşdürülmüş parabola üzərindəki $(x_1; y_1)$ nöqtəsi üçün $y_1 = (x_1 + 3)^2$ olur.

$y = x^2$ parabolasını 3 vahid sola sürüşdürsək, $y = (x + 3)^2$ parabolası alınar.

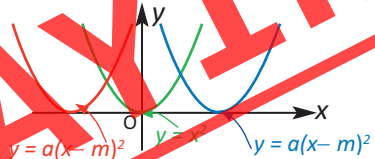
$y = x^2$ parabolasını 2 vahid sağa sürüşdürsək, $y = (x - 2)^2$ parabolası alınar.

$y = a(x - m)^2$ funksiyaının qrafiki $y = ax^2$ parabolasının absis oxu boyunca $|m|$ vahid sürüşdürülməsidir.

- $m > 0$ olarsa, parabola Ox oxu boyu sağa, $m < 0$ olarsa, sola sürüşdürülür.
- m parabolanın təpə nöqtəsinin absisinə uyğundur. Parabolanın təpə nöqtəsi $(m; 0)$ olur.
- $x = m$ düz xətti parabolanın simmetriya oxudur.

Öyrənmə tapşırıqları

- 13** $y = x^2$ funksiyaının qrafikindən istifadə etməklə $y = (x + 5)^2$ və $y = (x - 5)^2$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun.
- 14** Funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.
- a) $y = (x - 2)^2$ b) $y = (x + 4)^2$
c) $y = (x + 2)^2$ d) $y = (x - 4)^2$
e) $y = (x - 1,5)^2$ f) $y = (x + 1,5)^2$
- 15** Şəkilə təsvir edilmiş qrafiklərə görə m -in işarəsini müəyyən edin.

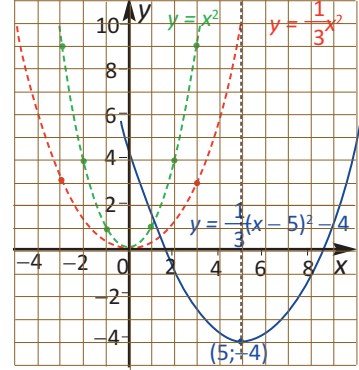


4. $y = a(x - m)^2 + n$ funksiyasının qrafiki

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz qurmaları ümumiləşdirməklə $y = x^2$ funksiyasının qrafikinə görə $y = a(x - m)^2 + n$ parabolasının qurulmasını göstərək. Bunu nümunələr üzərində yerinə yetirək.

4. Nümunə. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2 - 4$ funksiyasının qrafikinə $y = x^2$ parabolasına görə sürüşdürməklə qurulmasını araşdırın.

1. $y = x^2$ funksiyasının qrafikini qurun.
2. $a > 0$ olduğundan qrafikin istiqaməti dəyişmir. $a < 1$ olduğundan parabola "genişlənir". Çünki, x -in eyni qiymətində y -in qiyməti 3 dəfə kiçik olacaq. Məsələn, $y = x^2$ -nin qrafiki üzərindəki (3; 9) nöqtəsi $y = \frac{1}{3}x^2$ funksiyası üçün (3; 3) kimi olacaq.
3. Oy simmetriya oxuna görə (3; 3) nöqtəsinə simmetrik (-3; 3) nöqtəsini qeyd edin.
4. (3; 3), (0; 0), (-3; 3) nöqtələrindən keçən parabolanı çəkin. Bu $y = \frac{1}{3}x^2$ funksiyasının qrafikidir.

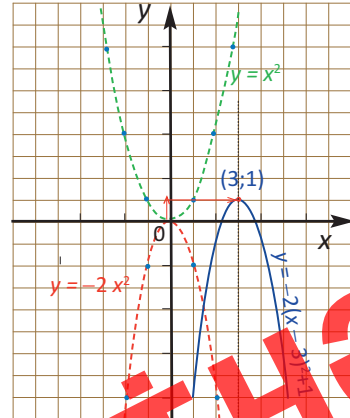


5. $m = 5$, $n = -4$ olduğuna görə bu parabolanı 5 vahid sağa, 4 vahid aşağı sürüşdürün. Alınan parabola $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2 - 4$ funksiyasının qrafikidir.

$y = a(x - m)^2 + n$ parabolasının təpə nöqtəsi $(m; n)$ nöqtəsində yerləşir. Bu parabolanın simmetriya oxu $x = m$ düz xəttidir.

5. Nümunə. $y = -2(x - 3)^2 + 1$ funksiyasının qrafikinə $y = x^2$ parabolasına görə sürüşdürməklə qurulmasını araşdırın.

- $y = x^2$ funksiyasının qrafikini qurun.
- $a = -2$ əmsalına görə $y = -2x^2$ funksiyasının qrafiki olan parabolanın qolları aşağı yönəlir. Bu funksiyanın qrafiki $y = x^2$ funksiyasına uyğun paraboladan "dar" olacaq. Çünki, x -in uyğun qiymətində y -in qiyməti mütləq qiymətcə 2 dəfə böyükdür. Məsələn, nöqtələr uyğun olaraq $(1; 1) \rightarrow (1; -2)$; $(2; 4) \rightarrow (2; -8)$ kimi olacaq. Bu nöqtələri qeyd edin və səlis əyri ilə birləşdirməklə $y = -2x^2$ funksiyasının qrafikini qurun.



- $m = 3$, $n = 1$ olduğundan $y = -2x^2$ parabolasını 3 vahid sağa, 1 vahid isə yuxarı sürüşdürməklə $y = -2(x - 3)^2 + 1$ funksiyasının qrafiki qurulur. Parabolanın təpəsi (3;1) nöqtəsindədir.
- $x = 3$ düz xətti bu parabolanın simmetriya oxudur.

16 > $y = x^2$ qrafikini sürüşdürməklə aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $y = 2(x + 3)^2 - 1$

b) $y = -3(x + 1)^2 + 3$

c) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$

17 > $y = \frac{1}{2}x^2$ və $y = 2x^2$ funksiyalarının qrafiklərini sxematik qurun və parabolanın təpə nöqtəsini aşağıdakı nöqtələrə köçürün. Yeni qrafiklərə uyğun funksiyaların düsturlarını yazın.

a) $(0; -1)$

b) $(3; 2)$

c) $(-4; 1)$

d) $(-2; -2)$



Kvadratik funksiyanın müxtəlif formalarda təqdimi və qrafikləri

Kvadratik funksiya	Qrafiki
1. Təpə nöqtəsinə görə yazılışla (və ya tam kvadratin ayrılışı ilə) $y = a(x - m)^2 + n$	Parabolanın təpə nöqtəsi: $(m; n)$ Simmetriya oxu: $x = m$
2. Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinə görə yazılışla $y = a(x - p)(x - q)$	Qrafik Ox oxunu absisləri p və q olan nöqtələrdə kəsir. Simmetriya oxu: ucları $(p; 0)$ və $(q; 0)$ olan parçanın orta perpendikulyarıdır. Təpə nöqtəsinin absisi $m = (p + q) : 2$

Parabolanın təpə nöqtəsi və koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri parabolanın mühüm nöqtələridir.

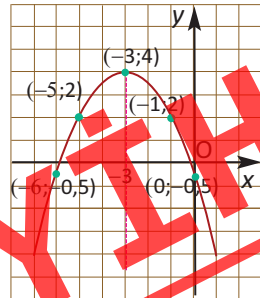
Parabolanı qurma addımları:

1. Təpə nöqtəsi tapılır və koordinat müstəvisində qeyd edilir;
2. Ox oxu ilə (əgər varsa) və Oy oxu ilə kəsişmə nöqtələri tapılır;
3. Simmetriya oxu müəyyən edilir;
4. Simmetriya oxuna görə parabola üzərindəki bir neçə nöqtə qeyd edilir;
5. Qeyd edilmiş nöqtələrdən keçən parabola qurulur.

1. **Nümunə.** $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli. $a < 0$ olduğundan parabolanın qolları aşağı yönəlib.

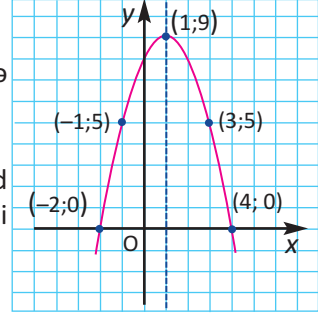
1. Parabolanın təpə nöqtəsini qeyd edək: $(-3; 4)$
2. $x = 0$ olduqda $y = -0,5$ olur, yəni parabola Oy oxunu $(0; -0,5)$ nöqtəsində kəsir.
3. $x = -3$ simmetriya oxunu çəkək. $x = -1$ olduqda $y = 2$ olur, $(-1; 2)$ nöqtəsini qeyd edək.
4. $x = -3$ düz xəttinə nəzərən $(0; -0,5)$ və $(-1; 2)$ nöqtələrinə simmetrik olan $(-6; -0,5)$, $(-5; 2)$ nöqtələrini qeyd edək.
5. Bu nöqtələrdən keçən parabolanı quraq.



2. Nümunə. $y = -(x + 2)(x - 4)$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli.

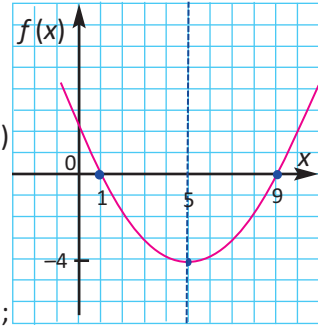
- $a = -1$, $p = -2$, $q = 4$; Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələri: $(-2; 0)$ və $(4; 0)$ -dir.
- Simmetriya oxu bu nöqtələrdən eyni məsafədə olan nöqtədən keçir: $x = 1$.
- Parabolun təpə nöqtəsinin absisi $x = 1$, ordinatı: $y = -(1 + 2)(1 - 4) = 9$ $(1; 9)$ təpə nöqtəsini koordinat müstəvisi üzərində qeyd edək.
- $x = 1$ simmetriya oxunu çəkək. Simmetriya oxuna görə simmetrik iki nöqtəni qeyd edək. Məsələn, $x = 3$ və $x = -1$ olduqda, $y = 5$ olur, yəni $(3; 5)$ və $(-1; 5)$ nöqtələrini qeyd edək.
- Qeyd edilmiş nöqtələrdən keçən parabolunu quraq.



3. Nümunə. Qrafiki verilmiş funksiyanı təpə nöqtəsinə görə yazılışla ($y = a(x - m)^2 + n$) ifadə edin.

Həlli.

1. Göründüyü kimi, parabolun təpəsi $(5; -4)$ nöqtəsindədir: $m = 5$, $n = -4$.
2. Parabolun qolları yuxarı olduğundan $a > 0$ olmalıdır. m və n -nin qiymətini nəzərə almaqla funksiyanı $y = a(x - 5)^2 - 4$ kimi yazmaq olar.
3. Qrafik üzərində olan istənilən nöqtənin məsələn, $(1; 0)$ və ya $(9; 0)$ nöqtəsinin koordinatlarını funksiyanın düsturunda yerinə yazmaqla a -nı tapa bilərik. $(1; 0)$ nöqtəsini nəzərə alaq: $0 = a(1 - 5)^2 - 4$, $16a = 4$, $a = \frac{1}{4}$. Funksiyanın düsturu: $y = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 4$ şəklindədir.



Öyrənmə tapşırıqları

18 Verilən funksiyaların qrafiklərini qurun. Təpə nöqtəsinin koordinatlarını və simmetriya oxunu qrafik üzərində qeyd edin.

- | | | |
|-------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $y = (x - 3)^2$ | 2. $y = (x + 4)^2$ | 3. $y = -(x + 3)^2 + 2$ |
| 4. $y = 3(x - 2)^2 - 1$ | 5. $y = -2(x - 2)^2 + 4$ | 6. $y = -(x + 1)^2 + 3$ |
| 7. $y = 2(x + 1)^2 - 5$ | 8. $y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2$ | 9. $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$ |

19 Verilən funksiyaların qrafiklərini qurun. Təpə nöqtəsini, simmetriya oxunu qrafik üzərində qeyd edin.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $y = (x + 3)(x - 3)$ | 2. $y = -(x - 1)(x + 3)$ | 3. $y = 2(x + 2)(x + 4)$ |
| 4. $y = 2(x - 5)(x - 1)$ | 5. $y = -(x - 4)(x - 1)$ | 6. $y = (x - 3)(x + 7)$ |

LAYIHƏ

20 > Məntiqi düşüncə. a) Nə üçün $y = x^2 + 3$ parabolasını qurmaq üçün $y = x^2$ parabolası Oy oxu boyunca müsbət istiqamətdə yuxarı, $y = (x + 3)^2$ funksiyanın qrafikini qurarkən isə Ox oxu boyunca sola sürüldürülür? Fikrinizi yazın.

b) Kvadratik funksiyanın qrafikinin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı həmişə eyni olmur. Bu fikir Oy oxu üçün də doğrudurmu? Fikrinizi yazın.

21 > Qrafik üzərində yerləşən nöqtələr cütünün hansı koordinatlarına görə parabolanın simmetriya oxunun tənliyini yazmaq mümkündür? Mümkün olduqda simmetriya oxunun tənliyini yazın.

a) (3; 10) və (7; 10)

b) (4; 6) və (6; -2)

c) (-1; 4) və (5; 4)

22 > Verilənlərə görə kvadratik funksiyanı $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın:

a) təpəsi (0; 0) nöqtəsində olan və (6; 9) nöqtəsindən keçən;

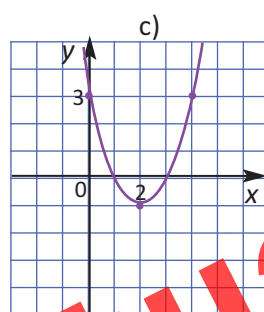
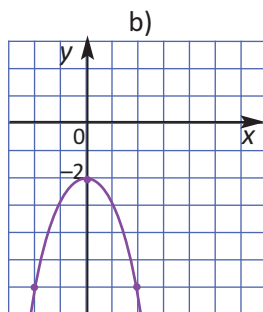
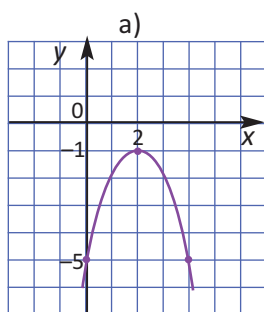
b) təpəsi (0; -3) nöqtəsində olan və (3; 24) nöqtəsindən keçən;

c) təpəsi (2; 5) nöqtəsində olan və (4; -11) nöqtəsindən keçən;

d) təpəsi (-3; -10) nöqtəsində olan və (2; -5) nöqtəsindən keçən.

23 > (2; 3) və (24; 3) nöqtələri kvadratik funksiyanın qrafiki üzərindədir. Bu nöqtələrin koordinatlarına görə parabolanın simmetriya oxunun tənliyini müəyyən edin.

24 > Funksiyaların qrafikləri $y = x^2$ parabolasına görə hansı çevrilmələrin nəticəsində alınmışdır? Bu funksiyların düsturlarını yazın.



25 > Açıq tipli sual. $f(x) = x^2$ -na nəzərən "genişlənmiş" olmaqla üfüqi və şaquli istiqamətlərdə sürüşmə hərəkətlərinin yerinə yetirilməsi ilə alınan hər hansı kvadratik funksiyanın düsturunu yazın və qrafikini sxematik təsvir edin.

LAYIHƏ

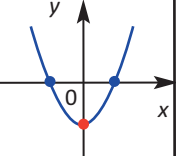
✓ Kvadratik funksiyanın qrafikinın absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri

Funksiyanın qrafikinın absis oxunun üzərində olan nöqtələrində funksiyanın qiyməti sıfıra bərabər olur. **Arqumentin funksiyanı sıfıra çevirən qiymətləri bu funksiyanın sıfırları adlanır.** Sıfırlarının sayını $y = a(x - m)^2 + n$ funksiya üçün a və n -in qiymətlərinə görə müəyyən etmək mümkündür.

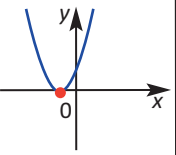
- a -nın qiymətinə görə parabolun qollarının yuxarı və ya aşağı yönəldiyini söyləmək olar.
- n -nin qiymətinə görə parabolun təpə nöqtəsinin absis oxundan yuxarıda, aşağıda və ya absis oxu üzərində olduğunu söyləmək olar.

Parabolun təpə nöqtəsinə və qollarının yuxarı və ya aşağı yönəlməsinə görə absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayını verilmiş nümunələr üçün müəyyən edək.

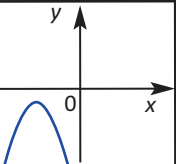
1. Nümunə. a) $f(x) = 0,8x^2 - 3$

a -nın qiyməti	n -nin qiyməti	Qrafik	Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı
$a > 0$ Parabolun qolları yuxarı yönəlmişdir.	$n < 0$ Təpə nöqtəsi Ox oxundan aşağıdadır		Qrafik absis oxunu 2 nöqtədə kəsir.

2. Nümunə. b) $f(x) = 2(x + 1)^2$

a -nın qiyməti	n -nin qiyməti	Qrafik	Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı
$a > 0$ Parabolun qolları yuxarı yönəlmişdir.	$n = 0$ Təpə nöqtəsi Ox oxu üzərindədir		Qrafikin absis oxu ilə 1 ortaq nöqtəsi var və bu nöqtə absis oxu üzərində olmaqla parabolun təpə nöqtəsidir.

3. Nümunə. c) $f(x) = -3(x + 2)^2 - 1$

a -nın qiyməti	n -nin qiyməti	Qrafik	Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı
$a < 0$ Parabolun qolları aşağıya yönəlmişdir.	$n < 0$ Təpə nöqtəsi Ox oxundan aşağıdadır.		Qrafik absis oxu ilə kəşşmir və qolları aşağı yönəlməklə bütünlüklə Ox oxundan aşağıda yerləşir.

Öyrənmə tapşırıqları

26> Aşağıdakı funksiyların qrafiklərinin absis oxu ilə ortaq nöqtələrinin sayını müəyyən edin.

a) $f(x) = 5x^2 - 7$ b) $f(x) = -2(x + 1)^2$ c) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 9$

- 27> a) $y = 5(x - 15)^2 - 100$ b) $y = -4x^2 + 14$ c) $y = (x + 18)^2 - 8$
funksiyaları üçün onların qrafikini qurmadan müəyyən edin:

- 1) parabolanın qollarının istiqamətini;
- 2) təpə nöqtəsinin koordinatlarını;
- 3) simmetriya oxunun tənliyini;
- 4) Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayını.

- 28> a) Kvadrat üçhədlini vuruqlara ayırmaqla verilən funksiyaları
 $y = a(x - p)(x - q)$ şəklində yazın.
b) Ox və Oy oxları ilə kəsişmə nöqtələrini müəyyən edin;
c) funksiyaların qrafiklərini qurun.

1) $f(x) = x^2 - 5x - 24$ 2) $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 3) $p(x) = 4x^2 - 20x + 24$

- 29> (10; 0) və (4; 0) nöqtələri təpə nöqtəsinin ordinatı -9 olan parabolanın absis oxu ilə kəsişmə nöqtələridir.

- a) Funksiyanın düsturunu yazın.
- b) Bu parabolanın üzərində yerləşməklə simmetriya oxuna nəzərən simmetrik olan üç cüt nöqtənin koordinatlarını yazın;
- c) Qrafiki qurun.

- 30> Hansı qrafikin hansı funksiya aid olduğunu müəyyən edin və qrafikləri dəftərinizdə çəkin.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

$$g(x) = (x + 3)^2$$

$$v(x) = (x - 3)^2$$

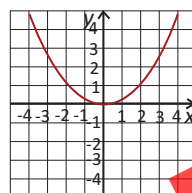
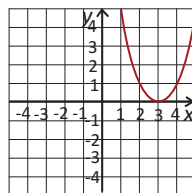
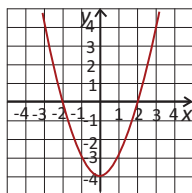
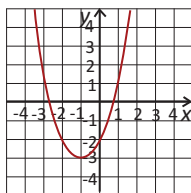
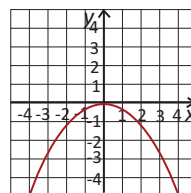
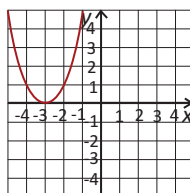
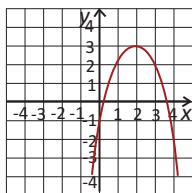
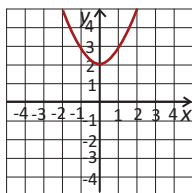
$$h(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$t(x) = x^2 + 2$$

$$s(x) = x^2 - 4$$

$$p(x) = (x + 1)^2 - 3$$

$$u(x) = -(x - 2)^2 + 3$$



- 31> Parabolanın koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri verilmişdir. Bu məlumatlara görə parabolanın təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

- a) (3; 0), (-1; 0), (0; -6) b) (-2; 0), (-3; 0), (0; 4) c) (-3; 0), (1; 0), (0; 3)

✓ **$y = ax^2 + bx + c$ funksiyanın qrafiki**

$y = ax^2 + bx + c$ şəklində verilmiş istənilən kvadratik funksiya tam kvadrat ayırmaqla $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində göstərilə bilər.

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{c}{a}x + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{c}{a}$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{işarə etsək,} \quad y = a(x - m)^2 + n$$

$y = ax^2 + bx + c$ parabolasının təpə nöqtəsi $(m; n)$ olur.

$$\text{Burada} \quad m = \frac{-b}{2a}, \quad n = \frac{-D}{4a}, \quad D = b^2 - 4ac$$

$y = ax^2 + bx + c$ parabolasının simmetriya oxu $x = m$ düz xəttidir.

Nümunə

$y = -2x^2 + 4x + 3$ funksiyanı tam kvadrata ayırmaqla :

1. təpə nöqtəsinin koordinatlarını və simmetriya oxunun tənliyini yazın.

$$\text{Həlli. } y = -2x^2 + 4x + 3 = -2 \cdot (x^2 - 2x - 1,5) = -2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1,5) =$$

$$= -2 \cdot ((x - 1)^2 - 2,5) = -2 \cdot (x - 1)^2 + 5 \text{ olduğundan verilmiş funksiyanın qrafiki}$$

$y = -2x^2$ parabolasını 1 vahid sağa, 5 vahid yuxarı sürüşdürməklə alınır.

Deməli, təpə nöqtəsi $(1;5)$, simmetriya oxunun tənliyi $x = 1$ olur.

2. **Nümunə.** $y = 4x^2 - 12x + 8$ funksiyası verilmişdir

- uyğun parabolanın təpə nöqtəsinin koordinatlarını yazın.
- simmetriya oxunun tənliyini yazın
- parabolanın koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.
- funksiyanın qrafikini qurun.

Həlli.

$$a) a = 4, b = -12, c = 8, D = b^2 - 4ac = 16$$

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 4} = 1,5; \quad n = \frac{-D}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 4} = -1$$

Təpə nöqtəsi: $(1,5; -1)$

b) Simmetriya oxunun tənliyi: $x = 1,5$

LAYIHƏ

c) $x = 0$ olduqda $y = 8$ olur, yəni parabola ordinat oxunu $(0; 8)$ nöqtəsində kəsir.

$y = 0$ olduqda $4x^2 - 12x + 8 = 0$ tənliyindən

$x_1 = 1, x_2 = 2$ tapılır. Absis oxu ilə kəsişmə

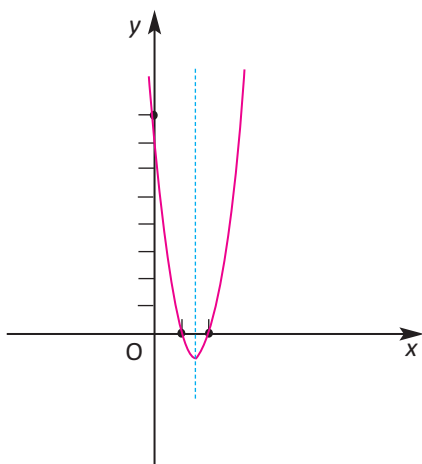
nöqtələri: $(1; 0)$ və $(2; 0)$

d) təpə nöqtəsini və koordinat oxları ilə

kəsişmə nöqtələrini koordinat

müstəvisində qeyd etməklə bu nöqtədən

keçən parabolü quraq.



Öyrənmə tapşırıqları

32> Verilmiş kvadratik funksiyaları $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın.

a) $y = x^2 + 8x + 8$

b) $y = 2x^2 - 16x + 21$

c) $y = -x^2 + 8x - 13$

33> Kvadratik funksiyaların qrafiklərinin :

a) absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını;

b) ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını;

c) təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

d) kvadratik funksiyayı təpə nöqtəsinə görə yazılışla ifadə edin və qrafikini qurun.

1) $y = x^2 - 2x - 3$

2) $y = -x^2 - 4x + 5$

3) $y = x^2 + 6x + 5$

34> Açıq tipli sual. a) Uyğun parabolalarının təpələri $(5; -3)$ nöqtəsində yerləşən iki müxtəlif kvadratik funksiya yazın və qrafiklərini sxematik təsvir edin.

b) Ən böyük qiyməti 5-ə bərabər, uyğun parabolasının simmetriya oxu $x = -3$ olan iki kvadratik funksiya yazın və qrafiklərini qurun.

35> $f(x) = 2(x + 1)^2 + 2$ və $g(x) = 5(x + 1)^2 + 2$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Bu qrafiklərin ortaq və fərqli cəhətlərini araşdırın.

36> 1) Funksiyaların qrafiklərini qurun.

2) Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

3) Simmetriya oxunun tənliyini yazın.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

✓ $y = ax^2 + bx + c$ funksiyanın araşdırılması

$y = ax^2 + bx + c$ kvadratik funksiyanın xassələrini aşağıdakı kimi ümumiləşdirək.

• kvadratik funksiyanın qrafiki olan parabolun qolları $a > 0$ olduqda yuxarı, $a < 0$ olduqda aşağı yönəlidir.

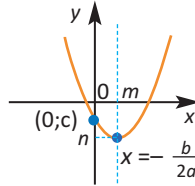
• Simmetriya oxunun tənliyi $x = -\frac{b}{2a}$ olur.

• Parabola ordinat oxu ilə $(0; c)$ nöqtəsində kəşisir.

• $y = ax^2 + bx + c$ funksiyanın təpə nöqtəsinin ordinatının qiyməti (yəni n) $a > 0$ olarsa, funksiyanın **ən kiçik qiyməti** (ƏKQ), $a < 0$ olarsa, funksiyanın **ən böyük qiyməti** (ƏBQ) olur. Bu qiymətlərə kvadratik funksiyanın minimum və maksimum qiymətləri də deyəcəyik.

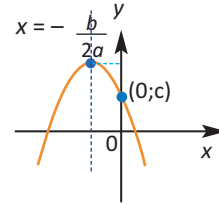
$a > 0$

$y = ax^2 + bx + c$



$a < 0$

$y = ax^2 + bx + c$

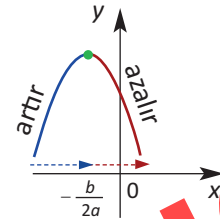
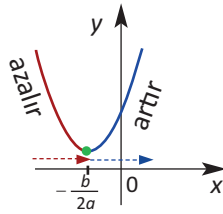


Kvadratik funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Funksiyanın (y -in) aldığı qiymətlər isə funksiyanın qiymətlər çoxluğunu əmələ gətirir.

$y = ax^2 + bx + c$ funksiyası üçün qiymətlər çoxluğu $a < 0$ olduqda $(-\infty; n]$;

$a > 0$ olduqda isə $[n; +\infty)$ olur. Burada n təpə nöqtəsinin ordinatıdır.

Qrafik soldan sağa “yuxarı qalxırsa” **funksiya artır**. Qrafik soldan sağa “aşağı enirsə” **funksiya azalır**.



$a > 0$ olduqda $y = ax^2 + bx + c$ funksiyası

$(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ aralığında azalır,

$[-\frac{b}{2a}; +\infty)$ aralığında isə artır.

$a < 0$ olduqda $y = ax^2 + bx + c$ funksiyası

$(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ aralığında artır,

$[-\frac{b}{2a}; +\infty)$ aralığında isə azalır.

Öyrənmə tapşırıqları

37> $y = -2x^2 + 4x + 6$ funksiyası üçün müəyyən edin:

- parabolanın qollarının istiqamətini;
- koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini;
- simmetriya oxunun tənliyini;
- təpə nöqtəsini;
- ən böyük və ya ən kiçik qiymətini (varsa);
- təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu.

38> Tam kvadratlar ayırın və 5-ci tapşırığın şərtlərini yerinə yetirin.

a) $g(x) = x^2 - 8x + 12$ d) $h(x) = x^2 + 4x - 5$ g) $n(x) = 2x^2 + 12x + 13$

b) $f(x) = 4x^2 + 16x + 19$ e) $p(x) = -3x^2 + 6x - 5$ h) $F(x) = 5x^2 + 10x + 5$

c) $k(x) = x^2 + 7x + 10$ f) $m(x) = x^2 - x - 6$ i) $Q(x) = -3x^2 + 12x$

39> Funksiyaların ən böyük və ya ən kiçik qiymətini tapın.

a) $f(x) = 3(x - 5)^2 + 8$ b) $g(x) = -2(x - 1)^2 + 4$ c) $t(x) = -3(x + 7)^2$

d) $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$ e) $g(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2$ f) $f(x) = -5x^2 + \frac{1}{2}$

40> Kvadratik funksiyanın maksimum qiyməti 20-dir. Qrafikin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri $(-15; 0)$ və $(25; 0)$ olarsa, kvadratik funksiyanı əvvəlcə $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində, sonra isə ümumi şəkildə yazın.

41> Aşağıdakı funksiyalara uyğun parabolanın təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

a) $y = x^2 + 4x + 3$ b) $y = 2x^2 + 16x + 7$ c) $y = 5x^2 + 50x + 7$
d) $y = 7x^2 - 14x + 21$ e) $y = 3x^2 - 18x + 12$ f) $y = -6x^2 + 24x + 24$

42> $y = ax^2 + bx + c$ funksiyasının qrafiki olan parabolanın $(m; n)$ təpə nöqtəsinin koordinatları $m = \frac{-b}{2a}$, $n = am^2 + bm + c$ kimi tapıla bilər.

Təpə nöqtəsinin koordinatlarına görə funksiyanı müəyyən etmək mümkündürmü? Mümkün deyilsə, daha hansı məlumat verilsə, tələb olunan funksiyanı yazmaq olar? Cavabınızı nümunələr üzərində təqdim edin.

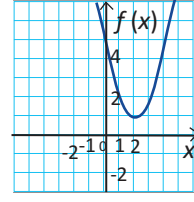
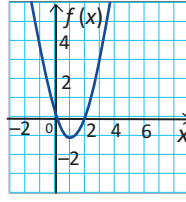
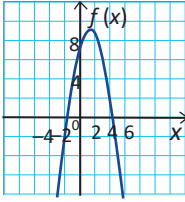
43> Kvadratik funksiyaların qrafikinə görə müəyyən edin:

- simmetriya oxunun tənliyini;
- maksimum və ya minimum qiymətini
- təpə nöqtəsini;
- təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu
- x və y oxu ilə kəsişmə nöqtələrini
- artma, azalma aralıqlarını.

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

b) $f(x) = x^2 - 2x$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$



44> **Araşdırma** $y = x^2 + bx - 1$ funksiyasında b həqiqi ədəddir. b -nin 1-ə bərabər və 1-dən böyük bir neçə qiymətində funksiyanın qrafikini qurun. b -nin qiymətinin funksiyanın qrafikini necə dəyişdirdiyini araşdırın. Ox və Oy oxu ilə kəsişmə nöqtələri necə dəyişir? Təpə nöqtəsinin koordinatlarının dəyişməsi haqqında nə deyə bilərsiniz? Tapşırığı $y = x^2 - bx - 1$ funksiyası üçün də təkrarlayın.

45> Aşağıdakı fikirlərdən hansı doğru, hansı səhvdir?

- 1) Əgər $y = x^2$ funksiyanın qrafikini 2 vahid sağa, 1 vahid aşağı sürüşdürsək, $y = x^2 - 4x + 3$ funksiyanın qrafikini alırıq.
- 2) $y = x^2 - x + 3$ funksiyanın qrafiki Oy oxunu absis oxundan aşağıda kəsir.
- 3) $y = 14 - x^2 - 2x$ funksiyanın maksimumu 15-ə bərabərdir.

46> b və c -nin hansı qiymətlərində $y = x^2 + bx + c$ parabolası:

- a) absis oxunu $(-1; 0)$ və $(3; 0)$ nöqtələrində kəsir;
- b) absis oxunu $(1; 0)$, ordinat oxunu $(0; 3)$ nöqtəsində kəsir;
- c) absis oxuna $(2; 0)$ nöqtəsində toxunur?

47> Top $v_0 \left(\frac{m}{san} \right)$ başlanğıc sürəti ilə yuxarı atılmışdır. Topun t saniyədən sonra qalxdığı h (m) hündürlüyünü $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ düsturu ilə müəyyən etmək olar. Topun maksimum hündürlüyə $t = \frac{v_0}{g}$ saniyədə çatacağını əsaslandırın. Topun maksimum $\frac{v_0^2}{2g}$ hündürlüyə qalxa biləcəyini göstərin.

48> **Açıq tipli sual.** Elə kvadratik funksiya yazın ki, qiymətlər çoxluğu verilmiş ədəddən kiçik olmayan bütün həqiqi ədədlər çoxluğu olsun.

LAYIHƏ

3-2

Kvadratik funksiyanın tətbiqi ilə məsələ həlli

1. **Nümunə.** Perimetri 200 m olan düzbucaqlı şəkildə pəyə hansı ölçülərdə qurulsa, sahəsi ən böyük olar?

Həlli.

1. Tutaq ki, perimetri 200 m olan pəyənin uzunluğu x -dir. Pəyənin eni və uzunluğu arasındakı asılılığı göstərən ifadəni yazaq:

$$b = (200 - 2x) : 2 = 100 - x$$

2. Pəyənin sahəsinin onun uzunluğundan asılılığını göstərən funksiyanı yazaq:

$$S(x) = x(100 - x) \text{ və ya } S(x) = -x^2 + 100x$$

3. $S(x) = -x^2 + 100x$ funksiyaşından tam kvadrat ayıraq:

$$S(x) = -x^2 + 100x - 2500 + 2500 = -(x - 50)^2 + 2500$$

4. Təpə nöqtəsinin koordinatlarını yazaq və məsələni araşdıraraq.

Təpə nöqtəsi (50; 2500) olur. $a < 0$ olduğundan bu nöqtə $S(x)$ funksiyaşının maksimumudur. Yəni, funksiya maksimum qiymətini $x = 50$ olduqda alır və bu qiymət 2500-ə bərabər olur. Buradan görünür ki, perimetri 200 m olan düzbucaqlışəkilli pəyənin sahəsinin 2500 m² olması üçün onun uzunluğu 50 m-dirsə, eni də 50 m olmalıdır (yəni kvadratşəkilli olmalıdır).

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > **Sahə.** Eldar müxtəlif düzbucaqlılar çəkir. Lakin bu düzbucaqlıların uzunluğu və eninin cəmi həmişə 12 sm-dir.
- En və uzunluğun müxtəlif qiymətləri ilə cədvəl qurun;
 - Düzbucaqlının enini x qəbul etməklə sahəsinə göstərən ifadəni yazın;
 - Düzbucaqlının sahəsinin enindən asılılığını funksiya şəkildə yazın;
 - Düzbucaqlının eni neçə santimetr olduqda sahəsi ən böyük olur?
- 2 > Düzbucaqlının sahəsi 49 sm²-dir. Onun tərəfləri hansı ölçülərdə olsa perimetri ən kiçik olar?
- 3 > **Hərəkət.** Yuxarı atılan topun t saniyədən sonra qalxdığı h hündürlüyünü (m-lə) $h = -5t^2 + 20t + 1$ düsturu ilə tapmaq olar.
- Top 16 m hündürlüyə neçə saniyədən sonra çatacaq?
 - Top maksimum hansı hündürlüyə qalxacaq?
 - Top neçə saniyə havada qalacaq?
- 4 > 12 ədədini elə iki toplananın cəmi şəkildə göstərin ki, bu ədədlərin kvadratları cəmi ən kiçik olsun.

- 2. Nümunə.** Bir idman köynəyinin qiyməti 8 manat olarsa, mağaza gündə 10 köynək satır. Mağaza sahibi düşünür ki, bir köynəyin qiymətinin hər dəfə 2 manat ucuzlaşması gündəlik daha 5 köynəyin artıq satılmasına gətirə bilər. Köynəyin qiyməti neçə manat olsa, satışdan daxil olan pul maksimum olar?

Həlli.

1. 2 manatlıq ucuzlaşmaların sayını x qəbul edək, onda bir köynəyin qiyməti $(8 - 2x)$ olacaq.

2. Gündəlik satılan köynəklərin sayı $(10 + 5x)$ olacaq.

3. Satışdan daxil olan pul = bir köynəyin qiyməti $\times$ köynəklərin sayı

$$S(x) = (8 - 2x)(10 + 5x) = 80 + 40x - 20x - 10x^2 = -10x^2 + 20x + 80$$

$S(x) = -10x^2 + 20x + 80$ funksiyası satışdan daxil olan pulu ifadə edir.

Bu funksiyanın təpə nöqtəsinin koordinatları: $m = -\frac{b}{2a} = 1$

$$S(1) = -10 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 + 80 = 90$$

$(1; 90)$ təpə nöqtəsinin koordinatlarıdır. Deməli, idman köynəyinin biri

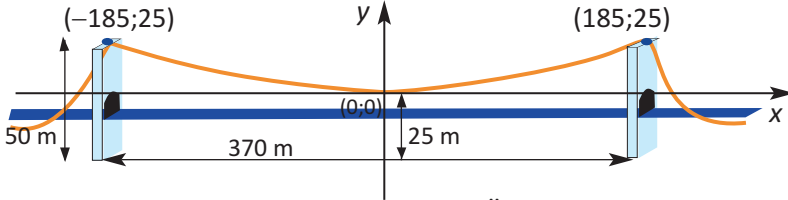
$8 - 1 \cdot 2 = 6$ manata satılarsa, köynəklərin satışından daxil olan pul maksimum 90 manat olar (mağaza sahibinin düşündükləri doğrudursa).

Öyrənmə tapşırıqları

- 5 >** Konsertə satılan biletlərin sayı (N) ilə biletlərin satıldığı günlər (n) arasında asılılıq $N(n) = -10n^2 + 60n + 200$ kimidir. Neçənci gün ən çox bilet satılmışdır? Həmin gün satılan biletlərin sayını tapın.
- 6 > Biznes. Maksimum mədaxil.** Sərnişindəşımə ilə məşğul olan nəqliyyat şirkəti gündəlik 200 sərnişinə xidmət göstərir. Bir biletin qiyməti 5 manatdır. Şirkət sahibi düşünür ki, hər 50 qəpik qiymət artımı 10 sərnişinin azalmasına gətirir.
- a) Şirkət neçə dəfə belə bahalaşma aparsa, bilet satışından maksimum mədaxil əldə edər?
- b) Bu bahalaşmalarla şirkətin gündəlik mədaxili ən çoxu neçə manat ola bilər?
- 7 >** Bir qrup universitet tələbəsi kompüter detallı istehsal edən şirkət açmışlar. Onların bu istehsaldan əldə etdikləri gəliri (manatla)
- $$P(x) = -2x^2 + 100x - 800$$
- funksiyası ilə ifadə etmək olar. Burada x , həftə ərzində istehsal olunan detalların sayını göstərir.
- a) Verilən funksiyanın qrafikinə Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapın. Bu koordinatlar reallıqda hansı informasiyanı ifadə edir?
- b) Verilən funksiyanın qrafikinə Oy oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapın. Bu koordinatlar reallıqda hansı informasiyanı ifadə edir?
- c) Gəliri ifadə edən funksiyanın qrafikinə təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın. Bu məlumat reallıqda hansı informasiyaya uyğun gəlir?
- d) Gəliri ifadə edən funksiyanı qrafik şəklində təqdim edin.

3. Nümunə. Körpünün ağırlığını saxlayan tros (mətil) aralarındakı məsafə

370 m olan iki dirəyə bərkidilmişdir. Mətil parabola formasında olmaqla ən aşağı nöqtəsinin yerdən səviyyəsi 25 m-dir. Hər bir dirəyin hündürlüyü 50 m-dir. Bərkidici mətil üzərində dirəklərdən birindən üfüqi olaraq 60 m məsafədə olan nöqtə yerdən hansı hündürlükdədir?



Həlli: a) Uyğun sxematik parabolunu çəkin. Üzərində məsələdə verilən məlumatları qeyd edin.

Koordinat başlanğıcını (0;0) parabolunun təpə nöqtəsində (bərkidici mətilin ən aşağı nöqtəsində) yerləşdirin.

Koordinat başlanğıcından dirəklərə qədər olan məsafə və dirəklərin hündürlüyünə uyğun məlumatlar: $(-185;25)$, $(185;25)$

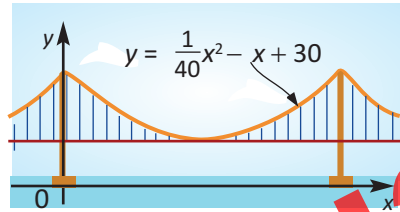
b) Bərkidici mətilin formasını $f(x) = ax^2$ ilə ifadə etmək olar. $(185;25)$ nöqtəsinə görə a -nı tapın. $25 = a \cdot 185^2$, $a = \frac{25}{185^2}$, $f(x) = \frac{1}{1369}x^2$

c) Dirəklərdən birindən 60 m məsafədə olan nöqtə parabolunun təpə nöqtəsindən $185 - 60 = 125$ (m) məsafədə olacaq.

$f(125) = \frac{1}{1369} \cdot 125^2 = \frac{15625}{1369} \approx 11,4$ m olduğundan göstərilən nöqtə yerdən təqribən 36,4 m hündürlükdədir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 8 >** Körpünü saxlayan tros mətilin iki dirək arasındakı parabola formalı hissəsinin körpünün uzunluğu boyu bərkitmə nöqtələrinin dəyişməsi ilə su səthindən hündürlüyünün (m-lə) dəyişməsi arasındakı asılılıq $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$ funksiyası ilə müəyyən edilir. Tros mətilin orta nöqtəsi körpünün üzərindədir. Körpü su səthindən neçə metr hündürlükdədir?



9 > Araşdırma.

<http://questgarden.com/127/37/4/110617141445/process.htm> və
<http://passyworldofmathematics.com/sydney-harbour-bridge-mathematics/>
 ünvanından körpü konstruksiyasına aid filmləri evdə və ya sınıfta izləyin.

Araşdırma

Düşərgə çadırının girişinin forması absis oxunu yer səthində çadırın oturacağında götürməklə $y = -2,5|x - 0,6| + 1,5$ funksiyası ilə modelləşdirilə bilər. Burada x və y metrle ölçülür.

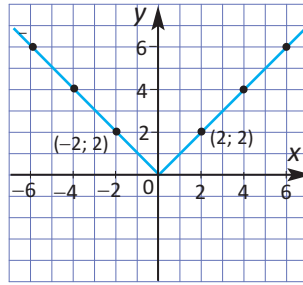
- Funksiyanın qrafikini qurun
- Funksiyanın (y) və arqumentin aldığı qiymətləri real situasiyaya uyğun təqdim edin.

**3-3** **$y = |x|$ funksiyasının qrafiki**

Mütləq qiymətin tərifinə görə: $|x| = \begin{cases} x & \text{əgər } x > 0 \\ 0 & \text{əgər } x = 0 \\ -x & \text{əgər } x < 0 \end{cases}$

$y = |x|$ funksiyasının qrafikini quraq.

x	$y = x $
-6	$ -6 = 6$
-4	$ -4 = 4$
-2	$ -2 = 2$
0	0
2	$ 2 = 2$
4	$ 4 = 4$
6	$ 6 = 6$



$y = |x|$ funksiyasının qrafiki I və II rüblərin tənbölənləridir. (0; 0) nöqtəsi qrafikin təpə nöqtəsidir.

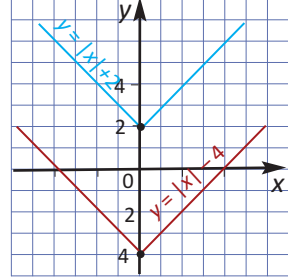
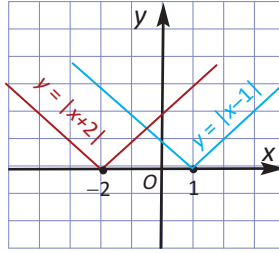
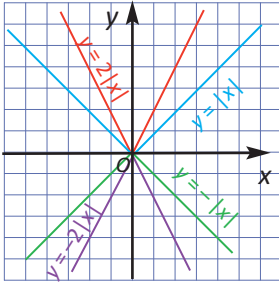
$y = |x|$ funksiyasının qrafiki Oy oxuna nəzərən simmetrikdir. Çünki qrafikin hər bir (x ; y) nöqtəsi ilə Oy oxuna nəzərən simmetrik olan ($-x$; y) nöqtəsi də qrafikə aiddir. Məsələn, (2;2) (-2;2) nöqtələri qrafik üzərində yerləşir və bu nöqtələr ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.

1. Nümunə.

- $y = |x|$, $y = 2|x|$ və $y = -|x|$, $y = -2|x|$ funksiyalarının eyni koordinat sistemində qurulmuş qrafiklərini araşdırın.
- $y = |x + 2|$ və $y = |x - 1|$ funksiyalarının, həmçinin $y = |x| + 2$ və $y = |x| - 4$ funksiyalarının qrafiklərini araşdırın.

Həlli. $y = |x|$ funksiyasının qrafiki üzərindəki hər bir nöqtənin absisini dəyişmədən ordinatını 2 dəfə artırırsa $y = 2|x|$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələr alınır. Qrafiki əmələ gətirən şüaların yaratdığı bucaq kiçilir.

b) $y = |x|$ funksiyasının qrafikini 2 vahid sola sürüşdürsək $y = |x + 2|$ funksiyasının qrafikini, 1 vahid sağa sürüşdürsək $y = |x - 1|$ funksiyasının qrafikini alırıq. $y = |x|$ funksiyasının qrafikini 2 vahid yuxarı sürüşdürsək $y = |x| + 2$ funksiyasının qrafikini, 4 vahid aşağı sürüşdürsək $y = |x| - 4$ funksiyasının qrafikini alırıq.



Bu qrafiklərə görə aşağıdakı ümumiləşdirmələri aparmaq olar.

- $y = a|x - m| + n$ funksiyasının qrafiki $y = a|x|$ funksiyasının qrafikinə $|m|$ vahid üfüqi ($m > 0$ olduqda sağa, $m < 0$ olduqda sola), $|n|$ vahid şaquli ($n > 0$ olduqda yuxarı, $n < 0$ olduqda aşağı) olaraq sürüşdürülməsidir.
- $(m; n)$ qrafikin təpə nöqtəsidir və qrafik $x = m$ xəttinə nəzərən simmetrikdir.
- $a > 0$ olduqda qrafiki təşkil edən şüalar yuxarıya doğru, $a < 0$ olduqda aşağıya doğru yönəlidir.

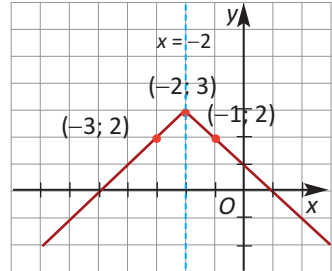
1. Nümunə. $y = -|x + 2| + 3$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli. 1. Qrafikin $(-2; 3)$ təpə nöqtəsini koordinat müstəvisi üzərində qeyd edin.

2. Funksiyaya uyğun hər hansı başqa bir nöqtəni, məsələn, $(-3; 2)$ nöqtəsini qeyd edin.

3. $x = -2$ simmetriya xəttinə görə $(-3; 2)$ nöqtəsinə simmetrik olan $(-1; 2)$ nöqtəsini qeyd edin.

4. $a = -1 < 0$ olduğu üçün şüaların aşağıya doğru yönəldiyini nəzərə almaqla, qeyd edilmiş üç nöqtəyə görə qrafiki çəkin.



2. Nümunə. Qrafikə və verilən nöqtələrə görə uyğun funksiyaları yazın.

Həlli.

1. Qrafikin təpəsi $(0; -3)$ nöqtəsindədir.

2. $y = a|x - m| + n$ tənliyində m və n -nin yerinə 0 və -3 qiymətlərini uyğun olaraq yazaq:

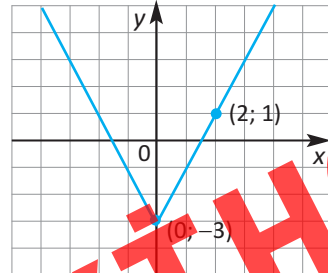
$$y = a|x - 0| + (-3); \quad y = a|x| - 3$$

Qrafik üzərindəki $(2; 1)$ nöqtəsinin koordinatlarını $y = a|x| - 3$ düsturunda yerinə yazaq:

$$1 = a|2| - 3; \quad 1 = 2a - 3; \quad 4 = 2a; \quad a = 2$$

Qrafikə uyğun funksiya $y = 2|x| - 3$ olacaq.

Yoxlama: Bunun üçün $y = 2|x| - 3$ funksiyasının qrafikini qurun. Qrafikin qollarının yuxarı yönələcəyinə, həmçinin $y = |x|$ -in qrafikinə nəzərən ordinat oxuna daha çox sıxılmış olacağına diqqət edin.



Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > $y = |x|$ funksiyasının qrafikini sürüşdürməklə $y = |x + 2|$; $y = |x - 2|$ və $y = |x| + 2$; $y = |x| - 2$ funksiyalarının qrafiklərini qurun və ümumiləşdirilmiş fikirlərinizi yazın.

- 2 > Verilən funksiyaların qrafiklərinin:

- a) Qrafikin qollarının aşağıya və ya yuxarıya yönəldiyini müəyyən edin;
 b) qrafiki əmələ gətirən şüaların yaratdığı bucağın $y = |x|$ funksiyasının qrafikinə nəzərən kiçildiyini və ya böyüdüynü, yoxsa dəyişmədiyini müəyyən edin;
 c) funksiyaların qrafiklərini $y = |x|$ funksiyasının qrafikinə görə qurun.

$$1) y = \frac{1}{2}|x|$$

$$3) y = |x + 5|$$

$$5) y = |x| - 6$$

$$2) y = |x| + 4$$

$$4) y = 2|x + 6| - 10$$

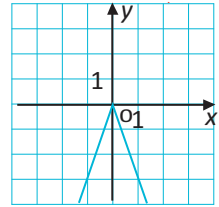
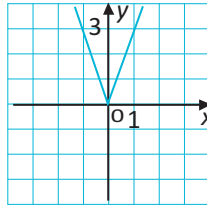
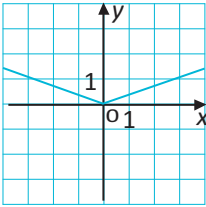
$$6) y = -|x - \frac{1}{4}| - 8$$

- 3 > Hansı qrafik hansı funksiya uyğundur?

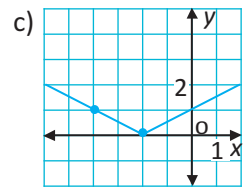
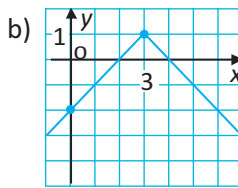
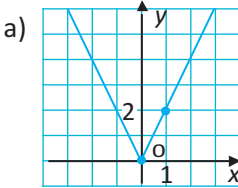
$$f(x) = 3|x|$$

$$f(x) = -3|x|$$

$$f(x) = \frac{1}{3}|x|$$



- 4 > Qrafiklərə uyğun funksiyaları yazın.



- 5 > İdman malları mağazasının üzgüçülük kostyumları və avadanlıqları satışından əldə etdiyi mədaxil (min manatla) $M(t) = -0,9|t - 6| + 5$ funksiyası ilə dəyişir. Burada t (aylarla) vaxtı göstərir.

- a) Bu funksiyanın qrafikini $0 \leq t \leq 12$ qiymətlərində qurun.
 b) Neçənci ayda satış maksimum olmuşdur? Həmin aydakı mədaxili tapın.

- 6 > Bir çox qrafikalkulyatorlarda modul işarəsi **abs** kimi işarələnir. Qrafikalkulyatorun köməyiylə funksiyaların qrafiklərini qurun.

$$y = -|x - 2| + 5;$$

$$y = -3,2|x| + 7$$

$$y = |0,05x - 3| + 0,02$$

$$y = -3,75|x + 1,5| - 5;$$

$$y = 1,5|x - 3| + 6$$

$$y = 1,27|2x - 3|$$

7 > Verilən funksiyalara görə tapşırıqları yerinə yetirin.

- 1) Ox və Oy oxları ilə kəsişmə nöqtələrini müəyyənləşdirin;
- 2) Qrafikləri eyni koordinat müstəvisində qurun.
- 3) Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

a) $y = |3x|$ və $y = 3|x|$

b) $y = |-4x|$ və $y = 4|x|$

c) $y = |x - 6|$ və $y = |x| - 6$

d) $y = |x + 2|$ və $y = |x| + 2$

8 > a) $f(x) = |3x - 2|$ və $g(x) = |-3x + 2|$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Bu iki qrafik haqqında fikirlərinizi yazın.

b) Qrafiki $f(x) = |2x + 1|$ funksiyasının qrafiki ilə üst-üstə düşən $g(x) = |ax + b|$ şəklində olan başqa bir funksiya yazın.

9 > Səhifə 70-də verilmiş araşdırma tapşırığının həllini aşağıdakı addımlarla yerinə yetirin.

- 1) Qrafikin təpə nöqtəsini koordinat müstəvisində qeyd edin;
- 2) $-2,5|x - 0,6| + 1,5 = 0$ tənliyini həll etməklə qrafikin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapın və koordinat müstəvisində qeyd edin;
- 3) $a = -2,5 < 0$ olduğu üçün şüaların aşağıya doğru yönəldiyini nəzərə almaqla qeyd edilmiş nöqtələrə görə qrafiki qurun.
- 4) Girişin hündürlüyünü və enini tapın.

Praktik məşğələ. 1) $3^3 = 27$, $4^3 = 64$ bərabərliklərindən istifadə etməklə 12^3 -nü hesablayın. Oxşar üsulla 18^3 -nü tapın.

2) Ədədi 10 dəfə artırısaq və ya azaltsaq, onun kubu necə dəyişər?

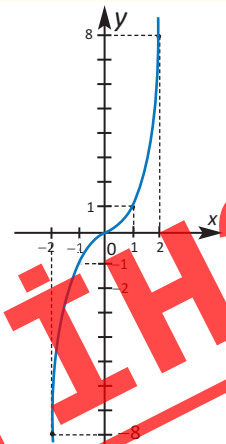
Gəldiyiniz nəticəyə əsaslanaraq, $0,5^3$ -nü, 50^3 -nü tapın.

3) Cədvəli dəftərinizdə tamamlayın.

x	-2		-0,5	0	0,5		
$y = x^3$		-1	-0,125	0		1	8

4) Koordinat müstəvisində absisləri x -in cədvəldəki qiymətlərinə, ordinatları isə y -in uyğun qiymətlərinə bərabər olan nöqtələri qurun və bu nöqtələri şəkildə göstərildiyi kimi səlis əyri ilə birləşdirin.

5) x -ə daha bir neçə, məsələn 1,5; -1,5 və s. qiymətləri verməklə, y -in uyğun qiymətlərini tapın və koordinatları uyğun ədədlər olan nöqtələrin də bu əyrinin üzərində yerləşdiyini dəqiqləşdirin.



LAYIHƏ

3-1

 $y = x^3$ funksiyasının qrafiki

$y = x^3$ funksiyası x -in bütün qiymətlərində təyin olunub və x -in mənfi qiymətlərində mənfi (mənfi ədədin kubu mənfi ədəddir), müsbət qiymətlərində müsbət qiymətlər alır (müsbət ədədin kubu müsbət ədəddir), $x = 0$ olduqda isə $y = 0$ olur. Yəni, $y = x^3$ funksiyasının həm təyin oblastı, həm də qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlərdir.

 $y = x^3$ funksiyasının qrafiki kub parabola adlanır.

Kub parabola koordinat başlanğıcından keçməklə, I və III rüblərdə yerləşir.

Arqumentin x qiymətini onun $-x$ əks qiyməti ilə əvəz etsək, onda funksiya da əks qiymətlər alacaq: $y = x^3$ olduğuna görə $(-x)^3 = -x^3 = -y$ alınacaqdır.

Deməli, qrafikin hər bir $(x; y)$ nöqtəsinə həmin qrafikdə koordinat başlanğıcına görə simmetrik olan $(-x; -y)$ nöqtəsi uyğundur.

Beləliklə, $y = x^3$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > $y = x^3$ funksiyası verilmişdir.

a) $A(-2; 8)$, $B(2; 8)$, $C(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8})$, $D(-3; -27)$ nöqtələrindən hansılar bu funksiyanın qrafiki olan kub parabola üzərində yerləşir?

c) Kub parabola üzərində ordinatı: 8; -1 olan neçə nöqtə var?

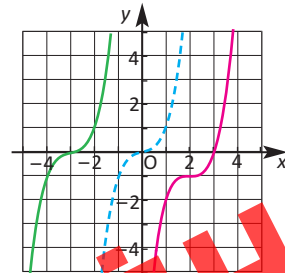
b) m -in hansı qiymətində kub parabola $N(m; -8)$ nöqtəsindən keçir?

2 > $y = x^3$ funksiyasının qrafikindən istifadə edərək:

a) $x = 1, 2$; $x = -1, 2$ olduqda y -in təqribi qiymətini;

b) $y = 4$; $y = -4$ olduqda x -in təqribi qiymətini tapın.

3 > Şəkildə $y = x^3$, $y = (x + 3)^3$, $y = (x - 2)^3 - 1$ funksiyalarının qrafikləri təsvir edilmişdir. Hər bir qrafikin hansı funksiya aid olduğunu müəyyən edin.



4 > Tili 4 sm olan kubun həcmi hesablayın.

a) Bu kubun tillərinin uzunluqlarını 2 dəfə artırıbsaq, həcmi neçə olar?

b) Verilmiş kubun tillərini 1 sm artırıbsaq, həcmi ne qədər dəyişər?

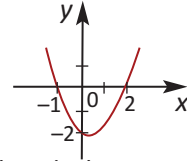
5 > $y = x^3$ və $y = 2 - x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun və kəsişmə nöqtəsini göstərin



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > b və c -nin hansı qiymətlərində $y = x^2 + bx + c$ parabolası A $(-1; 6)$ və B $(0; 2)$ nöqtələrindən keçir?
- 2 > $y = x^2 - 2x - 15$ funksiyasının qrafiki koordinat oxlarını hansı nöqtələrdə kəsir?
- 3 > $y = x^2$ parabolasını 3 vahid sola, 2 vahid aşağı sürüşdürükdə hansı funksiyanın qrafiki alınır?
- 4 > k -nin hansı qiymətində $y = x^2 + 6x + k$ funksiyasının ən kiçik qiyməti 1-ə bərabərdir?
- 5 > $y = x^2 - 2x + 3$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu göstərin.

- 6 > $y = x^2 + bx + 3$ parabolasının təpə nöqtəsinin ordinatı -1 -ə bərabər olarsa, b -ni tapın və qrafiki qurun. Neçə hal mümkündür?



- 7 > Şəildə verilmiş parabola uyğun kvadratik funksiyanı yazın.

- 8 > Yerdən $v_0 = 20$ m/san sürətlə yuxarı atılmış topun qalxdığı hündürlüyün (m-lə) t (san) uçuş zamanından asılılığı $h(t) = -5t^2 + 20t$ düsturu ilə verilir. Topun qalxdığı ən yüksək hündürlüyü tapın.

- 9 > **Fiziologiya.** Alimlər müəyyən etmişlər ki, piyada gəzərkən sərf olunan enerjini $y = 0,00849(x - 90,2)^2 + 51,3$ ($50 \leq x \leq 150$) funksiyası ilə müəyyən etmək olar. Burada x şəxsin sürətini (m/dəq ilə) göstərir. Funksiyanın verilən təyin oblastına uyğun qrafikini qurun. Hərəkət sürəti artdıqca enerji sərfiyyatı necə dəyişir? Hansı sürətdə enerji sərfi minimum olur?

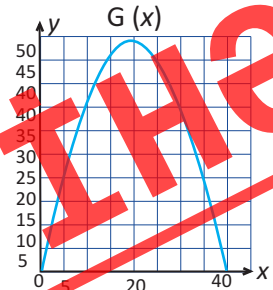
- 10 > **Biznes. Maksimum gəlir.** Araşdırmalar nəşriyyatın gəlirinin $G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x$ funksiyası ilə dəyişdiyini aşkar etdi.

Burada x satılan kitabların sayını (minlərlə), $G(x)$ isə uyğun gəliri (min manatla) göstərir.

a) Nəşriyyat neçə kitabın satışından 32 min manat gəlir əldə etmişdir?

b) Nəşriyyat maksimum gəlirini neçə kitab satmaqla əldə etmişdir?

c) a) bəndində aldığınız iki cavabı necə izah edərdiniz?



LAYIHƏ

11 > Çadırın öndən görüntüsünü $y = -\frac{3}{4}|x - 2| + 1,5$ funksiyası ilə ifadə etmək olar. x və y metrlərlə ölçünü göstərir. Ox oxunu yer səthində, çadırın oturacağında qəbul edin. Çadırın öndən görünüşü hansı ölçülərdədir?

12 > $f(x) = |ax + b|$ funksiyasının qrafiki absis oxunu $(\frac{3}{2}; 0)$ ordinat oxunu $(0; 6)$ nöqtəsində kəsirsə, a və b -nin qiymətlərini tapın.

13 > Uyğunluğu müəyyən edin.

1. $y = (x^2 - 2)^2 + 3$

A. təpə nöqtəsi $(-2; 3)$

2. $y = (x^2 + 2)^2 + 3$

B. təpə nöqtəsi $(2; 3)$

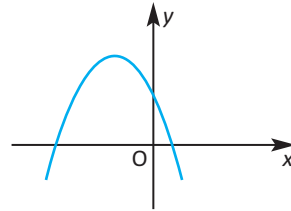
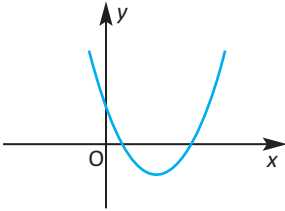
3. $y = -(x^2 - 3)^2 + 2$

C. təpə nöqtəsi $(; 2)$

14 > $y = x^2 + bx + c$ parabolasının təpə nöqtəsi $T(6; -12)$ olarsa, b və c -ni tapın.

15 > $y = x^2 + mx + n$ funksiyası 4-ə bərabər olan ən böyük qiymətini $x = 1$ olduqda alır. m və n -i tapın.

16 > Şəkildə verilən $y = ax^2 + bx + c$ funksiyasının qrafikinə görə a , b , c əmsallarının işarələrini müəyyən edin.

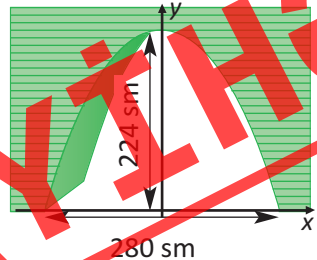


17 > Musiqi qrupunun yeni çıxan musiqi albomunun satışı əvvəlcə sabit sürətlə artdı, sonra isə eyni sürətlə azaldı. Satılan albomların sayını n (yüzlərlə) ilə işarə etsək, onun dəyişməsinə $n = -2|t - 20| + 40$ kimi yazmaq olar. t (həftələrlə) vaxtı göstərir.

a) Bu funksiyanın qrafikini $0 \leq t \leq 40$ qiymətlərində qurun;

b) Neçənci həftədə ən çox albom satılmışdır? Həmin həftədə neçə albom satılıb?

18 > 1) Koordinat sistemini göstərildiyi kimi qəbul etməklə tağın şəkildə verilən ölçülərinə uyğun kvadratik funksiyayı yazın.
2) Tağın bir tərəfindən: a) 70 sm; b) 1m 20 sm məsafədə olan nöqtələrdə tağın hündürlüyünü tapın.



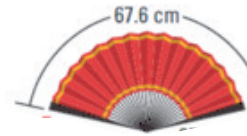
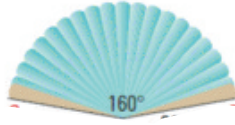
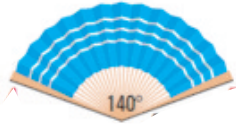
LAVIHA

4

Çevrənin tənliyi

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

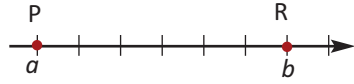
- ✓ Koordinatları ilə verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafəni hesablamağı;
- ✓ Verilmiş mərkəzinə və radiusuna görə çevrənin tənliyini yazmağı;
- ✓ Tənliyi verilmiş çevrənin mərkəzinə və radiusunu müəyyən etməyi;
- ✓ Sektorun və seqmentin sahəsinə aid məsələlər həll etməyi;



4-1

İki nöqtə arasındakı məsafə

• Ədəd oxu üzərində

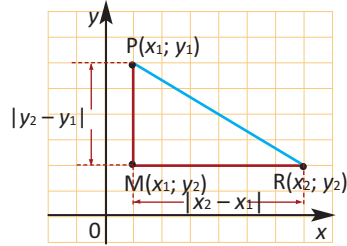


$$PR = |a - b| \text{ və ya } PR = |b - a|$$

• Koordinat müstəvisi üzərində

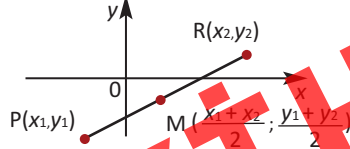
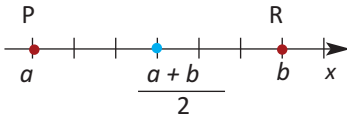
P və R nöqtələri arasındakı məsafəni, yəni, PR parçasının uzunluğunu ΔMPR -dən Pifaqor teoremini tətbiq etməklə tapmaq olar. MR və MP katetlərinin uzunluqları uyğun olaraq, $|x_2 - x_1|$ və $|y_2 - y_1|$ olduğundan alırıq:

$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Bu düstur iki nöqtə arasındakı məsafə düsturudur.

İki nöqtə arasındakı məsafəyə aid məsələləri həll edərkən parçanın orta nöqtəsinin koordinatları düsturundan da tez-tez istifadə edilir.



Nümunə. A(-2;3) və B(1;-1) nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

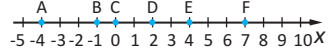
Həlli. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə alırıq:

$$AB = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Öyrənmə tapşırıqları

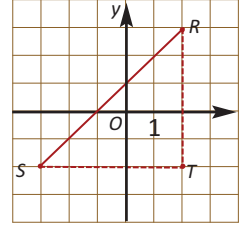
- 1 > Ədəd oxu üzərində verilən nöqtələr arasındakı məsafəni hesablayın.

a) A və D b) B və E c) C və F



- 2 > R və S nöqtələri arasındakı məsafəni iki üsulla hesablayın:

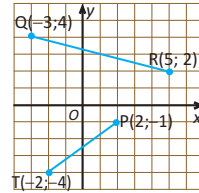
1) Koordinat müstəvisi üzərində vahid damaları sayaraq Pifaqor teoremini tətbiq etməklə.
2) R və S nöqtələrinin koordinatlarını şəklə görə müəyyənləşdirib, iki nöqtə arasındakı məsafə düsturunu tətbiq etməklə.



- 3 > Verilən nöqtələr arasındakı məsafəni hesablayın.

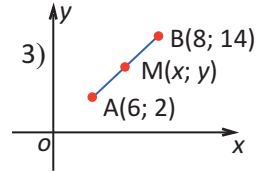
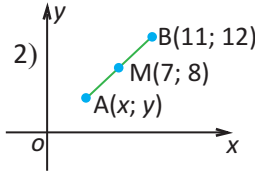
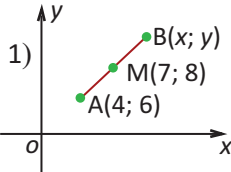
a) 1) A(-1; 3) və B(5; 11);
2) C(-3; 2) və D(1; 5);
3) E(6,5; -2,4) və F(-5,5; 2,6).

b)



- 4 > M nöqtəsi AB parçasının orta nöqtəsidir. Verilənlərə görə tapın:

a) dəyişənlərin qiymətlərini; b) AB parçasının uzunluğunu.



- 5 > RT parçasının R uc nöqtəsinin və S orta nöqtəsinin koordinatları verilmişdir.

1) T nöqtəsinin koordinatlarını müəyyən edin.
2) RT parçasının uzunluğunu müxtəlif üsullarla tapın.

a) R(-1; -3), S(-1; 2)

b) R(2; 6), S(-1; 2)

c) R(-3; 0), S(2; 12)

- 6 > Təpələri verilən nöqtələrdə yerləşən fiqurların perimetrini tapın.

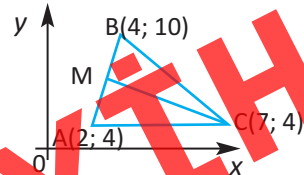
a) Üçbucaq:

b) Dördbucaqlı:

A(-2; -1), B(2; 2), C(6; -1)

A(-4; -3), B(0; -2), C(-1; 2), D(-5; 1)

- 7 > M nöqtəsi AB tərəfinin orta nöqtəsidir. C və M nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.



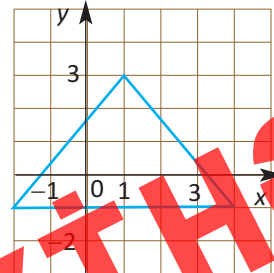
- 8 > Təpələri A(-3; 3), B(1; 7), C(2; 1) nöqtələrində olan üçbucağın CM medianının uzunluğunu tapın.

LAYIHƏ

- 9 > Uc nöqtələri $L(-5; -6)$ və $M(7; 10)$ olan LM parçası verilmişdir. X nöqtəsi LM parçasının üzərində yerləşir və $LX = \frac{1}{4}LM$. X nöqtəsinin koordinatlarını müəyyən edin.
- 10 > k -nin hansı qiymətində $A(6; -4)$ və $B(2; k)$ nöqtələri arasındakı məsafə 5 vahiddir? Neçə belə nöqtə var?
- 11 > Ox oxu üzərində elə nöqtə tapın ki, o, $(0; 2)$ və $(8; 6)$ nöqtələrindən eyni məsafədə olsun.

Tətbiq tapşırıqları

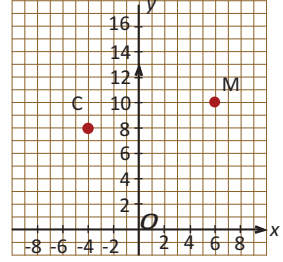
- 12 > Təpə nöqtələrinin koordinatları verilmiş üçbucaqları qurun. Üçbucağın tərəflərinin uzunluğunu hesablayın və düzbucaqlı üçbucaq olub-olmadığını müəyyən edin.
- a) $(1; 2), (2; 3), (5; 0)$ b) $(2; 1), (4; 2), (2; 6)$ c) $(3; 2), (5; 1), (2; 5)$
- 13 > Koordinat müstəvisi üzərində təpələri $A(1; 1), B(5; 9), C(2; 8)$ və $D(0; 4)$ nöqtələrində olan dördbucaqlını çəkin.
- a) Bu dördbucaqlının trapesiya olduğunu əsaslandırın.
- b) Bu dördbucaqlının bərabəryanlı trapesiya olduğunu əsaslandırın.
- 14 > **Miqyas.** $\triangle ABC$ -nin təpələri $(1; 4), (5; 4)$ və $(5; 1)$ nöqtələrində yerləşir.
- a) $\triangle ABC$ -nin perimetrini tapın.
- b) Təpə nöqtələrinin koordinatlarının qiymətini 2 dəfə, 3 dəfə artırın və üçbucağın perimetrini yenidən hesablayın.
- c) Üçbucağın təpə nöqtələrinin koordinatlarının artması ilə perimetrinin artması arasındakı asılılığı izah edin.
- 15 > a) Şəkli dəftərinizə köçürün.
- b) Üçbucağın tərəflərinin uzunluqlarını tapın.
- c) Hər bir tərəfin orta nöqtəsinin koordinatlarını müəyyən edin.
- d) Orta nöqtələri ardıcıl birləşdirməklə yeni üçbucaq qurun.
- e) Bu iki üçbucağın perimetrlərini müqayisə edin.



LAYIHƏ

- 17 > Mehribangilin evi koordinat müstəvisində $M(6;10)$ nöqtəsi kimi qeyd edilmişdir. Cəlilgilin evi Mehribangilin evindən 2 vahid cənubda, 10 vahid qərbdə yerləşir. Məktəb hər ikisinin evindən eyni məsafədədir.

a) Cəlilgilin evini koordinat müstəvisində qeyd edin
 b) Məktəbin yerini koordinat müstəvisində qeyd edin.
 Məktəbin yerini doğru seçdiyinizi onun hər iki evdən həqiqətən eyni məsafədə olduğunu hesablamalarla göstərin. Mümkün variantları fikirləşin.



Göstəriş: parçanın orta perpendikulyarının xassəsindən istifadə edin.

- 18 > Uc nöqtələri $A(1;2)$ və $B(3;1)$ olan parçanın orta perpendikulyarının tənliyini sadalanan addımları yerinə yetirməklə iki üsulla yazın.

1-ci üsul: ● Orta perpendikulyar üzərində ixtiyari $N(x; y)$ nöqtəsi götürün.

● $NA^2 = NB^2$ bərabərliyini yazıb sadələşdirin.

2-ci üsul: ● AB parçasının orta M nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

● A və B nöqtələrindən keçən düz xəttin bucaq əmsalını (k_1) tapın.

● $k_1 \cdot k_2 = -1$ münasibətindən orta perpendikulyarın bucaq əmsalını (k_2) tapın.

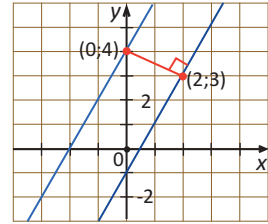
● M nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı k_2 olan düz xəttin tənliyini yazın.

- 19 > Koordinat müstəvisi üzərində təsvirə görə tapşırıqları yerinə yetirin.

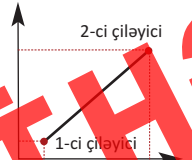
a) Düz xətlərin tənliklərini yazın.

b) Bu düz xətlərin paralel olduğunu onların tənliyinə görə izah edin.

c) Düz xətlər arasındakı məsafəni tapın.



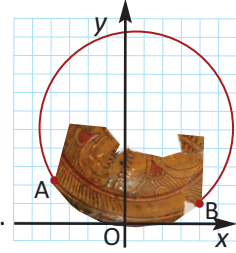
- 20 > Usta düzbucaqlı formalı sahənin müxtəlif yerlərində çiləmə yolu ilə işləyən suvarma sistemi quraşdırmalıdır. Bunun üçün o, birinci çiləyici ilə ikinci çiləyicini birləşdirən boru almalıdır. O, bu məsafəni ölçməyi unutmuş və mağazaya yollanmışdı. Lakin ustanın yaddaşında olan bir neçə ölçülər var idi. Birinci çiləyici yaşıllıq sahənin başlanğıcından 3 m şərqdə, 1 m şimalda, ikinci çiləyici isə 15 m şərqdə, 10 m şimalda yerləşir. Usta orta məktəbdə öyrəndiyi hansı riyazi biliklərini tətbiq etməklə iki çiləyici arasındakı məsafəni hesablaya bilər və ona geri qayıtmağa ehtiyac qalmaz? Plan üzərində verilən ədədi məlumatları yazın və məsələni həll edin.



LAYIHƏ

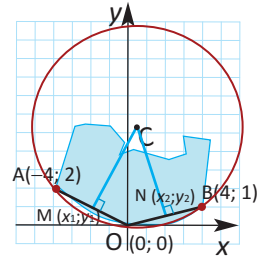
- 21 > Arxeologiya. Kiçik layihə işi.** Aşağıda arxeoloqların qazıntılar zamanı tapdığı boşqab qalığına görə onun həqiqi ölçüsünün tapılması probleminin həll addımları verilmişdir. Bu addımlarla məsələni həll edin. Tətbiq edilən riyazi anlayışların mümkün qədər geniş siyahısını tutun. Bu anlayışların izahlı lüğətini tərtib edin. İzahları şəkil və nümunələrlə yazın.

1. Boşqab parçası koordinat sistemində yerləşdirilmişdir. Dairəvi hissənin üzərində üç nöqtə (A, O, B nöqtələri) qeyd etməklə sxematik təsviri dəftərinizdə çəkin.



2. Çevrənin mərkəzini müəyyən etmək üçün:
a) AO və OB parçalarının orta perpendikulyarlarını çəkin.
b) Orta perpendikulyarları üzərində saxlayan düz xətlərin tənliklərini yazın.

- ✓ AO parçasının orta perpendikulyarını üzərində saxlayan düz xəttin tənliyini yazmaq üçün:
- M orta nöqtəsinin koordinatlarını tapın;
- AO parçasını üzərində saxlayan düz xəttin bucaq əmsalını müəyyən edin.



- Orta perpendikulyarın bu düz xətlə qarşılıqlı perpendikulyar olduğuna əsasən onun bucaq əmsalını tapın və düz xəttin tənliyini yazın.
- ✓ OB parçasının orta perpendikulyarını üzərində saxlayan düz xəttin tənliyini yazmaq üçün:
- N orta nöqtəsinin koordinatlarını tapın.
- OB-dən keçən düz xəttin bucaq əmsalını müəyyən edin.
- Orta perpendikulyarı üzərində saxlayan düz xəttin bucaq əmsalını tapın və bu düz xəttin tənliyini yazın.
- ✓ Çevrənin mərkəzi orta perpendikulyarların kəsişmə nöqtəsidir. Deməli, orta perpendikulyarları üzərində saxlayan düz xətlərin tənliklərindən ibarət sistemin həlli çevrənin C mərkəzinin koordinatlarıdır.
- ✓ C nöqtəsindən qeyd edilmiş nöqtələrin hər birinə qədər olan məsafəni hesablamaqla bu çevrənin radiusunu tapın. Boşqabın diametrinin təxmini qiymətini yazın.

LAYIHƏ

4-2

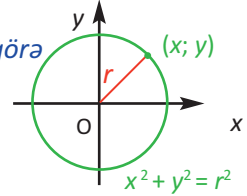
Çevrənin tənliyi

İki nöqtə arasındakı məsafə düsturundan istifadə etməklə mərkəzi koordinat başlanğıcında, radiusu isə r olan çevrənin tənliyini yazmaq olar. Çevrənin mərkəzi $(0; 0)$ nöqtəsi ilə onun istənilən $(x; y)$ nöqtəsi arasındakı məsafə r radiusuna bərabərdir.

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r \quad \text{iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \text{Sadələşdirmə}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{Hər iki tərəfini kvadrata yüksəltmə}$$



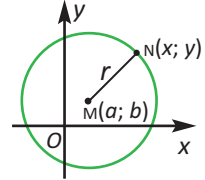
Mərkəzi koordinat başlanğıcında, radiusu r olan **çevrənin tənliyi**:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Məsələn, mərkəzi $(0; 0)$ koordinat başlanğıcında, radiusu 2 olan çevrənin tənliyi $x^2 + y^2 = 4$ kimidir.

Mərkəzi $M(a; b)$ nöqtəsində olan r radiuslu çevrənin üzərindəki istənilən $N(x; y)$ nöqtəsi üçün iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \quad \text{olur.}$$



Buradan hər iki tərəfi kvadrata yüksəltməklə mərkəzi $(a; b)$ nöqtəsində olan r radiuslu çevrənin tənliyini alırıq:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Məsələn, mərkəzi $(3; 2)$ nöqtəsində və radiusu 4-ə bərabər olan çevrənin tənliyi

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 4; \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16 \quad \text{kimi olacaq}$$

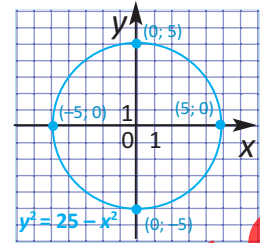
- 1. Nümunə.** $y^2 = 25 - x^2$ tənliyi ilə verilmiş çevrəni koordinat müstəvisi üzərində qurun.

Həlli. Tənliyi $x^2 + y^2 = 5^2$ şəklində yazaq.

Göründüyü kimi, $r = 5$ -dir. Koordinat başlanğıcından 5 vahid məsafədə olan dörd nöqtə qeyd edək.

Məsələn, $(5; 0)$, $(-5; 0)$, $(0; 5)$, $(0; -5)$.

Bu nöqtələrdən keçən çevrə çəkək.



- 2. Nümunə.** $A(2; 3)$ nöqtəsi mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrənin üzərindədir. Bu çevrənin tənliyini yazın.

Həlli. Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən çevrənin $x^2 + y^2 = r^2$ tənliyində A nöqtəsinin koordinatlarını yerinə yazsaq, $2^2 + 3^2 = r^2$, $r^2 = 13$ olar. Bu çevrənin tənliyi: $x^2 + y^2 = 13$

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Verilən radiuslu və mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən çevrənin tənliyini yazın.
 a) 3 b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{15}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $\sqrt{22}$
- 2 > Verilən mərkəzə, radiusa və ya diametrə görə çevrənin tənliyini yazın.
 a) $(2; -11)$, $r = 3$ b) $(-4, 2)$, $d = 2$ c) $(0; 0)$, $r = \sqrt{5}$
 d) $(6; 0)$, $r = \frac{2}{3}$ e) $(-1; -1)$, $d = \frac{1}{4}$ f) $(-5, 9)$, $d = 2\sqrt{20}$
- 3 > Tənliyi $x^2 + y^2 = 169$ olan çevrə üzərində: a) absisi 5 olan nöqtənin ordinatını tapın; b) ordinatı 0 olan nöqtənin absisini tapın.
- 4 > Verilən tənliklərə görə çevrənin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu müəyyən edin. Çevrəni qurun.
 a) $x^2 + y^2 = 36$ c) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$
 b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ d) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$
- 5 > Çevrənin verilmiş tənliyinə görə onun mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu müəyyən edin.

Nümunə. $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin mərkəzini və radiusunu tapın.

Həlli. $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 4 = 0$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

Çevrənin mərkəzi $M(1; -2)$ nöqtəsidir. Radiusu isə $r = 3$ -dür.

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 16x + 40y - 20 = 0$

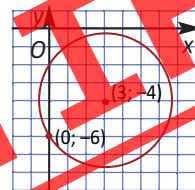
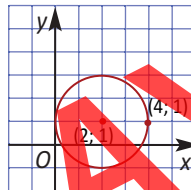
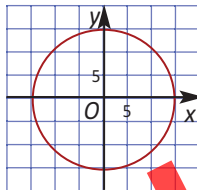
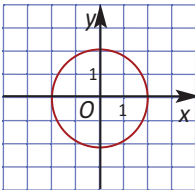
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

- 6 > Çevrənin koordinat müstəvisi üzərindəki təsvirinə uyğun tənliyini yazın.



7 > Verilənlərə görə çevrənin tənliyini yazın.

Mərkəz nöqtəsi	(0; 0)	(1; 2)	(-3; 5)	(-13; π)	(9; 10)
Çevrə üzərində nöqtə	(0; 6)	(4; 2)	(1; 8)	(2; π)	(-7; 3)

8 > a) Diametrinin uc nöqtələri (2; -1), (4; 7) olan çevrənin tənliyini yazın. Bu çevrənin üzərində yerləşən və absisi -1 olan nöqtələri tapın.

b) Diametri 12 sm olan və mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən çevrənin tənliyini yazın. Bu çevrəni 6 vahid sağa, 5 vahid aşağı sürüşdürülsə, onun tənliyi necə dəyişər?

c) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ çevrəsi 6 vahid sola, 3 vahid aşağı sürüşdürülmüşdür. Çevrənin son vəziyyətinə uyğun tənliyini yazın.

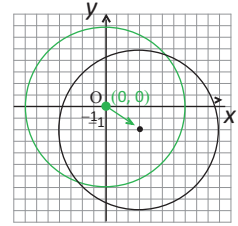
9 > a) Radiusu 7-yə bərabər olan və mərkəzi (3; -2) nöqtəsində olan çevrənin tənliyini yazın.

b) Bu çevrənin üfüqi diametrinin uc nöqtələrinin koordinatlarını müəyyən edin.

Göstəriş: iki üsulla həll edin.

1) mərkəzi (0; 0) nöqtəsində olan çevrəyə görə sürüşmədə koordinatları müqayisə etməklə.

2) çevrənin tənliyində $y = -2$ qiymətini yerinə yazıb həll etməklə.



10 > A(2; 3), B(3; 4), C(4; 4), D(4; -3), E(-3; 4) nöqtələrindən hansılar tənliyi $x^2 + y^2 = 25$ olan çevrəyə aiddir?

11 > Nümunə üçün həll edilmiş məsələni araşdırın və məsələləri həll edin.



Nümunə. Ötürücü stansiyadan radiosiqnallar 90 km məsafəyə ötürülə bilər. Ləməngilin evi ötürücü stansiyadan 45 km şərqdə, 56 km şimalda yerləşir. Ötürücüdən siqnalların yayıldığı sahəni bərabərsizlik yazmaqla müəyyən edin. Ləməngil bu ötürücüdən istifadə edə bilərlərmi?

Həlli. $x^2 + y^2 = r^2$ çevrəsinin daxili oblastı və xarici oblastı aşağıdakı bərabərsizliklərlə təyin edilir:

Daxili oblast: $x^2 + y^2 < r^2$ Xarici oblast: $x^2 + y^2 > r^2$

Siqnalların yayıldığı sahə: $x^2 + y^2 < 90^2$

$45^2 + 56^2 < 90^2$ olduğunu yoxlayaq: $5161 < 8100$, deməli, onlar bu ötürücüdən istifadə edə bilərlər.

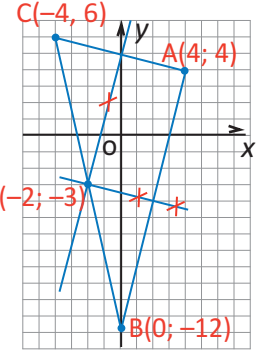
1) Zəlzələ episentrdən 110 km məsafədə hiss edildi. Yaşadığınız yer episentrdən 50 km şərqdə, 30 km şimalda yerləşirsə, siz də bu zəlzələni hiss etmisinizmi?

2) Dəniz mayakının işıqları 20 km uzağa yayılır. Mayakdan 10 km şərqdə və 16 km şimalda olan gəmidən bu mayakın işıqları görə bilərsinizmi?

LAYIHƏ

- 12> Verilən üç nöqtədən keçən çevrənin tənliyinə aid nümunəni araşdırın və tapşırıqları yerinə yetirin.

Nümunə. a) Mobil telefonlar siqnalların bir ötürücü stansiyadan digər stansiyaya peyklər vasitəsilə ötürülməsi ilə işləyir. Mobil operator şirkəti ötürücü stansiyayı elə yerləşdirməyə çalışır ki, daha çox istifadəçiyə xidmət etsin. Fərz edin ki, üç böyük şəhər A(4; 4), B(0; -12), C(-4; 6) nöqtələrində yerləşir. Koordinat müstəvisi üzərində 1 vahid 100 km məsafəyə uyğundur. Ötürücü stansiya bu şəhərlərdən eyni məsafədə olan nöqtədə yerləşdirilməlidir. Bu nöqtənin koordinatlarını və uyğun çevrənin tənliyini yazın.



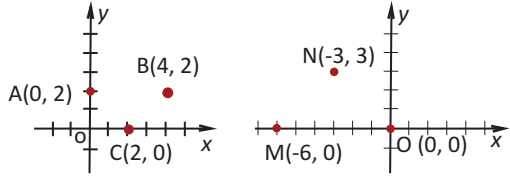
Həlli. Əvvəlcə bu nöqtələri birləşdirək və alınan üçbucağın tərəflərinin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsini tapaq. Bu (-2; -3) nöqtəsidir. Bu nöqtə çevrənin mərkəzi olmaqla stansiyanın yerini göstərir.

Mərkəzlə verilən nöqtələrdən istənilən biri arasındakı məsafə çevrənin radiusudur. $r = \sqrt{(-2-0)^2 + (-3-(-12))^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$

Çevrənin tənliyi: $(x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 = (\sqrt{85})^2$, $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 85$

Qeyd. Çevrənin mərkəzinin koordinatlarını orta perpendikulyara uyğun xətti tənlikləri müəyyən edərək, tənliklər sistemi həll etməklə də tapa bilərsiniz.

b) Şəkilləri dəftərinizə köçürün. Qeyd edilmiş üç nöqtədən keçən çevrənin tənliyini yazın və çevrəni qurun.



- 13> Nümunəni araşdırın. Verilən çevrəyə verilən nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

Nümunə. $x^2 + y^2 = 13$ tənliyi ilə verilmiş çevrəyə (2;3) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

Həlli.

Toxunma nöqtəsinə çəkilmiş radiusu üzərində saxlayan düz xəttin bucaq əmsalı:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

(2; 3) nöqtəsindən keçən radius və toxunan qarşılıqlı perpendikulyar olduqlarından toxunanın bucaq əmsalı $-\frac{2}{3}$ olacaq.

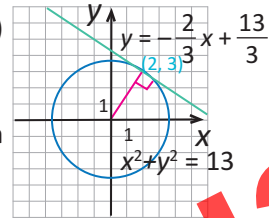
Toxunanın tənliyi: $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

a) $x^2 + y^2 = 13$; (2; 3)

b) $x^2 + y^2 = 41$; (-4; -5)

c) $x^2 + y^2 = 65$; (-8, 1)

d) $x^2 + y^2 = 40$; (-2, 6)



- 14 > $x^2 + y^2 - 6x + 9y + 8 = 0$ çevrəsinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.
- 15 > A(10; 7) nöqtəsindən $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ tənliyi ilə verilən çevrənin mərkəzinə qədər məsafəni tapın.
- 16 > C(5; -2) nöqtəsindən $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ çevrəsinə qədər məsafəni tapın.
- 17 > Verilən tənliklərə görə düz xəttin çevrənin toxunanı, yoxsa kəsəni olduğunu və ya heç biri olmadığını müəyyən edin.

a) $x^2 + y^2 = 36$

b) $x^2 + y^2 = 100$

c) $x^2 + y^2 = 4$

$y = 6$

$y = 14 - x$

$x + y = 7$

d) $x^2 + y^2 = 10$

e) $x^2 + y^2 = 9$

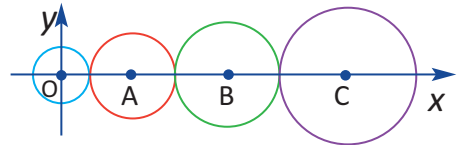
f) $x^2 + y^2 = 9$

$y = 3x$

$y = x - 3$

$y = x$

- 18 > Dörd toxunan çevrənin mərkəzləri Ox oxu üzərindədir. A çevrəsinin radiusu O çevrəsinin radiusundan 2 dəfə, B çevrəsinin radiusu O çevrəsinin radiusundan 3 dəfə, C çevrəsinin radiusu O çevrəsinin radiusundan 4 dəfə böyükdür. BC = 28 olduğu məlumdur. A çevrəsinin tənliyini yazın.



- 19 > Hansı çevrə tənliyidir? Cavabınızı əsaslandırın.

1) $x^2 + y^2 = -16$

2) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

3) $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$

4) $x^2 + 10x + y^2 - 8y + 8 = 0$

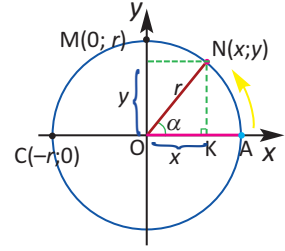
- 20 > a) $(x - 2)(x - 6) + (y - 5)(y - 11) = 0$ tənliyinin çevrənin tənliyi olduğunu göstərin.

b) Diametrinin uc nöqtələrinin koordinatları $(a; b)$ və $(c; d)$ olan çevrənin tənliyinin $(x - a)(x - c) + (y - b)(y - d) = 0$ şəklində olduğunu göstərin.

- 21 > a) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$; $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 1$ tənlikləri ilə verilmiş çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafəni tapın.
- b) Bu çevrələri koordinat müstəvisində qurun. Çevrələr üzərində olmaqla bir-birinə ən yaxın olan iki nöqtə göstərin və bu nöqtələr arasındakı məsafəni tapın.

LAYIHƏ

Praktik məşğələ. 1) Absis oxu üzərində koordinat başlanğıcından sağda A nöqtəsini qeyd edin və mərkəzi O nöqtəsində yerləşməklə $r = OA$ radiuslu çevrə çəkin.
 2) O nöqtəsi ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə α iti bucağı qədər dönmədə A nöqtəsinin çevrildiyi nöqtəni $N(x; y)$ ilə göstərin.
 3) Şəkilə görə ONK düzbucaqlı üçbucağında α iti bucağının sinusu və kosinusunu yazın:



$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

4) Bu düsturları $\alpha = 90^\circ$ olduqda $M(0; r)$ nöqtəsi, $\alpha = 180^\circ$ olduqda $C(-r; 0)$ nöqtəsi üçün tətbiq edin:

$$\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0, \quad \sin 180^\circ = \frac{0}{r} = 0, \quad \cos 180^\circ = \frac{-r}{r} = -1$$



Çevrə üzərindəki nöqtələrin koordinatları və triqonometrik nisbətlər

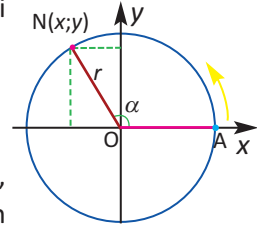
Koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə α bucağı qədər dönmədə $A(r; 0)$ nöqtəsi $N(x; y)$ nöqtəsinə çevrilirsə,

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \text{ münasibətləri doğrudur.}$$

Buradan mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu r olan çevrə üzərindəki $N(x; y)$ nöqtəsinin koordinatları üçün $x = r \cdot \cos \alpha$, $y = r \cdot \sin \alpha$ alırıq.

Bu düsturlarda α ON şüasının absis oxunun müsbət istiqaməti ilə saat əqrəbi hərəkətinin əksinə olmaqla əmələ gətirdiyi bucaqdır.

$$\text{Əgər } N(x; y) \text{ ordinat oxu üzərində deyilsə, } \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{r \cdot \sin \alpha}{r \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



22 > a) Damalı vərəqdə 1 damanı vahid qəbul edərək, mərkəzi koordinat başlanğıcında olmaqla $r = 10$ radiuslu çevrə çəkin. $\alpha = 30^\circ$ bucağı qədər dönmədə $A(10; 0)$ nöqtəsinin çevrildiyi $N(x; y)$ nöqtəsinin koordinatlarına görə $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ -nın təqribi qiymətlərini tapın.

b) Tapşırığı 45° , 60° , 120° , 150° dönmə bucaqları üçün də yerinə yetirin. Aldığınız nəticələri kalkulyatorla hesablanmış qiymətlərlə müqayisə edin.

23 > Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 5 olan çevrə üzərində $A(5; 0)$ nöqtəsini qeyd edin. Koordinat başlanğıcı ətrafında verilmiş α bucağına uyğun dönmədə A nöqtəsinin çevrildiyi $N(x; y)$ nöqtəsinin koordinatlarını tapın:

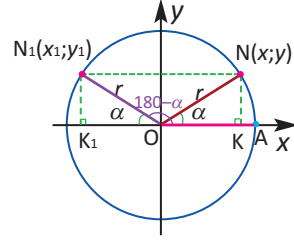
a) $\alpha = 0^\circ$

b) $\alpha = 100^\circ$

c) $\alpha = 120^\circ$

LAYIHƏ

Praktik məşğələ. 1) Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu r olan çevrə üzərində α iti bucağı qədər dönmədə A nöqtəsinin çevrildiği $N(x; y)$ nöqtəsini və $180^\circ - \alpha$ dönmə bucağına uyğun $N_1(x_1; y_1)$ nöqtəsini qeyd edin. N və N_1 nöqtələri hansı oxla nəzərən simmetrikdirlər?



2) $\triangle ONK$ və $\triangle ON_1K_1$ -in konqruentliyini əsaslandırın və bunun əsasında N və N_1 nöqtələrinin koordinatları arasında $y_1 = y, x_1 = -x$ münasibətlərinin olduğunu izah edin.

$$3) \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{r} = \frac{y}{r} = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha$$

bərabərliklərini araşdırın.

4) Qonşu bucaqların sinusları və kosinusları haqqında fikir yürüdün.

Qonşu bucaqların sinusları bərabərdir, kosinusları isə qarşılıqlı əksdir.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

Buradan $\cos \alpha \neq 0$ olduqda tərəf-tərəfə bölməklə alırıq:

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

Bu düsturlara əsaslanaraq, 90° -dən böyük bucaqların sinus, kosinus və tangensini iti bucağın sinus, kosinus və tangensi ilə uyğun olaraq ifadə etmək olur.

Nümunə. 150° -li bucağın sinus, kosinus və tangensini tapın.

Həlli. 150° -li bucağa qonşu bucaq 30° -li olduğundan

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

24 > $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ -li bucağın sinus, kosinus və tangensini tapın.

25 > Hansı bərabərlik doğrudur?

a) $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$ b) $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$ c) $\cos 46^\circ = \cos 134^\circ$

d) $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$ e) $\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ$ f) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$

26 > a) Çevrənin $x^2 + y^2 = r^2$ tənliyinin hər iki tərəfini r^2 -na bölüb, $\frac{x}{r} = \cos \alpha$,

$$\frac{y}{r} = \sin \alpha \text{ bərabərliklərini nəzərə almaqla } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ eyniliyinin}$$

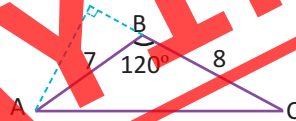
istənilən α bucağı üçün doğru olduğunu göstərin.

b) $\sin \alpha = 0,6$ və α iti bucaq olduqda $\cos \alpha$ -nı tapın.

c) $\sin \alpha = 0,8$ və α kor bucaq olduqda $\cos \alpha$ -nı tapın.

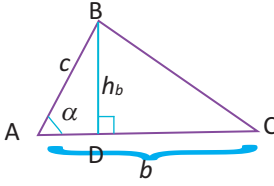
27 > Şəkilə verilənlərə görə AC tərəfinin uzunluğunu və C bucağının sinusunu tapın.

Göstəriş: A təpəsindən şəkilə göstərildiyi kimi hündürlük çəkin.



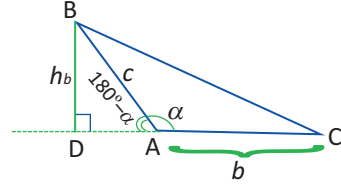
LAYIHƏ

28 > **Araşdırma:** 1) Üçbucağın sahə düsturunu müxtəlif hallar üçün araşdırın.



$$\sin \alpha = \frac{h_b}{c} \quad h_b = c \cdot \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$



$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h_b}{c}$$

$$h_b = c \cdot \sin \alpha$$

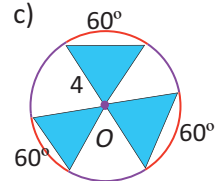
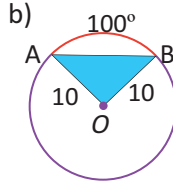
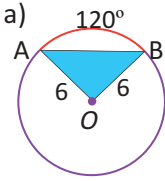
$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

2) Buraxılmış sözləri yazmaqla təklifi dəftərinizə köçürün.

Üçbucağın sahəsi onun ... tərəfi və bu tərəflər ... bucağın ... hasilinin yarısına bərabərdir.

3) $\alpha = 90^\circ$ olduqda da bu təklifin doğru olduğunu müəyyənəldir.

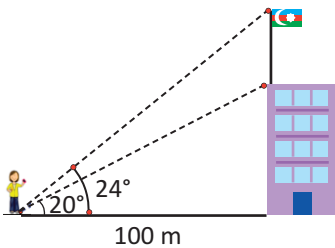
29 > Şəkində verilənlərə görə rəngli hissənin sahəsini tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



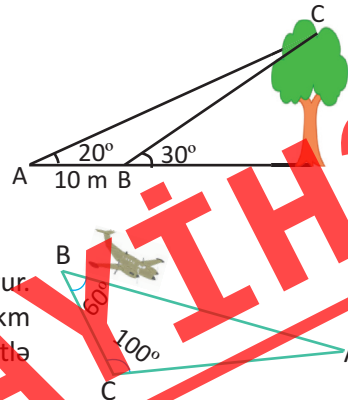
30 > Paraleloqramın diaqonalları 6 sm və 8 sm olub, aralarındakı bucaq 45° -dir. Paraleloqramın sahəsini tapın.

31 > Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalları 18 sm olub, aralarındakı bucaq 30° -dir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

32 > Şəkində verilənlərə görə binanın və bayrağın hündürlüyünü tapın.



33 > Şəkində verilənlərə görə AC və BC məsafələrini tapın.



34 > Təyyarə ABC qapalı marşrutu üzrə dövrə vurur. $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 100^\circ$. Təyyarə uzunluğu 600 km olan BC yolunu 1 saata qət edirsə, həmin sürətlə bir dövrəni neçə saata uçar?

LAYIHƏ

4-3

Sektor və seqmentin sahəsi

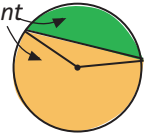
Sektor çevrənin mərkəzi bucağını əmələ gətirən iki radiusun və uyğun qövsün hüdudlandığı dairə hissəsidir.

Mərkəzi bucaq tam bucağın hansı hissədirsə, uyğun sektorun sahəsi də dairənin sahəsinin həmin hissəsidir.

Məsələn, 60° -li mərkəzi bucağa uyğun dairə hissəsi - sektor bütün dairənin $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ hissəsini təşkil edir. Dairənin sahəsi πr^2 olduğundan bu sektorun sahəsi $\frac{1}{6} \pi r^2$ olacaq.

Seqment vətərlə uyğun qövsün hüdudlandığı dairə hissəsidir.

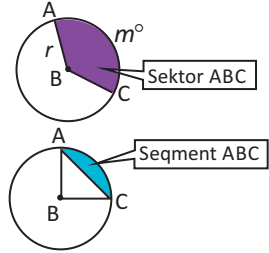
Seqmentin sahəsi = sektorun sahəsi $\pm$ üçbucağın sahəsi



Sektorun sahəsi: $S_{ABC} = \frac{m}{360} \pi r^2$

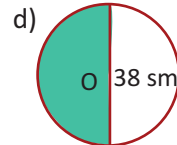
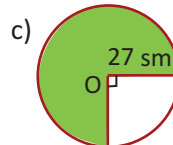
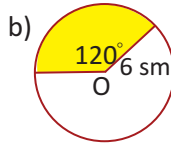
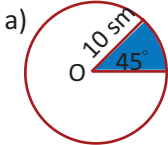
Seqmentin sahəsi: $S_{\text{segment}ABC} = S_{\text{sektor}ABC} - S_{\Delta ABC}$

Qeyd: Böyük qövsə uyğun seqmentin sahəsini tapdıqda uyğun sektorun sahəsinə ΔABC -nin sahəsi əlavə edilir.

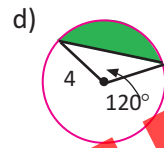
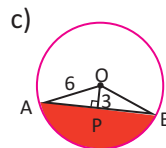
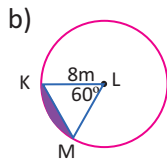
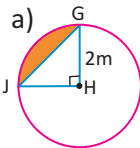


Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Şəildə təsvir edilmiş sektorların sahələrini tapın. Nəticəni ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



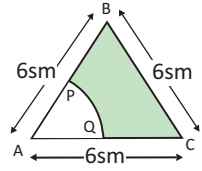
- 2 > Şəildə təsvir edilmiş seqmentlərin sahələrini tapın. Nəticəni yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



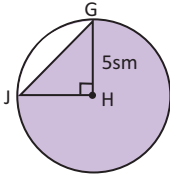
- 3 > a) Radiusu 12 sm olan çevrənin 80° -lik qövsünə uyğun sektorun sahəsini tapın.
 b) Mərkəzi bucağı 72° olan sektorun sahəsi $16\pi \text{ m}^2$ -dir. Çevrənin radiusunu yüzdəbir dəqiqliklə tapın.
 c) Radiusu 8 sm olan dairənin, sahəsi $20\pi \text{ sm}^2$ olan sektora uyğun mərkəzi bucağını tapın.

LAYIHƏ

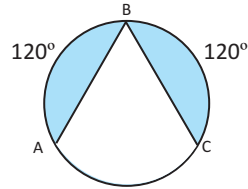
- 4 > $\triangle ABC$ bərabərtərəflidir. P nöqtəsi AB tərəfinin orta nöqtəsidir. APQ mərkəzi A nöqtəsində olan dairə sektorudur. Rəngli hissənin sahəsini tapın.



- 5 > Rənglənmiş hissənin sahəsini tapın.



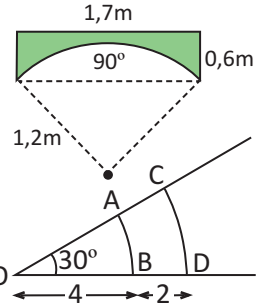
- 6 > Şəkindəki çevrənin uzunluğu 12π mm-dir. Rəngli hissənin sahəsini yüzdəbir dəqiqliklə hesablayın.



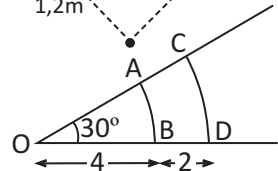
- 7 > Fərz edin ki, sizə yeməxanada 2 növ piroq təklif edilir. Piroqlar eyni qalınlıqda olub, diametri 24 sm və 32 sm olan dairəşəkillidir və hər biri 8 bərabər dilimə kəsilmişdir. Siz radiusu 16 sm olan piroqdan bir dilim yesəniz, çox piroq yemiş olarsınız, yoxsa radiusu 12 sm olan piroqdan iki dilim?



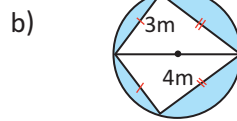
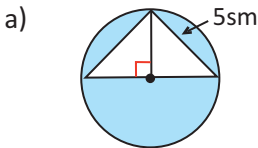
- 8 > Şəkində təsvir edilmiş pəncərə çərçivəsinin hissəsi rənglənəməlidir. Bunun üçün əvvəlcə onun sahəsi hesablanmalıdır. Verilmiş şəkllə görə bu hesablamayı yerinə yetirin.



- 9 > Şəkində verilənlərə görə tapın:
a) $\sphericalangle$ AB və $\sphericalangle$ CD-nin uzunluqlarını;
b) AOB və COD sektorlarının sahələrini.



- 10 > Şəkində verilənlərə görə rəngli hissənin sahəsini tapın.



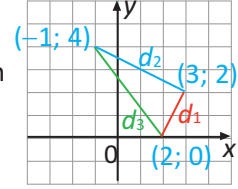
- 11 > a) $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 7 = 0$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin mərkəzini və radiusunu tapın.
b) Uyğun dairədə mərkəzi bucağı 45° olan sektroun sahəsini tapın.
c) Ordinat oxu ilə dairənin ayrıldığı seqmentlərin sahələrini tapın.

LAYIHƏ



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > $(3; 2)$, $(2; 0)$, və $(-1; 4)$ nöqtələrinin düzbucaqlı üçbucağın təpələri olub-olmadığını yoxlayın.

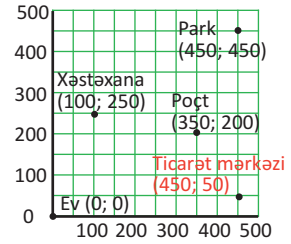


- 2 > Şəkilə turistlərə kirayə üçün təklif edilən evin yerləşmə planı verilmişdir. Planda hər kvadrat damanın tərəfi 50 m məsafəni göstərir.

1) Evdən məktəbə qədər ən qısa məsafə nə qədərdir?

2) Fərz edin ki, siz burada istirahət edirsiniz. Əgər ən qısa yolla poçta, oradan parka gedib və evə qayıtsanız, nə qədər məsafə qət etmiş olarsınız?

3) Evdən çıxıb planda göstərilən bütün obyektləri gəzməyin iki mümkün qısa yolu var. Bu iki yolu obyektlərin ardıcılığı ilə müəyyən edin.



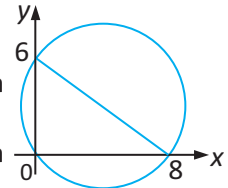
- 3 > Çevrə $(0; 0)$, $(0; 6)$, $(8; 0)$ nöqtələrindən keçir.

a) Çevrənin mərkəzinin koordinatlarını tapın.

b) Çevrənin koordinat müstəvisi üzərində I rübdə qalan hissəsinin sahəsini π ilə ifadə edin.

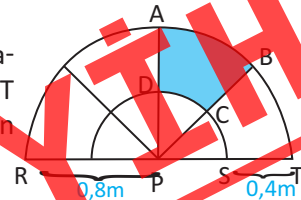
c) Koordinat oxları ilə I rübdə ayrılmış çevrə qövsünün uzunluğunu π ilə ifadə edin.

d) Koordinat başlanğıcından keçən düz xətt çevrəyə toxunandır. Bu düz xəttin bucaq əmsalını tapın və tənliyini yazın.



- 4 > a) Mərkəzi $M(-2; 3)$ nöqtəsində yerləşən, $A(-5; -1)$ nöqtəsindən keçən çevrənin tənliyini yazın.
b) Bu çevrənin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

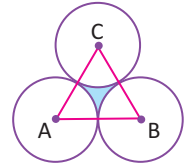
- 5 > Şəkilə pəncərənin sxemi verilmişdir. Pəncərə radiusu 80 sm olan yarımdairə şəklindədir. ST məsafəsi 40 sm, AB qövsü isə 45° -dir. Pəncərənin ABCD hissəsindəki şüşənin sahəsini tapın.



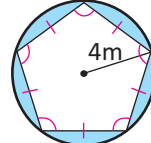
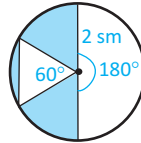
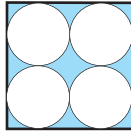
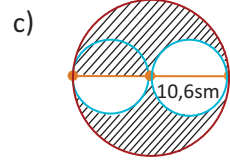
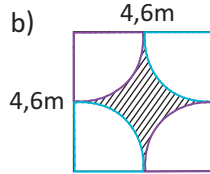
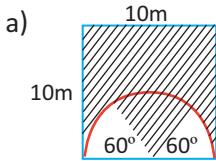
LAVTINHA

- 6 > Mərkəzi (0; 4) nöqtəsində yerləşən çevrə A (8; 10) nöqtəsindən keçir. Bu çevrənin 45° -li mərkəzi bucağına uyğun sektorun sahəsini tapın.

- 7 > Şəkildə bir-birinə toxunan 3 çevrə təsvir edilmişdir. Çevrələrin radiusları 4 sm-dir. Rəngli hissənin sahəsini tapın.



- 8 > Rənglənmiş hissənin sahəsini tapın.



- 9 > Verilən iki nöqtəni birləşdirən düz xəttin orta perpendikulyarının tənliyini yazın.

a) (2, 2), (6, 14)

b) (0, 0), (-8, -10)

c) (0, -6), (-4, 9)

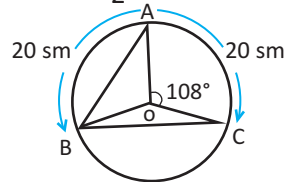
d) (3, -7), (-3, 1)

e) (-3, -7.2), (-4.2, 1.8)

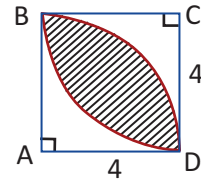
f) $(\frac{3}{2}, -6), (-3, 1)$

- 10 > O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir. $\sphericalangle AOB$ və $\sphericalangle AOC$ qövsələrinin uzunluqları 20 sm-dir. Tələb olunanları tapın.

a) $\sphericalangle AOB$ b) $\sphericalangle BOC$ c) $S_{\text{sektor } AOC}$



- 11 > ABCD kvadratdır. A və C mərkəzli çevrə qövsələrinin kəsişməsindən alınan sahə ştrixlənmişdir. Bu sahəni tapın.



- 12 > Şəkildə təsvir edilmiş rəf radiusu 40 sm olan dairelərdən 90° altında hissələr kəsilib çıxarılmaqla hazırlanmışdır. Rəfin hər gözünü kağızla örtmək istəsəniz sizə təxminən nə qədər kağız lazım olar?



LAYIHƏ

5

Tənliklər və tənliklər sistemi

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

- ✓ Yüksək dərəcəli tənlikləri həll etməyi;
- ✓ Rasional tənlikləri və rasional tənliklərə gətirilən məsələləri həll etməyi;
- ✓ Modul işarəsi daxilində dəyişəni olan tənliklərin həllini;
- ✓ İrrasional tənlikləri həll etməyi;
- ✓ Tənliklər sistemini həll etməyi;
- ✓ Tənliklər sisteminin tətbiqi ilə məsələ həll etməyi.

5-1

Yüksək dərəcəli tənliklər

Sol tərəfi məchula nəzərən n dərəcəli çoxhədli, sağ tərəfi sıfır olan

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

tənliyinə ($a_n \neq 0$) birdəyişənli n dərəcəli tənlik deyilir.

Məsələn, $x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$ tənliyi üçdərəcəli, $3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$ tənliyi isə dörd dərəcəli tənlikdir.

Üçdərəcəli və dörd dərəcəli tənliklər üçün köklərin tapılması düsturları məlumdur, amma bu düsturlar çox mürəkkəbdir. Yüksək dərəcəli tənlikləri müəyyən üsulların tətbiqi ilə həll etmək daha əlverişli olur.

Bu üsullardan biri vuruqlara ayırma üsuludur.

✓ Vuruqlara ayırma üsulu

Nümunə $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Hədləri aşağıdakı kimi qruplaşdıraraq sol tərəfi vuruqlara ayıraq:

$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0; \quad x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0; \quad (x^2 - 4)(x - 1) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x - 1) = 0;$$

Hasilin sıfır bərabər olması üçün vuruqlardan heç olmazsa biri sıfır olmalıdır. Buna görə də $x - 2 = 0$ və ya $x + 2 = 0$ və ya $x - 1 = 0$.

Buradan $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Müxtəsər vurma düsturlarının tətbiqi ilə tənlikləri həll edin.

a) $x^3 - 27 = 0$;

b) $16x^3 = -2$;

c) $x^3 - 64 = 0$;

d) $5x^3 + 40 = 0$

e) $x^4 - 1 = 0$;

f) $16x^4 = 81$;

LAYIHƏ

- 2 > Hədləri sol tərəfə keçirib, orta q vuruğu mötərizə çıxarmaqla tənlikləri həll edin.

a) $16x^5 = x$

b) $2x^4 = 16x$

c) $2x^3 - 7x = x$

d) $5x^3 = 320$

e) $x^3 = 16x$

f) $x^4 + 125x = 0$

g) $5x^3 - 20x^2 = 0$

h) $5x^4 - 20x^2 = 0$

i) $x^3 + x^2 = 2x^2$

- 3 > Vuruqlarına ayırma üsulu ilə tənlikləri həll edin.

1) $x^3 + x^2 = 20x$

9) $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

2) $x + 1 = 9x^3 + 9x^2$

10) $2x^3 - 3x^2 = 18x - 27$

3) $4y^3 - 2 = y - 8y^2$

11) $3x^3 + 7x^2 - 12x = 28$

4) $2x - 3 = 8x^3 - 12x^2$

12) $4x^3 + 16x^2 + x + 4 = 0$

5) $x^3 + 2x^2 - 9x = 18$

13) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15 = 0$

6) $9y^3 + 8 = 4y + 18y^2$

14) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

7) $3x^3 + 2x^2 = 12x + 8$

15) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

8) $4x^3 - 12x^2 = 9x - 27$

16) $4x^4 - 12x^2 + 9 = 0$

- 4 > $x^3 - x^2 - kx + k = 0$ tənliyi verilmişdir.

a) $k = 0$ olduqda tənliyi ödəyən həqiqi ədədlərin sayını tapın.

b) $k = -1$ olduqda tənliyin neçə həqiqi kökü var?

c) $k = 4$ olduqda tənliyin neçə həqiqi kökü var?

- 5 > Tənlikləri vuruqlara ayırma üsulundan istifadə etməklə həll edin.

a) $3x^5 - 48x = 0$

d) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

g) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

b) $x^4 + 4x^2 = 32$

e) $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$

h) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$

c) $x^4 - 3x^2 = 4$

f) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = -16x$

i) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

- 6 > $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$ tənliyinin bir kökü 3-ə bərabər olarsa, a -nı tapın və tənliyi həll edin.

- 7 > Funksiyanın sıfırlarını tapın.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 16x - 80$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

c) $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$

d) $f(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$

- 8 > **Biznes.** Kiçik bizneslə məşğul olan sahibkarın gəlirinin riyazi modelini $R = 5t^3 + 250t^2 + 2000t$ kimi yazmaq olar. Burada t 2000-ci ildən başlayaraq illərin sayını göstərir. Neçə ildən sonra sahibkarın gəliri 50000 manat olar?



Yeni dəyişən daxil etmə üsulu

Yeni dəyişən daxil etməklə bir sıra tənlikləri kvadrat tənliklərə gətirmək mümkündür. Məsələn, $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ tənliyi $x^n = u$ əvəzləməsi ilə $au^2 + bu + c = 0$ tənliyinə gətirilir. Xüsusi halda, $n = 2$ olduqda $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tənliyi ($a \neq 0$) bikvadrat tənlik adlanır və onun həlli üçün $x^2 = u$ əvəzləməsi aparılır.



Nümunə. $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ verilən tənlik

$$(x^2)^2 - 4x^2 - 5 = 0$$

qüvvətin xassəsi

$$u^2 - 4u - 5 = 0$$

$x^2 = u$ əvəzləməsi

$$(u - 5)(u + 1) = 0$$

vuruqlara ayırma

$$u - 5 = 0 \text{ və ya } u + 1 = 0$$

hasilin sıfıra bərabərliyi

$$u = 5 \text{ və ya } u = -1$$

məchulun tapılma qaydası

$$x^2 = 5 \text{ və ya } x^2 = -1 \rightarrow \emptyset$$

$u = x^2$ əvəzləməsi

$$x = \pm \sqrt{5}$$

kvadrat kökalma

Öyrənmə tapşırıqları

9 > Yeni dəyişən daxil etməklə, tənlikləri həll edin.

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

d) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

g) $8x^6 - 7x^3 + 1 = 0$

b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

e) $27x^6 - 26x^3 + 1 = 0$

h) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

c) $16y^4 - 8y^2 + 1 = 0$

f) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

i) $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - \frac{x+2}{x-1} - 2 = 0$

10 > Tənlikləri həll edin.

a) $(2x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3) = 5$

b) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = 3$

c) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) = 5$

d) $(2x^2 + x - 5)(2x^2 + x - 6) = 20$

e) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) + x^2 - 3 = 0$

f) $(x^2 + 1)^2 + x^2(x^2 - 1) - 4 = 0$

g) $\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 0$

h) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$

11 > Sınıfdə şagirdlərə $x^2 = x$ tənliyini həll etmək tapşırıldı.

Afaq tənliyin hər iki tərəfini x -ə bölməklə $x = 1$ olduğunu tapdı.

Ulviyyə isə tənliyin hər iki tərəfindən x -i çıxıb $x^2 - x = 0$ tənliyini yazdı və həll etdi.

Kimin həlli doğrudur?

12 > $x^3 = x$ tənliyini iki üsulla: qrafik və analitik üsulla həll edin.

LAYIHƏ

- 13 > $x^3 = 4x - 1$ tənliyini qrafik üsulla həll edin.
Göstəriş: Eyni koordinat müstəvisində $y = x^3$ və $y = 4x - 1$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapın.
- 14 > Əgər $\frac{1}{x}$ ədədi $\frac{1}{a}$ və $\frac{1}{b}$ ədədlərinin ədədi ortasıdırsa, onda x ədədinə a və b ədədlərinin harmonik ortası deyilir.
 a) Bu fikri rəşional bərabərlik şəklində ifadə edin və x -i tapın.
 b) İki müsbət ədəd üçün harmonik orta
 6-ya, bu ədədlərin fərqi isə 8-ə bərabərdir. Bu ədədləri tapın.
- 15 > Eynilikdən k əmsalını tapın.
 a) $\frac{x^2 + kx - 3}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x - 1}{x + 2}$ b) $\frac{2x^2 + kx - 10}{2x^2 + 7x + 6} = \frac{2x - 5}{2x + 3}$
- 16 > Təsəvvür edin ki, siz hər həftə maksimum balı 60 olan qiymətləndirmə tapşırıqları yazırsınız. 6 həftənin nəticəsinə görə sizin orta balınız 48-dir.
 a) Növbəti 2 həftədə orta balınız neçə olmalıdır ki, 8 həftəlik orta balınız 50 olsun?
 b) Birinci 6 həftədə orta bal 50 olmuşdur. 10 həftəlik orta bal maksimum balın 85%-ni təşkil edirsə, bu hansı şərtlərlə mümkün ola bilər?
- 17 > Tələb olunan dəyişənə görə həll edin.
 a) $P = \frac{A}{1 + rt}$ olduqda r -i tapın. b) $V = \frac{mv}{m + M}$ olduqda m -i tapın.
 c) $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$ olduqda q -nü tapın. d) $S = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ olduqda v_0 -ı tapın.
- 18 > Avtomobilin sürəti ilə əyləci basdıqdan sonra getdiyi yol (tormoz yolu) arasındakı asılılıq $d \approx \frac{v^2}{2a}$ kimidir. Burada v sürət, a təəcildir.
 a) Əyləci basdıqdan sonra avtomobilin a təəcilinə 10 m/san^2 olduğunu bilərək, sürətini göstərən düsturu yazın.
 b) Sürəti 90 km/saat olan avtomobil 10 m/san^2 təəcillə bərabəryavaşayan hərəkət edirsə, tormoz yolu neçə metr olacaq?



Rasional tənliklər. Rasional tənliklərin tətbiqi ilə məsələ həlli.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Tənlikləri tənəsübün xassəsindən istifadə etməklə həll edin.

a) $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+2}$

b) $\frac{-2}{x-1} = \frac{x-8}{x+1}$

c) $\frac{x}{x^2-8} = \frac{2}{x}$

d) $\frac{8(x-1)}{x^2-4} = \frac{4}{x-2}$

e) $\frac{x^2-3}{x+2} = \frac{x-3}{2}$

f) $\frac{2(x-2)}{x^2-10x+16} = \frac{2}{x+2}$

g) $\frac{-1}{x-3} = \frac{x-4}{x^2-27}$

h) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{3}{x}$

i) $\frac{3x}{x+1} = -\frac{12}{1-x}$

2 > Rasional tənlikləri həll edin. DMQ-ni yazın.

a) $\frac{3}{x-2} - \frac{5}{x+2} + \frac{6x}{4-x^2} = 0$

b) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{4}{x-2}$

c) $\frac{5}{x^2-7x+12} = \frac{2}{x-3} + \frac{5}{x-4}$

d) $\frac{9}{x^2+7x+10} = \frac{5}{x+2} - \frac{3}{x+5}$

e) $\frac{12}{x+5} - \frac{12}{x} = \frac{2}{x+5}$

f) $\frac{25}{y} - \frac{25}{y-2} = \frac{2}{y}$

3 > Tənlikləri həll edin.

a) $\frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{x+1}{x-2}$

d) $\frac{x-4}{x^2-3x-54} = \frac{2}{x^2-12x+27}$

b) $\frac{x-4}{x} = \frac{6}{x^2-3x}$

e) $\frac{3}{2x+1} - \frac{x+3}{2x^2+7x+3} = \frac{5}{x+3}$

c) $\frac{2x}{4-x} = \frac{x^2}{x-4}$

f) $1 = \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{x^2+3x-4}$

g) $\frac{1}{4} a - 4a^{-1} = 0$

h) $\frac{1}{2} t - 18t^{-1} = 0$

i) $8t^{-1} + 2 = 3t^{-1}$

4 > Tələb olunan dəyişəni digərləri ilə ifadə edin.

a) $h = \frac{2A}{b}$ bərabərliyindən b -ni

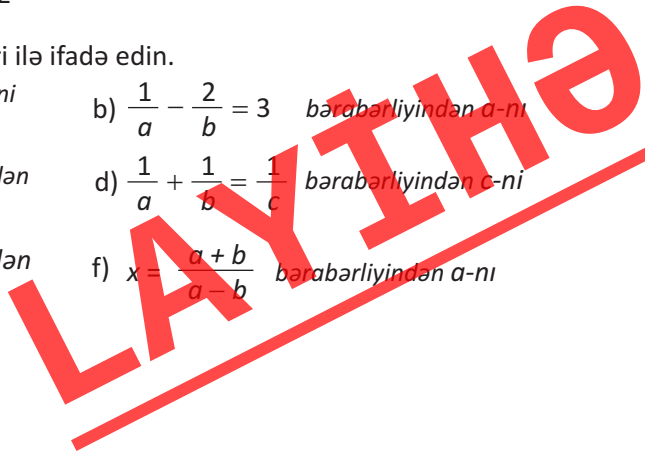
b) $\frac{1}{a} - \frac{2}{b} = 3$ bərabərliyindən a -ni

c) $\frac{x}{3r} + \frac{y}{4r} = 1$ bərabərliyindən r -i

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ bərabərliyindən c -ni

e) $1 + \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bərabərliyindən d -ni

f) $x = \frac{a+b}{a-b}$ bərabərliyindən a -ni

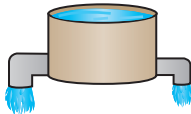


- 5 > Qarşılıqlı tərs kəslərdən birini t ilə, digərini isə $\frac{1}{t}$ ilə işarə etməklə tənlikləri həll edin.

$$a) \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2 \frac{1}{2}$$

$$b) \frac{x^2 + 2}{3x - 2} + \frac{3x - 2}{x^2 + 2} = 2 \frac{2}{3}$$

Tətbiq tapşırıqları

- 6 > Komanda keçirdiyi 20 oyundan 12-ni udmuşdur. Komanda növbəti oyunlardan neçəsini dalbadal udsa, qalib gəldiyi oyunlar bütün oyunların 80%-ni təşkil edər?
- 7 > İki ardıcıl ədədin birincisinə 6 əlavə edib, ikincisindən 2 çıxsaq, yeni alınan ədədlərin nisbəti $\frac{6}{5}$ kimi olar. Ardıcıl ədədləri tapın.
- 8 > Rəhim və Cəmil birlikdə işləsələr, bütün sahənin otunu 2 saata biçərlər. Cəmil tək işləsə, bu işi Rəhimdən 3 saat tez qurtarar. Onların hər biri tək işləsələr, bütün sahənin otunu neçə saata biçərlər?
- 9 > Hovuzun suyu eyni zamanda müxtəlif diametrli iki boru vasitəsilə 3 saata boşaldıla bilər. Diametri kiçik olan boru hovuzu diametri böyük olan borudan 8 saat gec boşaldar. Hər bir boru ayrılıqda hovuzu neçə saata boşaldar?
- 
- 10 > Təsəvvür edin ki, siz 480 səhifəlik kitabı 10 gün ərzində oxuyub qurtarmaq istəyirsiniz. Kitabın yarısını oxuduqdan sonra sizə məlum oldu ki, planlaşdırılan vaxtda kitabı oxuyub qurtarmanız üçün gündə 20 səhifə daha çox oxumalısınız. Kitabın birinci yarısından gündə neçə səhifə oxumusunuz?
- 11 > Türkan təklif edilən iki işdən birini seçmək haqqında fəikirləşir. İş yerlərindən biri onun evinə çox yaxındır və saat hesabı iş təklif edir. Digər iş yerində isə hər iş saatı üçün birincidən 2,25 manat çox məvəcib təklif edilir. Türkan bu iş yerini seçsə, birinci iş yerində 900 manat qazanmaq üçün işlədiyi vaxtdan 10 saat az işləməklə 980 manat qazanacaq. Türkana hər iş yerində bir saat üçün neçə manat təklif edildi?
- 12 > **Kimya.** Su və duz məhlulunun yeni konsentrasiyasını $C = \frac{A}{s + v}$ düsturu ilə hesablamaq olar. **A** məhluldakı duzun miqdarını, **s** məhlulun ilkin miqdarını, **v** əlavə edilmiş suyun miqdarını göstərir.
- a) 30%-li 2 kq duz məhluluna neçə kiloqram su əlavə edilsə, məhlul 10%-li olar? **Göstəris:** Burada $C = 0,1$; $A = 0,6$; $s = 2kq$, v -ni tapın.
- b) 0,5 kq 10%-li məhlula nə qədər su əlavə edilsə, 2%-li məhlul alınar?
- 13 > Sıfırdan fərqli iki ədədin tərsinin cəmi onların cəminin hasilinə olan nisbətində bərabərdir. Bu fikrin doğruluğunu uyğun eyniliyi yazıb sadələşdirməklə əsaslandırın.

5-2

Modul işarəsi daxilində dəyişəni olan tənliklərin həlli

Modul işarəsi daxilində dəyişəni olan tənlikləri həll edərkən iki hal nəzərdən keçirilir.

1-ci hal. Modul işarəsi daxilindəki ifadə müsbətdir və ya sıfıra bərabərdir.

2-ci hal. Modul işarəsi daxilindəki ifadə mənfidir.

Ədədin mütləq qiymətinin tərifinə görə:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{əgər } x \geq 0 \\ -x & \text{əgər } x < 0 \end{cases}$$

1. Nümunə. $|3x - 2| + 11 = 5$

Həlli. Bərabərliyin sol tərəfində yalnız modullu ifadəni saxlayaq:

$|3x - 2| = 5 - 11$; $|3x - 2| = -6$. Bu isə ədədin mütləq qiymətinin tərifinə uyğun deyil. Çünki, ədədin mütləq qiyməti ya sıfıra, ya da müsbət ədədə bərabər olmalıdır. Bu tip tənliklərin həlli yoxdur. **Cavab:** $\emptyset$

2. Nümunə. $|x - 3| = 6$ tənliyini iki üsulla, cəbri və qrafik üsulla həll edin
Cəbri üsulla həlli

$x - 3$ ya 6-ya, ya da -6 -ya bərabər olmalıdır.

$x - 3 = 6$ olarsa, $x = 9$

$x - 3 = -6$ olarsa, $x = -3$ olar.

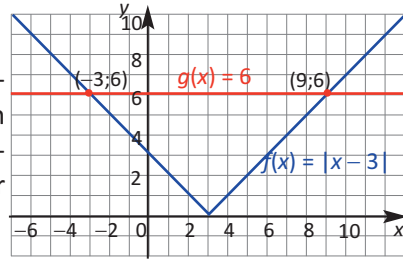
İndi isə $x = 9$ və $x = -3$ qiymətlərinin verilən tənliyi ödədiyini yoxlayaq.

$x = 9$, $|9 - 3| = 6$; $6 = 6$ $x = -3$, $|-3 - 3| = 6$; $|-6| = 6$

Cavab: Verilən tənliyin iki kökü vardır: 9 və -3

Qrafik üsulla həlli.

Eyni koordinat müstəvisində $f(x) = |x - 3|$ və $g(x) = 6$ funksiyalarının qrafiklərini quraq. Bu qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin $(-3; 6)$ və $(9; 6)$ olduğu müəyyən edilir. Buradan isə $x = -3$ və $x = 9$ qiymətlərinin hər ikisinin tənliyin kökləri olduğu alınır.



3. Nümunə. $|x^2 - 2x| = 3$

Həlli. Verilmiş tənliyin həlli $\begin{cases} x^2 - 2x = 3 \\ -(x^2 - 2x) = 3 \end{cases}$ tənliklər heyətinin həllinə gətirilir.

I hal. $x^2 - 2x = 3$ $x^2 - 2x - 3 = 0$; $(x - 3)(x + 1) = 0$ $x_1 = 3$ və ya $x_2 = -1$

Yoxlama: $x = 3$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|3^2 - 2 \cdot 3| = 3$; $|3| = 3$ tənliyin həllidir.

$x = -1$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|(-1)^2 - 2 \cdot (-1)| = 3$; $|3| = 3$ tənliyin həllidir.

II hal. $-(x^2 - 2x) = 3$; $x^2 - 2x = -3$; $x^2 - 2x + 3 = 0$,

Diskriminant mənfidir.

Cavab: Verilən tənliyin həlli $\{-1; 3\}$ olur.

4. Nümunə. $|2x - 4| = 1 - 3x$

Mütləq qiymətin tərifinə görə: $|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{əgər } x \geq 2 \\ -(2x - 4), & \text{əgər } x < 2 \end{cases}$

I hal. Əgər $x \geq 2$ olarsa, $|2x - 4| = 2x - 4$ və verilən tənlik $2x - 4 = 1 - 3x$ şəklinə düşər. Bu belə yazılır:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 4 = 1 - 3x \end{cases}$$

$2x - 4 = 1 - 3x$ tənliyindən $5x = 5$, $x = 1$ tapılır ki, bu qiymət $x \geq 2$ şərtini ödəmir. Yəni bu halda tənliyin həlli yoxdur.

II hal. Əgər $x < 2$ olarsa, $|2x - 4| = -(2x - 4)$ və verilmiş tənlik

$-(2x - 4) = 1 - 3x$ şəklinə düşər. Bu halda

$$\begin{cases} x < 2 \\ -(2x - 4) = 1 - 3x \end{cases} \text{ sistemini alırıq.}$$

$-(2x - 4) = 1 - 3x$ tənliyindən $x = -3$ tapılır ki, bu qiymət $x < 2$ şərtini ödəyir. Beləliklə verilmiş tənliyin bir kökü var. **Cavab:** $\{-3\}$

Öyrənmə tapşırıqları

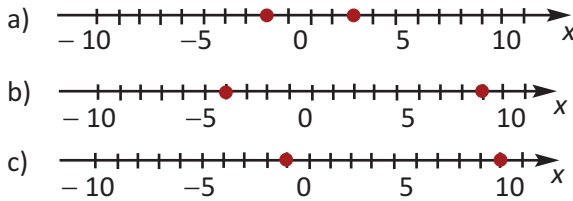
1 > Tənliklərin həllini (əgər varsa) ədəd oxu üzərində təsvir etməklə təqdim edin.

a) $|x| = 4$ b) $|x| - 3 = 10$ c) $|x| + 5 = 5$ d) $|x| = -4$

2 > Tənlikləri qrafik üsulla həll edin.

a) $|x - 4| = 10$ b) $|x + 3| = 2$ c) $|x - 1| = 0$ d) $|x + 9| = -3$

3 > Ədəd oxu üzərində verilən həllinə görə $|ax + b| = c$ şəklində tənliklər yazın.



4 > Tənlikləri həll edin.

a) $|1 - 2x| + 6 = 9$ b) $|-2x| = 8$ c) $|-x| = 1$
d) $4 - |2x| = 3$ e) $5 - |\frac{1}{2}x| = 4$ f) $|x - 2| = -\frac{1}{2}$
g) $|x^2 - 9| = 0$ h) $|x^2 - 2x| = 3$ i) $|x^2 + x| = 12$
j) $|x - 1| = 2x - 1$ k) $|2x - 3| = x - 1$ l) $|x + 1| = 3x - 1$

5 > Dəyişəni mütləq qiymət işarəsi daxilində olan elə tənlik yazın ki, ədəd oxu üzərində onun həllinə uyğun nöqtələr sıfır nöqtəsindən:

a) 6 vahid; b) $\frac{11}{2}$ vahid məsafədə olsun.

- 6 > Nümunəni araşdırın və tənlikləri həll edin.

Nümunə $|2x - 4| = |5x + 2|$

Həlli. $2x - 4 = 5x + 2$ və ya $2x - 4 = -(5x + 2)$

$-3x = 6$ və ya $7x = 2$;

$x = -2$ və ya $x = \frac{2}{7}$

Yoxlama. $x = -2$: $|2 \cdot (-2) - 4| = |5 \cdot (-2) + 2|$; $|-8| = |-8|$

$x = \frac{2}{7}$: $|2 \cdot \frac{2}{7} - 4| = |5 \cdot \frac{2}{7} + 2|$; $|- \frac{24}{7}| = | \frac{24}{7} |$

Cavab: $\{-2; \frac{2}{7}\}$

a) $|9x + 7| = |-7|$

b) $|3 - 4x| = |6 - x|$

c) $|5n - 4| = |7 - 5n|$

d) $\left| \frac{4p - 1}{6} \right| = \left| \frac{2}{3}p + \frac{5}{6} \right|$

e) $|6,5n - 1,4| = |3,5n - 8,6|$

f) $|2y + 1| = |2y - 7|$

g) $|12a + 1| = |12a - 25|$

h) $\left| \frac{5p + 3}{6} \right| = \left| \frac{1}{3}p - 3 \right|$

Tətbiq tapşırıqları

- 7 > Mahir $|x - 2| = x^2$ tənliyini grafik üsulla, Leyla isə cəbri üsulla həll etmişdir. Kimin həlli doğrudur?

Leyla:

$|x - 2| = x^2$

1. $x - 2 = x^2$

$x^2 - x + 2 = 0$

həlli yoxdur

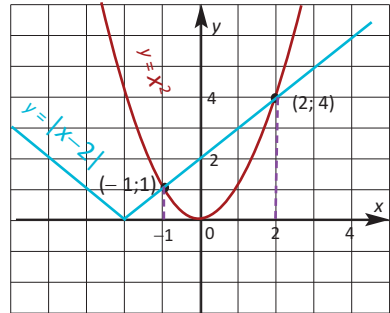
2. $-x + 2 = x^2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2$; $x = 1$

Mahir:



- 8 > $|x^2 - 1| = k$ tənliyində k -nın yerinə elə ədəd yazın ki:
- a) tənliyin həlli olmasın; c) tənliyin üç həqiqi kökü olsun;
- b) tənliyin iki həqiqi kökü olsun; d) tənliyin dörd həqiqi kökü olsun.

- 9 > Səbuhi və Kamran internetdə verilmiş suallarla IQ səviyyələrini yoxladılar. Səbuhi deyir ki, mənim IQ səviyyəmə Kamranın səviyyəsindən 15 xal fərqlənir. Kamranın IQ səviyyəsi 110 balla qiymətləndirilmişdir. Səbuhinin səviyyəsini göstərən xalları dəyişəni modul işarəsi daxilində olan tənliklə təqdim edin.

- 10 > Həsənin kütləsi 48 kq-dır. Həkim ona deyir ki, bu sənin üçün ideal hesab edilən kütlədən cəmi 5% fərqlidir. Həkimin nəzərdə tutduğu ideal kütləni dəyişəni modul işarəsi daxilində olan tənliklə yazın.

11 > Hər bir fikrə uyğun modullu tənlik yazın və ədəd oxu üzərində təsvir edin.

- a) k ədədi 2-dən 4 vahid məsafədədir.
 b) m ədədi -3 -dən 5 vahid məsafədədir.
 c) $2x$ ədədi 5-dən 3 vahid məsafədədir.
 d) $3t$ ədədi -2 -dən 4 vahid məsafədədir.

12 > Tənlikləri həll edin.

- a) $11 + |x| = 3$ b) $|x| - 22 = -3$ c) $7 - 3|x + 4| = -8$
 d) $|4x - 3| = |5x + 3|$ e) $|x - 8| = |8 - x|$ f) $|x - 6| = 3 - 4x$

13 > İsbat edin ki, əgər $|x - a| = |x - b|$ olarsa (burada $a < b$),
 onda $x = \frac{a + b}{2}$ (yəni x $[a; b]$ parçasının orta nöqtəsidir).

5-3

İrrasional tənliklər

Dəyişəni radikal işarəsi altında (və ya kəsr üstlü qüvvətə yüksəldilmiş) olan tənliklərə irrasional tənliklər deyilir.

Nümunələr: $\sqrt{x - 1} = 5$, $\sqrt[3]{x + 2} - x = 3$, $x^{\frac{2}{3}} = 4$

İrrasional tənlikləri həll edərkən, adətən qüvvətə yüksəltmə əməli tətbiq edilir. Cüt dərəcədən qüvvətə yüksəltmə aparıldıqda yeni tənlikdə dəyişənin mümkün qiymətləri çoxluğu genişlənə bilər. Ona görə də bu halda köklərin verilmiş tənliyi ödəyib ödəmədiyini yoxlamaq lazımdır.

1. Nümunə. $\sqrt{x - 2} + 3 = 1$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt{x - 2} = 1 - 3$ radikal işarəsi olan ifadə "təklənir"

$\sqrt{x - 2} = -2$ sadələşdirilir

Alınmış tənliyin kökü yoxdur, çünki hesabi kvadrat kök mənfi olmayan ədəddir.

Cavab: $\emptyset$

2. Nümunə. $\sqrt{x + 4} + 2 = 5$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt{x + 4} = 3$ radikal işarəsi olan ifadə "təklənir"

$x + 4 = 9$ kvadrata yüksəldilərək radikaldan azad edilir

$x = 5$ alınmış tənlik həll edilir.

Yoxlama: $x = 5$ olduqda $\sqrt{5 + 4} + 2 = 5$, $5 = 5$.

Cavab: tənliyin həlli $\{5\}$

LAYIHƏ

3. **Nümunə.** $\sqrt{x-3} + x = 5$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt{x-3} = 5 - x$ radikal "təklənir"

$x - 3 = (5 - x)^2$ kvadrata yüksəldilərək radikalдан azad edilir

$x^2 - 11x + 28 = 0$ sadələşdirilir və həll edilir.

$x_1 = 4, x_2 = 7$

Yoxlama: $x = 4$ olduqda $\sqrt{4-3} + 4 = 5, 5 = 5$. Tənlik ödənilir.

$x = 7$ olduqda $\sqrt{7-3} + 7 = 9, 9 \neq 5$. Tənlik ödənmir.

Cavab: tənliyin həlli $\{4\}$

4. **Nümunə.** $\sqrt[3]{x+2} - 1 = 2$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt[3]{x+2} = 3$ radikal "təklənir"

$x + 2 = 27$ kuba yüksəldilərək radikalдан azad edilir

$x = 25$ sadələşdirilir və həll edilir.

Cavab: tənliyin həlli $\{25\}$

Öyrənmə tapşırıqları

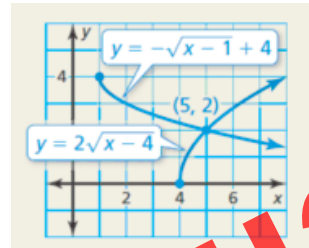
Tənlikləri həll edin.

- 1 > a) $\sqrt{x+3} = 4$ b) $\sqrt{1-2x} - 3 = 0$ c) $\sqrt{5x-4} + 1 = 3$
 d) $\sqrt{12-x} = x$ e) $\sqrt{x^2-x-4} = x+2$ f) $\sqrt[4]{x^2+16} = \sqrt{5}$
 g) $\sqrt[3]{x^2+4} = 2$ h) $3 + \sqrt{3x+1} = x$ q) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

2 > Tənliklərdən hansının kökü yoxdur?

$\sqrt{x-1} + 3 = 4$ $\sqrt{x+1} + 3 = 4$ $\sqrt{x-2} + 7 = 10$ $\sqrt{x+2} - 7 = -10$

3 > Şəkilə $2\sqrt{x-4} = -\sqrt{x-1} + 4$ tənliyinin qrafik həlli göstərilmişdir. Qrafikə görə tənliyin həllini yazın. Cavabınızı izah edin.



4 > Tənlikləri yeni dəyişən daxil etməklə həll edin.

- a) $x - 4\sqrt{x} = 0$ b) $x - 3\sqrt{x} = 0$ c) $x + \sqrt{x} = 12$
 d) $x - \sqrt{x} = 6$ e) $x + \sqrt[4]{x} = 2$ f) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} = 3$
 g) $x^{2/3} - x^{1/3} - 6 = 0$ h) $2x^{2/3} + 7x^{1/3} - 15 = 0$ q) $x + 3x^{1/2} - 4 = 0$

5 > Verilən asılılıqlara görə tələb olunan dəyişənləri tapın.

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g}}$ olduqda m -i tapın.

b) $R = \sqrt{d^2 + k^2}$ olduqda k -ni tapın.

c) $K = \sqrt{1 - \frac{x^3}{u^3}}$ olduqda u -nu tapın.

d) $A = \sqrt{1 + \frac{a^3}{b^3}}$ olduqda b -ni tapın.

6 > Tənlikləri həll edin.

a) $x^{2/3} = 3$

b) $x^{1/3} = 2$

c) $x^{-1/3} = 4$

d) $x^{3/5} \cdot x^{1/4} = 9$

e) $(x - 3)^{2/3} = 4$

f) $(2x + 3)^{3/4} = 8$

7 > Firuz $x^{2/3} - 2x^{1/3} - 8 = 0$ tənliyini aşağıdakı kimi həll etmişdir. Firuzun həllini araşdırın. Tənlikləri bu üsulla həll edin.

$$x^{2/3} - 2x^{1/3} - 8 = 0$$

$$(x^{2/3} - 4)(x^{1/3} + 2) = 0$$

$$x^{1/3} - 4 = 0 \quad x^{1/3} + 2 = 0$$

$$x^{1/3} = 4 \quad x^{1/3} = -2$$

$$(x^{1/3})^3 = 4^3 \quad \emptyset$$

$$x = 4^3 = 64$$

a) $x^{4/5} - x^{2/5} - 6 = 0$

b) $x^{1/2} + 3x^{1/4} - 4 = 0$

c) $x - 2x^{1/2} + 1 = 0$

d) $x + 2x^{1/2} - 3 = 0$

8 > $d = 113\sqrt{h}$ düsturu müşahidəçinin müəyyən h hündürlüyündən nə qədər uzağı (horizontu, üfqü) görə bilməsini hesablamağa (kilometrlə) imkan verir.
www.en.wikipedia.org/wiki/Horizon linki vasitəsilə bu düsturun alınmasını ətraflı araşdırıla bilərsiniz.

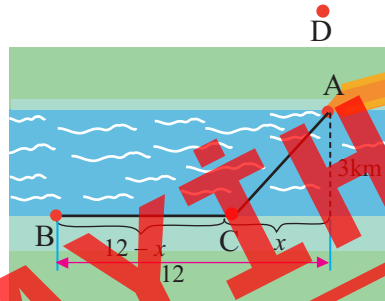


a) Bu tənlikdən h dəyişənini tapın.

b) Dünyada ən hündür bina olan Dubaydakı Xəlifə bürcünün hündürlüyü 828 metrdir. Buradan baxdıqda neçə metr uzağı görmək olar?

c) Üfqün 10 km məsafədə görünməsi üçün hansı hündürlüyə qalxmaq lazımdır?

9 > Balıqçı eni 3 km olan çayın kənarındakı A nöqtəsindən C nöqtəsinə qayıqla keçməyi, oradan isə piyada olaraq B nöqtəsinə getməyi planlaşdırır. Çayın qarşı tərəfindəki üzbuüz nöqtədən B nöqtəsinə qədər olan məsafə 12 km-dir. Balıqçı C nöqtəsinə qayıqla 5 km/saat sürətlə, piyada isə B nöqtəsinə 8 km/saat sürətlə hərəkət etdi. Bütün yola cəmi 2 saat vaxt sərf etdi. Balıqçı nə qədər yol qat etdi?



5-5

Tənliklər sistemi



İkidəyişənli tənliklər. Tənliklər sistemi

İkidəyişənli tənliklərə aid nümunələr:

$$2x - 3y = 1 \quad 3x^2 - 2xy + y = 0 \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$(x_0; y_0)$ cütü verilmiş tənliyi doğru ədədi bərabərliyə çevirərsə, ona ikidəyişənli tənliyin həlli deyilir. Məsələn, 1-cisi x dəyişəninin, 2-cisi isə y dəyişəninin qiymətini göstərən $(-2; 5)$ ədədlər cütü $y - x^2 = 1$ tənliyinin həllidir ($5 - (-2)^2 = 1$ bərabərliyi doğrudur).

İkidəyişənli tənliyin sağ tərəfi sıfır, sol tərəfi standart şəkildə çoxhədli olarsa, bu çoxhədlinin dərəcəsi tənliyin dərəcəsi hesab edilir.

İkidəyişənli tənliyin qrafiki koordinatları tənliyin həlləri olan nöqtələr çoxluğuudur. Məsələn, $y - 2x = 3$ tənliyinin qrafiki düz xətt, $y = x^2 - 2x$ tənliyinin qrafiki parabola, $x^2 + y^2 = 3$ tənliyinin qrafiki çevrədir.

Sistemin tənliklərinin hər birinin həlli olan $(x_0; y_0)$ cütünə sistemin həlli, belə cütlər çoxluğuna isə sistemin həllər çoxluğu deyilir.

Öyrənmə tapşırıqları

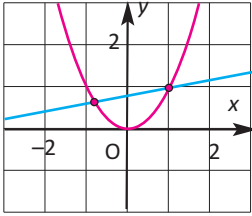
- 1 > Hansı cütün $x^2 - y + 2 = 0$ tənliyinin həlli olduğunu yoxlayın.
a) $x = 1, y = 3$ b) $x = -2, y = 2$ c) $x = -2, y = 6$
- 2 > Tənliyin hər hansı üç həllini yazın
a) $x - 2y = 3$ b) $x^2 + 2y = 1$ c) $(x - 1)(y + 2) = 0$ d) $(x^2 + 4)(y - 3) = 0$
- 3 > Tənliyin həlli varmı?
a) $x^2 + (y - 2)^2 = -1$ b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$
- 4 > Tənliyi ödəyən $(x; y)$ cütü üçün $x \cdot y$ hasilini tapın.
a) $\sqrt{x - 4} + (y + 3)^2 = 0$ b) $(x + 2)^2 + |y - 3| = 0$
- 5 > Tənliklərin qrafiklərini qurun.
a) $xy = 6$ b) $x^2 + y^2 = 16$ c) $y = x^2 - 2x$
- 6 > a) $(-8; 6)$; b) $(-5; 3)$ cütü $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + y = -2 \end{cases}$ tənliklər sisteminin həllidirmi?
- 7 > a və b -nin hansı qiymətlərində $(1; 2)$ cütü $\begin{cases} ax + by = 5 \\ xy + b = a \end{cases}$ tənliklər sisteminin həllidir.

LAYIHƏ

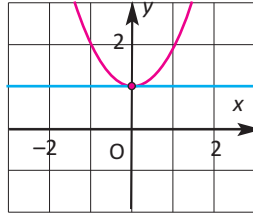


Bir tənliyi birdərəcəli, digəri ikidərəcəli olan tənliklər sistemi

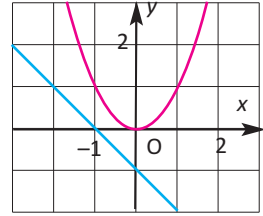
Sistemə daxil olan tənliklərin qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurub, kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapmaqla sistemin həllərini (müəyyən dəqiqliklə) tapmaq olar. Qrafik üsulla həll sistemin həllərinin sayı haqqında fikir söyləmək üçün daha əlverişlidir. İkidəyişənli birdərəcəli tənliyin qrafiki olan düz xətlə ikidərəcəli tənliyin qrafikinə (parabola, hiperbola, çevrə və s.) qarşılıqlı vəziyyətindən asılı olaraq tənliklər sisteminin həllər sayı müxtəlif ola bilər



Düz xətt parabolunu iki nöqtədə kəsir. Sistemin iki həlli var.



Düz xətt parabolunun toxunanıdır. Sistemin bir həlli var.

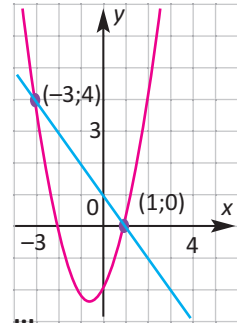


Düz xəttin parabola ilə ortaq nöqtəsi yoxdur. Sistemin həlli yoxdur.

1.

Nümunə.
$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Həlli. Hər iki tənliyə uyğun qrafikləri eyni koordinat müstəvisində quraq. $y = x^2 + x - 2$ tənliyinin qrafiki parabola, $y = -x + 1$ tənliyinin qrafiki isə düz xətdir. Bu qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin koordinatları $(1; 0)$ və $(-3; 4)$ kimidir. Bu qiymətləri sistemin tənliklərində yerinə yazmaqla yoxlamaq olar.



1. tənlik

Sol Sağ

$$\begin{aligned} (1; 0) \quad & 0 = 1^2 + 1 - 2, 0 = 0; \\ (-3; 4) \quad & 4 = (-3)^2 - 3 - 2, 4 = 4; \end{aligned}$$

Cavab: $(1; 0), (-3; 4)$

2. tənlik

Sol Sağ

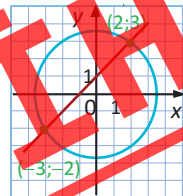
$$\begin{aligned} 0 &= -1 + 1, 0 = 0. \\ 0 &= 1 + 1, 0 \neq 0. \\ 4 &= -(-3) + 1 = 4 \end{aligned}$$

2.

Nümunə.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y = x + 1 \end{cases}$$
 tənliklər sisteminin həlləri sayını müəyyən edin.

Həlli. Sistemə daxil olan 1-ci tənlik çevrənin, 2-cisi isə düz xəttin tənliyidir. $x^2 + y^2 = 13$ çevrəsi ilə $y = x + 1$ düz xəttini eyni koordinat müstəvisində quraraq onların iki nöqtədə kəsişdiklərini müəyyən edirik.

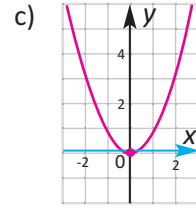
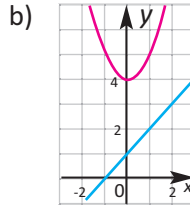
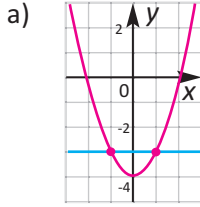
Bu nöqtələrin koordinatları olan $(x; y)$ cütləri verilmiş sistemin həlləridir. **Cavab:** verilmiş sistemin iki həlli var.



LAYIHƏ

- 8 > Aşağıda tənliklər sistemi və onların grafik həlləri verilmişdir. Uyğunluğu müəyyən edin, verilmiş sistemin həllərinin sayı haqqında fikirlərinizi yazın.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$

- 9 > Tənliklər sistemini grafik üsulla həll edin.

a) $\begin{cases} y = 3 - x \\ y = (x + 3)^2 + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = (x - 3)^2 + 2 \\ y + x = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x + y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y + 3 = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x^2 + 8x + 11 \\ y = 5 \end{cases}$

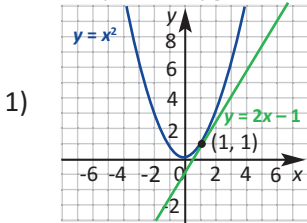
- 10 > Çevrə və düz xətti eyni koordinat sistemində quraraq tənliklər sisteminin neçə həlli olduğunu müəyyən edin.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 4 \end{cases}$

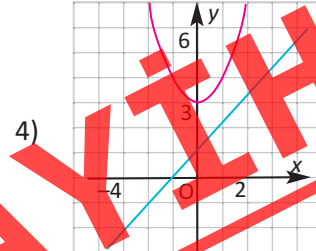
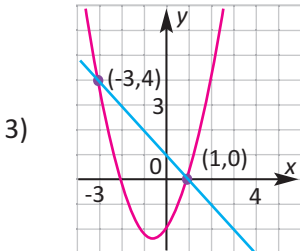
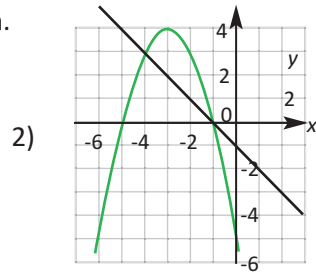
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

- 11 > Hər bir grafikə uyğun tənliklər sistemini yazın.



Nümunə:
 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$



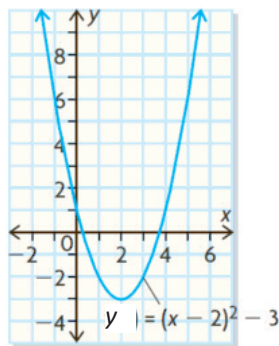
LAVİLHƏ

12 > Açıq tipli sual. Hər bir hala uyğun tənliklər sistemi yazın və qrafik təsvirlə təqdim edin:

- qrafiki parabola və üfüqi düz xətt olan tənliklərdən ibarət sistem;
- qrafiki parabola və bucaq əmsalı $k > 0$ olan düz xətdən ibarət sistem.

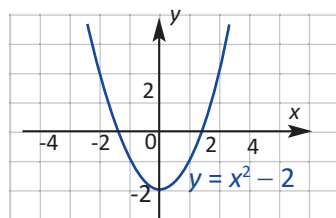
13 > 1) $y = (x - 2)^2 - 3$ funksiyasının qrafikini dəftərinizdə yenidən çəkin. Bucaq əmsalı -4 olan elə düz xətt çəkin ki,

- qrafiki iki nöqtədə;
 - bir nöqtədə kəssin;
 - heç bir ortaq nöqtələri olmasın.
- 2) Bu düz xətlərin tənliklərini yazın.



14 > Şəkində verilən kvadratik funksiyanın qrafikinə uyğun tənliklə sistem təşkil edən elə xətti tənlik yazın ki, sistemin:

- iki həlli olsun;
- bir həlli olsun;
- həlli olmasın.

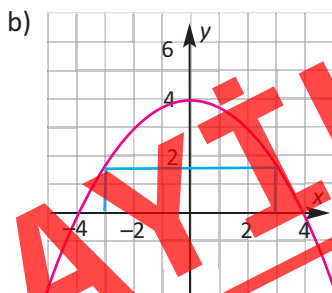
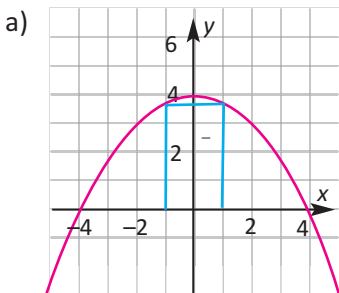


15 > İdmançının təyyarədən tullanarkən paraşütün açıldığı t_0 anına qədər olan hərəkətini $h(t) = -5t^2 + 5000$ düsturu ilə, paraşüt açıldıqdan sonra isə $h(t) = -5(t - t_0) + 4000$ düsturu ilə ifadə etmək olar. Burada t (san) zamanı, h paraşütçünün yerdən məsafəsini (m-lə) göstərir.



- Paraşüt yerdən hansı hündürlükdə açılmışdır?
- Paraşüt neçə saniyədən sonra açılmışdır?

16 > Şəkindəki düzbucaqlının iki təpəsi absis oxu üzərində, digər iki təpəsi isə $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ parabolası üzərindədir. Düzbucaqlının sahəsini tapın.



LAYIHƏ



Tənliklər sisteminin müxtəlif cəbri üsulla həlli

Tənliklər sistemini müxtəlif üsullarla həll etmək olar.

1. **Əvəzetmə üsulu.** 1) Birdərəcəli tənlikdən dəyişənin biri digəri ilə ifadə edilir.
- 2) Bu ifadə sistemin digər tənliyində yazılmaqla birdəyişənli tənlik alınır.
- 3) Alınan tənliyi həll etməklə dəyişənlərdən birinin qiyməti tapılır.
- 4) Bu qiymətlərə uyğun o biri dəyişənin qiymətləri hesablanır.

1. Nümunə

$$\begin{cases} y + 9 = x^2 + 6x \\ -3x + y = -5 \end{cases}$$

Həlli aşağıdakı addımlarla yerinə yetirək:

- 1) $-3x + y = -5$ tənliyini y -ə görə həll edək: $y = -5 + 3x$
- 2) $y + 9 = x^2 + 6x$ tənliyində $y = -5 + 3x$ olduğunu nəzərə alaraq:
 $-5 + 3x + 9 = x^2 + 6x$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $(x - 1)(x + 4) = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -4$
- 3) $y = -5 + 3x$ əvəzləməsinə görə y -in uyğun qiymətlərini tapaq.
 $y_1 = -5 + 3 \cdot 1 = -2$, $y_2 = -5 + 3 \cdot (-4) = -17$.
- 4) Cavab: $(1; -2)$, $(-4; -17)$.

2. Tərəf-tərəfə toplama (və ya çıxma) üsulu

2. Nümunə

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$$

Həlli aşağıdakı addımlarla yerinə yetirək:

- 1) Tənlikləri tərəf-tərəfə çıxsaq,
$$\begin{array}{r} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \\ \hline 0 = x^2 - 4x - 12 \end{array}$$
 tənliyini alırıq.
- 2) $x^2 - 4x - 12 = 0$ tənliyini həll edək: $(x - 6)(x + 2) = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = -2$
- 3) Tənliklərdən birində x -in qiymətlərini yerinə yazmaqla y -in uyğun qiymətlərini tapaq. $y_1 = -4 \cdot 6 + 7 = -17$, $y_2 = -4 \cdot (-2) + 7 = 15$
- 4) Cavab: $(6; -17)$, $(-2; 15)$

Öyrənmə tapşırıqları

17> Tənliklər sistemini əvəzetmə üsulu ilə həll edin.

a) $\begin{cases} x = y + 3 \\ y \cdot x = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 6 - x \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ y^2 - x = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ y + xy = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x = 4 \\ xy = -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y + x = 3 \\ x^2 + xy = 12 \end{cases}$

18> Tənliklər sistemini toplama (çıkma) üsulu ilə həll edin.

a) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x - 11 \\ y = x^2 - 4x - 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y - 11 = 0 \\ 2x + 5y - y^2 - 6 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + 4y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

19 > Tənliklər sistemini cəbri üsulla həll edin. Çevrə ilə düz xəttin kəsişmə nöqtələrinin sayını müəyyən edin. Qrafikləyicilə yoxlayın.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = x - 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

20 > Diskriminantdan istifadə etməklə sistemin həlləri sayını müəyyən edin.

Nümunə. $\begin{cases} y = x^2 + 3x + 3 \\ y = -2 \end{cases}$

I tənlikdən $y = x^2 + 3x + 3$ olduğunu II tənlikdə nəzərə almaqla, onu bərabərliyə kvadrat tənliyə gətirək. $x^2 + 3x + 5 = 0$ kvadrat tənliyində diskriminantın sıfır və ya işarəsinin mənfi, yoxsa müsbət olduğunu müəyyən edək.

$D = b^2 - 4ac = 9 - 20 = -11 < 0$. $D < 0$ olduğu üçün sistemin həlli yoxdur.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 3x + 3 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 5 \\ y = 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 5x - 3 \\ y = -3x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x^2 - 2x + 1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 5 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x^2 + 5 \\ y = x + 2 \end{cases}$

Tətbiq tapşırıqları

Nümunə. Bucaq əmsalı $k = 2$ olan düz xətlə $y = 2x^2 + 6x + 5$ parabolasının bir ortaq nöqtəsi var. Bu düz xəttin Oy oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin ordinatını müəyyən edin.

Həlli. $k = 2$ olduğundan düz xəttin tənliyi $y = 2x + b$ kimi olacaq.

Tənliklər sistemi: $\begin{cases} y = 2x + b \\ y = 2x^2 + 6x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + b = 2x^2 + 6x + 5$

$2x^2 + 4x + (5 - b) = 0$

Sistemin bir həlli var. Deməli, tənliyin diskriminantı sıfıra bərabərdir.

$D = 0; 16 - 4 \cdot 2 \cdot (5 - b) = 0; 16 - 40 + 8b = 0; 8b = 24; b = 3$

Düz xəttin tənliyi $y = 2x + 3$ kimi olacaq. b -nin qiyməti düz xəttin Oy oxunu kəsdiyi nöqtəni müəyyən edir. Başqa sözlə, düz xətt $x = 0$ olduqda Oy oxunu kəsir. $x = 0$ olduqda $y = 3$ alınır. Cavab: 3

21 > a) $y = 4x + b$ düz xətti ilə $y = -3x^2 - 2x + 4$ parabolasının ortaq nöqtəsi yoxdur. b hansı qiymətlər ala bilər?

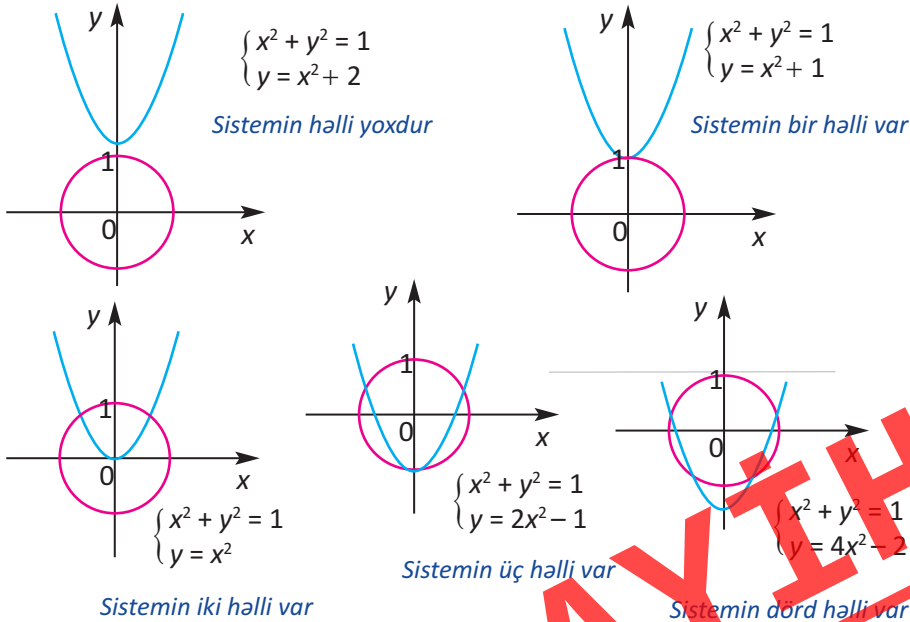
b) $y = 3x + b$ düz xətti ilə $y = 2x^2 - 5x + 3$ parabolasının bir ortaq nöqtəsi var. b -nin qiymətini tapın.

- 22 > Düz xəttin tənliyi $y = kx - 5$ şəklindədir. k -nin hansı qiymətində bu düz xətt $y = 3x^2 + 4x - 2$ kvadratik funksiyaşına uyğun parabolun toxunanı olar?
- 23 > b -nin hansı qiymətlərində $y = x^2 + 1$ və $y - 2x = b$ tənliklərindən ibarət sistemin həlli yoxdur?
- 24 > Kəsişmə nöqtələrini tapın:
 a) $y = \frac{8}{x}$ hiperbolası ilə $y = x - 2$ düz xəttinin;
 b) $x^2 + y^2 = 5$ çevrəsi ilə $3y + x = 5$ düz xəttinin.
- 25 > Samir futbol topunu zərbə ilə yuxarı vurdu. Eyni zamanda 16 m hündürlükdəki yuvadan quş havaya qalxdı. Quş saniyədə 4 m/san sürətlə yuxarı uçuş. Topun yer səthindən h (m-lə) məsafəsinin t (san) uçuş müddətindən asılılığı $h(t) = 24t - 5t^2 + 1$ düsturu ilə verilir. Neçə saniyədən sonra top və quş eyni hündürlükdə olacaq?
- 26 > Sistemin tənliklərindən biri $y = x^2 - 6x - 10$, digəri isə parabolun $x = 3$ və $x = 2$ nöqtələrində kəsən düz xətt tənliyidir. Bu tənliklər sistemini yazın.



Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan tənliklər sistemi

Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan tənliklər sisteminin qrafik həllinə görə sistemin həlləri sayını müəyyən etmək olar.



LAYIHƏ

27 > Tənliklər sistemini grafik üsulla həll edin.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2(x - 3)^2 + 4 \\ y = -2(x - 3)^2 + 4 \end{cases}$

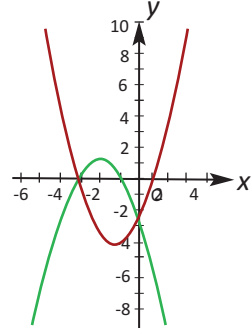
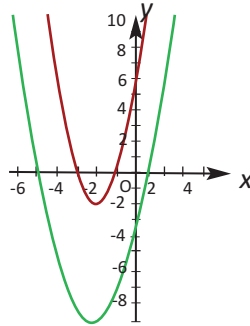
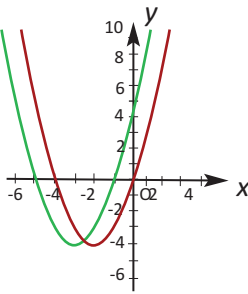
c) $\begin{cases} y = (x + 2)^2 - 4 \\ y = (x - 4)^2 - 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 - 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} xy = 3 \\ y - x^2 = 2 \end{cases}$

28 > Qrafiklərə uyğun tənliklər sistemini yazın.



29 > Sistemə daxil olan tənliklərin qrafiklərini sxematik təsvir etməklə onların iki həlli, bir həlli, sonsuz sayda həlli olduğunu və ya heç bir həlli olmadığını müəyyən edin.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = (x + 4)^2 - 1 \\ y = x^2 + 8x + 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$

30 > Tənliklər sisteminin həllinin $(-1; 2)$ və $(2; 5)$ olduğunu bilərək, tapşırıqları yerinə yetirin.

a) Bir tənliyi xətti, digəri ikidərəcəli olan elə tənliklər sistemi yazın ki, yalnız verilən iki nöqtə sistemin həlli olsun.

b) Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan elə tənliklər sistemi yazın ki, yalnız verilən iki nöqtə sistemin həlli olsun.

c) Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan elə tənliklər sistemi yazın ki, verilən nöqtələr də daxil olmaqla sistemin sonsuz sayda həlli olsun.

31 > Tənliklər sistemini cəbri üsulla həll edin.

a) $\begin{cases} x^2 = xy + 3 \\ xy = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(y + 1) = 0 \\ x + 5xy + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Nümunə.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 9 \end{cases}$$

Həlli. Sistemin 2-ci tənliyini -2 -yə vurub 1-ci tənlik ilə tərəf-tərəfə toplaşaq $x^2 + y^2 - 2xy = 18 - 18$ və ya $(x - y)^2 = 0$ alarıq. Buradan $x = y$. Bunu 2-ci tənlikdə nəzrə alsaq $y^2 = 9$ olar. Onda $y_1 = 3$, $y_2 = -3$ və $x = y$ olduğundan sistemin həlləri $(3; 3)$ və $(-3; -3)$ olur.

5-6

Tənliklər sistemə gətirilən məsələlər həlli

- 1 > Rəqəmləri cəmindən 4 dəfə böyük, rəqəmləri hasilindən isə 3 dəfə böyük olan ikirəqəmli ədədi tapın.
- 2 > İki ədədin cəmi 15-ə, hasil 56 -ya bərabərdir. Bu ədədləri tapın.
- 3 > Güləndamın iki bank hesabı var: 4,5% sadə faiz artımı ilə və 6% sadə faiz artımı ilə. 6%-lik hesabdakı məbləğ 4,5%-lik hesabdakı məbləğdən 3 dəfə çoxdur. Güləndamın iki hesabdakı pulu bir ildən sonra cəmi 4225 manat olarsa, o hər hesabına əvvəlcə neçə manat pul qoymuşdu?

	4,5%	6%
İlkin məbləğ	x	y
İllik artım	$0,045x$	$0,06y$
Cəmi	4225	

Cədvəli araşdırın, dəftərinizdə yenidən çəkin. Məsələni tənliklər sistemi qurmaqla həll edin.

- 4 > Bank iki müxtəlif xidmət təklif edir: Məbləğ sığortasız yerləşdirilirsə, 5,5%, sığortalı yerləşdirilirsə, 3,5% illik sadə faiz artımı tətbiq olunur. Sərdar pulunu sığortasız hesabda sığortalı hesabdən 700 manat çox olmaqla hər iki hesabda yerləşdirdi. İlin sonunda Sərdarın iki hesabdən əldə etdiyi gəlir 250 manat olmuşsa, o hər hesaba neçə manat pul qoymuşdur?
- 5 > A təmizləyici mayesində 25% turşu, B təmizləyici mayesində isə 50% turşu var. Tərkibində 35% turşu olan 10 litr təmizləyici maddə hazırlamaq üçün hər təmizləyici növündən neçə litr qarışdırmaq lazımdır?

Göstəriş: 25%-li təmizləyici mayenin miqdarını x , 50%-li təmizləyici mayenin miqdarını y qəbul etməklə verilən məlumatı cədvəldə yazıq.

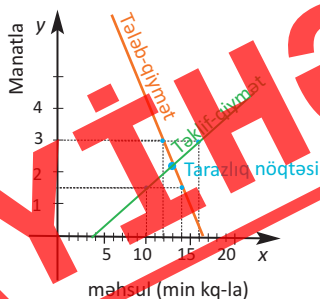
	25%-li	50%-li	35%-li
Mayenin miqdarı	x	y	$x + y$
Turşunun miqdarı	$0,25x$	$0,5y$	$0,25x + 0,5y$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{0,25x + 0,5y}{x + y} = 0,35 \end{cases}$$

Tənliklər sistemini həll etməklə məsələdə tələb olunanları tapmaq olar.

LAYIHƏ

- 6 > Fabrikdə ipək paltarlar istehsalında xalis ipək sapdan və 85%-i ipək olan sapdan istifadə edilir. Tərkibində 96% ipək olan 120 kq sap almaq üçün hər növ sapdan neçə kiloqram lazımdır?
- 7 > Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu 17 sm-dir. Katetlərin hər birini 3 sm kiçiltə, alınan üçbucağın hipotenuzu 4 sm kiçik olar. Əvvəlki düzbucaqlı üçbucağın sahəsini tapın.
- 8 > Düzbucaqlının diaqonalı 15 sm-dir. Onun tərəflərindən birini 6 sm, digərini 8 sm kiçiltə, perimetr 3 dəfə kiçilər. Verilmiş düzbucaqlının sahəsini tapın.
- 9 > İki boru birlikdə işləsə, çən 12 dəqiqəyə dolar. Əvvəlcə çənin yarısını bir boru ilə, sonra qalan yarısını o biri boru ilə doldursalar, bu çən 25 dəqiqəyə dolar. Hər boru təklikdə işləsə, çən neçə dəqiqəyə dolar?
- 10 > Aralarındakı məsafə 80 km olan A və B şəhərlərindən eyni zamanda iki avtomobil qarşı-qarşıya yola düşdü. Rastlaşdıqdan 20 dəqiqə sonra avtomobillərdən biri B-yə, 45 dəqiqə sonra isə digəri A-ya çatdı. Avtomobillərin sürətlərini tapın.
- 11 > Sərnişin metroya hərəkət edən eskalator üzərində yeriyərək 24 saniyəyə, tərpənməz eskalator üzərində həmin sürətlə yeriyərək 42 saniyəyə enir. Sərnişin metroya hərəkət edən eskalator üzərində dayanmaqla neçə saniyəyə enər?
- 12 > Gilasın bir kiloqramının qiyməti 3 manat olanda bazarda 12 000 kq tələbə qarşı 16 000 kq məhsul var idi. Gilasın bir kiloqramının qiyməti 1,50 manata endikdə bazarda 10 000 kq məhsul olduğu halda, 14 000 kq məhsula tələb var idi. Gilasın tələb və təklif qiyməti ilə onların miqdarı arasında (tələb-qiymət, təklif-qiymət) xətti asılılığın olduğunu şərtləşərək, təklifin tələbi ödədiyi halda satışa çıxarılan gilasın miqdarını və 1 kq-nın qiymətini müəyyən edin.
- Göstəriş:** Gilasın miqdarını x (min kiloqramla), 1 kq gilasın qiymətini y (manatla) qəbul edin. $(16; 3)$ və $(10; 1,5)$ nöqtələrinin $y - y_1 = k(x - x_1)$ düz xəttin tənliyində nəzərə almaqla (təklif-qiymət) asılılığı yazın. Analoji olaraq tələb-qiymət asılılığını $(12; 3)$ və $(14; 1,5)$ nöqtələrinə görə yoxlayın.





Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > Tənliklər sistemini həll etməklə qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin sayını müəyyən edin.

$$1) \begin{cases} x^2 - y = 5 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -3x^2 + y^2 = 9 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ -x + y = -4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + 2y^2 = -6 \\ x + 8y = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 17 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 4x^2 - 5y^2 = 16 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 15 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x^2 = 6y \\ y = -x \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ y = x - 7 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} (x - 4)(y - 5) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} (x + y)(x - y) = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x^2 - x + 1 = y \\ y^2 - y + 1 = x \end{cases}$$

- 2 > 20%-li və 10%-li iki duz məhlulu var. 100 q 20%-li məhlula neçə qram 10%-li məhlul əlavə edilsə, 12,5%-li məhlul alınar?

- 3 > Tənlikləri həll edin.

$$a) x^5 - x^3 = 0$$

$$b) x^4 = 16x^2$$

$$c) x^3 - x^2 = 4(x - 1)^2$$

$$d) 2x^3 + 2x^2 = (x + 1)^2$$

$$e) (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 25x^2 - 16$$

$$f) (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 6x^2 - 1$$

$$g) (x^2 + 6x)^2 - 24 = x^2 + 6x$$

$$h) (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 3$$

- 4 > Aralarındakı məsafə 18 km olan iki məntəqədən eyni zamanda qarşı-qarşıya iki turist dəstəsi yola düşdü və 2 saat sonra görüşdülər. Bu məntəqələr arasındakı yola birinci dəstənin sərf etdiyi vaxt ikincidən 54 dəqiqə çox olarsa, hər dəstənin sürətini tapın.

- 5 > Şirkət gəlirinin $P = 200n - n^2$ düsturuna uyğun olduğunu aşkar etdi. Burada n işçilərin sayını göstərir.

a) Bu şirkətin neçə nəfər işçisi olduqda gəliri maksimum olacaq.

b) Verilən funksiya üçün təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

c) n dəyişənini P ilə ifadə edin. Bərabərliyin kök altında olan hissəsindəki ifadə üçün hansı məhdudiyyət qeyd edilməlidir?

LAYIHƏ

6 > Tərəf-tərəfə toplama üsulu ilə tənliklər sistemini həll edin

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + xy = 8 \\ y^2 + xy = 8 \end{cases}$

7 > Tərəf-tərəfə bölmə üsulu ilə tənliklər sistemini həll edin.

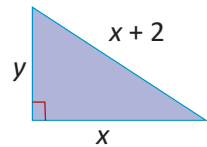
a) $\begin{cases} xy - x = 2 \\ xy^3 - xy^2 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + x^2y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy^2 - x = 9 \\ xy^3 - xy = 18 \end{cases}$

8 > Qaydanı pozan sürücü avtomobili saatda 90 km sürətlə sürərək yolun kənarında dayanan polis maşınının yanından ötüb keçir. Polis qaydanı pozan bu avtomobili saxlamaq üçün sabit təcillə sürətini artıraraq hərəkət edir və onun getdiyi yolun (m-lə) zamandan (dəqiqə ilə) asılı dəyişməsinə $d = 375t^2$ düsturu ilə ifadə etmək olar. Polis avtomobilə nə qədər vaxta çatar?

9 > Üçbucağın perimetri 24 sm-dir. Şəkində verilənlərə görə üçbucağın tərəflərinin uzunluqlarını tapın.



10 > Tənlikləri həll edin.

a) $x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$

d) $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2\frac{1}{2}$

b) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$

e) $\frac{x+6}{x+7} - \frac{5}{x-7} = \frac{3x-7}{x^2-49}$

c) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = 12$

f) $\frac{x+4}{x-6} - \frac{3}{x+2} = \frac{x+25}{x^2-4x-12}$

11 > Düz bucaq təpəsindən iki cisim onun katetləri boyunca eyni vaxtda hərəkətə başlayır və 3 saniyədən sonra onlar arasındakı məsafə 15 m olur. Birinci cismin 3 saniyədə getdiyi məsafənin ikincinin 4 saniyədə getdiyi məsafəyə bərabər olduğunu bilərək, onların sürətlərini tapın.

12 > İsbat edin ki, $y = x^2 + 4$ parabolası ilə $y - x + 3 = 0$ düz xətti kəsişmir.

13 > Düzbucaqlı şəkində sahənin uzunluğu 60 m, eni isə 8 m-dir. Bu sahənin eni və uzunluğunu neçə metr azaltmaq lazımdır ki, onun sahəsi 2 dəfə, perimetri isə 44 m azalsın.

14 > a -nın hansı qiymətlərində tənliklər sisteminin yeganə həlli var?

a) $\begin{cases} y + 2x = a \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = a \\ yx = 9 \end{cases}$

LAYIHƏ

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

- ✓ Çoxbucaqlıların növlərini;
- ✓ Çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarına aid məsələlər həll etməyi;
- ✓ Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş dördbucaqlıların xassələrini;
- ✓ Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş üçbucaqlara aid məsələlər həll etməyi;
- ✓ Düzgün çoxbucaqlıların sahəsini hesablamağı.

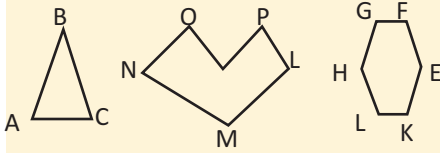


6-1

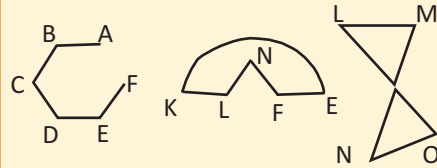
Çoxbucaqlılar

Sonlu sayda parçaların ardıcıl olaraq (birinin sonu digərinin başlanğıcı olmaqla) birləşməsindən alınan fiqura sınıq xətt deyilir. Əgər sınıq xəttin ucları (sonuncu parçanın sonu və birinci parçanın başlanğıcı) üst-üstə düşürsə, ona qapalı sınıq xətt, sınıq xəttin öz-özü ilə kəsişməsi yoxdursa, ona sadə sınıq xətt deyilir. Çoxbucaqlı sadə qapalı sınıq xəttin əmələ gətirdiyi fiqurdur.

Çoxbucaqlıdır



Çoxbucaqlı deyil

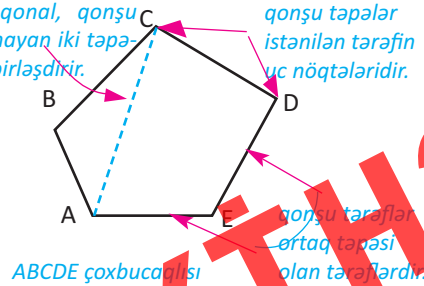


✓ Tərəfləri müəyyən sayda düz xətt parçalarından ibarətdir.

✓ Çoxbucaqlı qapalı fiqurdur və müstəvini iki hissəyə ayırır: çoxbucaqlının daxilində qalan sonlu hissə və onun xaricində qalan sonsuz hissə.

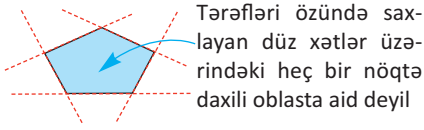
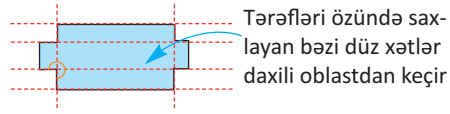
✓ Çoxbucaqlı onun təpələrini göstərən hərflərlə adlandırılır.

Diqonal, qonşu olmayan iki təpəni birləşdirir.



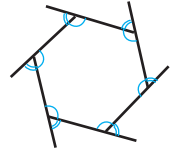
Çoxbucaqlılar qabarıq və ya çökük ola bilər. Tərəfləri özündə saxlayan düz xətlər üzərində çoxbucaqlının daxili oblastına aid olan nöqtə yoxdursa, bu çoxbucaqlı **qabarıq**, varsa, **çökük** çoxbucaqlı adlanır.

LAYIHƏ

Qabarıq çoxbucaqlı**Çökük çoxbucaqlı**

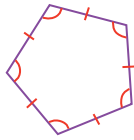
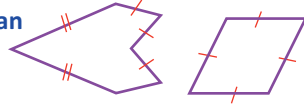
Qabarıq çoxbucaqlının daxilində götürülmüş istənilən iki nöqtəni birləşdirən parça bütünlüklə çoxbucaqlının daxilində yerləşir.

Çoxbucaqlının verilmiş təpəsindən çıxan iki tərəfinin əmələ gətirdiyi və daxilinə aid bucağa, həmin təpədəki **daxili bucağı** deyilir. Qabarıq çoxbucaqlıda daxili bucaqların hər biri 180° -dən kiçikdir, qabarıq olmayan dördbucaqlıda isə daxili bucaq 180° -dən böyük ola bilər.



Qabarıq dördbucaqlının daxili bucağına qonşu olan bucağa çoxbucaqlının **xarici bucağı** deyilir. Qabarıq çoxbucaqlının istənilən təpəsindəki daxili və xarici bucaqlarının (hər təpədəki xarici bucaqlardan biri götürülməklə) cəmi 180° -yə bərabərdir.

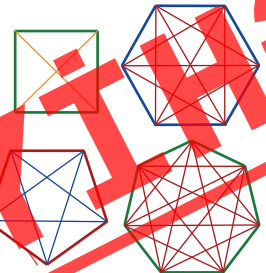
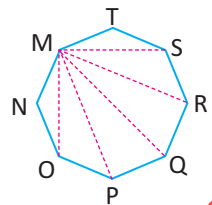
Bütün tərəfləri və bütün bucaqları konqruent olan çoxbucaqlı **düzgün çoxbucaqlı** adlanır.

Düzgün çoxbucaqlı**Düzgün olmayan çoxbucaqlı**

Çoxbucaqlının təpə nöqtələri, tərəfləri və bucaqlarının sayı eyni olur. n tərəfi olan çoxbucaqlıya n -bucaqlı da deyilir. Çoxbucaqlılar tərəflərinin sayına uyğun olaraq üçbucaq, dördbucaqlı, beşbucaqlı, altıbucaqlı və s. kimi adlandırılır. Qabarıq n -bucaqlının bir təpəsindən $(n - 3)$ sayda diaqonal çəkmək olar.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Şəildəki figura görə yazın: a) tərəflərinin; b) hər hansı təpəsi ilə qonşu olmayan beş təpəsinin; c) iki qonşu tərəfinin; d) üç diaqonalının adını.
- 2 > a) Dəftərinizdə iki qabarıq, iki çökük çoxbucaqlı çəkin.
b) Dəftərinizdə bir qabarıq, bir çökük beşbucaqlı və onların bütün diaqonallarını çəkin.
- 3 > Dəftərinizdə şəildə göstəriləyi kimi çoxbucaqlılar və onların bütün diaqonallarını çəkin. Çoxbucaqlıların tərəfləri, bir təpədən çəkilə bilən diaqonalları və diaqonallarının ümumi sayını göstərən cədvəl qurun. "Qabarıq n -bucaqlının $\frac{n(n-3)}{2}$ sayda diaqonalı vardır" təklifinin doğru olduğunu əsaslandırın.

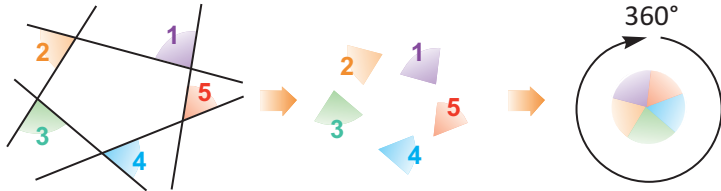


- 4 > a) Qabarıq səkkizbucaqlının; onikibucaqlının cəmi neçə diaqonalı var?
b) 35; 90 diaqonalı olan çoxbucaqlının neçə tərəfi var?
- 5 > a) Diaqonallarının sayı tərəflərinin sayından 2 dəfə çox olan qabarıq çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.
b) Diaqonallarının sayı tərəflərinin sayından 6 dəfə çox olan qabarıq çoxbucaqlının bir tərəsindən neçə diaqonal çəkmək olar?

Araşdırma 1. Aşağıdakı cədvəli doldurun. n tərəfli olan qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini hesablamaq üçün düstur yazın.

						...	
Çoxbucaqlının tərəflərinin sayı	3	4	5	6	7	...	n
Bir tərədən çəkilən diaqonallarının sayı	0	1				...	
Üçbucaqların sayı	1	2					
Daxili bucaqlarının cəmi	$1 \cdot 180^\circ$ 180°	$2 \cdot 180^\circ$ 360°					

Araşdırma 2. Kağız üzərində şəkildə göstəriləyi kimi hər tərəfdəki xarici bucaqları rəngləməklə qabarıq çoxbucaqlı çəkin. Xarici bucaqları kəsin və tərələri eyni nöqtədə olmaqla bir-birini örtməmək şərtlə başqa bir kağızın üzərinə yapışdırın. Bütün xarici bucaqların cəmi haqqında fikirlərinizi söyləyin.



Qabarıq çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarının cəmi

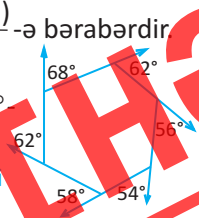
Teorem 1. Qabarıq n -bucaqlının **daxili bucaqlarının** cəmi $180^\circ \cdot (n - 2)$ -yə bərabərdir ($n \geq 3$).

Nəticə 1. Düzgün n -bucaqlının hər bir daxili bucağı $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ -ə bərabərdir.

Teorem 2. Qabarıq çoxbucaqlının **xarici bucaqlarının** cəmi 360° yə bərabərdir.

Xarici bucaqların cəmi = açıq bucaqların cəmi – daxili bucaqların cəmi
Xarici bucaqların cəmi: $180^\circ \cdot n - 180^\circ(n - 2) =$
 $= 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ$

Nəticə 2. Düzgün n -bucaqlının hər bir xarici bucağı $\frac{360^\circ}{n}$ -ə bərabərdir.



1. Nümunə. Düzgün çoxbucaqlının bir tərəsindəki xarici bucağı 60° -dir.

a) çoxbucaqlının daxili bucağının dərəcə ölçüsünü;

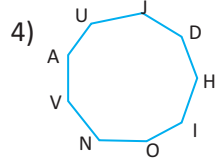
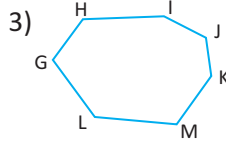
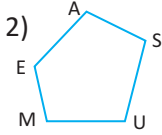
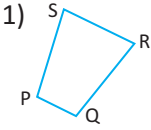
b) çoxbucaqlının tərəfləri sayını tapın.

Həlli: a) Daxili bucaq + Xarici bucaq = 180° ; Daxili bucaq = $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$b) \frac{360^\circ}{n} = 60^\circ \quad n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$$

Öyrənmə tapşırıqları

6 > Şəkindəki hər bir çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.



7 > 1) Qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi 1800° -dir. Bu çoxbucaqlının: a) neçə tərəfi; b) neçə diaqonalı var?

2) Düzgün: a) altıbucaqlının, b) onbucaqlının daxili və xarici bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın.

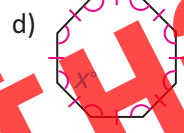
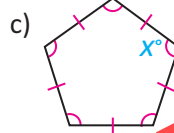
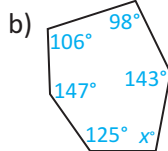
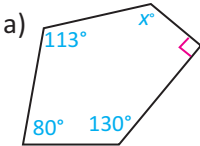
3) Düzgün çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi 1080° -dir. Bu çoxbucaqlının hər bir daxili və xarici bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

8 > Tərəflərinin sayı $n = 8$; $n = 9$; $n = 12$; $n = 15$ olan düzgün çoxbucaqlının daxili və xarici bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

9 > Diaqonallarının sayı 27 olan qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

10 > Düzgün çoxbucaqlının xarici bucağı daxili bucağının 25%-i qədərdir. Çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.

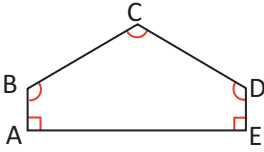
11 > Çoxbucaqlının x -lə işarə edilmiş bucağını tapın.



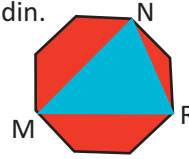
12 > Qabarıq beşbucaqlının daxili bucaqları 60° , 80° , 120° , 140° olarsa, beşinci bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

LAYIHƏ

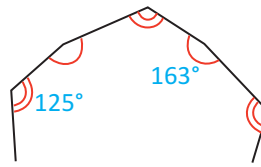
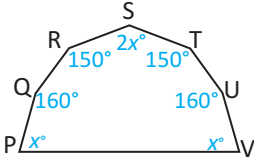
- 13 > Qabarıq altıbucaqlının daxili bucaqları 90° , 110° , 120° , 124° və 116° -dir. Altıbucaqlının naməlum daxili bucağını və həmin təpədəki xarici bucağı tapın.
- 14 > Düzgün çoxbucaqlının verilən daxili bucağına görə tərəflərinin sayını tapın.
1) 120° 2) 150° 3) 140° 4) 160°
- 15 > Düzgün çoxbucaqlının verilən xarici bucağına görə tərəflərinin sayını tapın.
1) 72° 2) 40° 3) 36° 4) 30°
- 16 > a) Şəkildə evin damının öndən görüntüsü təsvir edilmişdir. Qeyd olunmuş işarələmələrə görə hər bir bucağın dərəcə ölçüsünü yazın.



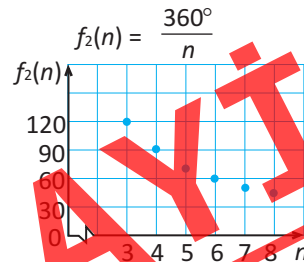
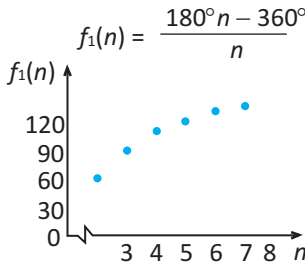
- b) Şəkildə düzgün səkkizbucaqlı şəkildə olan STOP işarəsi üzərində MNR üçbucağı təsvir edilmişdir. Bu üçbucağın tərəflərinə görə növünü müəyyən edin.



- 17 > a) Şəkildə çadırın öndən görünüşü verilmişdir. Dəyişənlə işarələnmiş bucaqların dərəcə ölçülərini tapın.
- b) Çoxbucaqlının daxili bucaqları şəkildə göstərilən ölçüdə konqruent bucaqlar ardıcılığından ibarətdir. Xarici bucaqlarından istifadə etməklə çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.



- 18 > Düzgün çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi xarici bucaqlarının cəmindən 11 dəfə çoxdur. Bu çoxbucaqlının neçə tərəfi var?
- 19 > $n = 10$; $n = 30$; $n = 50$ olduqda düzgün çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarını tapın.
Şəkildə $f_1(n) = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}$ və $f_2(n) = \frac{360^\circ}{n}$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. n -in qiyməti artdıqca, düzgün çoxbucaqlının daxili və xarici bucağının dərəcə ölçüsünün dəyişməsinə təqdim edin.

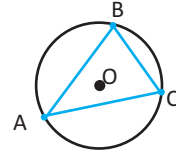


LAYIHƏ

6-2

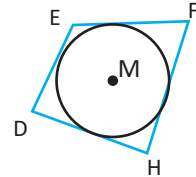
Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlılar

Tərif 1. Çoxbucaqlının bütün təpələri çevrənin üzərində yerləşirsə, bu çoxbucaqlıya çevrə daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlı, çevrəyə isə çoxbucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrə deyilir. Şəkilə $\triangle ABC$ çevrənin daxilinə çəkilmiş üçbucaqdır.



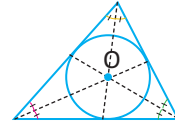
Tərif 2. Çoxbucaqlının bütün tərəfləri çevrəyə toxunursa, bu çoxbucaqlıya çevrə xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlı, çevrəyə isə çoxbucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrə deyilir.

Şəkilə DEFH çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlıdır.

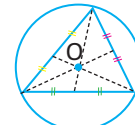


Üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr

Teorem 1. İstənilən üçbucağın daxilinə çevrə çəkmək olar. Bu çevrənin mərkəzi üçbucağın tənbönlərlərinin kəsişmə nöqtəsidir.

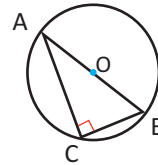


Teorem 2. İstənilən üçbucağın xaricinə çevrə çəkmək olar. Bu çevrənin mərkəzi üçbucağın tərəflərinin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsidir.

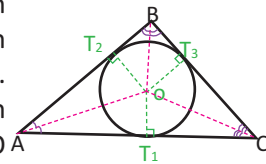


Teorem 3. Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdırsa, hipotenuz bu çevrənin diametridir.

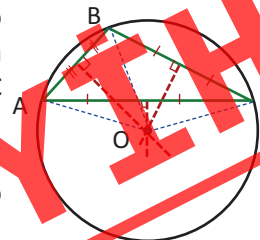
Tərs teorem. Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın tərəfi bu çevrənin diametridirsə, bu üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdır.



Teorem 1-in isbatı. (mətnlə). $\triangle ABC$ -də $\angle A$ və $\angle B$ -nin tənbönlərlərinin O kəsişmə nöqtəsindən üçbucağın tərəflərinə OT_1 , OT_2 , OT_3 perpendikulyarlarını çəkək. Tənbölən üzərindəki ixtiyari nöqtə bucağın tərəflərindən eyni məsafədə olduğundan $OT_1 = OT_2 = OT_3$ alarıq. O A nöqtəsi həm də $\angle C$ -nin tənböləni üzərindədir (niyə?). Mərkəzi O nöqtəsində olmaqla radiusu $r = OT_1$ olan çevrə çəkək. Üçbucağın tərəfləri OT_1 , OT_2 , OT_3 radiuslarına perpendikulyar olduğuna görə T_1, T_2, T_3 nöqtələrində çevrəyə toxunur. Deməli, bu çevrə verilmiş üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrədir.



Teorem 2-nin isbatı: $\triangle ABC$ -nin AB və BC tərəflərinin orta nöqtələrindən bu tərəflərə perpendikulyarlar çəkək və onların kəsişmə nöqtəsini O ilə işarə edək. Parçanın orta perpendikulyarının xassəsinə görə $OA = OB = OC$. $\triangle AOC$ bərabəryanlı olduğundan O nöqtəsi həm də AC tərəfinin orta perpendikulyarı üzərindədir. Mərkəzi O nöqtəsində, radiusu $R = AO$ olan çevrə üçbucağın hər üç təpə nöqtəsindən keçməklə xaricə çəkilmiş çevrə olur.

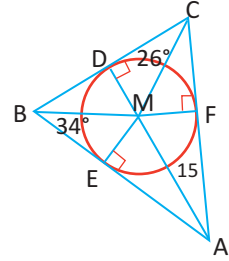


LAYIHƏ

Qeyd: Verilmiş üçbucağın xaricinə yalnız bir çevrə çəkmək olar. Verilmiş çevrənin daxilinə çəkilən üçbucaqlar isə sonsuz saydadır.

Öyrənmə tapşırıqları

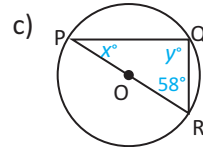
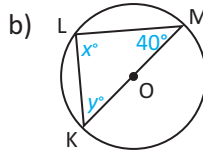
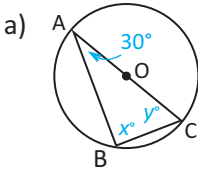
- 1 > M nöqtəsi daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.
 $\angle MBA = 34^\circ$, $\angle MCB = 26^\circ$, $MA = 15$ olarsa, tapın:
 a) $\angle MAC$; b) MF .



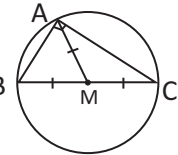
- 2 > Çevrə daxilinə tələb olunan üçbucağı çəkin. Çevrənin mərkəzini hər bir halda **üçbucağın daxilindədir, üçbucağın xaricindədir, üçbucağın tərəfi üzərindədir** ifadələrindən birini seçməklə müəyyən edin.

a) itibucaqlı üçbucaq b) düzbucaqlı üçbucaq c) korbucaqlı üçbucaq

- 3 > Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın dəyişənlə işarələnmiş bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



- 4 > AM çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın medianıdır və uzunluğu 10 sm-dir. $AB = 12$ sm olduğuna görə $\triangle ABC$ -nin B sahəsini tapın. M nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

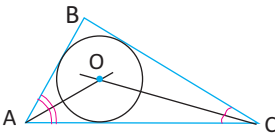


- 5 > Üçbucağın daxilinə çevrə çəkmə addımlarını araşdırın. Dəftərinizdə qurun.



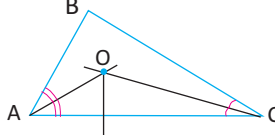
Üçbucağın daxilinə çevrənin qurulması

Addım 1



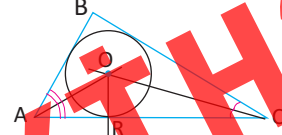
ABC üçbucağını çəkin və üçbucağın iki tən bölgənini çəkin, kəsişmə nöqtəsini O hərfi ilə işarə edin.

Addım 2



O nöqtəsindən üçbucağın tərəfinə perpendikulyar parça çəkin və tərəfi kəsdiyi nöqtəni R hərfi ilə işarə edin.

Addım 3



Pərgarın iynli ucunu O nöqtəsində yerləşdirin və qolunu OR parçası qədər açaraq çevrə O mərkəzli çəkin.

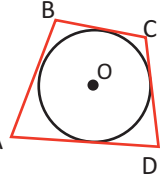


Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının xassələri

Üçbucaqlardan fərqli olaraq istənilən dördbucaqlının daxilinə və xaricinə çevrə çəkmək mümkün deyil.

Teorem 4. Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəmi bərabərdir: $AB + CD = BC + AD$

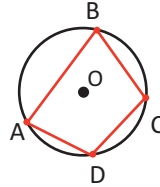
Tərs teorem. Dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəmi A bərabərsə, onun daxilinə çevrə çəkmək olar.



Teorem 5. Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi 180° -yə bərabərdir:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \angle B + \angle D = 180^\circ$$

Tərs teorem. Dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi 180° -yə bərabərsə, onun xaricinə çevrə çəkmək mümkündür.



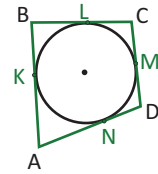
Teorem 4-ün isbatı: K, L, M, N dördbucaqlının tərəflərinin çevrəyə toxunma nöqtələri olsun. Bir nöqtədən çevrəyə çəkilən toxunanların xassəsinə görə $AK = AN$, $BK = BL$, $CM = CL$, $DM = DN$

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq:

$$AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN$$

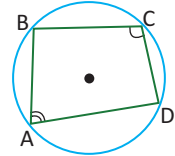
və ya

$$AB + CD = BC + AD.$$



6 > Teorem 5-in isbatını tamamlayın.

Təklif	Əsası
1. $\angle A = \frac{\sphericalangle BCD}{2}$, $\angle C = \frac{\sphericalangle DAB}{2}$	1.
2. $\angle A + \angle C = \frac{\sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB}{2}$	2. Tərəf-tərəfə toplama
3. $\angle A + \angle C = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$	3.

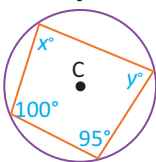


7 > Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının iki qarşı tərəfinin uzunluqları cəmi 12 sm-dir. Bu dördbucaqlının perimetrini tapın.

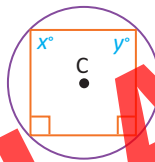
8 > Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının üç tərəfinin uzunluqları 4 sm, 6 sm, 7 sm olarsa, perimetri neçə santimetr ola bilər? Mümkün halları araşdırın.

9 > Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının dəyişənlə işarələnmiş bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın.

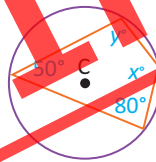
a)



b)

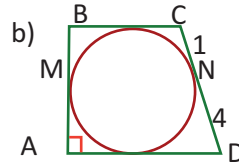
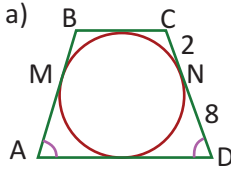
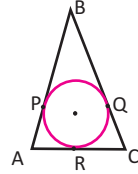


c)

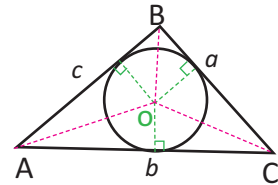


LAYTHA

- 10 > a) Çevrə daxilinə çəkilmiş trapesiyanın bərabəryanlı olduğunu göstərin.
 b) Çevrə daxilinə və xaricinə paraleloqramlar çəkin. Bu hansı halda mümkündür? Paraleloqramın növünü müəyyən edin.
- 11 > Bərabəryanlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrə toxunma nöqtəsi ilə yan tərəfi 3 sm və 4 sm olan parçalara bölür. Üçbucağın perimetrini tapın. Məsələnin neçə həlli var?
- 12 > Daxilə çəkilmiş çevrə $\triangle ABC$ -nin tərəflərinə P, Q və R nöqtələrində toxunur.
 a) Şəkilə görə konqruent parçaların adlarını yazın.
 b) $AB=10$ sm, $BC=12$ sm, $AC=5$ sm olarsa, AP, PB, BQ, QC, AR, RC parçalarının uzunluqlarını tapın.
 c) $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$ qəbul edin. AP, BP, CR parçalarının uzunluqlarını a , b , c dəyişənləri ilə ifadə edin.
- 13 > Şəkildə verilənlərə görə çevrə xaricinə çəkilmiş trapesiyanın perimetrini və sahəsini tapın.



- 14 > a) Üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu üçün $r = \frac{2S}{P}$ düsturunun doğru olduğunu göstərin. Burada S üçbucağın sahəsi, P isə perimetridir.



Göstəriş: $S_{\triangle ABC}$ -ni $S_{\triangle AOC}$, $S_{\triangle AOB}$, $S_{\triangle BOC}$ ilə ifadə edin.

b) Bu düsturun daxilinə çevrə çəkmək mümkün olan dördbucaqlı üçün də doğru olduğunu göstərin.

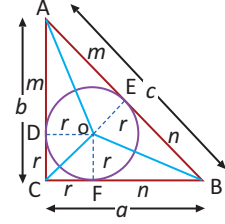
c) Tərəfləri 10; 10; 12 vahid olan üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

d) Radiusu 5 sm olan çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəmi 26 sm olarsa, bu dördbucaqlının sahəsini tapın.

LAYIHƏ

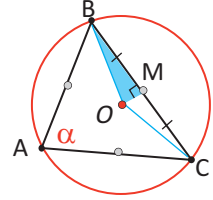
- 15 > a) Şəkildən istifadə etməklə düzbucaqlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu üçün $r = \frac{a+b-c}{2}$ düsturunun doğruluğunu göstərin.

b) Katetləri 6 və 8 vahid olan düzbucaqlı üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.



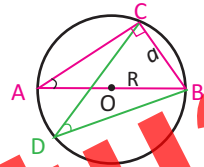
- 16 > Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın tərəfinin qarşısındakı bucağın sinusuna nisbəti bu çevrənin diametrinə bərabərdir: $d = \frac{a}{\sin \alpha}$

a) Çevrənin mərkəzinin üçbucağın daxilində yerləşdiyi hal üçün verilmiş isbatı araşdırın, müzakirə edin və dəftərinizdə yazın.



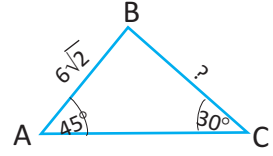
İsbatı:	Təklif	Əsası
1. $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$		1. Verilir
2. $\angle BOC = 2\alpha$		2. Daxilə çəkilmiş bucağın xassəsi
3. $\triangle BOC$ bərabəryanlıdır.		3. $BO = OC$ çevrənin radiuslarıdır.
4. $\angle BOM \cong \angle MOC = \alpha$		4. Bərabəryanlı üçbucaqda tən bölənin xassəsi
5. $\triangle BOM$ və $\triangle MOC$ konqruent düzbucaqlı üçbucaqlardır.		5. Konqruentliyin TTT əlaməti
6. $\sin \alpha = \frac{BM}{OB}$		6. BOM düzbucaqlı üçbucaqda iti bucağın sinusunun tərfi
7. $\sin \alpha = \frac{BM}{OB} = \frac{2BM}{2OB}$		7. Kəsrin xassəsi
8. $\sin \alpha = \frac{2BM}{2OB} = \frac{BM+MC}{2r} = \frac{a}{d}$		8. $\triangle BOM \cong \triangle MOC$ olduğundan $BM \cong MC$, parçaların toplanması aksiomu, diametrin tərfi
9. $\sin \alpha = \frac{a}{d}$ $d = \frac{a}{\sin \alpha}$		9. Bərabərliyin xassəsinə görə sadələşdirmə

b) Təklifin isbatını əvvəlcə çevrə daxilinə çəkilmiş düzbucaqlı üçbucaq üçün yerinə yetirin. Sonra verilən şəkildən istifadə etməklə bütün üçbucaqlar üçün ümumiləşdirin.

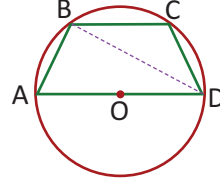


- 17 > Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəfi 10 sm, yan tərəflərinin əmələ gətirdiyi bucaq 120° -dir. Bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
- 18 > Üçbucağın 30° -li bucağının qarşısındakı tərəfinin uzunluğu 8 sm-dir. Bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

- 19 > Verilir: $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AB = 6\sqrt{2}$
 Tapın: 1) Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu;
 2) BC tərəfinin uzunluğunu.



- 20 > Diametri AD olan çevrə daxilinə çəkilmiş ABCD trapesiyasında $BC = 6$ sm, $\angle CBD = 30^\circ$ olarsa, çevrənin radiusunu və trapesiyanın sahəsini tapın.



- 21 > Üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu üçün

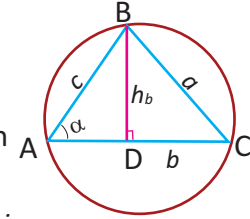
$$R = \frac{abc}{4S}$$

düsturunun doğru olduğunu göstərin. S üçbucağın sahəsi, a, b, c isə onun tərəfləridir.

Həlli: Üçbucağın sahə düsturuna görə $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha} = \frac{abc}{4S}$$

$d = \frac{a}{\sin \alpha}$ olduğuna görə $Kəsrin surət və məxrəci (b \cdot c)$ -yə vurulur $\text{Üçbucağın sahə düsturu nəzərə alınır}$



- 22 > a) Tərəfləri 13 sm, 14 sm, 15 sm olan üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
 b) Oturacağının yan tərəfə nisbəti 4:3 kimi, oturacağa çəkilmiş hündürlüyü isə 20 sm olan bərabəryanlı üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.

- 23 > a) Bərabərtərəfli üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzlərinin medianların kəsişmə nöqtəsində yerləşdiyini əsaslandırın.

$$R = \frac{2}{3} h \quad r = \frac{1}{3} h \quad \text{düsturlarının doğruluğunu göstərin.}$$

Burada R xaricə çəkilmiş çevrənin, r daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu, h üçbucağın hündürlüyüdür.

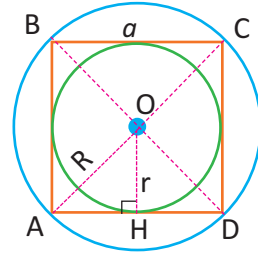
b) Perimetri 9 sm olan bərabərtərəfli üçbucağın xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.

- 24 > Göstərin ki, çevrə xaricinə çəkilmiş bərabəryanlı trapesiyanın orta xətti yan tərəfinə bərabərdir.
 25 > Diaqonalları 6 sm və 8 sm olan rombun daxilinə çəkilmiş çevrənin diametrini tapın.
 26 > Oturacaqları 6 sm və 1 sm, yan tərəflərindən biri isə 4 sm olan trapesiyanın daxilinə çəkilmiş çevrənin uzunluğunu tapın.

LAYIHƏ

Praktik məşğələ.

1. Dəftərinizdə ABCD kvadratı çəkin və diaqonallarının kəsişmə nöqtəsini O ilə qeyd edin.
2. Pərgarın iti ucu O nöqtəsində olmaqla kvadratin təpələrindən keçən çevrə çəkin. Bu çevrənin radiusunu (R) kvadratin tərəfi (a) ilə ifadə edin: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
3. Pərgarın iti ucu O nöqtəsində olmaqla kvadratin tərəflərinə toxunan çevrə çəkin. Bu çevrənin radiusunu kvadratin tərəfi ilə ifadə edin: $r = \frac{a}{2}$

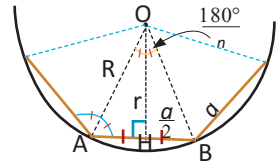


Araşdırma. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsi kvadratin həm daxilinə, həm də xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. İstənilən düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çevrə çəkmək mümkündürmü?



Düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr

İstənilən düzgün çoxbucaqlının həm daxilinə, həm də xaricinə çevrə çəkmək olar və bu çevrələrin mərkəzləri üst-üstə düşür. Düzgün n -bucaqlının bucaqlarının tənböhlənləri O nöqtəsində kəsişir və alınan bərabəryanlı üçbucaqlar şəkildə göstərilmiş $\triangle AOB$ -yə (BTB əlamətinə görə) konqruyentdirlər. Mərkəzi O nöqtəsində yerləşən OA radiuslu çevrə çəksək, bu çevrə bütün təpələrdən keçməklə xaricə çəkilmiş çevrə olur. OH radiuslu çevrə isə çoxbucaqlının bütün tərəflərinə toxunmaqla daxilə çəkilmiş çevrə olur.



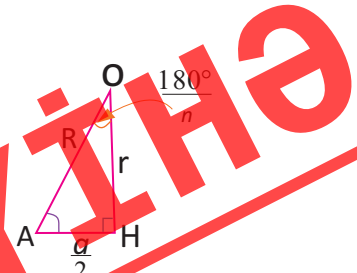
R- düzgün n -bucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu, r -daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu, a -düzgün çoxbucaqlının tərəfi,

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n} \text{ mərkəzi bucaqdır.}$$

$$OA = R, OH = r, AH = \frac{a}{2}, \quad \angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\triangle AOH\text{-dan} \quad \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin \frac{180^\circ}{n} \quad R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

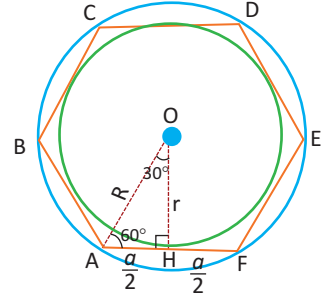
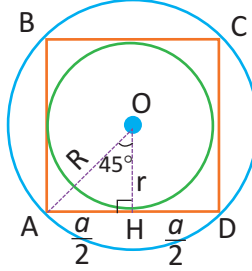
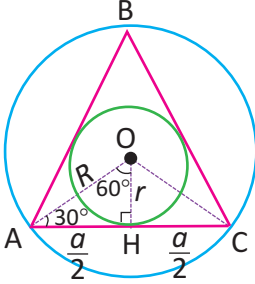
$$\triangle AOH\text{-dan} \quad \frac{AH}{OH} = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$



LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

- 27 > Tərəfi a olan düzgün a) üçbucağın; b) dördbucaqlının; c) altıbucaqlının xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.



Göstəriş. O nöqtəsi verilmiş çoxbucaqlının tən bölənlərinin kəsişmə nöqtəsi

olmaqla $\sin \angle AOH = \frac{AH}{OA}$, $\tan \angle AOH = \frac{AH}{OH}$ bərabərliklərində $AH = \frac{a}{2}$,

$AO = R$, $OH = r$ yazın, $\angle AOH$ -in dərəcə ölçüsünü nəzərə alın və alınan münasibətdən R və r -i a ilə ifadə edin.

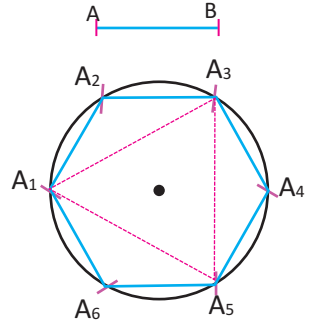
- 28 > a) Tərəfi 6 sm olan düzgün üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
b) Düzgün üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 9 sm-dir. Bu üçbucağın tərəfini və xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
- 29 > a) Tərəfi 8 sm olan kvadratın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
b) Kvadratın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 5 sm-dir. Bu kvadratın tərəfini və xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
- 30 > a) Tərəfi 6 sm olan düzgün altıbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
b) Düzgün altıbucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 3 sm-dir. Bu altıbucaqlının tərəfini və xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
- 31 > a) Düzgün altıbucaqlının böyük diaqonalının xaricə çəkilmiş çevrənin diametri olduğunu şəkil üzərində göstərin. Nəticəni düzgün $2n$ -bucaqlı üçün ümumiləşdirin.
b) Radiusu R olan çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün altıbucaqlının perimetrini tapın. Bu altıbucaqlının böyük və kiçik diaqonallarının uzunluqlarını R ilə ifadə edin.

LAYIHƏ

- 32 > Böyük diaqonalının uzunluğu 6 sm olan düzgün altıbucaqlının:
 a) tərəfini;
 b) kiçik diaqonalını;
 c) xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
- 33 > Tərəfi 6 sm olan kvadratın daxilinə çevrə çəkilmişdir. Bu çevrənin daxilinə çəkilmiş düzgün üçbucağın tərəfini tapın.
- 34 > Xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiusları fərqi $2\sqrt{3}$ olan düzgün üçbucağın perimetrini tapın.

- 35 > Düzgün altıbucaqlının qurma addımlarını araşdırın və dəftərinizdə yerinə yetirin.

1. Düzgün altıbucaqlının bir tərəfi uzunluqda AB parçasını çəkin.
2. Pərgarla radiusu bu parçanın uzunluğuna bərabər olan çevrə çəkin.
3. Pərgarın vəziyyətini dəyişmədən çevrə boyu eyniölçülü hissələri işarələyin.
4. Qeyd olunmuş nöqtələri ardıcıl birləşdirin. Düzgün altıbucaqlı qurulmuş oldu.

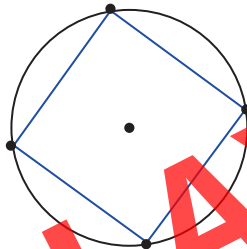
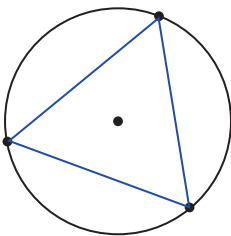


Düzgün $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ altıbucaqlısının, məsələn, A_1, A_3, A_5 təpələrini cüt-cüt birləşdirsək, düzgün üçbucaq qurulmuş olar.

Düzgün dördbucaqlını qurmaq üçün çevrənin qarşılıqlı perpendikulyar iki diametrini çəkmək və onların uclarını ardıcıl birləşdirmək lazımdır.

Çevrə daxilinə düzgün n -bucaqlı çəkilərsə, onun tərəflərinin orta perpendikulyarlarının çevrə ilə kəsişmə nöqtələrini qeyd etsək, alınan nöqtələr düzgün $2n$ -bucaqlının digər təpələri olur.

- 36 > Aşağıdakı şəkillərdən istifadə etməklə dəftərinizdə düzgün üçbucaq, düzgün dördbucaqlı və düzgün səkkizbucaqlı qurun.



LAVİT HƏ

Düzgün çoxbucaqlının mərkəzi. Düzgün çoxbucaqlının xaricinə (və ya daxilinə) çəkilmiş çevrənin mərkəzi düzgün çoxbucaqlının mərkəzidir. Düzgün çoxbucaqlının **markəzi** çoxbucaqlının bütün təpələrindən və bütün tərəflərindən bərabər məsafədədir.

Düzgün çoxbucaqlının apofemi. Düzgün çoxbucaqlının mərkəzindən tərəfinə çəkilmiş perpendikulyara onun **apofemi** deyilir.

Düzgün çoxbucaqlının apofemi daxilə çəkilmiş çevrənin radiusuna bərabərdir.

Aşağıdakı məşğələni verilən addımlarla yerinə yetirin və düzgün çoxbucaqlının apofemindən asılı sahə düsturunu müəyyən edin.

Məşğələ

Apofem və çoxbucaqlının sahəsi

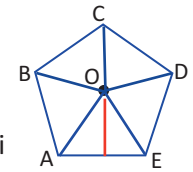
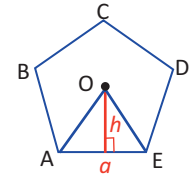
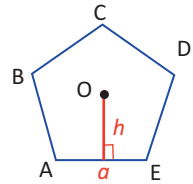
1. Düzgün ABCDE beşbucaqlısını çəkin.
2. O mərkəzindən AE tərəfini yarıya bölən perpendikulyarı çəkin.
3. A və E nöqtələrini O mərkəz nöqtəsi ilə birləşdirin.
4. AOE üçbucağının sahəsini a və h dəyişənləri ilə ifadə edin. Üçbucağın hündürlüyünün çoxbucaqlının hansı ölçüsünə uyğun gəldiyinə diqqət edin.
5. B, C, D təpələrini də O nöqtəsi ilə birləşdirin. Alınan üçbucaqların sahələrini müqayisə edin.
6. Beşbucaqlının sahəsinin bu üçbucaqların sahələri cəminə bərabər olduğuna diqqət edin.

Beşbucaqlının sahəsi:

$$S = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah =$$

$$= \frac{1}{2}(ah + ah + ah + ah + ah) = \frac{1}{2} \cdot 5ah$$

7. $5a$ ifadəsi hansı ölçüyə uyğun gəlir? Beşbucaqlının sahəsini onun perimetri ilə ifadə edin.



Düzgün çoxbucaqlının sahəsi

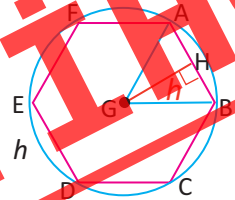
Düzgün n -bucaqlının mərkəzini təpə nöqtələri ilə birləşdirdikdə n sayda konqruent bərabəryanlı üçbucaqlar alınır.

çoxbucaqlının sahəsi = üçbucaqların sayı $\times$ bir üçbucağın sahəsi

$$S = n \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(a \cdot n)h$$

$$S = \frac{1}{2}Ph \quad \text{və ya} \quad S = \frac{1}{2}anh$$

a çoxbucaqlının tərəfinin uzunluğunu, n tərəflərinin sayını, h apofemini göstərir.



LAYIHƏ

- 1. Nümunə** Radiusu 1 vahid olan çevrənin daxilinə düzgün beşbucaqlı çəkilmişdir. Beşbucaqlının sahəsini tapın.

$$\text{Beşbucaqlının sahəsi: } S = \frac{1}{2} Ph$$

Beşbucaqlının h - apofemini və P - perimetrini tapmalıyıq.

$\angle ABC$ mərkəzi bucağı $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ -dir. ABC üçbucağı bərabəryanlı üçbucaqdır və onun BD hündürlüyü həm median, həm də tənböləndir. Deməli, $\angle ABD = 36^\circ$. $\triangle ABD$ üçbucağının tərəflərini tapmaq üçün triqonometrik nisbətlərdən istifadə edək.

$$\cos 36^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{AD}{AB}$$

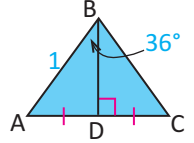
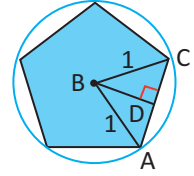
$$BD = AB \cos 36^\circ \approx 1 \cdot 0,8 = 0,8$$

$$AD = AB \sin 36^\circ \approx 1 \cdot 0,6 = 0,6$$

BD beşbucaqlının apofemidir, $h = BD \approx 0,8$;

Beşbucaqlının tərəfi: $AC = 2 \cdot AD = 2 \cdot 0,6 = 1,2$

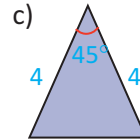
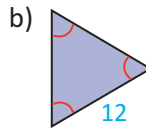
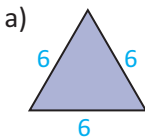
$$S = \frac{1}{2} h \cdot P \approx \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 5 \cdot 1,2 = 2,4 \text{ (kvadrat vahid)}$$



Öyrənmə tapşırıqları

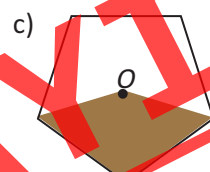
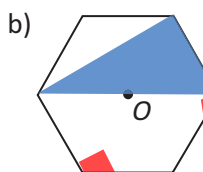
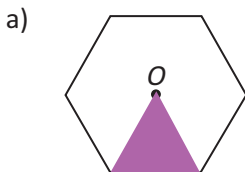
- 1 >** Göstərin ki, tərəfinin uzunluğu a olan bərabərtərəfli üçbucağın sahəsi üçün $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ düsturu doğrudur.

- 2 >** Üçbucaqların sahələrini tapın.



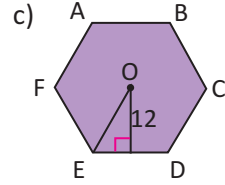
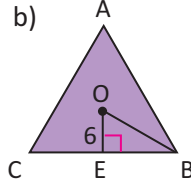
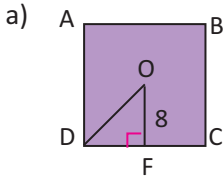
- 3 >** “Düzgün altıbucaqlı və düzgün üçbucağın tərəfləri bərabərdirsə, altıbucaqlının sahəsi üçbucağın sahəsindən 6 dəfə böyükdür.” Bu fikri əsaslandırın.

- 4 >** Rənglənmiş sahənin 8 sm^2 olduğunu bilərək, düzgün çoxbucaqlının sahəsini tapın. O nöqtəsi çoxbucaqlının mərkəzidir.

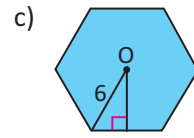
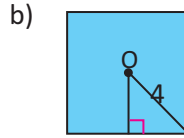
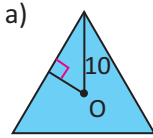


LAYIHƏ

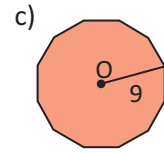
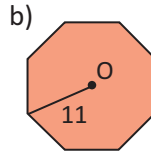
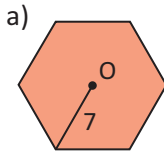
- 5 > Verilən ölçülərə görə düzgün çoxbucaqlının sahəsini tapın. O nöqtəsi çoxbucaqlının mərkəzidir.



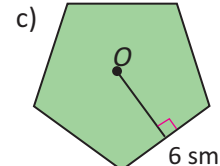
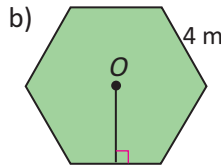
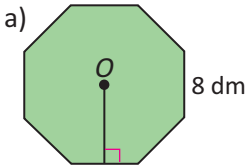
- 6 > Şəkilləki düzgün çoxbucaqlıların perimetrini və sahəsini tapın. O nöqtəsi çoxbucaqlının mərkəzidir.



- 7 > Şəkilləki düzgün çoxbucaqlıların perimetrini və sahəsini tapın.



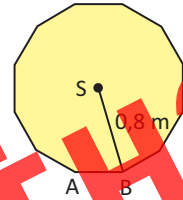
- 8 > Tərəfinin uzunluğu verilmiş düzgün çoxbucaqlıların sahələrini hesablayın. Şəkillə O nöqtəsi düzgün çoxbucaqlının mərkəzidir.



- 9 > Tərəfinin uzunluğu 12 sm olan düzgün doqquzbucaqlının sahəsini tapın.

- 10 > Diametri 12 sm olan çevrənin daxilinə düzgün altıbucaqlı çəkilmişdir. Bu altıbucaqlının apofemini tapın.

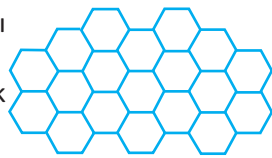
- 11 > Muzeydə eksponatın kənarlarına düzgün onikibucaqlı şəklində hasar çəkilmişdir. Sahənin mərkəzindən hər bir dirəyə qədər məsafə 0,8 m-dir. Ekspонат üçün neçə kvadrat metr sahə ayrılmışdır?



- 12 > a) Tərəfinin uzunluğu a olan düzgün altıbucaqlının apofemini $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ -yə bərabər olduğunu isbat edin.
b) Sahəsi $54\sqrt{3} \text{ sm}^2$ olan düzgün altıbucaqlının apofemini tapın.

LAYIHƏ

- 13 > Mətbəxə tərəfi 6 sm olan düzgün altıbucaqlı formalı metlaxlar döşənməlidir.
- a) Döşəmə üçün ən azı neçə rəng metlax seçmək lazımdır ki, iki qonşu metlax eynirəngli olmasın.
- b) Bir metlaxın sahəsini tapın.
- c) Ölçüləri $2,5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ olan döşəmə üçün ən azı neçə belə metlax lazımdır?

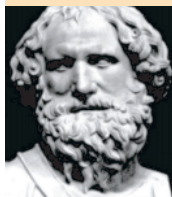
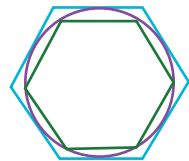


- 14 > Məşhur Azərbaycan memarı Əcəmi Naxçıvaninin şah əsəri Möminə xatun türbəsi Naxçıvan şəhərinin tarixi mərkəzi olan Atabəylər Memarlıq Kompleksindən dövrümüzə çatmış yeganə abidədir.

Türbə düzgün onbucaqlı formasındadır. Türbənin tutduğu sahəni hesablamaq üçün siz hansı ölçmələri aparardınız? Uyğun planı çəkib göstərin. Müxtəlif mənbələrdən türbənin real ölçüləri haqqında məlumat toplayın.



- 15 > Şəkində çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş düzgün altıbucaqlı təsvir edilmişdir. Daxilə çəkilmiş altıbucaqlının sahəsi 3 kvadrat vahiddirsə, xaricə çəkilmiş altıbucaqlının sahəsi neçə kvadrat vahiddir?



Tarixi məlumat. B.e.ə. 3-cü əsrdə Arximed π -nin ədədi qiymətini müəyyən etmək üçün çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlıların perimetrindən istifadə etmişdir. Bu üsulla π -nin qiymətini siz də araşdırın.

1. Çevrənin diametrini vahid qəbul etməklə

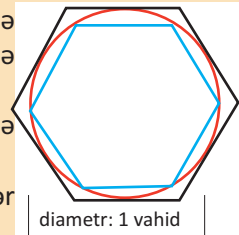
daxilə çəkilmiş altıbucaqlının perimetrini tapın.

2. Diametri vahid olan çevrənin uzunluğunun π -yə bərabər olduğunu göstərin.

3. Çevrənin radiusunu çəkin. Bir tərəfinin uzunluğunu tapmaqla xaricə çəkilmiş altıbucaqlının perimetrini tapın.

4. **Daxilə çəkilmiş altıbucaqlının perimetri** $< \pi < \text{**xaricə çəkilmiş altıbucaqlının perimetri**}$ bərabərsizliyini yazın.

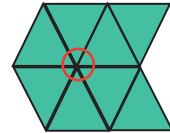
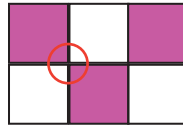
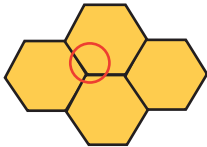
Arximed çoxbucaqlının tərəflərinin sayını 2 dəfə artırmaqla 12 bucaqlı üzərində və nəhayət 96 bucaqlı üzərində hesablamalarını davam etdirmiş və π -nin qiymətinin $3\frac{1}{7}$ -dən böyük, $3\frac{11}{70}$ -dən kiçik olduğunu müəyyən etmişdir.



LAYIHƏ

Parketləmə

Sahənin boşluq qalmayacaq şəkildə fiqurlarla örtülməsi parketləmə adlanır.



Çoxbucaqlıların ortaq təpədəki bucaqlarının cəmi 360° olduqda parketləmə boşluq qalmadan sahəni örtmək mümkündür. Düzgün üçbucaq, romb (kvadrat) və düzgün altıbucaqlıdan istifadə etməklə parketləmə mümkündür.

Lakin düzgün beşbucaqlılarla bunu etmək mümkün deyil. Çünki onun bir bucağının dərəcə ölçüsü 108° -dir. Bir təpədə üç beşbucaqlı ortaq təpəli olarsa, onların bucaqları cəmi $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$, dörd beşbucaqlı ortaq təpəli olarsa, $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$ olacaq.

Yalnız düzgün yeddi bucaqlı ilə parketləmə aparmaq mümkündürmü?

- 16 > a) Qədim abidələr üzərində düzgün fiqurların müxtəlif düzlüyü ilə yeni naxışların yarandığını müşahidə etmək olar. Siz də bu naxışları araşdırın.

Yusif ibn Küseyir Türbəsi. Naxçıvan
Memarı. Əcəmi Əbubəkr oğlu Naxçıvani

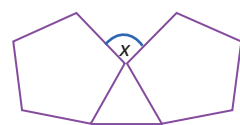
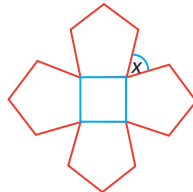
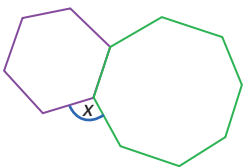


b) Qeyd edilmiş x bucağını tapın. Kompüter proqramlarının köməyi ilə verilən şəkilləri təkrarlamaqla yeni naxışlar yaradın.

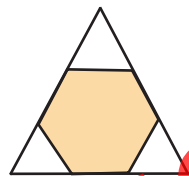
1) Təsvir düzgün altıbucaqlı və səkkizbucaqlıdan ibarətdir

2) Təsvir düzgün beşbucaqlılardan və kvadrattan ibarətdir.

3) Təsvir düzgün beşbucaqlılardan və üçbucaqdan ibarətdir.



- 17 > Bərabərtərəfli üçbucağın daxilinə sahəsi 12 kvadrat vahidə bərabər olan düzgün altıbucaqlı çəkilmişdir. Bu üçbucağın sahəsini tapın.



- 18 > Köşkün döşəməsi düzgün səkkizbucaqlı formasındadır. Səkkizbucaqlının mərkəzindən təpəsinə qədər məsafə 1 m-dir. Köşkün döşəməsi üçün hər birinin sahəsi $0,2 \text{ m}^2$ olan taxtadan neçə dənə lazımdır?

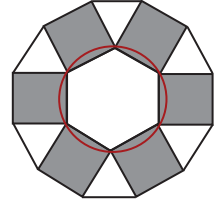


LAYIHƏ

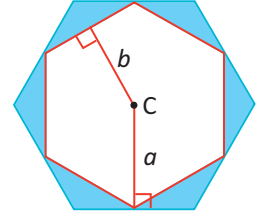


Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > Düzgün onikibucaqlı kvadrat və düzgün üçbucaqlarla quraşdırılmışdır. Şəkildəki çevrənin diametri 6 sm olarsa, onikibucaqlının perimetrini tapın.

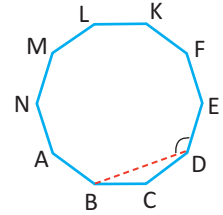


- 2 > Şəkildə göstərilən iki düzgün altıbucaqlıdan kiçik olanın təpələri böyük altıbucaqlının tərəflərinin ortalarında yerləşir. a bə b altıbucaqlıların apofemləridir. $b = 6\sqrt{3}$ sm olarsa, rəngli hissənin sahəsini tapın.

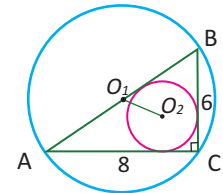


- 3 > Bir bucağı verilən ölçüdə olan düzgün çoxbucaqlı varmı?
1) 155° b) 160° c) 175° d) 168°

- 4 > Şəkildə düzgün onbucaqlı təsvir edilmişdir. $\angle BDE$ -nin dərəcə ölçüsünü tapın.



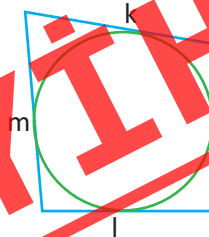
- 5 > Şəkildə $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = 90^\circ$ $\triangle ABC$ -nin daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzləri arasındakı O_1O_2 məsafəsini tapın.



- 6 > a) Qabarıq onbucaqlının cəmi neçə diaqonalı var?
b) 14 diaqonalı olan çoxbucaqlının neçə tərəfi var?
c) Diaqonallarının sayı 20 olan qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

- 7 > Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlı üçün uyğunluğu müəyyən edin. P-dördbucaqlının perimetridir.

- 1) $k = 3$, $l = 7$ A) $P = 22$
2) $k = 4$, $l = 8$ B) $P = 24$
3) $k = 5$, $l = 6$ C) $P = 20$
D) $m + n = 12$

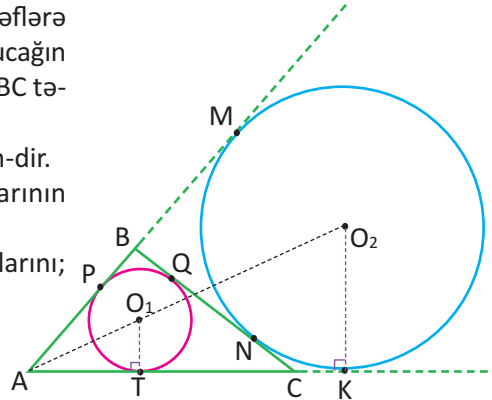


LAYIHƏ

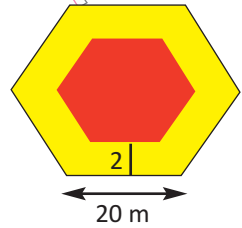
- 8 > $\triangle ABC$ -nin daxilinə çəkilmiş çevrə tərəflərə P, Q və T nöqtələrində toxunur. Üçbucağın AB və AC tərəflərinin uzantısına və BC tərəfinə toxunan çevrə çəkilmişdir.

AB = 10 sm, BC = 17 sm, AC = 21 sm-dir.

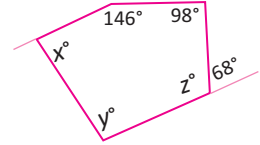
- a) AP, AT, BP, BQ, CT, CQ parçalarının uzunluqlarını;
b) BM, CN, CK parçalarının uzunluqlarını;
c) Çevrələrin radiuslarını tapın



- 9 > Şəhər parkında düzgün altıbucaqlı şəklində güllüyün tərəfləri boyu əkilmiş sarı zanbaqlar 2 m enində zolaq təşkil edir. Güllüyün - böyük altıbucaqlının bir tərəfinin uzunluğu 20 m-dir. Sarı zanbaq əkilmiş hissənin sahəsini tapın.



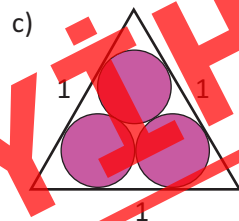
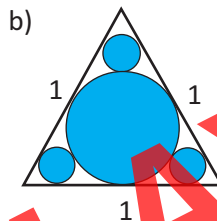
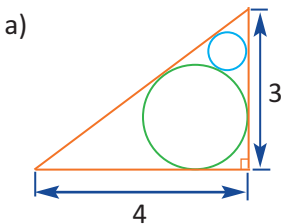
- 10 > Şəkində verilən ölçülərə görə çoxbucaqlının dəyişənlə işarələnmiş daxili bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın.



- 11 > a) Çevrənin daxilinə və xaricinə bərabərtərəfli üçbucaqlar çəkilmişdir. Bu üçbucaqların sahələri nisbətini yazın. Məsələn müxtəlif üsullarla həll edin.
b) Kiçik üçbucağın daxilinə çevrə çəkin. Bu üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbətini və uyğun dairələrin sahələri nisbətini yazın.



- 12 > Şəkində verilənlərə görə hər bir çevrənin radiusunu tapın.



LAYIHƏ

7

Bərabərsizliklər

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

- ✓ Bərabərsizliklər sistemi və bərabərsizliklər heyətini həll etməyi;
- ✓ Dəyişəni modul işarəsi daxilində olan bərabərsizlikləri həll etməyi;
- ✓ Kvadrat bərabərsizliklərin həllini;
- ✓ Rasional bərabərsizliklərin intervallar üsulu ilə həll etməyi;
- ✓ Sadə irrasional bərabərsizlikləri həll etməyi.

7-1

Xətti bərabərsizliklər sistemi

Bir çox hallarda məsələnin şərtini ödəyən qiymətlər çoxluğunu tapmaq üçün birdən çox bərabərsizlikləri, başqa sözlə bərabərsizliklər sistemini həll etmək lazım gəlir.

- 1. Nümunə** Alpinistlər sürətlərini 1 km/saat artırırsalar, zirvəyə qədər 4 km yolu 2 saatdan tez qət edirlər. Əgər onlar sürətlərini 1 km/ saat azaltsalar, 2 saata zirvəyə çata bilməzlər. Alpinistlər hansı sürətlə hərəkət edirlər?

Həlli: Alpinistlərin sürətini x qəbul edək.

Sürəti 1 km/saat artırırsalar, 2 saatda getdikləri yol 4 km -dən çox olar.

Uyğun bərabərsizlik: $2(x + 1) > 4$

Sürəti 1 km/saat azaltsalar, 2 saatda getdikləri yol 4 km -dən az olar.

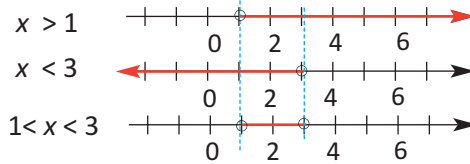
Uyğun bərabərsizlik: $2(x - 1) < 4$

Məsələnin şərtinə görə x -in $2(x + 1) > 4$ və $2(x - 1) < 4$ bərabərsizliklərini ödəyən, yəni hər iki bərabərsizliyi doğru edən qiymətlərini tapmalıyıq.

“Və” bağlayıcısı ilə əlaqəli bərabərsizliklər “{” fiqurlu mötərizəsinin köməyi ilə yazılır və onlara bərabərsizliklər sistemi deyilir. Bərabərsizliklər sistemini həll etmək üçün sistemə daxil olan hər bir bərabərsizliyi həll edib həllər çoxluğunu tapmaq və bu çoxluqların kəsişməsini, yəni ortaq hissəsini götürmək lazımdır.

Verilən məsələdə $\begin{cases} 2(x+1) > 4 \\ 2(x-1) < 4 \end{cases}$ bərabərsizliklər sistemini həll etməliyik.

Sistemin hər bir bərabərsizliyini eynigüclü bərabərsizliklə əvəz etsək, $\begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases}$ alarıq. Sistemə daxil olan bərabərsizliklərin həllər çoxluqlarını ədəd oxu üzərində təsvir edək və onların kəsişməsini (ortaq hissəsini) tapaq.



Cavab: Sistemin həlli (1; 3) aralığıdır.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > -3; 0; 5 ədədlərindən hansılar verilmiş bərabərsizliklər sisteminin həllidir?

a) $\begin{cases} 3 - x \leq 7 \\ 1 - 3x > -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 > 2 \\ 9 - 2x > -21 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 7 > 4 \\ 3 - 2x \leq 5 \end{cases}$

2 > Bərabərsizliklər sistemini həll edin. Həllin qrafik təsvirini çəkin.

a) $\begin{cases} 4 - x \leq 8 \\ 1 - 3x > -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2 > 3 \\ 3 - 2x > -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 15 > 0 \\ 4x < 12 \end{cases}$

3 > Bərabərsizliklər sistemini həll edin, həllin qrafik təsvirini çəkin.

a) $\begin{cases} 7x - 11 \geq 3 \\ 2x < 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(x-3) - x < 1 \\ 3(x-2) - 2 < 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 2 \geq 5x + 3 \\ 3 - 3x < 8 - 2x \end{cases}$

4 > Arqumentin hansı qiymətlərində $y = x - 4$ və $y = 8 - x$ funksiyalarının hər ikisi müsbət qiymətlər alır?

5 > Arqumentin hansı qiymətlərində $y = 0,5x + 2$ və $y = 3 - 3x$ funksiyaları eyni zamanda: a) müsbət; b) mənfi; c) -3-dən böyük; d) 3-dən kiçik qiymətlər alır?

6 > Bərabərsizliklər sistemini həll edin.

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} < 2 \\ \frac{x+1}{3} > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3} \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-5}{6} \leq \frac{3x-1}{4} \\ 5(x+2) > 3(x+3) \end{cases}$

LAYIHƏ

- 7 > x-in hansı qiymətlərində ifadənin mənası var?
 a) $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$ b) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{3-x}$ c) $\sqrt{x+8} + \sqrt{2x+4}$
- 8 > Tam ədədin 2 mislinə ədədin yarısını əlavə etdikdə cəm 92-dən kiçik olur. Bu ədədin 2 misindən ədədin yarısını çıxıqda isə fərq 53-dən böyük olur. Bu tam ədədi tapın.
- 9 > 10,8 kq 60 %-li duz məhluluna 20%-li duz məhlulu qarışdırılır. İkinci məhluldan nə qədər qarışdırılmalıdır ki, qarışığın duzluluğu 40% -dən çox, 30 % -dən isə az olmasın?
- 10 > Üçbucağın bir tərəfi 5 m, ikinci tərəfi 8 m-dir. Üçbucağın perimetri 22 m-dən kiçikdirsə, üçüncü tərəfin uzunluğu neçə metr ola bilər?

7-2

Bərabərsizliklər heyəti

2. **Nümunə.** Nərgiz və Elşən ədədlər üzərində qurulmuş oyun oynayırlar. Hər biri bir ədəd kartı çıxarır və üzərinə 5 əlavə edir. Cavab 10-dan kiçik və ya 15-dən böyük olarsa, kartı çıxaran xal qazanır. Elşənin bir kart çıxarıb xal qazandığı situasiyanı bərabərsizliklə ifadə edin. Çıxarılan kartdakı ədəd x olsun. Tələb olunan situasiyanı $x + 5 < 10$ və ya $x + 5 > 15$ bərabərsizlikləri ilə ifadə etmək olar. “Və ya” bağlayıcısı ilə əlaqəli bərabərsizliklər [mötərizəsinin köməyiylə yazılır və onlara bərabərsizliklər heyəti deyilir. Bərabərsizliklər heyətini həll etmək üçün hər bir bərabərsizliyin həllər çoxluğunu tapıb, bu çoxluqların birləşməsini götürmək lazımdır.

$$\begin{cases} x + 5 < 10 \\ x + 5 > 15 \end{cases} \text{ heyətini həll edək.}$$

Həlli.

1) $x + 5 < 10$

$x < 10 - 5$

$x < 5$

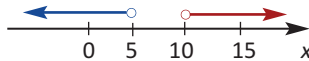
2) $x + 5 > 15$

$x > 15 - 5$

$x > 10$

heyətin 1-ci bərabərsizliyinin həlli (– ∞ ; 5) aralığıdır.

heyətin 2-ci bərabərsizliyinin həlli (10; $+\infty$) aralığıdır.



Verilmiş bərabərsizliklər heyətinin həlli $(-\infty; 5) \cup (10; +\infty)$ çoxluğudur.

LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

- 11 > Bərabərsizliklər heyətini həll edin.

$$a) \begin{cases} x-1 > 4 \\ x+1 < -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x-12 > 3 \\ 2x+1 < -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3(x-1)-x \geq 5 \\ 2(3-x)-3 < x \end{cases}$$

- 12 > Vuruqların işarələrinin müxtəlif variantlarını araşdırmaqla bərabərsizlikləri həll edin.

$$a) (x+1)(x-2) > 0$$

$$b) (x-1)(x-3) > 0$$

$$c) (x-2)(x-5) < 0$$

$$d) (x+3)(x-6) \leq 0$$

Nümunə. a) $(x+1)(x-2) > 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli. İki vuruğun hasilinin müsbət olması üçün vuruqlar eyni işarəli olmalıdır. Deməli, ya $(x+1)$ və $(x-2)$ vuruqlarının hər ikisi müsbət, ya da hər ikisi mənfi olmalıdır.

Verilmiş bərabərsizlik $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$ heyətinin həllinə gətirilir.

Heyətin birinci sisteminin həlli:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \end{cases}$$

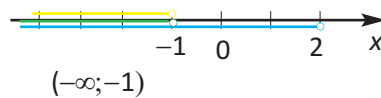
Həndəsi təsviri:



Heyətin ikinci sisteminin həlli:

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \end{cases}$$

Həndəsi təsviri:



Verilmiş bərabərsizliyin həlli $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ olur.

- 13 > Kəsrin surət və məxrəcənin işarələrinin müxtəlif variantlarını araşdırmaqla bərabərsizlikləri həll edin.

$$a) \frac{x-1}{x-3} < 0$$

$$b) \frac{x-2}{x+1} > 0$$

- 14 > Hansı ədədin kvadratı bu ədədin 5 mislindən böyük deyildir? Bu şərti ödəyən tam ədədlərin cəmini tapın.

- 15 > a -nın hansı qiymətlərində bərabərsizliklər sisteminin heç olmasa, bir həlli var?

$$a) \begin{cases} x < 9 \\ x > a \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x \leq 10 \\ x > a \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq a \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq a \end{cases}$$

LAYIHƏ

7-3

Modul işarəsi daxilində dəyişəni olan sadə bərabərsizliklər

Modullu bərabərsizliklərin həlli uyğun bərabərsizliklər sistemi və ya bərabərsizliklər heyəti yazılmaqla həll edilir. Cədvəldə modullu bərabərsizliklərin uyğun ekvivalent yazılışları verilmişdir.

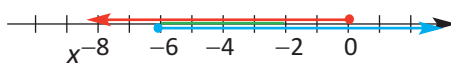
Modullu bərabərsizlik	Ekvivalent ikiqat bərabərsizlik	Ekvivalent bərabərsizliklər sistemi və heyəti
$ ax + b < c$	$-c < ax + b < c$	$\begin{cases} ax + b < c \\ ax + b > -c \end{cases}$
$ ax + b \leq c$	$-c \leq ax + b \leq c$	$\begin{cases} ax + b \leq c \\ ax + b \geq -c \end{cases}$
$ ax + b > c$	$ax + b > c$ və ya $ax + b < -c$	$\begin{cases} ax + b > c \\ ax + b < -c \end{cases}$
$ ax + b \geq c$	$ax + b \geq c$ və ya $ax + b \leq -c$	$\begin{cases} ax + b \geq c \\ ax + b \leq -c \end{cases}$

1. Nümunə. $|2x + 3| \leq 3 - x$

Həlli. $\begin{cases} 2x + 3 \leq 3 - x \\ 2x + 3 \geq -(3 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -6 \end{cases}$

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:

Cavab: $[-6; 0]$

2. Nümunə. $|2x - 5| \geq x + 2$

Həlli. $\begin{cases} 2x - 5 \geq x + 2 \\ 2x - 5 \leq -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:

Cavab: $(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$

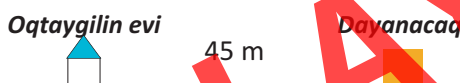


Öyrənmə tapşırıqları

1 > Modullu bərabərsizlikləri həll edin. Həlli ədəd oxu üzərində təsvir edin.

- a) $|5x + 3| - 4 \geq 9$ d) $|4 - x| < 5$ g) $|2x + 3| > 4 + x$
b) $|10 - 4x| \leq 2$ e) $|3x - 9| + 2 > 7$ h) $6 - 2x > |x + 12|$
c) $|3 + x| + 7 < 10$ f) $|3x + 2| - 1 \geq 10$ i) $|2x + 5| - 1 < 6x - 2$

2 > Avtobus dayanacağı Oqtaygilin evindən 45 m aralıdadır. Dayanacağındakı yerləşdiyi yerdən ən çoxu 30 m uzağa köçürmək planlaşdırılır. Dayanacağın yeni yerinin Oqtaygilin evindən məsafəsini bərabərsizliklə göstərin.



- 3 > a -nın elə qiymətini göstərin ki, $|x - 3| \leq a - 2$ bərabərsizliyinin həlli olsun və bu həlli tapın. a -nın həmin qiyməti üçün $|x - 3| > a - 2$ bərabərsizliyini də həll edin.

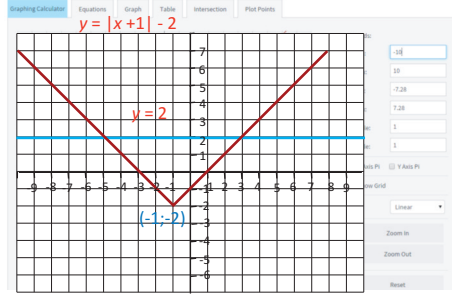
- 4 > Şəkildə qrafikalkulyatorda qurulmuş

<http://www.meta-calculator.com/online/>

$$y = |x+1| - 2 \text{ və } y = 2$$

funksiyalarının qrafikləri verilmişdir.

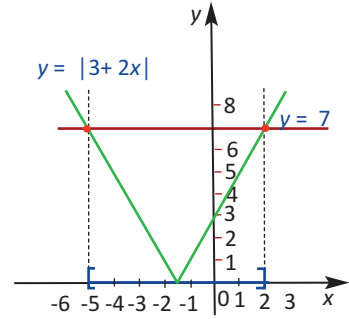
Qrafiki dəftərinizdə çəkin və bu iki qrafikdən istifadə etməklə:



- a) $|x+1| - 2 = 2$ tənliyinin;
 b) $|x+1| - 2 < 2$ bərabərsizliyinin;
 c) $|x+1| - 2 > 2$ bərabərsizliyinin həllərini göstərin.

- 5 > Modullu bərabərsizlikləri həll edin. Həlli qrafik olaraq təqdim edin. a) bəndinə uyğun qrafik verilmişdir.

- a) $|3 + 2x| < 7$ d) $|x - 1| < 1 - 2x$
 b) $|4 - 2x| > 4$ e) $|x + 2| > 2x + 1$
 c) $|3x - 6| \leq 6$ f) $|x - 3| < x + 1$



- 6 > Atəşfəşanlıqda yaranan müxtəlif rənglər istifadə olunan kimyəvi maddənin yanması ilə əldə edilir.

- b) Tərkibində mis olan maddə yanarkən uzunluğu $|w - 455| < 23$ bərabərsizliyini ödəyən işıq dalğaları yaradır. Bu zaman havada hansı rəng görünür?
- c) Tərkibində barium-xlorid olan maddə yanarkən uzunluğu $|w - 519,5| < 12,5$ bərabərsizliyini ödəyən işıq dalğaları yaradır. Bu zaman havada hansı rəng görünür?
- d) Tərkibində natrium olan maddə yanarkən uzunluğu $|w - 600| < 5$ bərabərsizliyini ödəyən işıq dalğaları yaradır. Bu zaman havada hansı rəng görünür?

Rəng	Dalğa uzunluğu
Ultrabənövşəyi	$w < 400$
Bənövşəyi	$400 \leq w \leq 424$
Mavi	$424 \leq w \leq 491$
Yaşıl	$491 \leq w \leq 575$
Sarı	$575 \leq w \leq 585$
Narıncı	$585 \leq w \leq 647$
Qırmızı	$647 \leq w \leq 700$
İnfraqırmızı	$w \geq 700$

7-4

Kvadrat bərabərsizliklər

Araşdırma:

1) $y = x^2 - 2x - 3$ parabolasının absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapın. $x^2 - 2x - 3 = 0$ $x = -1$, $x = 3$

2) Təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1, \quad n = m^2 - 2m - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

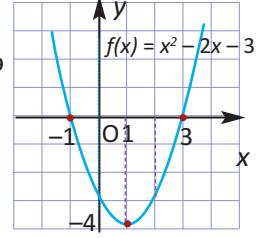
3) Parabolanı qurun.

4) Parabola üzərində yerləşən və absisi $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ olan nöqtələrin ordinatlarının işarələrini müəyyən edin.

5) x -in hansı qiymətlərində parabola absis oxundan aşağıda yerləşir?

6) x -in hansı qiymətlərində parabola absis oxundan yuxarıda yerləşir?

7) 5-ci və 6-cı bənddəki suallara cavab vermək üçün vacib olan hansıdır: təpə nöqtəsinin, yoxsa absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin dəqiq tapılması?



- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$ şəklində olan bərabərsizliklər kvadrat bərabərsizliklərdir
- $ax^2 + bx + c > 0$ ($a \neq 0$).
- $ax^2 + bx + c \geq 0$

Birdəyişənli ikidərəcəli bərabərsizliklərin həllini uyğun kvadrat tənliyi həll etməklə funksiyanın müsbət və ya mənfi qiymətlər aldığı aralıqların tapılmasına gətirmək olar. Bu həll üsulunda vacib olan parabolanın qollarının yuxarıya və ya aşağıya yönəldiyini müəyyən etmək və onun Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absislərini bilməkdir.

Nümunə: $y = x^2 - x - 6$ funksiyanın qrafikinə görə aşağıdakı bərabərsizliklərin həllər çoxluğunu yazın.

a) $x^2 - x - 6 \leq 0$ c) $x^2 - x - 6 > 0$

b) $x^2 - x - 6 \geq 0$ d) $x^2 - x - 6 < 0$

$x^2 - x - 6 = 0$ tənliyinin kökləri $x = -2$, $x = 3$ olduğundan

$y = x^2 - x - 6$ parabolası Ox oxunu $x = -2$ və $x = 3$ nöqtələrində kəsməklə müsbət və mənfi qiymətlər aldığı üç aralığa ayırır.

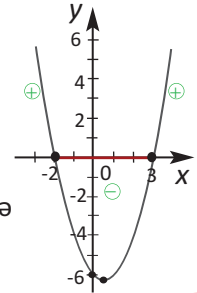
$x^2 - x - 6$ ifadəsinin qiymətlərini hər bir aralıqda müəyyən edək.

a) $y = x^2 - x - 6$ funksiyanın qrafiki x -in -2 və 3 qiymətlərində absis oxunu kəsir, bu qiymətlər arasında isə Ox oxundan aşağıda yerləşir. Deməli, $x^2 - x - 6 \leq 0$ bərabərsizliyinin həlli: $-2 \leq x \leq 3$

b) x -in -2 və -2 -dən kiçik və ya 3 və 3 -dən böyük qiymətlərində funksiyanın qiyməti ($x^2 - x - 6$ ifadəsinin qiyməti) sıfıra bərabər və ya sıfırdan böyükdür. Deməli, $x^2 - x - 6 \geq 0$ bərabərsizliyinin həlli: $x \leq -2$ və ya $x \geq 3$

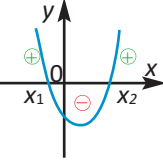
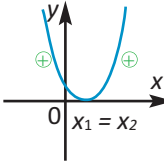
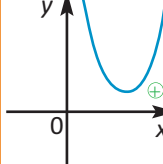
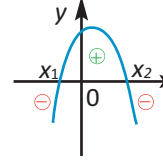
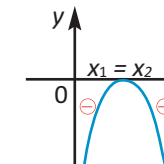
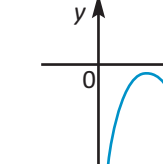
c) $x^2 - x - 6 > 0$ bərabərsizliyinin həlli: $x < -2$ və ya $x > 3$

d) $x^2 - x - 6 < 0$ bərabərsizliyinin həlli: $-2 < x < 3$



Kvadrat bərabərsizlikləri qrafikin köməyiylə həll etmək üçün:

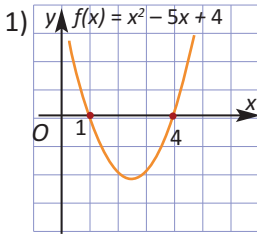
1. a əmsalına görə parabolun qollarının istiqaməti müəyyən edilir
2. Uyğun kvadrat tənliyin həqiqi kökləri (varsa) tapılır, ya da həqiqi kökünün olmadığı müəyyən edilir.
3. Qrafikin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinə görə funksiyanın qrafiki sxematik təsvir edilir.
4. Qrafikin sxematik təsvirinə görə verilmiş bərabərsizliyə uyğun işarələrin olduğu intervallar müəyyən edilir.

 $a > 0$ $D > 0$	 $a > 0$ $D = 0$	 $a > 0$ $D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$ bərabərsizliyinin həlli		
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ bərabərsizliyinin həlli		
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$ bərabərsizliyinin həlli		
$(x_1; x_2)$	$\emptyset$	$\emptyset$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ bərabərsizliyinin həlli		
$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	$\emptyset$
 $a < 0$ $D > 0$	 $a < 0$ $D = 0$	 $a < 0$ $D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$ bərabərsizliyinin həlli		
$(x_1; x_2)$	$\emptyset$	$\emptyset$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ bərabərsizliyinin həlli		
$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	$\emptyset$
$ax^2 + bx + c < 0$ bərabərsizliyinin həlli		
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ bərabərsizliyinin həlli		
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

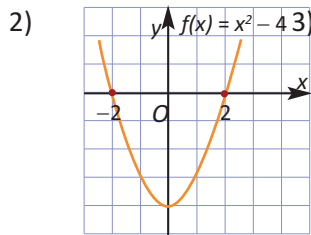
LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

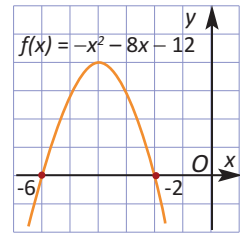
1 > Qrafiklərə görə bərabərsizliklərin həllini yazın.



- a) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$
 b) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$
 c) $x^2 - 5x + 4 > 0$
 d) $x^2 - 5x + 4 < 0$



- a) $x^2 - 4 \leq 0$
 b) $x^2 - 4 \geq 0$
 c) $x^2 - 4 > 0$
 d) $x^2 - 4 < 0$



- a) $-x^2 - 8x - 12 \leq 0$
 b) $-x^2 - 8x - 12 \geq 0$
 c) $-x^2 - 8x - 12 > 0$
 d) $-x^2 - 8x - 12 < 0$

2 > Bərabərsizlikləri uyğun funksiyanın qrafikindən istifadə etməklə həll edin.

a) $x^2 - 7x + 10 > 0$

b) $x^2 - 4x + 3 < 0$

c) $x^2 - 9 \geq 0$

3 > Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $x(x + 6) \geq 40$

c) $6x^2 > 11x + 35$

e) $-2x^2 - x + 3 > 0$

b) $-x^2 - 11x - 24 < 0$

d) $7x + 5 \leq -2x^2$

f) $-3x^2 + 5x > 2$

4 > İsbat edin ki, bərabərsizlik dəyişənin istənilən qiymətində doğrudur.

a) $-x^2 + x - 1 < 0$

b) $6x - x^2 < 10$

c) $5x^2 - 2x + 1 > 0$

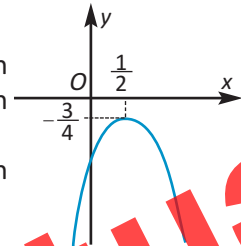
Nümunə $-x^2 + x - 1 < 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli. $y = -x^2 + x - 1$ parabolasının qolları aşağı yönəlib.

$-x^2 + x - 1 = 0$ tənliyinin həqiqi kökü olmadığından parabola absis oxunu kəsmir, bütünlüklə bu oxdan aşağıda yerləşir.

Bu, o deməkdir ki, $-x^2 + x - 1 < 0$ bərabərsizliyi dəyişənin istənilən qiymətində ödənilir.

Cavab: $(-\infty; +\infty)$



5 > Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $x^2 + x + 3 > 0$

b) $2x^2 + x + 1 \geq 0$

c) $x^2 - 2x + 4 < 0$

LAYIHƏ

- 6 > Verilən kvadrat bərabərsizliklərdən hansının: a) həlli bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur ($x \in \mathbb{R}$); b) həlli yoxdur ($\emptyset$)?

a) $x^2 + 1 > 0$

b) $x^2 + 1 < 0$

- 7 > Bərabərsizliyin həllər çoxluğunu tapın.

a) $4x^2 + 4x + 1 > 0$

b) $x^2 + 49 \leq 14x$

c) $40x + 25x^2 + 16 < 0$

d) $49x^2 + 70x + 25 \geq 0$

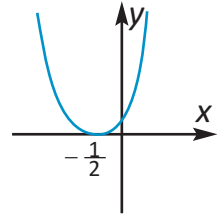
Nümunə. $4x^2 + 4x + 1 > 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli. $y = 4x^2 + 4x + 1$ funksiyasının qrafikini təsvir edək.

$4x^2 + 4x + 1 = 0$ tənliyini ödəyən həqiqi ədəd yeganədir:

$x = -\frac{1}{2}$. Parabola Ox oxuna $(-\frac{1}{2}; 0)$ nöqtəsində $\frac{1}{2}$ toxunur. Qrafikdən görüldüyü kimi, dəyişənin $x = -\frac{1}{2}$ qiymətindən başqa qalan bütün qiymətlərində verilən bərabərsizlik ödənilir.

Cavab: $x \neq -\frac{1}{2}$



- 8 > Bərabərsizlikləri uyğun funksiyanın qrafikini qurmaqla həll edin.

a) $x^2 - 9x + 8 < 0$

d) $x^2 - 2x - 24 \leq 0$

g) $x^2 + 8x + 16 \geq 0$

b) $x^2 + 6x + 5 > 0$

e) $0 > -x^2 + 7x - 12$

h) $-x^2 + 2x + 15 < 0$

c) $4x^2 + 12x + 10 \leq 0$

f) $3x^2 - 3x + 9 > 0$

i) $0 > -x^2 + 4x - 4$

- 9 > Həlli verilən şərtə uyğun kvadrat bərabərsizlik yazın.

a) $-2 \leq x \leq 4$

b) $x < 1$ və ya $x > 10$

c) $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

d) $x < -\frac{3}{4}$ və ya $x > \frac{2}{3}$

e) $x \leq -3 - \sqrt{5}$ və ya $x \geq -3 + \sqrt{5}$

f) $x \in \mathbb{R}$

g) həlli yoxdur

- 10 > x -in hansı qiymətlərində:

a) $3x^2 - 2x - 1$ üçhədlisi müsbət qiymət alır?

b) $-x^2 + 3x - 2$ üçhədlisi mənfi qiymət alır?

- 11 > Dəyişənin hansı qiymətlərində:

a) $2x^2 + x - 6$ üçhədlisinin qiyməti 4-dən kiçikdir?

b) $-x^2 + 8x + 2$ üçhədlisinin qiyməti 9-dan böyükdür?

- 12 > Arqumentin hansı qiymətlərində $f(x) = x^2 - 4x$ funksiyasının qiyməti $g(x) = x + 6$ funksiyasının uyğun qiymətindən kiçikdir?

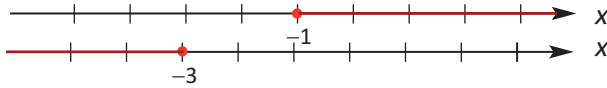
LAYIHƏ

Kvadrat bərabərsizlikləri cəbri üsulla, sol tərəfi vuruqlarına ayıraraq, bərabərsizliyin işarəsinə görə mümkün halları araşdırmaqla həll etmək olar.

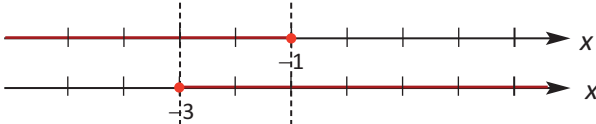
Nümunə. $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyini $(x + 1)(x + 3) \leq 0$ şəklində yazmaq. İki vuruğun hasili o zaman mənfi olur ki, vuruqlar əks işarəli olsun.

1-ci hal. $(x + 1) \geq 0$ və $(x + 3) \leq 0$. Buradan $x \geq -1$ və $x \leq -3$.

x -in hər iki bərabərsizliyi ödəyən qiymətləri $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyinin həllidir. Bu halda x -in belə qiyməti yoxdur.



2-ci hal. $(x + 1) \leq 0$ və $(x + 3) \geq 0$. Bu iki bərabərsizliyi həll etsək, $x \leq -1$ və $x \geq -3$ olar.



x -in -1 və -3 qiymətləri də daxil olmaqla onlar arasındakı bütün qiymətləri $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyinin həllidir: $-3 \leq x \leq -1$

13 > Bərabərsizlikləri uyğun ifadəni vuruqlarına ayırmaqla həll edin.

a) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$

b) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

c) $4x^2 < 25$

d) $-x^2 - 12x < 32$

e) $x^2 - 4x - 5 > 0$

f) $12x^2 + 3x \leq 0$

14 > Bərabərsizlikləri müxtəlif üsullarla həll edin.

a) $x^2 + 8x + 7 > 0$

b) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$

c) $2x^2 - 11x + 15 \geq 0$

d) $x^2 - 5x > 3x^2 - 18x + 20$

e) $2x^2 + 12x - 11 > x^2 + 2x + 13$

15 > Bərabərsizlikləri iki qrupa- xətti bərabərsizliklərə, kvadrat bərabərsizliklərə ayırın və həll edin:

$y^2 - 3 < 0$

$7(3 - y) > 4 + 2y$

$(3 - 7x)^2 < -1$

$4(x - 2) < 6x - 3$

$(5x + 2)^2 \leq 4$

$x^2 - 3 < 5x + 3$

$8p^2 - 18 > 0$

$x + 3 \leq 2(x + 1)$

$x^2 \geq 4x$

16 > $x^2 + x \geq 6$ bərabərsizliyini həll edin. Aşağıdakı fikirlərdən hansı doğrudur? Cavablarınızı əsaslandırın. Verilən bərabərsizliyin həllər çoxluğu:

a) $x(x + 1) \geq 6$ bərabərsizliyinin də həllər çoxluğudur.

b) $x^2 + x - 5 \geq 1$ bərabərsizliyinin də həllər çoxluğudur.

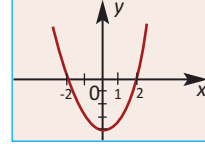
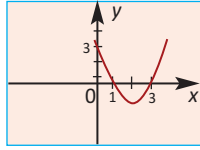
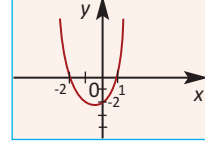
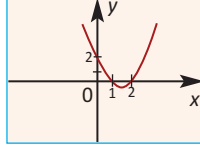
c) $3x^2 + 3x \geq 18$ bərabərsizliyinin də həllər çoxluğudur.

d) $-x^2 - x \leq -6$ bərabərsizliyinin də həllər çoxluğudur.

Tətbiq tapşırıqları

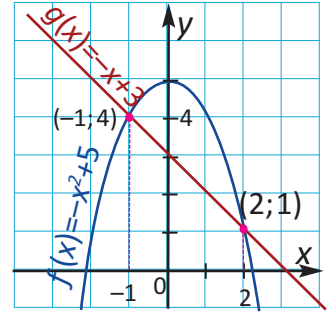
- 17 > Hansı qrafik hansı bərabərsizliyə uyğundur? Hansı bərabərsizliklərə uyğun funksiyaların qrafikləri verilməmişdir? Bu qrafikləri də qurun və onlardan istifadə etməklə bərabərsizlikləri həll edin.

- a) $x^2 - 3x + 2 > 0$
 b) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$
 c) $x^2 - 2x - 3 < 0$
 d) $x^2 + x - 2 \geq 0$
 e) $x^2 - x - 2 < 0$
 f) $x^2 - 4 > 0$



- 18 > Şəkində $-x^2 + 5 \geq -x + 3$ bərabərsizliyinin həlli göstərilmişdir.

- a) x -in $[-1; 2]$ aralığına daxil olan qiymətlərində verilən bərabərsizliyin ödənildiyini yazılı olaraq əsaslandırın.



- b) $-x^2 + 5 \geq -x + 3$ bərabərsizliyini sadələşdirərək, $-x^2 + x + 2 \geq 0$ kvadrat bərabərsizlik şəklində yazın və bu bərabərsizliyi qrafik üsulla həll edin.
- c) Eyni nəticəni aldınız mı? Verilmiş qrafik həll ilə sizin həlliniz arasında oxşar və fərqli cəhətlər hansılardır?
- 19 > Düzbucaqlı üçbucağın bir kateti digərindən 2 sm uzundur. Kiçik katetinin uzunluğu neçə santimetr olsa, üçbucağın sahəsi ən azı 24 sm² olar?
- 20 > Düzbucaqlının bir tərəfi o birindən 7 sm böyükdür. Düzbucaqlının sahəsi 60 sm²-dan kiçik olduqda, həmin tərəfin uzunluğu neçə ola bilər?

- 21 > Araşdırmalar göstərir ki, sürücülərin qarşıdakı maneəyə reaksiya müddətini (salisələrlə) $T(x) = 0,005x^2 - 0,23x + 22$ funksiyası ilə modeləşdirmək olar. Burada x sürücünün yaşını göstərir: $16 \leq x \leq 70$.

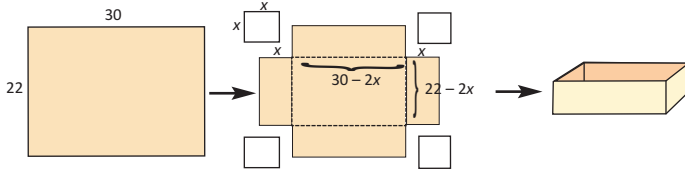
- a) 16 yaşda; b) 35 yaşda sürücünün reaksiya müddəti neçə salisedir?
 c) Hansı yaşda sürücünün reaksiya müddəti 25 salisedən çoxdur?

Salisə zaman ölçü vahididir və saniyənin $\frac{1}{60}$ -nə bərabərdir

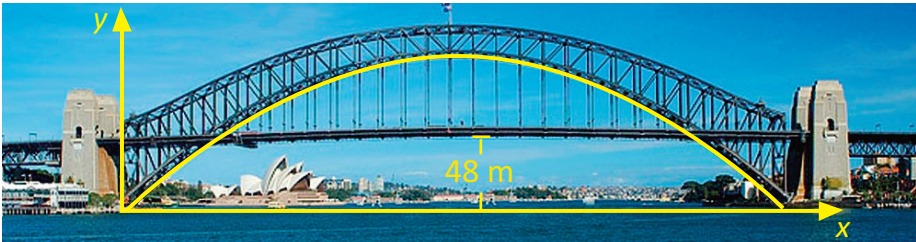
LAYIHƏ

- 22 > Qutu (ağız açıq) düzəltmək üçün düzbucaqlı formada olan karton təbəqənin küncələrindən kvadrat formalı hissələr kəsilib çıxarılır və şəkildə göstərilən qırıq xətlər boyunca qatlanıb yapışdırılır.

Ölçüləri $22\text{ sm} \times 30\text{ sm}$ olan kartondan qutu hazırlanmalıdır.



- a) Kəsilib çıxarılan kvadrat hissələrin tərəfinin uzunluğunun (sm-lə) hansı tam qiymətində qutunun həcmi 1200 sm^3 olar?
 b) Kəsilib çıxarılan kvadrat hissələrin tərəfinin uzunluğunun (sm-lə) hansı tam qiymətlərində qutunun həcmi ən azı 1200 sm^3 olar?
- 23 > Şəkildəki körpü tağının formasını seçilmiş koordinat sistemində $y = -0,002x^2 + 1,06x$ kimi kvadratik funksiya ilə göstərmək olar. Burada x soldakı dayaqdan olan məsafəni, y isə tağın su səviyyəsindən hündürlüyünü (m-lə) göstərir. Sol dayaqdan hansı məsafələrdə tağ yolun üstündə yerləşir?



- 24 > Topa vurulmuş zərbədən sonra topun hərəkətini $h(x) = -5x^2 + 20x + 1$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada h topun x saniyədən sonra qalxdığı hündürlüyü (metrlə) göstərir. a) Top hansı zaman kəsiyində 16 m-dən daha yüksəkdə olacaq? b) Top neçə saniyə havada qalacaq?
- 25 > **Ümumiləşdirmə.** Kvadratik funksiyanın qrafikindən və diskriminantdan istifadə etməklə $ax^2 + bx + c \geq 0$ bərabərsizliyinin həllini aradsıran.
 a) Hansı hallarda bütün həqiqi ədədlər bərabərsizliyin həllidir?
 b) Hansı hallarda bərabərsizliyin həlli bir həqiqi ədəddir?
 c) Hansı hallarda müəyyən həqiqi ədədlər çoxluğu bərabərsizliyin həllidir, müəyyən həqiqi ədədlər çoxluğu isə həlli deyil?

LAYIHƏ

- 26 > Hündürlüyü 3,5 m, eni 2,2 m olan maşın arkanın (tağın) altından keçməlidir. Koordinat sistemini şəkildə göstərildiyi kimi seçməklə tağı

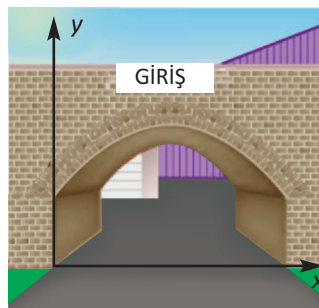
$y = -0,3x^2 + 1,8x + 1,1$ funksiyası ilə model-ləşdirmək olar (x və y metr).

a) Avtomobil arkadan keçə bilərmə? İzah edin.

b) Hündürlüyü 3,5 m olan maşının arkadan keçə bilməsi üçün onun eni ən çoxu nə qədər olmalıdır?

c) eni 2,2 m olan maşının arkadan keçə

bilməsi üçün onun hündürlüyü ən çoxu nə qədər ola bilər?



- 27 > Bərabərsizlikləri uyğun funksiyanın qrafikini qurmaqla həll edin.

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$

b) $x^2 + 2x - 3 < 0$

c) $x^2 + 5x + 4 \geq 0$

d) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

e) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

f) $x^2 - 4x < 0$

g) $-x^2 + 3x \geq 0$

h) $-x^2 + 9 \leq 0$

i) $-4x^2 - 16 > 0$

- 28 > Bərabərsizlikləri iki üsulla həll edin.

1) Kvadratik funksiyanın və xətti funksiyanın qrafiklərini qurmaqla.

2) Sadələşdirdikdə alınan kvadratik funksiyanın qrafikini qurmaqla.

a) $x^2 \leq 15 - 2x$

b) $x^2 + 4x > 3 + 2x$

c) $13x - 7 \leq -2x^2$

d) $x^2 + 4x + 3 < 2x + 1$

- 29 > Tibbdə kütlə indeksi adlanan göstəricidən normal kütləni müəyyənləşdir-

mək üçün istifadə edilir. Kütlə indeksi 17-24 arasında olan şəxslərin kütləsi

normal hesab edilir. Kütlə indeksi $I = \frac{m}{h^2}$ düsturu ilə müəyyən edilir. m bu-
rada kütləni (kq), h isə boyu (m-lə) göstərir.

a) Boyu 1 m 50 sm olan şəxsin kütləsi nə qədər olmalıdır ki, kütlə indeksi 24-
dən az olsun.

b) Kütləsi 54 kq olan şəxsin boyu ən azı nə qədər olmalıdır ki, kütlə indeksi
24-dən çox olmasın.

- 30 > Tahir bağlarında göyərtiləri akmək üçün düzbucaqlı formasında sahə hasarlaşdır-
ma istəyir. Onun hasar üçün 70 m uzunluğunda materialı var. Tahir göyərtiləri
sahəsinin 300 m²-dən çox olmasını istəyirsə, bu sahə hansı ölçülərdə
olmalıdır?

LAYIHƏ

7-5

İntervallar üsulu

1. Verilmiş bərabərsizliyə uyğun tənliyi yazın və köklərini tapın.
2. Ədəd oxu üzərində dəyişənin bu qiymətlərinə uyğun nöqtələri qeyd edin. Bu nöqtələrə bərabərsizliyin sərhəd nöqtələri deyəcəyik.
3. Sərhəd nöqtələrinin yaratdığı intervallardan ardıcıl olaraq sınaq nöqtələri seçin və bu intervallardan hansılarının bərabərsizliyin həllər çoxluğuna aid olduğunu müəyyən edin.

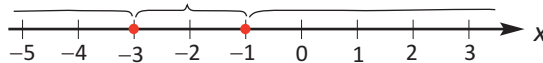
Nümunə. $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Bərabərsizliyi həll etmək üçün:

1. $x^2 + 4x + 3 = 0$ tənliyinin köklərini tapmaq:

$$(x+1)(x+3)=0; x_1 = -1; x_2 = -3.$$

2. Ədəd oxu üzərində $x_1 = -1$; $x_2 = -3$ nöqtələrini qeyd edək. Göründüyü kimi, sərhəd nöqtələri ədəd oxunu 3 intervala ayırır.



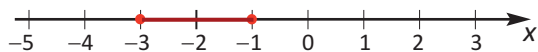
3. Hər intervaldan bir qiymət, sınaq qiymətləri seçək $(-5; -2; 0)$ və bərabərsizliyi yoxlayaq.

Interval	$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; +\infty)$
Sınaq nöqtəsi	-5	-2	0
Sol tərəfə daxil olan ifadənin qiyməti	$(-5)^2 + 4 \cdot (-5) + 3 = 8$	$(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1$	$(0)^2 + 4 \cdot (0) + 3 = 3$
$x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ödəyirmi	Yox	Hə	Yox

$x^2 - 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyi $(-3; -1)$ intervalında və sərhəd nöqtələrində ödənilir.

Cavab:

$$-3 \leq x \leq -1$$



Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Bərabərsizlikləri intervallar üsulu ilə həll edin.

a) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

c) $x^2 - 3x + 1 \leq 29$

e) $2x^2 + 5x \geq 7$

g) $x^3 - 4x < 0$

i) $x(x+1)(x-2) > 0$

b) $3x^2 - x - 2 < 0$

d) $x^2 - 4x \geq 5$

f) $2x^2 + 3x > 5$

h) $x^3 - 9x \geq 0$

j) $x(x+3)(x-2) > 0$

LAYIHƏ

Araşdırma 1. Sol tərəfi $(x - c)$ şəklində vuruqların hasili, sağ tərəfi 0 olan bərabərsizliklərin həlli zamanı intervallarda işarələrin dəyişməsi.

Nümunə. $(x + 2)(x - 1)(x - 4) < 0$

$(x + 2)(x - 1)(x - 4) = 0$ tənliyindən $x = -2, x = 1, x = 4$ tapılır. Sərhəd nöqtələrini ədəd oxu üzərində qeyd edək və hər bir intervalda (sağdan 1-cidən başlayaraq) $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$ ifadəsinin işarəsini müəyyənənləşdirək.

$x = -2$ nöqtəsindən keçdikdə $(x + 2)$ vuruğu işarəni dəyişir

$x = 1$ nöqtəsindən keçdikdə $(x - 1)$ vuruğu işarəni dəyişir

$x = 4$ nöqtəsindən keçdikdə $(x - 4)$ vuruğu işarəni dəyişir

Sağdan birinci intervalda hər bir vuruq müsbət olduğuna görə $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$ ifadəsinin işarəsi müsbətdir.



Göründüyü kimi, bu halda ədəd oxu üzərində bir intervaldan növbəti intervala keçdikdə işarələr növbələnir.

İfadənin sıfırdan kiçik olduğu, yəni mənfi işarəli olduğu aralıqlar verilmiş bərabərsizliyin həllidir. Cavab: $(-\infty; -2) \cup (1; 4)$

Bərabərsizliyin sağ tərəfi sıfır, sol tərəfinə $(x - c_k)$ şəklində tək dərəcədən vuruqların hasili şəklində olarsa, onda sağdan birinci intervalda hasilin işarəsi müsbətdir və intervallarda işarələr növbələnir.

Araşdırma 2. Sağ tərəfi sıfır, sol tərəfinə $(x - c)^{2n}$ şəklində cüt dərəcədən vuruq daxil olan bərabərsizliklər və intervallarda işarələrin dəyişməsi.

Nümunə. $(x - 4)(x + 3)(x - 1)^2 \geq 0$

1) Sərhəd nöqtələrini tapaq. $(x - 4)(x + 3)(x - 1)^2 = 0$, $x = 4, x = -3, x = 1$

2) Sərhəd nöqtələrini ədəd oxu üzərində qeyd edək.

$x = -3$ nöqtəsindən keçdikdə $(x + 3)$ vuruğu işarəni dəyişir

$x = 1$ nöqtəsindən keçdikdə $(x - 1)^2$ vuruğu işarəni dəyişmir

$x = 4$ nöqtəsindən keçdikdə $(x - 4)$ vuruğu işarəni dəyişir

Sağdan birinci intervalda hər bir vuruq müsbət olduğuna görə $(x - 4)(x + 3)(x - 1)^2$ ifadəsinin işarəsi müsbətdir.



$(x - 1)^2$ vuruğuna görə $x = 1$ nöqtəsinin sağ və sol ətrafındakı aralıqlarda işarə təkrarlanır.

Bərabərsizlik ifadənin sıfırdan böyük olduğu, yəni müsbət işarəli olduğu aralıqlarda və sərhəd nöqtələrində ödənilir. Cavab $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$

Sağ tərəfi sıfır, sol tərəfinə $(x - c)^{2n}$ şəklində cüt dərəcədən daxil olan vuruq varsa, c sərhəd nöqtəsinin sağında və solunda işarə təkrarlanır.

2 > Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $(x + 3)(x - 8)(x - 20) < 0$

c) $(x^2 - 9)(x + 4)(x - 5) \leq 0$

e) $x^3 + 2x^2 - 15x \geq 0$

g) $(x - 4)^2 \cdot (x^2 - 8x) < 0$

i) $5x(x - 2)(x - 6)^2 \geq 0$

b) $(x - 3)(x + 2)(x - 1) \geq 0$

d) $(x^2 - 2x)(x - 6) < 0$

f) $(x + 5)^2 \cdot (2x - x^2) \geq 0$

h) $(4x - x^3) \cdot (25 - x^2) < 0$

j) $-3(x + 4)^2(x - 5) \leq 0$



Rasional bərabərsizliklərin intervallar üsulu ilə həlli

1. Bərabərsizliyi bir tərəfində rəasional ifadə, digər tərəfində sıfır olan ekvivalent bərabərsizlik şəklində yazın.
2. Dəyişənin rəasional ifadənin məxrəcini və surətini sıfıra çevirən qiymətlərini tapın. Bu qiymətlər verilən bərabərsizliyin sərhəd nöqtələridir.
3. Sərhəd nöqtələrinin yaratdığı intervallardan ardıcıl olaraq sınaq nöqtələri seçin və bu intervallardan hansılarının bərabərsizliyin həllər çoxluğuna aid olub-olmadığını yoxlayın.

Nümunə

$$\frac{x+2}{x-4} \leq 3 \quad \text{verilən bərabərsizlik}$$

$$1) \quad \frac{x+2}{x-4} - 3 \leq 0 \quad \text{bərabərsizliyin hər iki tərəfinə } -3 \text{ əlavə edilir}$$

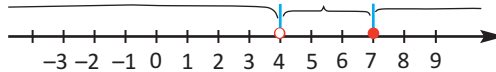
$$\frac{-2x+14}{x-4} \leq 0 \quad \text{sadələşdirilir}$$

$$\frac{-2(x-7)}{x-4} \leq 0 \quad \text{ortaq vuruq mötərizə xaricinə çıxarılır}$$

$$\frac{x-7}{x-4} \geq 0 \quad \text{hər iki tərəf } (-2)\text{-yə bölünür və bərabərsizliyin işarəsi əksinə dəyişir}$$

2) Surət və məxrəcinin sıfırlarını tapaq: $x-7=0$, $x=7$, $x-4=0$, $x=4$

3) $x=4$ və $x=7$ nöqtələrini ədəd oxu üzərində qeyd etməklə, onu üç intervala ayırıq: $(-\infty; 4)$, $(4; 7)$ və $(7; +\infty)$



Hər intervaldan sınaq nöqtəsi seçib, bərabərsizliyi yoxlayaq.

$(-\infty; 4)$ intervalı

$$x=0 \quad \frac{x+2}{x-4} \leq 3$$

$$\frac{0+2}{0-4} \leq 3; \quad -\frac{1}{2} \leq 3$$

doğrudur

$(4; 7)$ intervalı

$$x=5 \quad \frac{x+2}{x-4} \leq 3$$

$$\frac{5+2}{5-4} \leq 3; \quad \frac{7}{1} \leq 3$$

doğru deyil

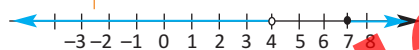
$(7; +\infty)$ intervalı

$$x=8 \quad \frac{x+2}{x-4} \leq 3$$

$$\frac{8+2}{8-4} \leq 3; \quad \frac{10}{4} \leq 3$$

doğrudur

$x=4$ nöqtəsində uyğun ifadənin mənası olmadığından bu nöqtə həllər çoxluğuna daxil ola bilməz. $x=7$ isə bu çoxluğa daxildir.



Beləliklə, $\frac{x+2}{x-4} \leq 3$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu $(-\infty; 4)$ və $[7; +\infty)$ aralıqlarının birləşməsidir. Cavab: $(-\infty; 4) \cup [7; +\infty)$

Qeyd: $\frac{x-7}{x-4} \geq 0$ bərabərsizliyinə intervallarda işarələrin dəyişməsi qaydasının tətbiqi ilə də verilmiş bərabərsizliyi həll etmək olar.

- 3 > Əvvəlcə tənlikləri həll edin, sonra isə uyğun bərabərsizlikləri intervallar üsulu ilə həll edin.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{10}{x-5} = 5 \\ \frac{10}{x-5} < 5 \\ \frac{10}{x-5} > 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } \frac{8}{a+1} = 4 \\ \frac{8}{a+1} > 4 \\ \frac{8}{a+1} < 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c) } \frac{z+2}{z-6} = -3 \\ \frac{z+2}{z-6} \leq -3 \\ \frac{z+2}{z-6} \geq -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d) } \frac{w-8}{w+6} = 2 \\ \frac{w-8}{w+6} \leq 2 \\ \frac{w-8}{w+6} \geq 2 \end{array}$$

- 4 > Hədləri sol tərəfə keçirin və vuruqlarına ayırmaqla bərabərsizlikləri həll edin.

a) $x^3 \leq 16x$ b) $(2x-6)^2 \leq x^2$ c) $(x^2+x-3)^2 < (x^2-x-5)^2$

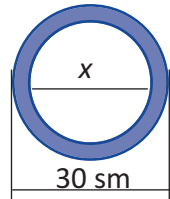
- 5 > Həll edin.

a) $|2x-3| > |6-x|$ b) $|3x-5| < |x-3|$ c) $|2x-1| < |x+1|$

Göstəriş: $|p(x)| < |g(x)|$ tipli bərabərsizlikləri ona ekvivalent olan $p^2(x) < g^2(x)$ bərabərsizliyi ilə əvəz edin və hədləri sol tərəfə keçirib, vuruqlara ayırmaqla alınan bərabərsizlikləri həll edin.

- 6 > Binaya su borusu çəkilməsi planlaşdırılır. Borunun xarici diametri 30 sm olmaqla en kəsiyinin sahəsi 60 sm^2 -dan az, 90 sm^2 -dan çox olmamalıdır.

a) Məsələnin şərtinə uyğun kvadrat bərabərsizlik yazın və həllini qrafik təsvir edin.



b) Su borusunun daxili diametrinin mümkün ölçülərini müəyyən edin. Nəticəni ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın. $E \approx 3$ qəbul edin.

- 7 > Heydər yay tətilində mebel mağazasında atasına kömək edir. Onlar hər stolun daşınması üçün 10 manat və stollar üçün istehsalçı şirkətə hər həftə sabit olaraq 1800 manat ödəyirlər. Biri x manata təklif edildikdə həftədə $(120-x)$ sayda stol satılır. Onlar stolun birini neçə manata təklif etsələr, gəlirlə işləyərlər? Stollar hansı qiymətə satılsa, həftəlik gəlir maksimum olar? Bu halda həftədə neçə stol satılmış olur?

- 8 > Bərabərsizlikləri həll edin.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{x-3}{x+7} < 0 \\ \text{d) } \frac{(x-1)(x^2-36)}{x+1} < 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } \frac{2x-10}{x+8} > 0 \\ \text{e) } \frac{x}{x-5} \geq \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c) } \frac{x}{2x-5} \leq 0 \\ \text{f) } \frac{3x-1}{2x+5} \geq 3 \end{array}$$

- 9 > k -nın hansı qiymətlərində verilmiş tənliyin: a) həqiqi kökü yoxdur; b) iki müxtəlif həqiqi kökü var?

1) $3x^2 + kx + 3 = 0$

2) $kx^2 - 4x + k - 3 = 0$

7-6

Sadə irrasional bərabərsizliklər

Radikal işarəsi altında dəyişəni olan bərabərsizliklərə irrasional bərabərsizliklər deyilir. İrrasional bərabərsizliklərin həlli kökün, bərabərsizliklərin xassələrindən istifadə etməklə rəasional bərabərsizliklərin və ya onların sisteminin həllinə gətirilir. Dəyişəni kvadrat kök işarəsi altında olan sadə irrasional bərabərsizliklərin həllinə baxaq.

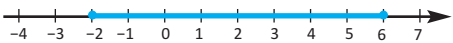
1. Nümunə. $\sqrt{2x-4} - 1 < 3$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.

1. Kvadrat kökaltı ifadə mənfi ola bilməz. Deməli, dəyişənin mümkün qiymətləri $2x - 4 \geq 0$ şərtindən tapılmalıdır. Buradan hər iki tərəfə 4 əlavə etməklə $2x \geq 4$, hər iki tərəfi 2-yə bölməklə $x \geq 2$ alırıq.

2. Verilmiş bərabərsizliyin hər iki tərəfinə 1 əlavə etməklə $\sqrt{2x-4} < 4$ şəklində yazaq və hər iki tərəfi kvadrata yüksəldək: $2x - 4 < 16$. Buradan $2x < 20$, $x < 10$ alırıq.

3. Deməli, verilmiş bərabərsizlik $x \geq 2$ və $x < 10$ olduqda ödənilir. Yəni, $2 \leq x < 10$.

4. Həllin ədəd oxu üzərində təsviri: 

5. **Cavab:** bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[2; 10]$ aralığıdır.

Göründüyü kimi, verilmiş bərabərsizliyin həlli $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 2x - 4 < 16 \end{cases}$ sisteminin həllinə gətirilir.

2. Nümunə. $\sqrt{x-3} \geq 2$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.

1. Dəyişənin mümkün qiymətlərini tapaq: $x - 3 \geq 0$, $x \geq 3$

2. Verilmiş bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək: $x - 3 \geq 4$, $x \geq 7$.

3. $x \geq 7$ olduqda aydındır ki, $x \geq 3$ bərabərsizliyi də ödənilir. Deməli, verilmiş bərabərsizlik $x \geq 7$ olduqda doğrudur.

4. Həllin ədəd oxu üzərində təsviri: 

5. **Cavab:** bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[7; +\infty]$ aralığıdır.

LAYIHƏ

3. Nümunə. $\sqrt{x-4} > -2$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.

Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x - 4 \geq 0$, yəni $x \geq 4$ olmalıdır. Aydındır ki, x -in 4-dən kiçik olmayan istənilən qiymətində verilmiş bərabərsizlik ödənilir. Deməli, verilmiş bərabərsizliyin həlli $x \geq 4$ olur.

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:



Cavab: bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[4; +\infty)$ aralığıdır.

İrrasional bərabərsizliyin həll addımları:

1. Kökün dərəcəsi cüt olarsa, kökalı ifadənin mənfi olmayan qiymətlər alması şərtindən dəyişənin mümkün qiymətləri tapılır.
2. Radikal təklənir, hər iki tərəfin müsbət olması şərti daxilində kvadrata yüksəldilir və alınan bərabərsizlik həll edilir.
3. 1-ci və 2-ci addımda alınan həllərin ortaq hissəsi müəyyən edilir.
4. Həll ədəd oxu üzərində təsvir edilir.
5. Bərabərsizliyin həllər çoxluğu yazılır.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$ ədədlərindən hansılar verilmiş bərabərsizliyi ödəyir?

a) $\sqrt{x-1} < 2$

b) $\sqrt{3-x} > 1$

2 > Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\sqrt{x-4} < 3$

b) $\sqrt{2x-4} > 1$

c) $\sqrt{2x-3} < 1$

d) $\sqrt{x-3} - 2 < 2$

e) $\sqrt{x-5} - 1 > 3$

f) $5 - \sqrt{x-3} < 2$

3 > Dəyişənin mümkün qiymətlərini göstərin. Bərabərsizliyin həllinin olub-olmadığı haqqında fikir yürüdün. Həlli varsa, bu həlli yazın

a) $\sqrt{x-3} < 0$

b) $\sqrt{3-x} < -1$

c) $\sqrt{2x-6} \leq 0$

d) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > 2$

e) $\sqrt{x-4} > -1$

f) $\sqrt{2x-5} > -2$

4 > Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\sqrt{x^2-9} < 4$

b) $\sqrt{4-x^2} > \sqrt{3}$

c) $\sqrt{x^2-3x} > 2$

d) $\sqrt[4]{x-1} \leq \sqrt{2}$

e) $\sqrt[4]{x-2} > 1$

f) $\sqrt[4]{2x-6} \leq \sqrt{8}$

5 > Bərabərsizliyi həll edin.

a) $\sqrt[3]{x-1} > 2$

b) $\sqrt[3]{2-x} \leq 1$

c) $\sqrt[3]{2x+1} + 2 < 1$

Göstəriş: Radikalı təkləyib hər iki tərəfi 3-cü dərəcəli qüvvətə yüksəltməklə eynigüclü bərabərsizliyin həllinə gətirin.

LAYİHƏ



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1 > Bərabərsizlikləri intervallar üsulu ilə həll edin.

a) $-x^2 - 2x + 48 < 0$

b) $3x^2 + 2x - 5 < 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

d) $x^2 + 2x - 15 \leq 0$

e) $24 + 11x + x^2 > 0$

f) $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$

g) $x^2 - 2x + 3 < 0$

h) $x^2 - 2x + 3 > 0$

i) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

2 > Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\frac{3x+1}{2x-4} > 0$

b) $\frac{2x-1}{5x+3} \geq 0$

c) $\frac{x-3}{x+3} \leq 5$

d) $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} < 0$

e) $x - 17 \geq \frac{60}{x}$

f) $\frac{x^2-x-6}{x-3} \geq 1$

g) $\frac{x-2}{x-1} < 1$

h) $\frac{x^2+x-1}{x+3} < 1$

i) $\frac{x^2+2}{x+4} \leq 3$

j) $|2x-3| + 5 < 6$

k) $|5x+3| - 4 \geq x$

l) $|x+5| < |6x-10|$

3 > Mağazanın hər kvadrat metr sahəsi üçün ödənilən aylıq kirayə haqqı (r) ilə əldə edilən gəlir (min manatla) $P(r)$ arasındakı asılılıq təxmini olaraq $P(r) = -6r^2 + 45r - 39$ kimidir. Aşağıdakı tənliyi və bərabərsizlikləri həll edin, hər birini real situasiyaya uyğun təqdim edin.

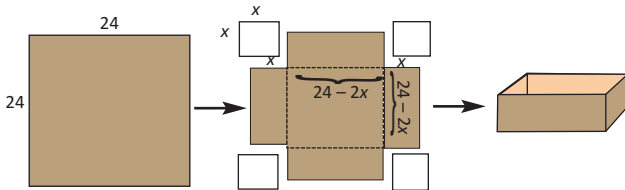
$-6r^2 + 45r - 39 = 0$

$-6r^2 + 45r - 39 > 0$

$-6r^2 + 45r - 39 \geq 15$

$-6r^2 + 45r - 39 < 15$

4 > Ölçüləri 24 sm $\times$ 24 sm olan kvadrat formalı karton təbəqənin künclərindən tərəfi x sm ola kvadrat hissələr kəsilib çıxarılır və şəkildə göstəriləndi kimi qırıq xətlər boyunca qatlanıb yapışdırılaraq ağzıaçıq qutu düzəldilir. x -in hansı tam qiymətlərində bu qutunun həcmi 800 sm³-dan çox olar? Bu qiymətlərdən hansında həcm ən böyük olur?

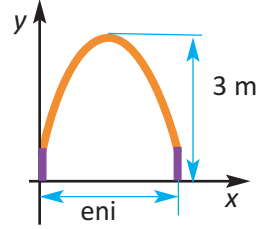


5 > **Açıq tipli sual.** $(x+1)(x-4) < 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu müəyyən etmək üçün hansı üç nöqtəni seçərdiniz?

6 > Cavid $2x^2 + 12x > 2x + 12$ bərabərsizliyinin həllini $2x(x+6) > 2(x+6)$, $x > 2$ kimi yazmışdır. Cavidin səhvini izah edin.

7 > $x^2 + 6x - 8 \leq 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \leq 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğundan 2 dəfə "genişdir" fikri doğrudurmu?

- 8 > Bağ evinin girişi təg şəkillidir. Koordinat sistemini şəkildə göstəriləyi kimi seçməklə təg $g(x) = -0,6x^2 + bx + 0,6$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Girişin hündürlüyü 3 m isə, eni neçə metr olar? Hündürlüyü 2,4 m olan maşının giriş qapısından keçə bilməsi üçün eni ən çoxu nə qədər olmalıdır?



- 9 > Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\frac{2}{2-x} \leq 3-x$

b) $\frac{1}{x-1} > \frac{-1}{x+2}$

c) $\frac{2x^2+6x-8}{2x^2+5x+3} < 1$

- 10 > Satıcılardan biri aylıq 200 manat maaş, üstəgəl ümumi satışın 2%-i qədər əlavə alır. Digər satıcının aylıq maaşı isə yalnız satışın 10%-i qədər hesablanır. Neçə manatlıq satış reallaşdırılsa, ikinci satıcı birincidən çox qazanmış olar?
- 11 > Bank hesabına 5000 manat pul 8% sadə faiz artımı ilə qoyulmuşdur. Daha neçə manat pul 10% sadə faiz artımı ilə qoyularsa, illik gəlir 800 manatla 950 manat arasında olar?
- 12 > Köpək balıqlarının normal yaşaması üçün suyun temperaturu 5°C -dən 18°C -yə qədər olmalıdır. Köpək balıqlarının yaşaması üçün əlverişli olmayan su temperaturunu bərabərsizliklərlə yazın.
- 13 > İki tam ədədin cəmi 20-yə bərabərdir, onların kvadratları cəmi isə 208-dən kiçikdir. Bu ədədlər cütünü müəyyən edin.
- 14 > Düzbucaqlı şəkildə olan ipək parça uzunluğu enindən 5 dəfə çox olmaqla kəsilir. Parçanın sahəsinin ən azı 500 sm^2 , ən çoxu 720 sm^2 olması şərtlə, eninin mümkün ölçülərini müəyyən edin.
- 15 > Aslan topu 15 m/san sürətlə hündürlüyü 30 m olan binanın damından yuxarı atdı. Topun yerdən h məsafəsi $h(t) = -5t^2 + 15t + 30$ düsturu ilə hesablanı bilər. Top neçə saniyədən sonra yerdən:
a) 40 m-dən yüksək, 50 m-dən aşağı hündürlükdə;
b) 12 m hündürlükdə olacaq?
- 16 > a -nın hansı qiymətlərində $y = ax^2 + 2x + 1$ parabolasının absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri $x = 1$ nöqtəsindən müxtəlif tərəflərdə yerləşir?
- 17 > Bərabərsizliyi ödəyən tam ədədlərin cəmini tapın.
a) $\frac{x^2 - 4x}{|x - 3|} \leq 0$ b) $\frac{|x + 1|}{x^2 - 9} < 0$
- 18 > a -nın hansı qiymətlərində $ax^2 - ax + 1 > 0$ bərabərsizliyi x -in bütün qiymətləri üçün doğrudur?

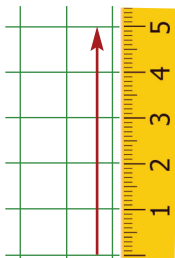
LAYIHƏ

8

Vektorlar

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

- ✓ Koordinat müstəvisində vektorları;
- ✓ Komponentləri ilə verilmiş vektorun uzunluğunu və istiqamətini müəyyən etməyi;
- ✓ Vektorların toplanması və çıxılmasını;
- ✓ Vektorun ədədə vurulması;
- ✓ Komponentləri ilə verilmiş vektorlar üzərində əməlləri;
- ✓ Vektorların tətbiqi ilə məsələ həll etməyi.



Praktik məşğələ.

Verilən miqyasa və istiqamətə görə yerdəyişmələrə uyğun düz xətt parçalarını çəkin. İstiqaməti oxla göstərin.

25 km şimala	20 m sağa	4 km sola
1 sm : 5 km	1 sm : 5 m	1 sm : 1 km
250 m yuxarıya	100 m aşağıya	15 km şimala
1 sm : 25 m	1 sm : 20 m	1 sm : 3 km

LAYIHƏ

8-1

Vektorlar

Bir çox kəmiyyətlər, məsələn, kütlə, uzunluq, zaman, temperatur və s. yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə edilir. Bu cür kəmiyyətlər skalyar kəmiyyətlər adlanır. Bəzi kəmiyyətlər isə, məsələn, yerdəyişmə, sürət, təcil, qüvvə və s. təkcə ədədi qiyməti ilə deyil, həm də istiqaməti ilə müəyyən edilir. Bu cür kəmiyyətlərə vektorial kəmiyyətlər deyilir. Yerdəyişmə vektorial kəmiyyətlərə ən sadə nümunədir. Cismin A nöqtəsindən B nöqtəsinə yerdəyişməsi A-dan B-yə doğru yönəlmiş parça ilə - vektorla göstərilir.

Vektor istiqamətlənmiş düz xətt parçası ilə təsvir olunur. Vektoru göstərən parçanın uzunluğuna **vektorun uzunluğu və ya modulu** deyilir.

Vektor başlanğıc və son nöqtəsi adlandırılmaqla işarə edilir. Məsələn, $\vec{AB}$ vektoru, burada A vektorun başlanğıc, B isə son nöqtəsidir. Vektor kiçik hərflərlə də işarə edilir, məsələn $\vec{a}$ vektoru.

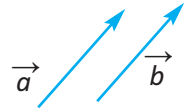
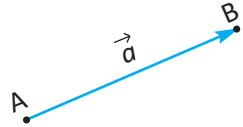
$\vec{a}$ vektorunun uzunluğu $|a|$ kimi işarə olunur.

• iki vektorun istiqamətləri eyni, uzunluqları bərabər olarsa, bu vektorlar bərabər vektorlar adlanır.

Şəkildəki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları bərabər vektorlardır: $\vec{a} = \vec{b}$

• iki vektorun istiqamətləri əks, uzunluqları bərabər olarsa, bu vektorlar əks vektorlar adlanır. Şəkildəki $\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorları əks vektorlardır:

$$|\vec{p}| = |\vec{q}|, \quad \vec{p} = -\vec{q}$$



$\vec{AB}$ vektoru ilə $\vec{BA}$ vektoru əks vektorlardır: $\vec{AB} = -\vec{BA}$

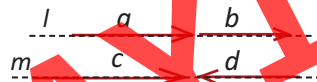
Başlanğıc və son nöqtələri üst-üstə düşən vektor **sıfır vektor** adlanır və 0 kimi işarə edilir. Sıfır vektorunun uzunluğu sıfıra bərabərdir, istiqaməti isə qeyri-müəyyəndir.

Vektorları təsvir edən istiqamətlənmiş parçalar paraleldirsə və ya bir düz xətt üzərindədirsə, onlara **kollinear vektorlar** deyilir. Kollinear vektorlar eyni istiqamətli və ya əks istiqamətli ola bilərlər.

Vektorların eyni istiqamətli olması $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ kimi, əks istiqamətli olması isə $\vec{p} \updownarrow \vec{q}$ kimi yazılır.

Şəkildə $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ və $\vec{d}$ vektorları kollinear vektorlardır.

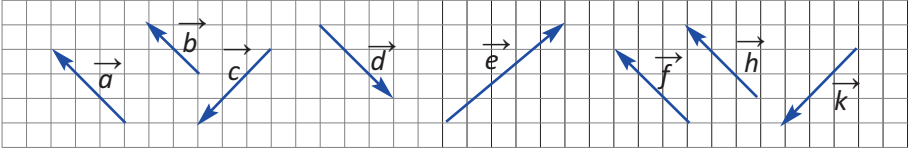
Burada $l \parallel m$.

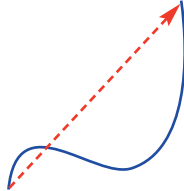


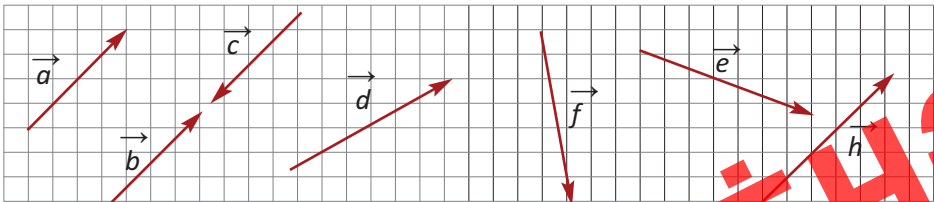
LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Hansı halda vektorial, hansı halda skalyar kəmiyyətdən danışmaq olar?
 - 1) Avtomobil şərqə doğru 60 km/saat sürətlə hərəkət edir.
 - 2) Sevinc əlindəki topu üfüqlə 30° bucaq əmələ gətirən istiqamətdə 100 N qüvvə tətbiq etməklə irəli atdı.
 - 3) Həsənin boyu 1 m 75 sm, kütləsi 72 kq-dır.
 - 4) Paraşütçü 20 km/saat sürətlə təyyarədən aşağıya doğru tullandı.
- 2 > Hansı vektorial kəmiyyətdir?
 - 1) 5,6 kq
 - 2) 3,2 m/san, şimal-şərq istiqamətində
 - 3) 9,81 m/san², aşağı
 - 4) $8,8 \times 10^{-3} m^3$
- 3 > Şəklə görə tapşırıqları yerinə yetirin.



- a) Uzunluğu $\vec{a}$ vektoru ilə eyni olan bütün vektorları yazın.
 - b) İstiqaməti $\vec{a}$ vektoru ilə eyni olan vektorları yazın.
 - c) $\vec{a}$ vektoruna bərabər olan bütün vektorları yazın.
 - d) $\vec{a}$ vektoruna əks vektoru yazın.
- 4 > a) Şəkildə velosipedçinin getdiyi yol mavi xətlə göstərilmişdir. Qırmızı xətlə hansı kəmiyyət göstərilmişdir?
 
 - b) Kütlə və çəki kəmiyyətlərindən hansı vektorial, hansı skalyar kəmiyyətdir? Fikirlərinizi izah edin.
- 5 > $\vec{b}$ vektoru ilə kollinear olan vektorları seçib yazın.



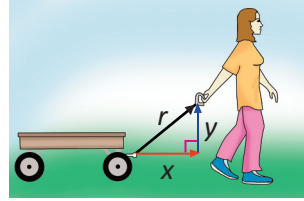
- 6 > Dəftərinizdə çəkin: a) iki kollinear vektor; b) iki əks vektor; c) iki bərabər vektor.
- 7 > Rasimin çəkdiyi şəkildə yerdəyişmə vektoruna uyğun parçanın uzunluğu 6 sm-dir. Şəkil 1 sm : 250 m miqyası ilə təsvir edilmişdirsə, real yerdəyişmə nə qədərdir?

8-2

Dekart koordinat müstəvisində vektorlar

Araşdırma. Nailənin arabaya tətbiq etdiyi qüvvə arabani irəliyə aparan və arabani yuxarı dartaan komponentlərə ayrılır. Bu qüvvələr şəkildə hansı hərflərlə işarə edilmişdir?

Nailənin arabaya tətbiq etdiyi qüvvəni hesablamaq üçün fizikada hansı düsturdan istifadə edilir?

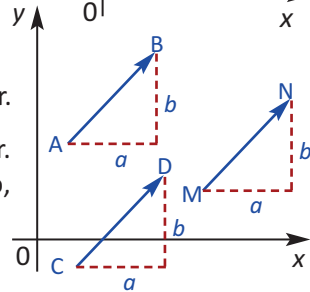
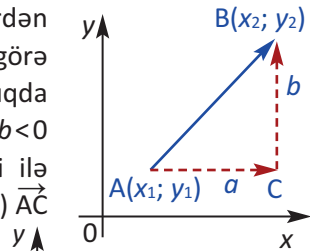


Vektorun Dekart koordinat müstəvisində komponentləri ilə ifadə edilməsi

Koordinat müstəvisi üzərində $\vec{AB}$ vektorunu nəzərdən keçirək. Vektorun B son nöqtəsi A başlanğıc nöqtəsinə görə Ox oxu boyunca $|a|$ vahid ($a > 0$ olduqda sağa, $a < 0$ olduqda sola), Oy oxu boyunca $|b|$ vahid ($b > 0$ olduqda yuxarı, $b < 0$ olduqda aşağı) yerini dəyişmişdir. a və b ədədləri ilə müəyyən olunan (həm uzunluğu, həm də istiqaməti ilə) $\vec{AC}$ və $\vec{CB}$ vektorları $\vec{AB}$ vektorunun komponentləridir.

Koordinat müstəvisi üzərində vektor $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ kimi yazılır. $\langle a; b \rangle$ yazılışı vektorun komponentlərlə yazılışdır.

Bərabər vektorların uyğun komponentləri bərabərdir. Tərsinə, vektorların uyğun komponentləri bərabərdirsə, onda vektorlar bərabərdir. Şəkildə $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{MN}$



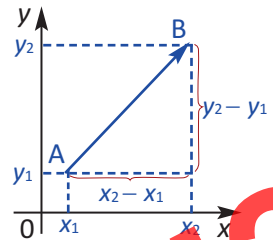
Hər hansı $\vec{AB}$ vektoru verildikdə başlanğıcı müstəvinin istənilən nöqtəsində olmaqla bu vektora bərabər bir vektor qurmaq olar. Deməli, fərqli başlanğıc nöqtələri seçməklə verilən vektora bərabər sonsuz sayda vektor qurmaq olar.

Başlanğıc nöqtəsi $A(x_1; y_1)$, son nöqtəsi isə $B(x_2; y_2)$ olan $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ vektorunu bu nöqtələrin koordinatlarına görə komponentləri ilə ifadə etmək olar.

$x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ olduğundan:

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle = \langle a; b \rangle$$

Burada a və b -yə vektorun koordinatları da deyilir.

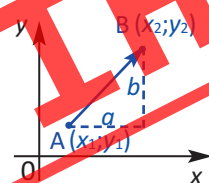


Vektorun uzunluğu. Vektorun uzunluğunu başlanğıc və son nöqtələrinin koordinatlarına görə iki nöqtə arasındakı məsafə düsturundan istifadə etməklə tapmaq olar:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Komponentləri ilə verilmiş $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ vektorunun uzunluğu:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



LAYIHƏ

- 1. Nümunə.** Başlangıç nöqtəsi $(-2; 3)$, son nöqtəsi $(3; 7)$ olan $\vec{z}$ vektorunu $\vec{z} = \langle a; b \rangle$ şəklində yazın.

Həlli. $\vec{z}$ vektorunun komponentləri ilə $\vec{z} = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle$ yazılışında uyğun koordinatları nəzərə alsaq:

$$\vec{z} = \langle 3 - (-2); 7 - 3 \rangle = \langle 5; 4 \rangle \quad \text{Cavab: } \vec{z} = \langle 5; 4 \rangle$$

- 2. Nümunə.** $\vec{a} \langle 3; 6 \rangle$ vektorunun başlangıç nöqtəsi $(2; 3)$ -dür. Bu vektorun son nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

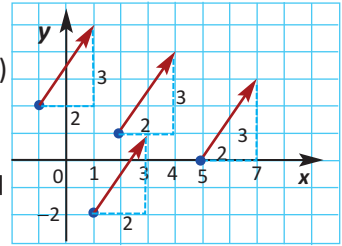
Həlli. $\vec{a}$ vektorunun son nöqtəsinin koordinatlarının $(x; y)$ olduğunu qəbul edək.

$$\langle x - 2; y - 3 \rangle = \langle 3; 6 \rangle, \quad x - 2 = 3, \quad x = 5; \quad y - 3 = 6, \quad y = 9$$

Bu vektorun son nöqtəsi $(5; 9)$ -dur.

- 3. Nümunə.** Başlangıcı $(-1; 2)$, $(2; 1)$, $(1; -2)$, $(5; 0)$ nöqtələrində olmaqla koordinat müstəvisi üzərində $\langle 2; 3 \rangle$ vektoruna bərabər vektorlar çəkin.

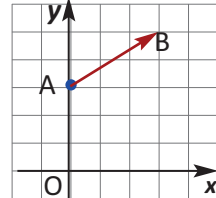
Həlli. Verilən nöqtələr koordinat müstəvisində qeyd edilir. Bu nöqtələrdən başlayaraq komponentləri $\langle 2; 3 \rangle$ vektorunun uyğun komponentlərinə bərabər olan vektorlar qurulur.



- 4. Nümunə.** $A(0; 3)$ və $B(3; 5)$ uyğun olaraq $\vec{AB}$ vektorunun başlangıç və son nöqtəsidir. Bu vektoru $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ şəklində yazın və uzunluğunu tapın.

Həlli. $\vec{AB} = \langle 3 - 0; 5 - 3 \rangle = \langle 3; 2 \rangle$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



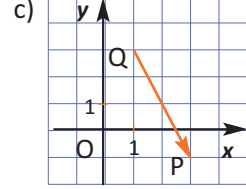
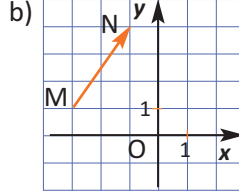
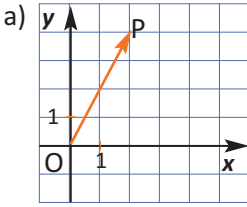
Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > a) P və Q uyğun olaraq $\vec{PQ}$ vektorunun başlangıç və son nöqtəsidir. Bu vektoru komponentləri ilə yazın və uzunluğunu tapın.

1) $P(0; 0), Q(3; 4)$	2) $P(-5; 1), Q(7; 6)$	3) $P(-4; -3), Q(2; -7)$
4) $P(5; 4), Q(-1; -4)$	5) $P(6; 3), Q(-2; 1)$	6) $P(-6; 0), Q(-5; -4)$

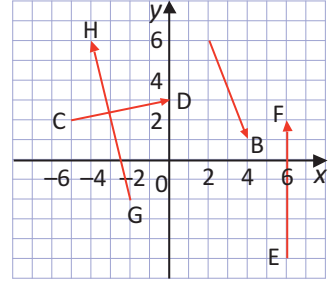
 b) $A(-1; 2), B(3; -4), C(5; 6)$ nöqtələri verilir. $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}, \vec{CA}, \vec{CB}, \vec{BA}$ vektorlarını komponentləri ilə yazın.
- 2 > Aslan 2 km şərqə doğru hərəkət etdikdən sonra 1 km şimala tərəf hərəkət etdi. Rəşid isə 1 km şimala doğru hərəkət etdikdən sonra 2 km şərqə doğru hərəkət etdi. Aslan və Rəşidin hərəkətə başladıkları nöqtədən eyni məsafədə uzaqlaşdıqlarını əsaslandırın.
- 3 > Başlangıcı $(-2; 1), (0; 2), (3; -2), (0; 0)$ nöqtələrində olmaqla koordinat müstəvisi üzərində $\langle 4; 2 \rangle$ vektoruna bərabər vektorlar çəkin.

- 4 > Koordinat müstəvisi üzərində təsvir edilmiş vektorları komponentləri ilə ifadə edin.



- 5 > Koordinat müstəvisi üzərində təsvir edilmiş vektorları:

- a) başlanğıc və son nöqtələrinin koordinatları ilə ifadə edin.
b) vektorları komponentləri ilə yazın.
c) vektorların uzunluqlarını tapın.



- 6 > Verilən nöqtənin koordinatlarına görə vektorun digər (başlanğıc və ya son) nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

1) Vektor komponentləri ilə: $\vec{a} \langle 1; 3 \rangle$,

Başlanğıc nöqtəsinin koordinatları: a) (2; 3); b) (0; 0); c) (-1; 3)

2) Vektor komponentləri ilə: $\vec{a} \langle -2; 0 \rangle$,

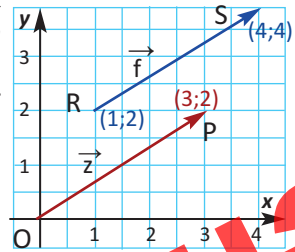
Son nöqtəsinin koordinatları: a) (3;1); b) (5; 0); c) (3;1)

Tətbiq tapşırıqları

- 7 > Avtomobilin sürətini P(1; 1) nöqtəsindən Q(4; 5) nöqtəsinə doğru yönəlmiş vektorla təsvir etmək olar. Koordinat müstəvisində bir bölgünü 10 km/saat qəbul edin və avtomobilin sürətini tapın.

- 8 > $\vec{OP}$ vektoru (0; 0) nöqtəsindən (3; 2) nöqtəsinə, $\vec{RS}$ vektoru isə (1; 2) nöqtəsindən (4; 4) nöqtəsinə doğru yönəlmişdir. Bu vektorların bərabər vektorlar olduğunu göstərin.

Göstəriş: vektorların uyğun komponentlərinin bərabər olduğunu göstərin.



- 9 > Komponentləri ilə yazılışına görə vektorların uzunluqlarını tapın.

a) $\langle 5, 1; 6, 8 \rangle$ b) $\langle -8; -6 \rangle$ c) $\langle 12; -16 \rangle$

- 10 > A vektorun başlanğıc, B isə son nöqtəsidir. Bu vektoru üzərində saxlayan düz xəttin bucaq əmsalını tapın.

a) A(3;2), B(-1;4) b) A(-4;3), B(2;-1) c) A(1;3), B(2;-1)

LAYIHƏ

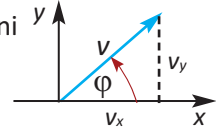


Vektorun istiqaməti

Vektorun istiqamətinin təyin edilməsinin tətbiq sahələrinə görə müxtəlif üsulları mövcuddur. Gündəlik həyatda biz istiqaməti sol, sağ, aşağı, yuxarı və ya şərq, qərb, şimal, cənub kimi ifadə edirik.

Koordinat müstəvisində vektorun istiqaməti Ox oxunun müsbət istiqamətindən saat əqrəbi hərəkətinin əksinə olmaqla ölçülən bucaqla (buna meyil bucağı deyəcəyik) müəyyən edilir.

Şəkində $v = \langle v_x; v_y \rangle$ vektorunun uzunluğu $|v| = \vec{v}$ ilə, istiqamətini müəyyən edən bucaq isə φ ilə işarə edilmişdir.

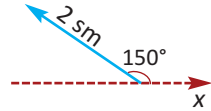


vektorun uzunluğu: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

vektorun istiqaməti: $\tan \varphi = \frac{v_y}{v_x}$ və ya $\cos \varphi = \frac{v_x}{v}$

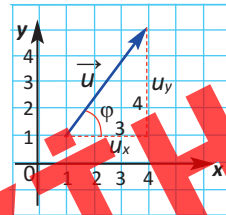
1. **Nümunə.** Uzunluğu 200 m olan yerdəyişmə vektorunun meyil bucağı 150° -dir. Bu vektoru 1 sm : 100 m miqyası ilə çəkin.

Həlli. Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə 150° -li bucaq əmələ gətirən şüa üzərində onun başlanğıcından 1 sm : 100 m miqyasına görə xətkəslə 2 sm uzunluğunda parça qeyd edilir.



2. **Nümunə.** $\vec{u} \langle 3; 4 \rangle$ vektorunun uzunluğunu və meyil bucağını müəyyən edin.

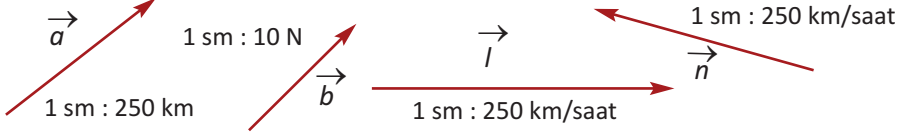
Həlli: Koordinat müstəvisi üzərində ixtiyari nöqtəni vektorun başlanğıc nöqtəsi seçək. Bu nöqtədən üfüqi ox boyunca 3 vahid olmaqla u_x komponentini, şaquli oy boyunca 4 vahid olmaqla u_y komponentini ayıraq və şəkində göstəriləyi kimi $\vec{u}$ vektorunu quraq. Transportirlə φ bucağını ölçsək, onun təqribən 53° olduğunu görərik. Bunu hesablamalarla da yoxlayaq.



Vektorun uzunluğu: $|u| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, meyil bucağı: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$, $\varphi \approx 53^\circ$

Öyrənmə tapşırıqları

- 11> Transportir və xətkəşin köməyi ilə ölçmələr aparmaqla vektorların üfüqi oxla əmələ gətirdiyi meyil bucağını və uzunluğunu müəyyən edin.



- 12> Uzunluq, meyl bucağı və miqyasa görə vektorları xətkəş və transportirin köməyi ilə çəkin (lazım gəldikdə miqyası özünüz seçin).

- a) 5 km; 20° ; 1 sm : 1 km b) 200 km; 170° ; 1 sm : 50 km
c) 1200 m; 150° ; ? sm : ? km

- 13> Verilən vektorları çəkin, uzunluğunu və istiqamətini müəyyən edin.

- a) $\langle 5; 5 \rangle$ b) $\langle 5; 1 \rangle$ c) $\langle -1; 1 \rangle$ d) $\langle -6; 8 \rangle$

- 14> Uyğun vektorları müəyyən miqyasla çəkin.

- a) gəminin hərəkət sürəti 60 km/saat, meyl bucağı 60° -dir.
b) avtomobilin hərəkət sürəti 80 km/saat, meyl bucağı 0° -dir.
c) atlının yerdəyişməsi 16 km, meyl bucağı 70° -dir.
d) obyektə 145° bucaq altında tətbiq olunan qüvvə 100 N-dur.

- 15> P vektorun başlanğıc nöqtəsi, Q son nöqtəsidir. Vektorların uzunluğunu və meyl bucağını müəyyən edin.

- a) P(0; 0), Q (-3; 2) b) P(1; -1), Q (-2; 3)
c) P(4; 2), Q (1; 3) d) P(0; 4), Q (2; 6)

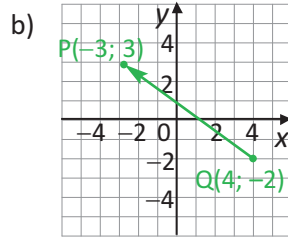
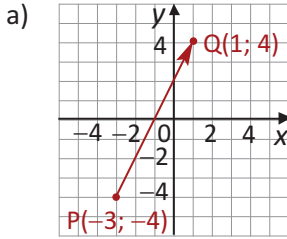
- 16> Aşağıdakı təkliflərdən hansı doğru, hansı səhvdir?

a) Əgər $\vec{a} = \vec{b}$ olarsa, onda $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

b) Əgər $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ olarsa, onda $\vec{a} = \vec{b}$

- 17> a) $\vec{d}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsi (1; 2), son nöqtəsi isə (5; -1)-dir.
 $\vec{f}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsi (5; -1), son nöqtəsi isə (1; 2)-dir.
Bu vektorların oxşar və fərqli cəhətlərini yazın.

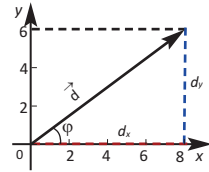
- 18> Uzunluğu $\overrightarrow{KL}\langle 1; 3 \rangle$ vektorunun uzunluğuna bərabər, lakin istiqaməti əks olan vektoru komponentləri ilə yazın. Bunu necə müəyyən etdiyinizi izah edin.
- 19> Vektorların modulunu və meyil bucağını müəyyən edin. Vektorları dəftərinizdə çəkin.



Triqonometrik nisbətər və vektorun komponentləri

Koordinat müstəvisində verilmiş $\vec{d}$ vektorunun komponentlərlə $\vec{d} = \langle d_x; d_y \rangle$ yazılışını triqonometrik nisbətlərin köməyiylə ifadə edək. $|\vec{d}| = d$ işarə etsək və

$$\cos \varphi = \frac{d_x}{d} \quad \sin \varphi = \frac{d_y}{d}$$

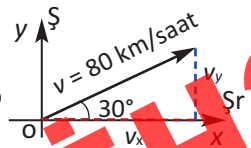


$d_x = d \cos \varphi$ $d_y = d \sin \varphi$ olduğunu nəzərə alsaq, $\vec{d} = \langle d_x; d_y \rangle$ vektorunu $\vec{d} = \langle d \cos \varphi; d \sin \varphi \rangle$ şəklində komponentləri ilə ifadə etmək olar.

Nümunə. Avtomobil meyil bucağı 30° olmaqla saatda 80 km sürətlə şimal-şərqə doğru hərəkət edir. Sürət vektorunu komponentləri ilə yazın.

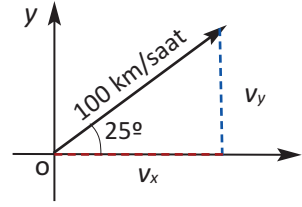
Həlli. Verilənlərə görə: $|\vec{v}| = 80$ (km /saat), $\varphi = 30^\circ$

$\vec{v} = \langle v_x; v_y \rangle = \langle v \cos \varphi; v \sin \varphi \rangle = \langle 80 \cos 30^\circ; 80 \sin 30^\circ \rangle$
 30° -li bucağın sinus və kosinusunun qiymətlərini nəzərə alsaq:



şərq istiqamətində sürət: $v_x = v \cos \varphi = 80 \cdot \cos 30^\circ \approx 80 \cdot 0,87 \approx 69,6$ (km/saat)
 şimal istiqamətində sürət: $v_y = v \sin \varphi = 80 \cdot \sin 30^\circ = 80 \cdot 0,5 = 40$ (km/saat)

- 20> Şəkində verilmiş $\vec{v}$ sürət vektorunu triqonometrik nisbətlərin köməyi ilə komponentləri ilə yazın.



- 21> Hər bir hala uyğun $\vec{R}$ vektorunu Ox və Oy oxları üzrə komponentləri ilə $\langle R_x; R_y \rangle$ şəklində yazın.

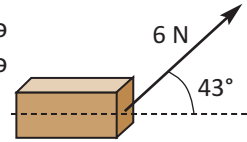
a) meyil bucağı 45° olmaqla, saatda 20 km sürətlə şimal-şərqə hərəkət edən gəminin sürətini göstərən $\vec{R}$ vektorunu;

b) 300 km/saat sürətlə qərbə doğru uçan təyyarənin sürətini göstərən $\vec{R}$ vektorunu;

c) 10 km/saat sürətlə şimala doğru hərəkət edən velosipedçinin sürətini göstərən $\vec{R}$ vektorunu.

- 22> a) Topdan meyil bucağı 15° olmaqla atılan mərmə 925 m/san sürətlə bucaq altında hərəkət etdi. Bu vektoru komponentləri ilə yazın.

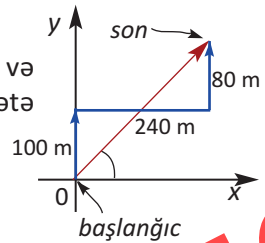
b) Gəmi meyil bucağı 60° olmaqla 75 km/saat sürətlə hərəkət edir. Gəminin Ox və Oy oxlarına, başqa sözlə şərq və şimala nəzərən sürətini müəyyən edin.



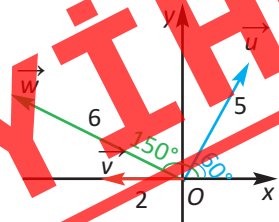
c) Şəkindəki qüvvəni komponentləri ilə yazın.

- 23> Atlı 40 m qərbə, sonra isə 30 m şimala doğru hərəkət etdi. Atlının yerdəyişməsini göstərən vektorun modulunu və meyil bucağını müəyyən edin.

- 24> Təsəvvür edin ki, siz 100 m şimal, 240 m şərqə və yenidən 80 m şimala hərəkət etmişiniz. Siz hərəkətə başladığınız nöqtədən neçə metr uzaqlaşmışınız?



- 25> Verilənlərə görə $\vec{u}$, $\vec{v}$ və $\vec{w}$ vektorlarını komponentləri ilə yazın.



LAYIHƏ

8-3

Vektorların toplanması və çıxılması



Kollinear vektorların toplanması və çıxılması

Eyni istiqamətli kollinear vektorların cəmini göstərən vektora bu vektorların əvəzləyicisi deyilir və onun modulu verilən vektorların modulları cəminə bərabər olmaqla, istiqaməti verilən vektorlarla eyni olur.

$$|15| + |5| = 20 \text{ km (sağa)}$$

Əks istiqamətli iki kollinear vektorun əvəzləyici vektorunun modulu bu vektorların modulları fərqi bərabərdir, istiqaməti isə modulu böyük olan vektorla eynidir.

$$|15| - |-5| = 10 \text{ km (sola)}$$

Vektorların toplanmasını real həyati situasiyalara uyğun qrafik olaraq yerinə yetirək.

- 1. Nümunə.** Cəmilə finiş xəttinə çatmaq üçün 3 işarəni keçməlidir. O, 10 m şərqə doğru sürüşsə, 1-ci işarəyə, sonra 50 m irəli sürüşsə, 2-ci işarəyə və eyni istiqamətdə daha 20 m keçsə, finiş xəttinə çata bilər. Cəmilənin hərəkətini qrafik olaraq vektorla göstərin.



Həlli. Miqyas seçək: 1 sm : 10 m. 1-ci vektoru, başlanğıcını 1-ci vektorun son nöqtəsi ilə eyni qəbul etməklə 2-ci vektoru və analogi qaydada 3-cü vektoru çəkək.

Əvəzləyici vektoru $\vec{d}$ ilə işarə edək.

Onun uzunluğunu $|\vec{d}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$ kimi ifadə etmək olar.

Ümumi yerdəyişmə: 10 m + 50 m + 20 m = 80 m (şərqə)

Qəbul edilmiş miqyasa görə uzunluğu 8 sm olmaqla $\vec{d}$ vektoru çəkilir.

- 2. Nümunə.** Təsəvvür edin ki, siz 100 m şərqə doğru, daha sonra 200 m qərbə doğru hərəkət etmisiniz. Bu hərəkəti qrafik olaraq təsvir edin.

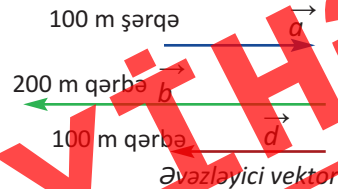
Həlli. 1 sm : 50 m miqyası ilə verilən vektorları çəkək.

Göründüyü kimi, əvəzləyici vektorun modulu vektorların modullarının fərqinə bərabərdir.

İstiqamət isə qərbə doğru olacaq.

Bu halda $|\vec{b}| > |\vec{a}|$ olduğundan $\vec{d}$ əvəzləyici vektorunun uzunluğu $|\vec{d}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$

$$200 \text{ m} - 100 \text{ m} = 100 \text{ m (qərbə)}$$



Kollinear vektorların toplanması və çıxılmasına aid ümumiləşdirmələr aparaq.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları əksistiqamətli vektorlardırsa, əvəzləyici r vektoru:

$|\vec{a}| > |\vec{b}|$ olarsa, $|\vec{r}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$, $\vec{r}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə eyni istiqamətdə olur.

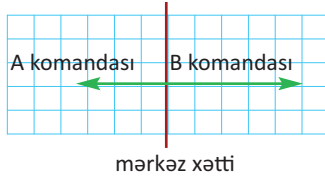
$|\vec{a}| < |\vec{b}|$ olarsa, $|\vec{r}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$, $\vec{r}$ vektoru $\vec{b}$ vektoru ilə eyni istiqamətdə olur.

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ olarsa, $|\vec{r}| = 0$, yəni əks vektorların cəmi $\vec{0}$ vektoruna bərabərdir.

$\vec{u} - \vec{v}$ fərqi tapmaq üçün $\vec{u}$ -nün üzərinə $-\vec{v}$ -yə əks olan vektoru əlavə etmək lazımdır. Yəni $\vec{u} - \vec{v}$ ifadəsi ilə $\vec{u} + (-\vec{v})$ ifadəsi ekvivalent ifadələrdir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Şəkində təsvir edilmiş oyunda tətbiq edilən qüvvələr vektorlarla ifadə edilir. Vektorların istiqaməti ipi dartma istiqamətlərini göstərir. Şəkində iki raundda ipə tətbiq edilmiş qüvvələr göstərilmişdir.

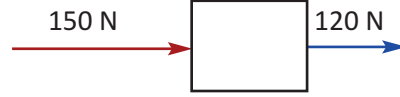
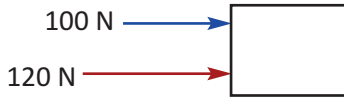


Vektorlara görə 1-ci və 2-ci raundda komandaların nəticələri haqqında fikirlərinizi söyləyin. Bu fikirləri vektorlar üzərində əməllərlə əsaslandırın.

- 2 > Əvəzləyici qüvvənin istiqamətini və modulunu müəyyən edin.

a) Şkafın yerini dəyişmək üçün iki nəfərdən biri 100 N, digəri isə 120 N qüvvə tətbiq etməklə eyni istiqamətdə itələyir.

b) Şkafın yerini dəyişmək üçün iki nəfərdən biri 150 N qüvvə ilə irəli itələyir, digəri isə 120 N qüvvə ilə eyni istiqamətə dartır.



- 3 > Vektorların cəmini və fərqi göstərən əvəzləyici vektorları çəkin.

a) $\xrightarrow{2 \text{ km}} + \xrightarrow{2 \text{ km}} \quad 1 \text{ sm} : 1 \text{ km}$

b) $\xrightarrow{40 \text{ km/saat}} + \xleftarrow{60 \text{ km/saat}} \quad 1 \text{ sm} : 20 \text{ km/saat}$

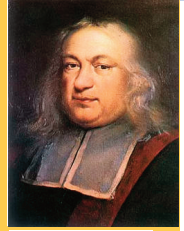
c) $\xrightarrow{20 \text{ N}} - \xleftarrow{15 \text{ N}} \quad 1 \text{ sm} : 5 \text{ N}$

d) $\uparrow \quad \downarrow$
 $1 \text{ sm} : 4 \text{ N}$
 $12 \text{ N} \quad 12 \text{ N}$



Rene Dekart

XVII əsrdə yaşamış riyaziyyatçı alimlər Rene Dekart və Pyer Ferma cəbr və həndəsəni bir-birilə əlaqələndirərək riyaziyyatda yeni bir elmi sahə - analitik həndəsəni yaratmışlar. Analitik həndəsə həndəsə məsələlərinin həllində cəbri qaydaların tətbiqini əhatə edir. Vektorlar üzərində əməllərin cəbri qaydada yerinə yetirilməsi imkanları vektorlara aid məsələlərin həllini asanlaşdırdı.



Pier Ferma



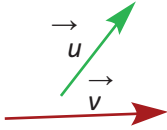
Kollinear olmayan vektorların toplanması və çıxılması

Kollinear olmayan vektorları toplamaq üçün müxtəlif qaydalar mövcuddur. İki qrafik qaydanı nəzərdən keçirək: 1. Üçbucaq qaydası. 2. Paraleloqram qaydası. Qrafik qaydada vektorları toplayarkən verilən vektorlar və onların cəmini göstərən əvəzləyici vektor müəyyən miqyas seçilməklə xətkəş (mütləq qiyməti) və transportirin (istiqaməti) köməyiylə qurulur.

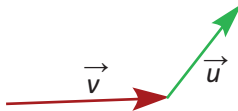
1) Üçbucaq qaydası.

1. Verilir:

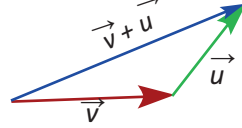
$\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorları



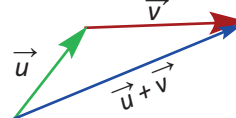
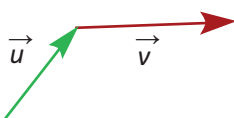
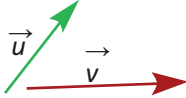
2) $\vec{u}$ vektorunu elə yerləşdirək ki, $\vec{v}$ vektorunun son nöqtəsi ilə $\vec{u}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsi üst-üstə düşsün.



3) $\vec{v}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsi ilə $\vec{u}$ vektorunun son nöqtəsini birləşdirən istiqamətlənmiş parça $\vec{v} + \vec{u}$ vektorunu ifadə edən əvəzləyici vektordur.



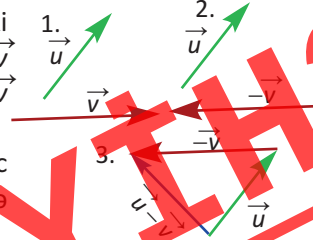
$\vec{v}$ vektorunu sürüşdürməklə də $\vec{u} + \vec{v}$ vektorunu qurmaq olar.



Vektorları istənilən ardıcılıqla toplamaq olar. Ədədlər üçün toplama əməlinin yerdəyişmə xassəsi vektorları toplama üçün də doğrudur. Bu qayda ilə üç və daha çox vektoru da toplamaq olar.

Vektorların çıxılması. Qrafik qayda ilə $\vec{u}$ və $\vec{v}$ kimi iki vektorun çıxılmasını nəzərdən keçirək, yəni $\vec{u} - \vec{v}$ vektorunu müəyyən edək. Bunun üçün: 1. $\vec{v}$ vektoruna əks vektoru ($-\vec{v}$) çəkək; 2. $-\vec{v}$ -ni elə sürüşdürək ki, $-\vec{v}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsi ilə $\vec{u}$ vektorunun son nöqtəsi üst-üstə düşsün.

3. $\vec{u}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsi ilə $-\vec{v}$ vektorunun son nöqtəsini birləşdirən istiqamətlənmiş parça $\vec{u} - \vec{v}$ vektordur.



LAYIHƏ

- 1. Nümunə.** Camal düşərgədə qurduqları çadırdan 60 m cənuba, 120 m şərqə, daha sonra 100 m şimala getdi və gölə çatdı. Çadırdan gölə qədər ən yaxın məsafə neçə metrdir?

Həlli:

Miqyas qəbul edək: 1 sm : 40 m

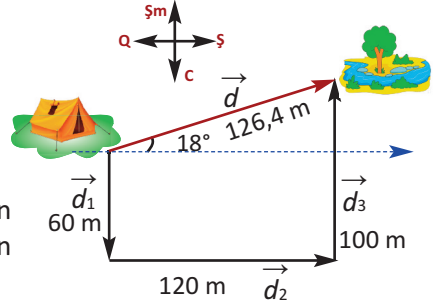
Camalın hərəkətini uyğun vektorlarla miqyasa görə ardıcıl olaraq göstərək.

Camalın hərəkətini göstərən 1-ci vektorun başlanğıc nöqtəsi ilə 3-cü vektorun son nöqtəsini birləşdirək.

Alınan $\vec{d}$ əvəzləyici vektoru $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ və $\vec{d}_3$ vektorlarının cəmini ifadə edir. Xətkeşlə ölçməklə və miqyası nəzərə almaqla bu vektorun uzunluğunun 126,5 m, meyil bucağının isə transportirlə ölçmələr aparmaqla 18° olduğunu müəyyən etmək olar.

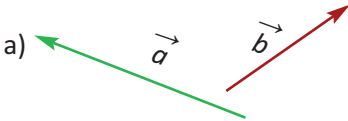
Cavab: Göl çadırdan 126,5 m məsafədədir.

Məsələləri transportir və xətkəşdən istifadə etməklə ölçmə və qurma yolu ilə həll edin.



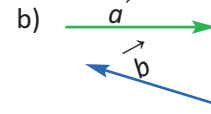
- 4 >** 1) Şəkildə verilmiş vektorları verilmiş miqyasla dəftərinizə köçürün və $\vec{a} + \vec{b}$ vektorunu qurun, modulunu və meyil bucağını müəyyən edin.

Miqyas 1 sm : 3 km



a)

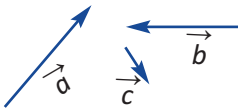
Miqyas 1 sm : 1 km



b)

- 5 >** Şimal istiqamətində 5 m yerdəyişmə planda 3 sm uzunluğunda parça ilə çəkilmişdir. Bu miqyasla şimal istiqamətində 20 m yerdəyişməni göstərən vektoru çəkin.

- 6 >** Şəkildəki $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarından istifadə etməklə aşağıdakı ifadələrə uyğun vektorları çəkin.



a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$

c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

- 7 >** Elmar parkda 4 km qərbə doğru hərəkət etdikdən sonra, daha 3 km şimala doğru hərəkət etdi. Elmar hərəkətə başladığı nöqtədən neçə kilometr uzaqlaşdı? Yerdəyişmə vektorunun meyil bucağını tapın.

- 8 >** Gəmi sahilədən cənuba doğru 25 km hərəkət etdikdən sonra istiqamətini şərqə doğru dəyişdi və daha 40 km getdi. Daha sonra isə şimal istiqamətində 15 km qət etdi və dəniz fənarına çatdı. Gəminin yerdəyişməsini göstərən vektoru qəbul etdiyiniz miqyasla təsvir edin.

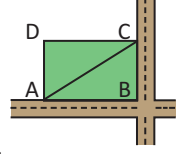
LAYIHƏ

Araşdırma. Təssəvür edin ki, siz parkda A nöqtəsindən C nöqtəsinə getməlisiniz. Tutaq ki, siz bura gəlmək üçün üç müxtəlif yol seçmisiniz: 1) A nöqtəsindən başlamaqla B nöqtəsinə və oradan C nöqtəsinə gəlməklə;

2) A nöqtəsindən D nöqtəsinə, oradan da C nöqtəsinə gəlməklə;

3) A nöqtəsindən birbaşa C nöqtəsinə gəlməklə.

Hər bir yerdəyişməyə uyğun vektorları yazın.

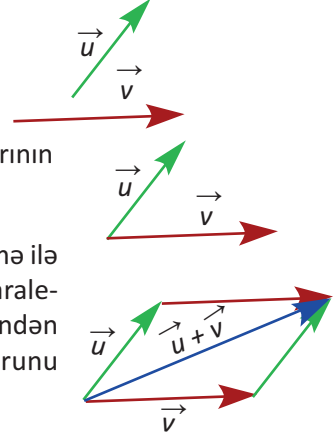


✓ **Paraleloqram qaydası**

1. Verilir: $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorları

2. $\vec{v}$ vektorunu elə sürüşdürək ki, $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorlarının başlanğıc nöqtələri üst-üstə düşsün.

3. $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorlarını uyğun olaraq paralel köçürmə ilə tərəfləri $\vec{u}$ və $\vec{v}$ olan paraleloqram quraq. Bu paraleloqramın $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorlarının başlanğıc nöqtəsindən çıxan diaqonalı onların cəmini, $\vec{u} + \vec{v}$ vektorunu göstərir.



Xətkeş və transportirin köməyiylə qurulmuş əvəzləyici vektorun uzunluğunu və istiqamətini müəyyən edin.

Əvəzləyici vektoru paraleloqram qaydası ilə transportir və xətkəşdən istifadə etməklə ölçmə və qurmalar aparmaqla tapın.

9 > Uzunluqları və meyil bucaqları verilmiş yerdəyişmə vektorlarını müəyyən miqyasla çəkin və paraleloqram qaydası ilə toplayın:

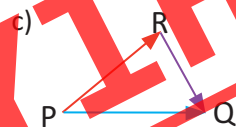
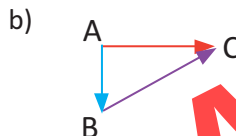
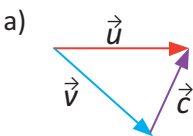
a) 1,5 km, meyil bucağı 180° və 3 km, meyil bucağı 45° ;

b) 2,5 km, meyil bucağı 80° və 5 km, meyil bucağı 15° ;

c) 4 km, meyil bucağı 120° və 2 km, meyil bucağı 30° .

10 > Təyyarə 850 km/saat sürətlə şimala doğru uçar. 50 km/saat sürətlə əsən qərb küləyinin təsiri altında təyyarənin sürəti və istiqaməti necə dəyişəcək? Çəkin, göstərin.

11 > Uzunluğu kiçik olan vektoru digər iki vektorun cəmi və ya fərqi kimi ifadə edin.



LAYIHƏ

✓ **Yerdəyişmə və qruplaşdırma xassəsi**

İstənilən $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün toplanmanın aşağıdakı xassələri doğrudur:

Yerdəyişmə xassəsi: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

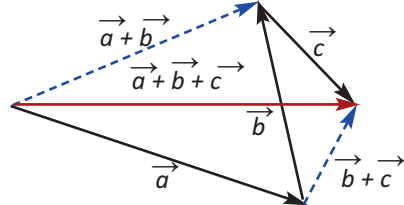
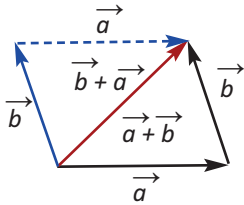
Qruplaşdırma xassəsi: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

İdentiklik xassəsi: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

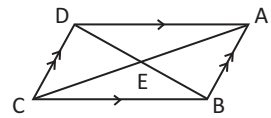
Əks vektorların cəmi: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

1. **Nümunə.** $(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = (\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u} =$ *yerdəyişmə xassəsi*
 $= (\vec{v} + \vec{u}) + (-\vec{u}) =$ *əksi ilə toplanır*
 $= \vec{v} + (\vec{u} + (-\vec{u})) =$ *qruplaşdırma xassəsi*
 $= \vec{v} + \vec{0} =$ *əks vektorların cəmi ilə toplanır*
 $= \vec{v}$ *identiklik xassəsi*

- 12 > Aşağıdakı şəkilləri ölçmələrlə dəftərinizə köçürün.
 a) Vektorları toplamada yerdəyişmə və qruplaşdırma xassələrini tətbiq edin.
 b) Hər bir xassə üçün daha bir nümunə də siz çəkin.



- 13 > ABCD paraleloqram, E isə onun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsidir. Hər bir ifadəyə uyğun vektorun adını yazın.



a) $\vec{AE} + \vec{EB}$

b) $\vec{DE} + \vec{EB}$

c) $\vec{BC} + \vec{BA}$

d) $\vec{AB} - \vec{DB}$

e) $\vec{AE} - \vec{EB} - \vec{BC}$

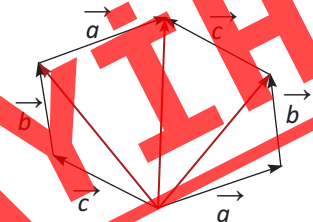
f) $\vec{BA} + \vec{AE} + \vec{ED} + \vec{DC}$

g) $\vec{CE} + \vec{DC}$

h) $\vec{AD} + \vec{DB}$

i) $\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{DC}$

- 14 > Qırmızı rənglə çəkilmiş vektorları $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarının cəmi ilə müxtəlif şəkildə ifadə etməklə vektorlar üzərində toplama əməlinin xassələrini göstərin.



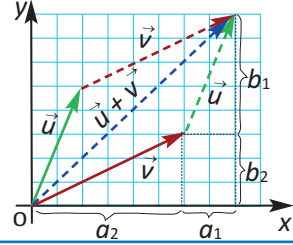
LAYIHƏ



Vektorların komponentlərindən istifadə etməklə toplanması

Dekart koordinat müstəvisi üzərində komponentləri ilə verilmiş vektorların toplanması qaydası.

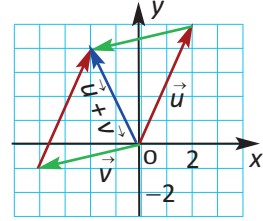
$\vec{u} = \langle a_1; b_1 \rangle$ və $\vec{v} = \langle a_2; b_2 \rangle$ vektorlarının cəmi
 $\vec{u} + \vec{v} = \langle a_1 + a_2; b_1 + b_2 \rangle$ vektorudur.



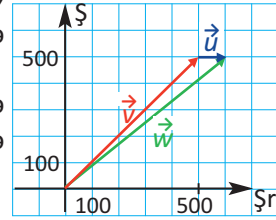
1. **Nümunə.** $\vec{u} = \langle 2; 5 \rangle$ və $\vec{v} = \langle -4; -1 \rangle$ olarsa, $\vec{u} + \vec{v}$ vektorunu komponentləri ilə ifadə edin.

Həlli. $\vec{u} + \vec{v}$ vektorunun komponentlərini tapmaq üçün $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorlarının uyğun komponentlərini - üfüqi (absis oxu üzrə) və şaquli (ordinat oxu üzrə) komponentlərini toplamaq lazımdır.

$$\vec{u} + \vec{v} = \langle 2 + (-4); 5 + (-1) \rangle = \langle -2; 4 \rangle$$



2. **Nümunə.** Təyyarə şimal-şərq istiqamətində saatda təxminən 707 mil sürətlə uçar. Təyyarənin sürətini $\vec{v} = \langle 500; 500 \rangle$ vektoru ifadə edir. Saatda 40 mil sürətlə qərb küləyi əsir. Küləyin sürətini $\vec{u} = \langle 40; 0 \rangle$ vektoru ifadə edir. Küləyin təsiri ilə təyyarənin sürəti necə dəyişəcək? Bu sürəti ifadə edən vektoru komponentləri ilə göstərin.
 $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} = \langle 500 + 40; 500 + 0 \rangle = \langle 540; 500 \rangle$

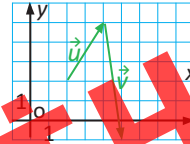
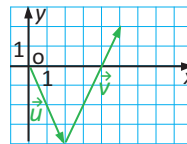
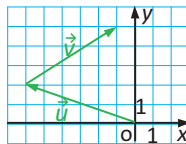
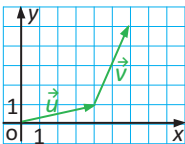


Təyyarənin yekun sürəti: $|\vec{w}| = \sqrt{540^2 + 500^2} \approx 736$ mil/saat

Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki, $\vec{u} - \vec{v} = \langle a_1 - a_2; b_1 - b_2 \rangle$

3. **Nümunə.** $\vec{u} = \langle 2; 5 \rangle$ və $\vec{v} = \langle -5; -1 \rangle$ olarsa, $\vec{u} - \vec{v} = \langle 2 - (-5); 5 - (-1) \rangle = \langle 7; 6 \rangle$

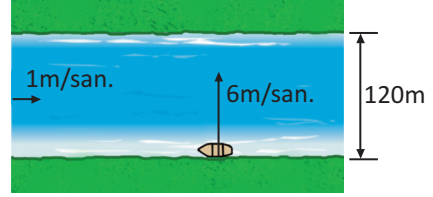
- 15 > $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorlarının təsvirini dəftərinizə köçürün. Bu vektorların hər birini komponentləri ilə yazın. $\vec{u} + \vec{v}$ cəmini ifadə edən vektoru komponentləri ilə yazın.



- 16 > Təyyarə uçuşu saatda 650 km/saat sürətlə şərq istiqamətində yerinə yetirir. Bir qədər sonra saatda 80 km sürətlə, meyil bucağı 45° olan cənub-şərq küləyi əsməyə başladı. Külək təyyarəni şərqə doğru olan yoldan hər saatda neçə kilometr uzaqlaşdıracaq?

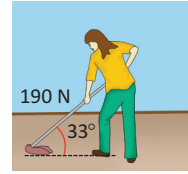
LAYIHƏ

- 17> Qayıq eni 120 m olan çayda axına perpendikulyar istiqamətdə hərəkət edir. Qayığın durğun sudakı sürəti 6 m/san, çayın axma sürəti 1 m/san-dir.

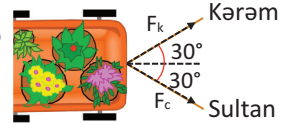


- a) Qayıq çayın bir sahilindən digərinə keçmək üçün nə qədər vaxt sərf edər?
 b) Çayın axını qayığı hərəkətə başladığı nöqtədən neçə metr aşağıya doğru hərəkət etdirəcək?
 c) Qayıq sahilə nəzərən hansı bucaq altında hərəkət edəcək?

- 18> Gülnar döşəməni silərkən süpürgəni 33° bucaq altında olmaqla 190 N qüvvə tətbiq etməklə hərəkət etdirir. Gülnarın tətbiq etdiyi qüvvənin üfüqi və şaquli komponentlərini (mütləq qiymətcə) tapın.

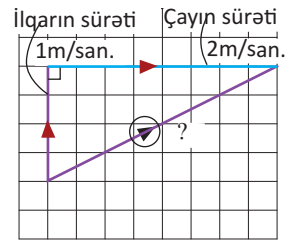


- 19> Kərəm və Sultan bağ arabasını şəkildə göstəriləndiyi kimi arabanın hərəkət istiqaməti ilə 30° bucaq əmələ gətirən eyni qüvvə ilə dartırlar.



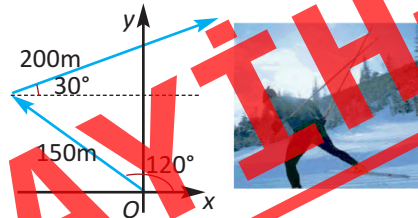
- a) Onların birlikdə tətbiq etdiyi qüvvə 170 nyuton olarsa, hər biri neçə nyuton qüvvə tətbiq etmişdir?
 b) Hər birinin tətbiq etdiyi qüvvə 70 N olarsa, qüvvələrin əvəzləyicisi neçə nyuton olar?
 c) Kərəm və Sultan bir-birinə daha çox yaxınlaşırsalar, tətbiq edilən əvəzləyici qüvvə necə dəyişər?

- 20> İlqar 1 m/san sürətlə sahilə perpendikulyar olmaqla çayda üzür. Çayın axın sürəti 2 m/san, eni isə 40 m olarsa, tapın:



- a) İlqarın çayı üzüb keçmə müddətini;
 b) İlqarın üzdüyü məsafəni.
 c) İlqar çayı sahilə nəzərən hansı bucaq altında üzüb keçəcək?

- 21> Xizəkçi əvvəlcə meyil bucağı 120° olmaqla 150 m, sonra isə meyil bucağı 30° olmaqla 200 m hərəkət etdi. Xizəkçinin yerdəyişmə vektorunu müəyyən edin.



LAYIHƏ

8-4

Vektorun ədədə vurulması

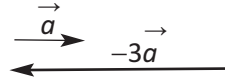
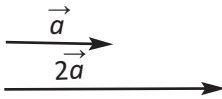
a vektorunun k ədədinə ($k \in \mathbb{R}$) hasilini $k \cdot \vec{a}$ kimi işarə edilir və bu vektorun uzunluğu $|k| \cdot |\vec{a}|$ -yə bərabərdir.

$k > 0$, olarsa $k\vec{a}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə eyni istiqamətdə olur.

$k < 0$, olarsa $k\vec{a}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə əks istiqamətdə olur.

1) $\vec{a}$ vektorunun uzunluğunun 2 dəfə artırılması ilə alınan $2\vec{a}$ vektoru təsvir edilmişdir. Bu vektorlar eyni istiqamətlidir.

2) Şəkildə $\vec{a}$ vektoru və $-3\vec{a}$ vektoru təsvir edilmişdir. Bu vektorlar əks istiqamətlidir.



Verilən vektorla onun (sıfırdan fərqli) ədədə hasilini ifadə edən vektor kollineardır. $\vec{a} \neq 0$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırsa, onda elə yeganə k ədədi var ki, $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$

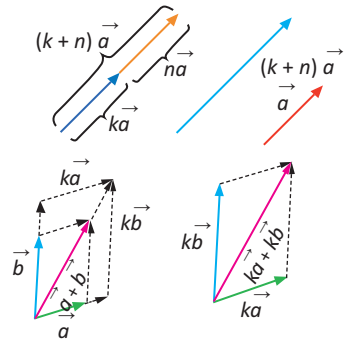
Vektorun ədədə vurulmasının xassələri.
1. Qruplaşdırma qanunu.

k və n istənilən ədəd ($k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$) olduqda
 $(kn) \cdot \vec{a} = k(n \cdot \vec{a})$

2. Paylama qanunu.

k və n istənilən ədəd ($k, n \in \mathbb{R}$) olduqda
 $(k + n) \vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$

k istənilən ədəd ($k \in \mathbb{R}$) olduqda
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot k = k\vec{a} + k\vec{b}$


Öyrənmə tapşırıqları

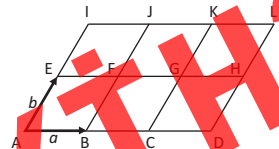
- 1 > Şəkildəki fiqur konqruent paraleloqramlardan təşkil edilmişdir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları paraleloqramın tərəfləri üzərindədir. Tələb edilən vektorları bu vektorların köməyiylə ifadə edin.

a) $\vec{AC}$

b) $\vec{KC}$

c) $\vec{AD} + \vec{DL}$

d) $\vec{LI} + \vec{IE}$



LAYIHƏ

- 2 > Sürət vektoru qiyməti $v = 400$ km/saat olmaqla, meyil bucağı 30° -dir. Bu şərtə görə aşağıdakı vektorları müəyyən miqyasla dəftərinizdə çəkin.

a) $2\vec{v}$ b) $-3\vec{v}$ c) $0,5\vec{v}$ d) $-5\vec{v}$

- 3 > $\vec{a}$ vektorunu xətkəş və transportirin köməyiylə dəftərinizdə çəkin, $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ bərabərliyinin doğru olduğunu k -nin və m -in verilən qiymətlərinə görə dəftərinizdə çəkməklə həndəsi olaraq göstərin.

a) $k = 2$ və $m = 2$ b) $k = -3$ və $m = 2$ c) $k = -2$ və $m = -1$

- 4 > Aşağıda verilən məlumatlara görə $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorları haqqında hansı fikirləri söyləmək olar?

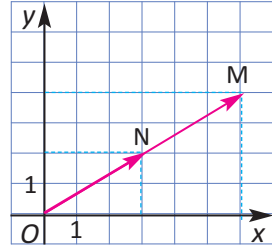
a) $2\vec{u} = 4\vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v} = 0$ c) $4(\vec{u} + \vec{v}) - 3(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

- 5 > Şəkilə görə tapşırıqları yerinə yetirin.

1) $\vec{ON}$ vektorunu komponentləri ilə yazın və uzunluğunu hesablayın.

2) $\vec{OM}$ vektorunu komponentləri ilə yazın və uzunluğunu hesablayın.

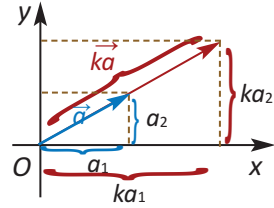
3) $\vec{ON}$ və $\vec{OM}$ vektorlarının uzunluqlarını və uyğun komponentlərini müqayisə edin.



8-5

Komponentləri ilə verilmiş vektorlar üzərində əməllər

Komponentləri ilə verilmiş $\vec{a} \langle a_1; a_2 \rangle$ vektoru üçün $k\vec{a} = \langle ka_1; ka_2 \rangle$



1. Nümunə. $\vec{a} = \langle -2; 5 \rangle$ olduqda, $2\vec{a} = \langle -4; 10 \rangle$

2. Nümunə. $\vec{a} = \langle 3; -2 \rangle$ və $\vec{b} = \langle -1; 4 \rangle$ olduqda, $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \cdot \langle 3; -2 \rangle + 3 \cdot \langle -1; 4 \rangle = \langle 6; -4 \rangle + \langle -3; 12 \rangle = \langle 6 + (-3); -4 + 12 \rangle = \langle 3; 8 \rangle$

• kollinear vektorların uyğun koordinatları mütənasibdir.

• Tərsinə, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının uyğun koordinatları mütənasibdirsə, onda bu vektorlar kollinear.

$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ olduqda $\vec{a} \langle a_1; a_2 \rangle$ və $\vec{b} \langle b_1; b_2 \rangle$ vektorlarının kollinearlıq şərti:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

3. Nümunə. m -in hansı qiymətində $\vec{b} \langle -1; 4 \rangle$ və $\vec{a} \langle 3; m \rangle$ vektorları kollinear?

$$\frac{3}{-1} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = -12$$

- 6 > $\vec{a} = \langle 2; 3 \rangle$ və $\vec{b} = \langle -4; 5 \rangle$ olduqda aşağıdakı vektorları komponentləri ilə yazın:

a) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ b) $\vec{a} + 2\vec{b}$ c) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

- 7 > a) $\vec{a} = \langle -6; 2 \rangle$ və $\vec{b} = \langle 2; -4 \rangle$ olarsa, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorunun uzunluğunu tapın.
b) $\vec{c} = \langle 2; 3 \rangle$ və $\vec{d} = \langle 1; -3 \rangle$ olarsa, $3\vec{c} - \vec{d}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

- 8 > $\vec{f} = \langle 2; -3 \rangle$ vektoru ilə kollinear olan vektorları seçin.

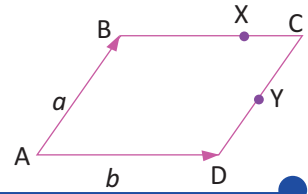
a) $\vec{a} = \langle 4; 6 \rangle$ b) $\vec{b} = \langle 1; -1,5 \rangle$ c) $\vec{c} = \langle -4; 6 \rangle$ d) $\vec{d} = \langle -2; -3 \rangle$

- 9 > k -nin hansı qiymətlərində verilmiş vektorlar kollineardır?

a) $\vec{a} = \langle 2; -3 \rangle$ və $\vec{b} = \langle k; 9 \rangle$ b) $\vec{a} = \langle 3; k \rangle$ və $\vec{b} = \langle k; 12 \rangle$

- 10 > ABCD paraleloqramında $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. X nöqtəsi BC tərəfi üzərində elə yerləşmişdir ki, $BX = 3 \cdot XC$, Y nöqtəsi isə CD tərəfini yarıya bölür. Tələb olunan vektorları $\vec{a}$ və $\vec{b}$ ilə ifadə edin.

- 1) $\vec{BD}$ 2) $\vec{AX}$ 3) $\vec{BY}$ 4) $\vec{DY}$
5) $\vec{AC}$ 6) $\vec{AY}$ 7) $\vec{DX}$ 8) $\vec{XY}$



Tətbiq tapşırıqları

- 11 > Nyuton qanununa görə qravitasiya qüvvəsi $\vec{F}_g$ (nyutonla) cismin kütləsi (kiloqramla) ilə qravitasiya təcilinin (m/san^2 ilə) hasilinə bərabərdir: $\vec{F}_g = \vec{m} \cdot \vec{g}$, bu qüvvəyə cismin çəkisi deyilir və $\vec{P} = \vec{m}\vec{g}$ kimi də yazılır. Yerdə qravitasiya təcili $9,8 m/\text{san}^2$, Ayda isə $1,6 m/\text{san}^2$ -dir. Kütləsi 60 kq olan şəxsin Yerdə və Ayda çəkisini tapın.



- 12 > **Açıq tipli tapşırıq.** Koordinat müstəvisi üzərində başlanğıcı koordinat başlanğıcında olan $\vec{a}$ vektoru çəkin və son nöqtəsinin koordinatlarını qeyd edin. Hər hansı k ədədi seçin və onun $\vec{a}$ vektoru ilə hasilindən alınan $k\vec{a}$ vektorunu çəkin. Bu vektorun son nöqtəsinin koordinatlarını yazın. Tapşırığı eyni k ədədi və fərqli $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorları üçün də yerinə yetirin.

- 13 > A $(-3; 1)$ və B $(6; 7)$ nöqtələri verilir. AB parçasını $AC : CB = 1 : 2$ nisbətində bölən C nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

Göstəriş: $C(x; y)$ olmaqla $\vec{AC}$ və $\vec{AB}$ vektorlarını komponentləri ilə yazın və $\vec{AB} = 3 \cdot \vec{AC}$ bərabərliyindən istifadə edin.

- 14 > A $(1; 1)$, B $(1; 7)$, C $(7; 7)$ nöqtələri verilir. $\triangle ABC$ -nin medianlarının kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

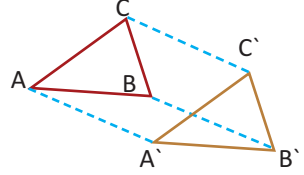
LAYIHƏ

8-6

Paralel köçürmə

Paralel köçürmədə nöqtələr paralel (yaxud üst-üstə düşən) düz xətlər üzrə eyni məsafə qədər yerini dəyişir və fiqur özünə konqruent fiqura çevrilir.

Şəkilləki $A'B'C'$ üçbucağı ABC üçbucağının paralel köçürülməsi ilə alınmışdır. Burada $AA' = BB' = CC'$, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$



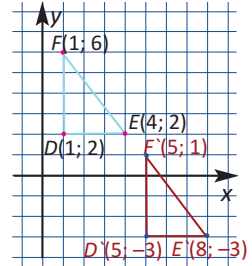
Koordinat müstəvisində verilmiş DEF üçbucağının hər bir nöqtəsi 4 vahid sağa, 5 vahid aşağı köçürülmüşdür.

$$D(1; 2) \rightarrow D'(5; -3)$$

$$E(4; 2) \rightarrow E'(8; -3)$$

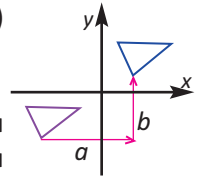
$$F(1; 6) \rightarrow F'(5; 1)$$

İki nöqtə arasındakı məsafə düsturunu tətbiq etməklə alırıq: $DE = 3$, $D'E' = 3$; $DF = 4$, $D'F' = 4$; $FE = 5$, $F'E' = 5$. Üçbucaqların konqruentlik əlamətinə görə $\triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$



Fiqurun paralel köçürülməsində ixtiyari $A(x; y)$ nöqtəsi $A'(x'; y')$ nöqtəsinə çevrilir və bu nöqtələrin koordinatları arasında $x' = x + a$, $y' = y + b$ bərabərlikləri doğrudur.

Koordinat müstəvisi üzərində paralel köçürmədə koordinat oxları boyu sağa və yuxarı yerdəyişmə müsbət, sola və aşağı yerdəyişmə isə mənfi a və b ədədləri ilə təyin olunur.



Paralel köçürmədə iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişmir.

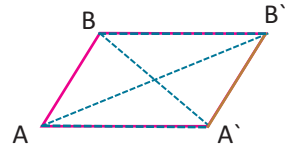
Doğrudan da, paralel köçürmədə ixtiyari iki $A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələri $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ və $B'(x_2 + a; y_2 + b)$ nöqtələrinə çevrilir.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad A'B' = \sqrt{((x_2 + a) - (x_1 + a))^2 + ((y_2 + b) - (y_1 + b))^2}$$

Buradan $AB = A'B'$. Deməli, paralel köçürmədə məsafə saxlanılır.

AB' parçasının orta nöqtəsinin koordinatları

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + a}{2} \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}$$



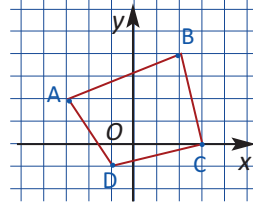
$A'B$ parçasının orta nöqtəsinin koordinatları da bunun kimi olur (özünüz yoxlayın). Deməli, $ABB'A'$ dördbucaqlısının diaqonalları kəsişir və kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür. Yəni, bu dördbucaqlı paraleloqramdır. Paraleloqramın isə qarşı tərəfləri paraleldir.

Paralel köçürmədə düz xətt paralel düz xəttə (və ya özüne) çevrilir.

Bir fiqurun digərinə çevrilməsində nöqtələr arasındakı məsafə saxlanarsa, bu çevrilməyə hərəkət deyilir. Paralel köçürmə hərəkətdir.

- 1 > Paralel köçürmələri $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$ şəkildə yazın.
 a) 4 vahid sola, 2 vahid aşağı; b) 2 vahid sağa, 2 vahid yuxarı;
 c) 3 vahid sağa, 5 vahid yuxarı; d) 3 vahid sola, 1 vahid yuxarı.
- 2 > Şəkindəki dördbucaqlının verilən paralel köçürülməsini dəftərinizdə təsvir edin.

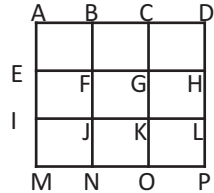
- a) $(x; y) \rightarrow (x - 1; y + 2)$
 b) $(x; y) \rightarrow (x + 3; y - 2)$
 c) $(x; y) \rightarrow (x - 3; y - 1)$
 d) $(x; y) \rightarrow (x + 1; y + 2)$



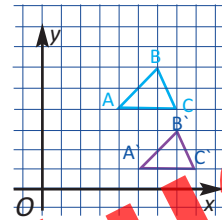
- 3 > Təpə nöqtələri $A(3, -4)$, $B(3; 2)$, $C(5, 1)$ olan $\triangle ABC$ $(x; y) \rightarrow (x - 2; y + 1)$ paralel köçürməsi ilə $\triangle A'B'C'$ -ə çevrilir. $\triangle A'B'C'$ -in təpə nöqtələrinin koordinatlarını müəyyən edin və üçbucaqları çəkin.
- 4 > Təpə nöqtələri $A(2; -1)$, $B(4; 2)$, $C(-3; 3)$ olan $\triangle ABC$ verilir. Paralel köçürülmədə A nöqtəsi $A'(-1; -1)$ nöqtəsinə çevrilmişdir. Eyni paralel köçürmə ilə B nöqtəsi B' və C nöqtəsi C' -ə çevrilmişdir. B' və C' nöqtələrinin koordinatlarını tapın.
 Bu paralel köçürməni $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$ şəkildə yazın.

- 5 > Şəkində 9 konqruent düzbucaqlı göstərilmişdir. Burada A nöqtəsi paralel köçürmə ilə G nöqtəsinə çevrilir. Eyni paralel köçürmə ilə aşağıdakı nöqtələrin hər birinin çevrildiyi nöqtəni müəyyən edin.

- a) F b) E c) B d) J e) I



- 6 > $\triangle ABC$ -nin təpə nöqtələri $A(4, 4)$, $B(6, 6)$ və $C(7, 4)$ kimidir, $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 3)$ $\triangle ABC$ -nin $\triangle A'B'C'$ -ə çevrilməsini ifadə edir.
 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ olduğunu isbat edin.



İsbat üçün plan:

- 1) Paralel köçürməni tətbiq etməklə A' , B' , C' nöqtələrinin koordinatlarını tapın.
- 2) İki nöqtə arasındakı məsafə düsturunu tətbiq edin.
- 3) Üçbucaqların konqruentlik əlamətlərindən istifadə edin.

LAYIHƏ

7 > Paralel köçürməyə görə fiqurun təpə nöqtələrinin yeni koordinatlarını yazın.

a) 3 vahid Ox oxu və -2 vahid Oy oxu boyunca
F(-4; 1), A(-2; 5), S(-1; 4), N(-1; 2)

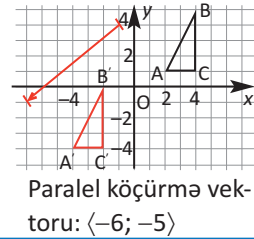
b) -4 vahid Ox oxu və -3 vahid Oy oxu boyunca
D(-4; -3), E(-2; -2), F(-2; -4)

✓ Paralel köçürmə və vektorlar

Hər bir paralel köçürmə bir vektor müəyyən edir. Yəni paralel köçürmədə fiqurun bütün nöqtələrinin yerdəyişməsi bir vektor üzrə icra edilir. Paralel köçürmənin vektorla ifadəsi yazılışları da sadələşdirir. Vektorun $u \langle a; b \rangle$ komponentləri Ox oxu və Oy oxu boyunca nöqtənin yerdəyişməsini göstərir. Aşağıdakı şəkildə ΔABC -nin $\vec{u} \langle -6; -5 \rangle$ vektoru üzrə paralel köçürməsi təsvir edilmişdir.

Vektorun komponentlərindən istifadə etməklə fiqurun yerdəyişməsini müəyyən etmək olar. ABC üçbucağının bütün nöqtələri $\vec{u} \langle -6; -5 \rangle$ vektorunun uzunluğu qədər yerini dəyişərək $\Delta A'B'C'$ -yə çevrilmişdir.

Vektorun uzunluğu $|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2} \approx 7,8$ (vahid)



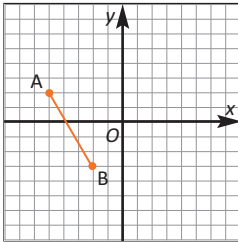
8 > Paralel köçürmələrə uyğun vektorları komponentləri ilə yazın:

a) 5 vahid sağa 8 vahid yuxarı;
c) 3 vahid sola, 5 vahid aşağı;

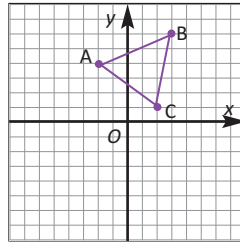
b) 2 vahid sola, 5 vahid yuxarı;
d) 4 vahid sola, 5 vahid aşağı.

9 > Verilən vektorlara görə fiqurları paralel köçürün.

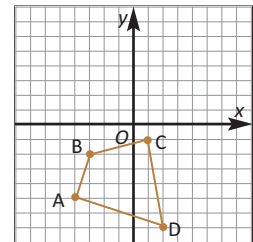
a) $\langle -2; 5 \rangle$



b) $\langle 1; -4 \rangle$



c) $\langle 3; 2 \rangle$



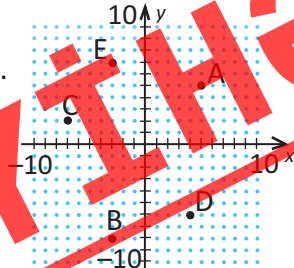
10 > A(-3; -2) nöqtəsi $(x; y) \rightarrow (x + 5; y + 3)$ qaydası ilə paralel köçürülmüş, A' nöqtəsinə çevrilmişdir. 1) paralel köçürməni müəyyən edən vektoru yazın; 2) A' nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

11 > Paralel köçürməni müəyyən edən vektoru yazın.

a) $B \rightarrow D$

b) $A \rightarrow C$

c) $A \rightarrow B$



LAYIHƏ

8-7

Hərəkət və konqruyent fiqurlar

Tutaq ki, F fiqurunun hər bir nöqtəsinə müstəvinin müəyyən nöqtəsi qarşı qoyulub. Belə nöqtələr çoxluğu ümumi halda F -dən fərqli F' fiqurunu əmələ gətirir. Bu halda deyilir ki, F' fiquru F fiqurunun çevrilməsi ilə alınmışdır. Müstəvi də həndəsi fiqurdur. Müstəvinin özünə çevrilməsində onun ixtiyari nöqtəsi bu müstəvinin nöqtəsinə çevrilir, həm də bu çevrilmədə müstəvinin hər bir nöqtəsinə çevrilən nöqtə var. Fiqurların çevrilməsində nöqtələr arasındakı məsafə saxlanarsa, fiqurun bütün həndəsi xassələri saxlanılır və fiqur özünə konqruyent fiqura çevrilir. Belə çevrilmələrə hərəkət deyilir.

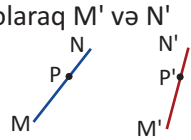
İki ardıcıl hərəkətin nəticəsi də hərəkətdir.

Teorem. Hərəkətdə parça parçaya çevrilir.

İsbatı. Tutaq ki, verilmiş hərəkətdə MN parçasının ucları uyğun olaraq M' və N' nöqtələrinə çevrilir. İsbat edək ki, MN parçası $M'N'$

parçasına çevrilir. MN parçası üzərində ixtiyari P nöqtəsi

götürək: $MP + PN = MN$. P nöqtəsinin çevrildiği nöqtə P' olsun.



Hərəkətdə məsafə saxlandığı üçün

$$M'N' = MN, M'P' = MP, N'P' = NP.$$

Buradan $M'P' + P'N' = M'N'$. Bu o deməkdir ki, P' nöqtəsi $M'N'$ parçası

üzərindədir, yəni MN parçasının P nöqtəsi $M'N'$ parçasının P' nöqtəsinə keçir.

$M'N'$ parçasının hər bir P' nöqtəsi üçün MN parçasının elə P nöqtəsi varmı ki, bu hərəkətdə P' -ə keçsin? Bəli, MN üzərində $MP = M'P'$ şərtini ödəyən

P nöqtəsi götürsək, bu nöqtə P' -ə keçər. Teorem isbat olundu.

Nəticə: Hərəkətdə üçbucağın hər bir tərəfi konqruyent parçaya çevrildiyindən üçbucaq konqruyent üçbucağa (TTT əlamətinə görə) çevrilir. Hərəkətdə düz xətt düz xəttə, şüa şüaya, bucaq özünə bərabər bucağa çevrilir.

Paralel köçürmə, mərkəzi simmetriya, ox simmetriyası, dönmə hərəkətdir, yəni bu çevrilmələrdə fiqur konqruyent fiqura çevrilir.

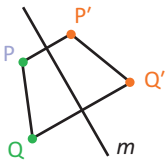
Bunu ox simmetriyası (əksetmə) üzərində araşdıraq.

Teorem. Düz xəttə nəzərən simmetriya çevrilməsi (əksetmə) hərəkətdir.

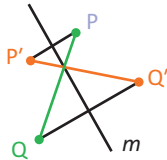
Şəkildə PQ parçasının m xəttinə görə əksetmə hərəkəti təsvir edilmişdir.

PQ parçası və m düz xəttinin vəziyyətinə görə 4 müxtəlif hala baxaq.

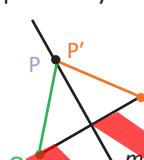
1. P və Q nöqtələri m düz xəttinin bir tərəfindədir.



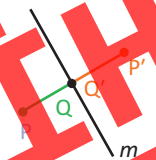
2. P və Q nöqtələri m düz xəttinin müxtəlif tərəfindədir.



3. Nöqtələrdən biri düz xəttin üzərindədir, PQ m düz xəttinə perpendikulyar deyil.



4. Q nöqtəsi m düz xəttinin üzərindədir $PQ \perp m$

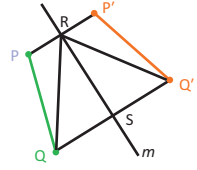


1-ci hala görə teoremi isbat edək.

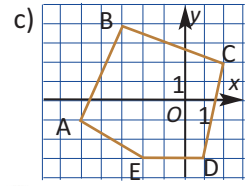
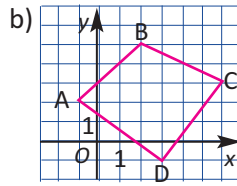
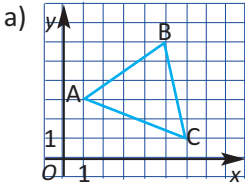
Mətnlə isbat. Bu halda P və Q nöqtələri m düz xəttindən eyni tərəfdədir.

Əksetmə hərəkətinin tərifinə görə RS parçası PP' və QQ' parçalarının orta perpendikulyarı olduğundan $RQ \cong RQ'$ və $\angle QRS \cong \angle Q'RS$.

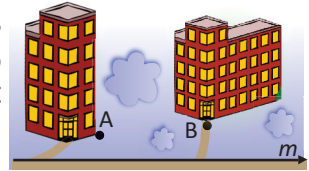
$PR \cong RP'$, $\angle PRQ \cong \angle P'RQ'$ olduğundan TBT əlamətinə görə $\Delta RQP \cong \Delta RQ'P'$. Teorem isbat olundu.



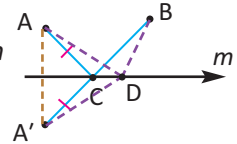
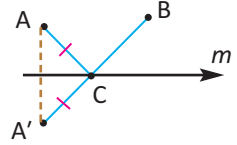
1 > Çoxbucaqlıların Ox və Oy oxlarına görə əksetməsinə təsvir edin.



2 > Düz xətti m yolunun kənarında yerləşən A və B binalarına telefon çəkmək üçün paylayıcı cihazı elə C nöqtəsində yerləşdirmək lazımdır ki, $AC + BC$ minimum olsun və mümkün qədər az kabel işlənilsin. Paylayıcı cihazın yerləşdiyi C nöqtəsini necə müəyyən etmək olar?



Həlli. A nöqtəsinin m düz xəttinə nəzərən əksetməsi ilə çevrildiği A' nöqtəsini qeyd edək və $A'B$ parçasını çəkək, m düz xətti ilə kəsişməsinə C nöqtəsi ilə qeyd edək. $A'B$ parçası A' və B nöqtələri arasındakı ən qısa məsafədir və $AC = A'C$ olduğundan, C nöqtəsi bu məqsədlə seçilmiş ən əlverişli nöqtədir. Doğrudan da, m düz xəttinin başqa bir D nöqtəsi üçün üçbucaq bərabərsizliyindən:



$$AD + DB = A'D + DB > A'B = A'C + CB = AC + CB$$

3 > Absis oxu üzərində elə C nöqtəsi tapın ki, $AC + BC$ minimum olsun.

a) $A(1, 5)$, $B(7, 1)$

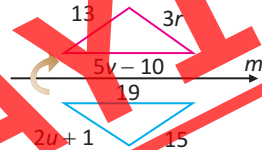
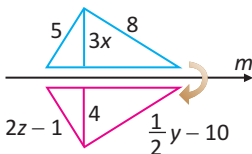
b) $A(2, -2)$, $B(11, -4)$

c) $A(-1, 4)$, $B(6, 3)$

d) $A(-4, 6)$, $B(3, 9)$

Nümunə. Ox oxu üzərində elə C nöqtəsi tapın ki, $AC + CB$ məsafəsi ən kiçik olsun. $A(1; 5)$ nöqtəsinə Ox oxuna görə simmetrik köçürək: $A'(1; -5)$. $A'(1; -5)$ və $B(7; 1)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi $y = x - 6$ şəklindədir. Bu düz xəttin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsi C (6; 0) olur.

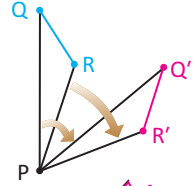
4 > Şəkilə m düz xəttinə nəzərən əksetmə hərəkəti təsvir edilmişdir. Dəyişənlərin qiymətlərini tapın.



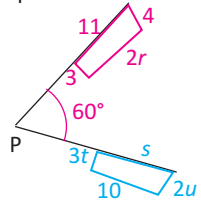
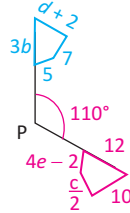
LAYIHƏ

- 5 > Şəkil dönmə hərəkəti nəticəsində Q nöqtəsinin Q', R nöqtəsinin R' nöqtəsinə çevrilməsini əks etdirir. **İsbat edin:** $PQ \cong P'Q'$

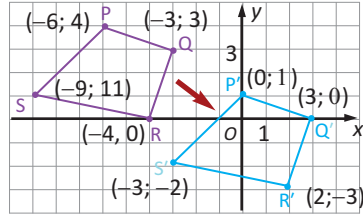
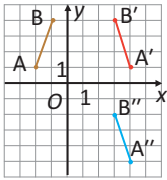
İsbat üçün plan: Dönmənin tərifinə görə $PQ \cong PQ'$, $PR = PR'$ və $\angle QPQ' \cong \angle RPR'$. Bucaqların toplanması və üçbucaqların konqruyentlik əlamətindən istifadə etməklə isbatı tamamlayın.



- 6 > Şəkində çoxbucaqlının P nöqtəsi ətrafında dönmə hərəkəti təsvir edilmişdir. Verilənlərə görə dəyişənləri tapın.



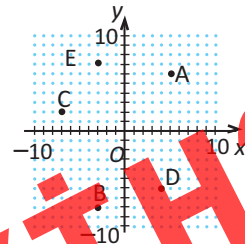
- 7 > Üçbucağın təpələri A(-1, 0), B(2, 3), C(3, -3) nöqtələrindədir. Bu üçbucaq $u \langle 4; -2 \rangle$ vektoru ilə paralel köçürülmüşdür. Alınan üçbucağın təpələrinin koordinatlarını yazın.
- 8 > AB parçası hansı iki ardıcıl hərəkət nəticəsində A''B'' parçasına çevrilmişdir?
- 9 > Paralel köçürmənin icra olunduğu vektoru şəkllə görə yazın.



- 10 > a) $(x; y) \rightarrow (x + 3; y + 2)$ koordinatlarının dəyişməsini sözlə yazın.
 b) A(-3; 5) nöqtəsi Ox oxuna nəzərən əskətmə hərəkəti nəticəsində A' nöqtəsinə çevrilmişdir. A' nöqtəsinin koordinatlarını yazın.
 c) D(3; 4) nöqtəsi koordinat başlanğıcına nəzərən 180° dönmüşdür. D' nöqtəsinin koordinatlarını yazın.
 d) E(-3; 4) nöqtəsi $u \langle 4; 5 \rangle$ vektoruna görə paralel köçürmə ilə E' nöqtəsinə çevrilmişdir. E' nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

- 11 > Verilən vektora görə paralel köçürmədə C nöqtəsinin çevrildiyi nöqtəni göstərin.

a) $\langle 4; 5 \rangle$ b) $\langle 11; -8 \rangle$ c) $\langle 4; -10 \rangle$



- 12 > Koordinat müstəvisində koordinat başlanğıcına görə hər bir dönmədə (saat əqrəbi və onun əks istiqamətində) koordinatların dəyişmə qaydasını tamamlayın. Şəkil üzərində göstərin.

a) 90° $(x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$ b) 180° $(x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$
 c) 270° $(x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$ d) 360° $(x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > $\vec{u} = \langle 6; 2 \rangle$, $\vec{v} = \langle 1; 4 \rangle$, $\vec{d} = \langle 2; 5 \rangle$ və $\vec{z} = \langle -2; -5 \rangle$ olduğuna görə vektorların cəmini tapın.

a) $\vec{v} + \vec{d}$
d) $\vec{v} + \vec{z}$

b) $\vec{u} + \vec{v}$

e) $\vec{u} + \vec{z}$

c) $\vec{u} + \vec{d}$

f) $\vec{d} + \vec{z}$

- 2 > Verilən koordinatlara görə $\vec{PQ}$ və $\vec{RS}$ vektorlarının bərabər, paralel, əks və ya bunlardan heç biri olmadığını əsaslandırın.

$P(8; -7)$, $Q(-2; 5)$, $R(8; -7)$, $S(7; 0)$

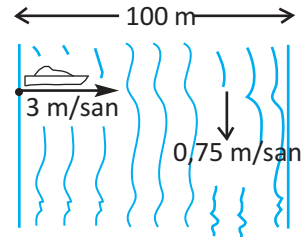
- 3 > Cismə şaquli və üfüqi istiqamətlərdə tətbiq edilmiş iki qüvvənin əvəzləyicisinin qiyməti 40 N, meyil bucağı 22° -dir. Cismə tətbiq edilmiş qüvvələrin qiymətlərini tapın.

- 4 > $M(3; 5)$ və $C(9; 8)$ nöqtələri verilir. K nöqtəsi MC parçasını $MC : KC = 2 : 1$ nisbətində bölür. MK parçasının uzunluğunu tapın.

MK :

- 5 > Qayıq durğun suda 3 m/san sürətlə hərəkət edir. Çayın eni 100 m, axın sürəti isə 0,75 m/san-dir. Qayıq çayın axma istiqamətinə perpendikulyar hərəkətə başlamaqla çayın bir sahilindən digərinə doğru üzür.

- a) Qayığın sürəti saniyədə neçə metr olacaq?
b) Qayıq çayı neçə dərəcə bucaq altında keçəcək?
c) Qayıq çayı nə qədər vaxta keçəcək?
d) Qayıq planlaşdırılan istiqamətdə hərəkətdə çatacağı nöqtədən neçə metr aralıda sahilə yan alacaq?



- 6 > Modulu və meyil bucağı verilmiş vektorları komponentləri ilə yazın.

1) $|\vec{v}| = 12$; $\varphi = 60^\circ$

2) $|\vec{v}| = 16$; $\varphi = 120^\circ$

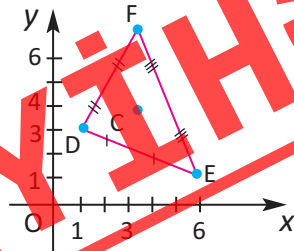
3) $|\vec{v}| = 28$; $\varphi = 150^\circ$

4) $|\vec{v}| = 4$; $\varphi = 135^\circ$

- 7 > $|\vec{a}| + |\vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$ təklifini nəzərdən keçirin. a) Təklifi sözlə yazın.

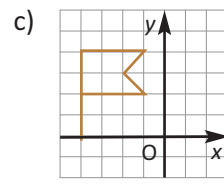
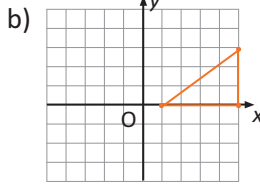
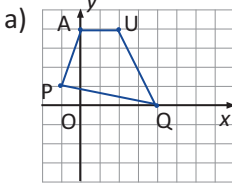
b) Təklif doğrudur, yoxsa yanlış? Cavabınızı əsaslandırın.

- 8 > Medianların kəsişmə nöqtəsi üçbucağın ağırlıq mərkəzi adlanır. $D(1; 3)$ və $E(6; 1)$ nöqtələri $\triangle DEF$ -in təpə nöqtələri, $C(3; 4)$ isə onun ağırlıq mərkəzini göstərir. F təpəsinin koordinatlarını müəyyən edin.



LAYIHƏ

- 9 > Şəkilləri dəftərinizdə çəkin. Hər birini verilən vektora görə paralel köçürün.

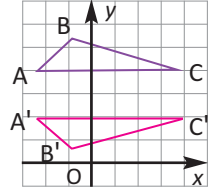


- 10 > P(6; -2) nöqtəsi P' nöqtəsinə paralel köçürülmüşdür. Hər bir hal üçün paralel köçürmə vektorunu müəyyən edin.

a) P' (2; 0)

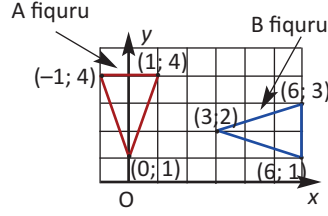
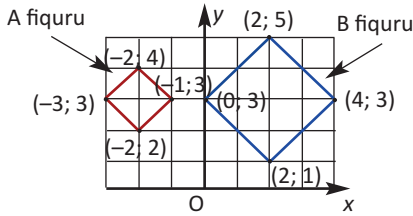
b) P' (-3; 1)

c) P' (8; -3)



- 11 > $\triangle ABC$ əksətmə hərəkəti ilə $\triangle A'B'C'$ -ə çevrilmişdir. Əksətmə xəttini müəyyən edin.

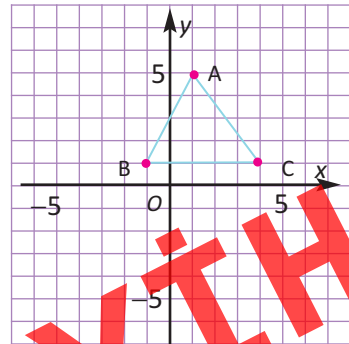
- 12 > Elə iki ardıcıl çevrilmə təsvir edin ki, A fiqurundan B fiqurunu almaq mümkün olsun.



- 13 > A (2, -2), B (2, 3), C (-4, -2) $\triangle ABC$ -nin təpə nöqtələridir. Üçbucaq Ox oxuna nəzərən əks edilmiş və koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinin əksi istiqamətində 90° dönmüş, daha sonra isə 3 vahid aşağı, 2 vahid sola köçürülmüşdür. Hər bir hərəkətə uyğun şəkli çəkin və təpə nöqtələrinin koordinatlarını yazın: a) əksətmədən sonra; b) dönmədən sonra; c) paralel köçürmədən sonra.

- 14 > Hər bir çevrilmədən sonra A', B', C' təpə nöqtələrinin koordinatlarını yazın.

- 1) $\langle 3; 0 \rangle$ vektoruna görə paralel köçürmə;
- 2) $\langle -4; 2 \rangle$ vektoruna görə paralel köçürmə;
- 3) Oy oxuna nəzərən əksətmə;
- 4) $x = -2$ xəttinə nəzərən əksətmə;
- 5) C nöqtəsi ətrafında saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində 90° dönmə;



- 6) Koordinat başlanğıcı ətrafında 180° dönmə;
- 7) Mərkəzi A nöqtəsində olmaqla $k = 2$ əmsallı homotetiya;
- 8) Mərkəzi koordinat başlanğıcında olmaqla $k = 2$ əmsallı homotetiya.

9

Ədədi ardıcılıqlar

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

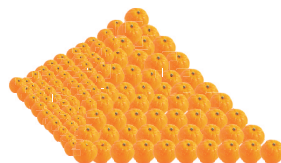
- ✓ Ədədi ardıcılıq və onun verilmə üsulları;
- ✓ Ədədi və həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturlarını;
- ✓ Ədədi və həndəsi silsilənin hədlərinin xassələri;
- ✓ Ədədi və həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturlarını;
- ✓ Ədədi və həndəsi silsiləyə aid məsələlər həll etməyi.



9-1

Ədədi ardıcılıq

Araşdırma. Satış dəzgahında portağallar 1-ci cərgədə 1, 2-ci cərgədə 4, 3-cü cərgədə 9 və s. portağal olmaqla, oturacağı kvadratşəkilli piramida əmələ gətirərək qat-qat yığılmışdır.



1) İlk 5 qatdakı portağalların sayını göstərən cədvəli tamamlayın.

n	1	2	3		
					
a_n	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$		

2) İstənilən qatdakı (n -ci cərgədəki) portağalların sayını (a_n) tapmaq üçün düstur yazın.

3) Bu düstura görə 4-cü, 7-ci, 10-cu qatdakı portağalların sayını tapın.

4) Portağalların sayının qatların nömrəsindən asılılığını göstərən qrafiki dəftərinizdə çəkin.

LAYIHƏ

♦ Natural ədədlərlə ardıcıl nömrələnmiş ədədlər çoxluğuna ədədi ardıcılıq deyilir.

Məsələn, 5, 10, 15, 20, 25, ...
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \dots \end{matrix}$

♦ Ardıcılığı əmələ gətirən ədədlərə uyğun olaraq ardıcılığın birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü və s. hədləri deyirlər. Ardıcılığın hədlərini adətən hərflərlə işarə edirlər, hərfin indeksi həddin sıra nömrəsini göstərir. Məsələn, birinci hədd a_1 , ikinci hədd a_2 , n -ci hədd a_n və s. Ardıcılığın özünü belə işarə edəcəyik: (a_n) və ya (b_n) və s.

♦ Ardıcılıqlar sonlu və sonsuz ola bilər. Məsələn, ikirəqəmli ədədlər ardıcılığı sonlu ardıcılığa misal ola bilər. Natural ədədlər ardıcılığı isə sonsuz ardıcılıqdır.

♦ Adətən, ardıcılığı onun n -ci həddini n nömrəsinin funksiyası kimi ifadə edən düsturun köməyi ilə verirlər. Belə düstura ardıcılığın n -ci həddinin düsturu deyilir.

Nümunə 2, 4, 6, 8, ... cüt ədədlər ardıcılığıdır. Onun istənilən həddini $a_n = 2n$ düsturu ilə tapmaq olar. Bu ardıcılığın 10-cu həddi: $a_{10} = 2 \cdot 10 = 20$

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Hədlərin dəyişmə qanunauyğunluğunu müəyyən edib, ardıcılıqların növbəti iki həddini yazın.

a) 1; 3; 5; 7; ...

b) 1; 10; 100; 1000; ...

c) -5; 10; -15; 20; ...

d) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}; \dots$ e) $\frac{1}{10}; \frac{2}{20}; \frac{3}{30}; \frac{4}{40}; \dots$ f) 1,9; 2,7; 3,5; 4,3; ...

2 > Verilən düstura görə ardıcılığın ilk beş həddini yazın.

$$a_n = n + 1$$

$$a_n = (n + 1)^2$$

$$a_n = 3 - n$$

$$a_n = (n - 1)^2$$

$$a_n = n^2 + 1$$

$$a_n = n(n - 1)$$

$$f_n = \frac{n-1}{n}$$

$$f_n = \frac{n+2}{2n}$$

3 > a) Hədləri 3-ün bölünəni olan natural ədədlər ardıcılığının ilk yeddi həddini yazın. Onun 5-ci və n -ci həddini göstərin.

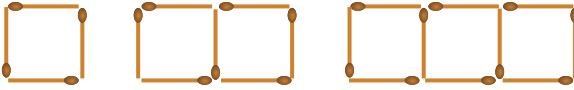
b) 3-ə bölündükdə qalığı 1 olan natural ədədlər ardıcılığının ilk beş həddini yazın.

LAYIHƏ

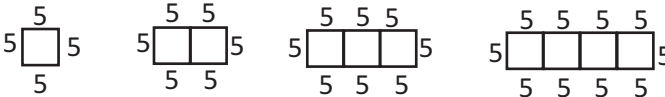
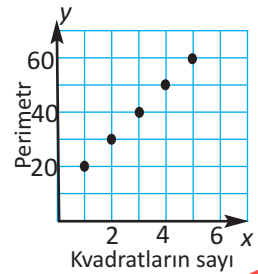
- 4 > a) (a_n) ardıcılığının hansı həddi : 1) $a_7, a_{72}, a_k, a_{k+4}$ həddindən sonra gəlir?
2) a_6, a_{50}, a_k, a_{2k} həddindən əvvəl gəlir?
- b) (b_n) ardıcılığının verilmiş iki həddi arasında yerləşən hədlərini sadalayın
: 1) b_{11} və b_{15} , 2) b_k və b_{k+3} , 3) b_{n-3} və b_{n+2}
- 5 > 1) Ardıcılıq $b_n = 2n^2 + 1$ düsturu ilə verilmişdir.
a) 4; b) 5; c) 7; d) $k + 1$ nömrəli həddini tapın.
- 2) $c_n = 4n - 1$ düsturu ilə verilən ardıcılığın: a) 27-yə; b) 35-ə; c) 71-ə bərabər həddinin nömrəsini göstərin.
- 6 > 1) $a_n = n^2 - 8n$ düsturu ilə verilən ardıcılığın:
a) 20-yə; b) 48-ə; c) -15-ə; d) 0-a; e) 4-ə.
bərabər həddi varmı? Varsa, bu həddin nömrəsi neçədir?

Tətbiq tapşırıqları

- 7 > Şəkində göstərilmiş qayda ilə 5-ci addımda quraşdırılmış fiqurda neçə kibrit çöpündən istifadə edilmiş olacaq? İstənilən addımdakı kibrit çöplərinin sayını ifadə edən düstur yazın.



- 8 > Tərəfləri 5 vahid olan kvadratlar şəkində göstərilən qayda ilə yan-yanı düzülür. a) hər addımda düzülmüş kvadratların yaratdığı fiqurun perimetrini tapın.
b) n -ci addımda yaranan fiqurun perimetrini tapın.
c) Qrafikin bu ardıcılığı ifadə etdiyini izah edin.



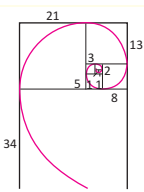
- 9 > $a_n = 4^n - 1$ düsturu ilə verilən ardıcılığın hədləri 3-ə, $c_n = 5^n - 1$ düsturu ilə verilən ardıcılığın hədləri isə 4-ə bölünür. İlk beş hədd üçün bunu yoxlayın.

LAYIHƏ



Təbiətin bir çox hadisələrinin Fibonaççi ardıcılığı ilə bağlı olduğu müşahidə edilir.

Fibonaççi İtaliyanın Piza şəhərində anadan olmuşdur. O, Liber Abaci (abakus kitabı və ya hesablama qaydası) əsərini



yazmaqla müasir dövrdə istifadə olunan hind-ərəb onluq say sistemini Avropaya tanıtmışdır. Onun dövründə Avropada ədədlərin yazılışında və hesablamalarda Roma rəqəmlərindən istifadə edilirdi. Fibonaççi həmçinin bu əsərində dovşanların çoxalma ardıcılığına aid məsələnin həllinə geniş yer ayırmışdır. Bu ardıcılığın hədləri: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Bu sıranın hədləri ($n \geq 2$) üçün $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ doğrudur. Fibonaççi sırasını daha 3 addım davam etdirin.



Ardıcılığın verilməsinin rekurrent və analitik üsulları

Ardıcılığın bəzi hədlərindən başlayaraq, onun istənilən həddini ondan əvvəlki (bir və ya bir neçə) hədlərlə ifadə edən düstura **rekurrent düstur** deyilir. (latın sözü rekurre-geri dönmək mənası verir).

Məsələn, 3; 6; 12; 24; ... ardıcılığında $a_1 = 3$ olduqda, $a_{n+1} = 2a_n$ düsturu rekurrent düsturdur və ardıcılığı bu qayda ilə davam etdirmək olar.

Bir çox hallarda isə ardıcılıq onun istənilən n -ci həddini bu həddin nömrəsi ilə ifadə edən düsturla verilir. Ardıcılığın n -ci həddinin düsturla verilməsi **analitik** üsuldur.

Məsələn, $a_n = 2^n - 1$ düsturu ilə verilmiş ardıcılığın ilk 5 həddi:

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, a_5 = 31, a_6 = 63$.

10 > Verilən ardıcılıq üçün rekurrent düsturu və n -ci həddin düsturunu yazın.

1. Tək natural ədədlər ardıcılığı; 2. Cüt natural ədədlər ardıcılığı.

11 > Rekurrent düsturla verilmiş ardıcılığın ilk 5 həddini yazın.

a) $a_1 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 2$

c) $a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

b) $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1$

d) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

12 > Araşdırma. Qruplarla iş.

a) $a_1 = 11$ olarsa, verilən şərtlərlə düsturlardan istifadə edin və ardıcılığın ilk dörd həddini yazın.

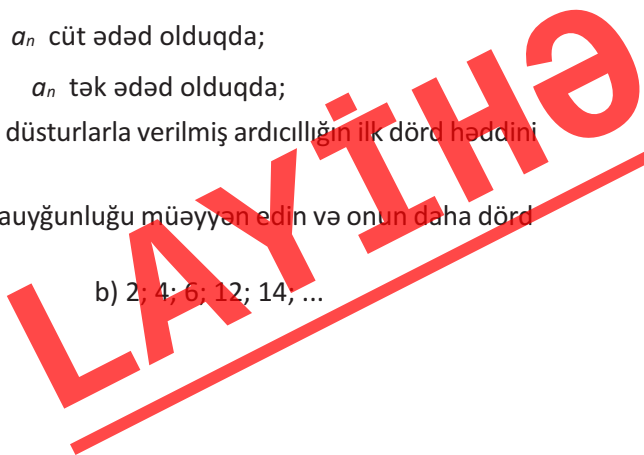
$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & a_n \text{ cüt ədəd olduqda;} \\ 3a_n + 1 & a_n \text{ tək ədəd olduqda;} \end{cases}$$

b) $a_1 = 6$ olduqda a) bəndindəki düsturlarla verilmiş ardıcılığın ilk dörd həddini yazın.

13 > Ardıcılığın hədləri üçün qanunauyğunluğu müəyyən edin və onun daha dörd həddini yazın.

a) 3; 6; 4; 8; 6; 12; 10; ...

b) 2; 4; 6; 12; 14; ...



Araşdırma. Dam örtüyü quraşdırılarkən kirəmitlər müəyyən qayda ilə düzülür. Şəkildəki dam örtüyündə kirəmitlərin düzülüş qaydası cədvəldə veriləyi kimidir.



Cərgə	1	2	3	4	5	6	7	8
Kirəmit	3	4	5	6	7	8	9	10

- 1) Hər cərgədəki kirəmitlərin sayı ilə özündən sonrakı cərgədəki kirəmitlərin sayları fərqi tapın.
- 2) Bu fərqə və birinci cərgədəki kirəmitlərin sayına görə hər hansı cərgədəki kirəmitlərin sayını tapmaq mümkündürmü?
- 3) Kirəmitlərin sayları ardıcılığını rekurrent və analitik üsulla təqdim edin.

9-2

Ədədi silsilə

Tərif. Ədədi ardıcılığın ikincidən başlayaraq hər bir həddi özündən əvvəlki həddlə bu ardıcılıq üçün eyni olan bir ədədin cəminə bərabər olarsa, belə ardıcılığa **ədədi silsilə** deyilir. Yəni, istənilən natural n üçün $a_{n+1} = a_n + d$ olarsa, onda (a_n) ardıcılığı ədədi silsilədir, burada d verilən ardıcılıq üçün sabit bir ədəddir. Bu d ədədinə silsilənin fərqi deyilir. Tərifdən belə nəticə çıxır ki, $d = a_{n+1} - a_n$ bərabərliyi istənilən n natural ədədi üçün doğrudur. Xüsusi halda, $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$. n -ci həddi a_n olan ədədi silsilə simvolik olaraq $\div (a_n)$ kimi işarə olunur. Ədədi silsiləni vermək üçün onun birinci heddini və fərqi göstərmək kifayətdir.

1. Nümunə. Aşağıdakılardan hansının ədədi silsilə olduğunu müəyyən edin.

a) $-6, 0, 6, 12, 18, 24, \dots$

6 6 6 6 6

ardıcılığı ədədi silsilədir, çünki iki qonşu hədd arasındakı fərq həmişə sabit qalır.

b) $-1, -3, -6, -10, -15, -21, \dots$

-2 -3 -4 -5 -6

ardıcılığı ədədi silsilə deyil, çünki iki qonşu hədd arasındakı fərq dəyişir.

Ədədi silsilənin fərqi müsbət ədəd, mənfi ədəd və ya sıfır ola bilər. $d > 0$ olduqda, ikincidən başlayaraq hər bir hədd əvvəlki həddən böyük (artan ardıcılıq), $d < 0$ olduqda isə kiçik (azalan ardıcılıq) olur.

2. Nümunə. a) $a_1 = 2, d = 3$ şərtinə görə ədədi silsilə: 2; 5; 8; 11; 14; 17; ... kimi olar. Bu silsilənin rekurrent düsturu: $a_{n+1} = a_n + 3$

b) $a_1 = 11, d = -4$ şərtinə görə ədədi silsilə: 11; 7; 3; -1; -5; ... kimi olar. Bu silsilənin rekurrent düsturu: $a_{n+1} = a_n - 4$

$d = 0$ olduqda isə bütün hədlər eyni bir ədədə (1 həddə) bərabər olmaqla sabit ardıcılıq alınır. Məsələn, 5; 5; 5; ...

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Verilən ardıcılıqlardan hansı ədədi silsilədir? Bu silsilənin fərqi tapın. Silsilə üçün rekurrent düsturu yazın.
 - a) $-1,9; -2,1; -2,5; -3,1; -3,9; \dots$
 - b) $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{5}{2}; \dots$
 - c) $-1,6; -1,3; -1,0; -0,7; -0,4; \dots$
 - d) $\frac{13}{2}; \frac{13}{3}; \frac{13}{4}; \frac{13}{5}; \frac{13}{6}; \dots$
- 2 > Ədədi silsilənin naməlum hədlərini tapın:
 - a) $x_1; 5; x_3; -3; -7; \dots$
 - b) $x_1; x_2; 17; 23; \dots$
- 3 > Birinci həddi və silsilə fərqi verilmiş ədədi silsilənin ilk beş həddini yazın.
 - a) $a_1 = -1,2 \quad d = 2$
 - b) $a_1 = 3, \quad d = -2$
- 4 > Rekurrent üsulla verilmiş ardıcılığın ilk dörd həddini tapın.
 - a) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - 3$
 - b) $a_1 = 1 \quad \frac{2}{3}, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}$

Ədədi silsilənin n -ci həddinin düsturu

Ədədi silsilənin hər bir həddi özündən əvvəlki hədlə bu ardıcılıq üçün eyni olan bir ədədin cəminə bərabərdir. Bu qaydaya görə:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \\ &\dots \end{aligned}$$

Bu qayda ilə $a_n = a_1 + (n-1)d$ olduğunu yaza bilərik.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ düsturu ədədi silsilənin n -ci həddinin düsturudur.

1. **Nümunə.** Ədədi silsilədə $a_1 = -2, d = 2,5$ olduqda a_6 və a_9 -u tapaq:

$$a_6 = a_1 + 5d = -2 + 5 \cdot 2,5 = 10,5$$

$$a_9 = a_1 + 8d = -2 + 8 \cdot 2,5 = 18$$

Qeyd edək ki, a_9 -u aşağıdakı üsulla da hesablamaq olar:

$$a_9 = a_1 + 8d = (a_1 + 5d) + 3d = a_6 + 3d = 10,5 + 3 \cdot 2,5 = 18$$

Ümumiyyətlə, $a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (k-1)d + (n-k)d = a_k + (n-k)d$ yəni, $a_n = a_k + (n-k)d$ bərabərliyi doğrudur.

Buradan da, silsilə fərqi üçün $d = \frac{a_n - a_k}{n - k} \quad (n \neq k)$ düsturunu alırıq.

2. **Nümunə.** Ədədi silsilədə $a_5 = 7, a_9 = 19$ olarsa, $d = ?$ $a_{12} = ?$

Həlli. $d = \frac{a_9 - a_5}{9 - 5} = \frac{19 - 7}{4} = 3, \quad a_{12} = a_9 + 3d = 19 + 9 = 28$

Qeyd: $a_n = a_1 + (n-1)d$ düsturunu $a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$ şəklində yazmaqla alırıq: istənilən ədədi silsilə $a_n = d \cdot n + b$ (burada d və b hər hansı ədədlərdir) şəklində düsturla verilə bilər. Bunun tərsi də doğrudur.

LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Ədədi silsilənin daha beş həddini yazın. Silsilə üçün rekurrent qaydanı və n -ci həddinin düsturunu yazın.

a) 11; 17; 23; ...	b) $-6; -2; 2; \dots$	c) $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}; \dots$
d) 3,5; 4,3; 5,1; ...	e) $\frac{17}{3}; \frac{15}{3}; \frac{13}{3}; \dots$	f) $-12; -10; -8; \dots$
- 2 > a) a_n ədədi silsiləsinin a_9 , a_{12} , a_{21} , a_{k+2} , a_{2k} hədlərini a_1 və d ilə ifadə edin.
 b) Ədədi silsilədə $a_1 = -4$, $d = 3$ olduqda a_6 və a_{15} hədlərini tapın.
- 3 > Ədədi silsilədə verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

a) $a_{12} = -7$, $d = 3$ a_1 və a_8	b) $a_5 = 6$, $d = -0,5$ a_1 və a_7	c) $c_1 = -\frac{4}{3}c_6 = \frac{1}{3}$ d və c_{11}
d) $c_1 = 0,5$, $c_{15} = -2,3$ d və c_{16}	e) $a_5 = -10$, $a_8 = 8$ a_1 və a_6	f) $a_4 = 7$, $a_7 = -2$ a_1 və a_9
g) $-20; -15; \dots$ olarsa, d və a_{10}	h) $5; 4,5; \dots$ olarsa, d və a_9	
- 4 > 4 və 40 ədədləri arasında elə dörd ədəd yazın ki, onlar verilmiş ədədlərlə birlikdə ədədi silsilə əmələ gətirsin.
- 5 > 1) Ədədi silsilədə $a_1 = -12$, $d = 3$ olarsa: a) 6-ya; b) 0-a; c) 9-a bərabər olan hədd varmı?
 2) $-2; 5; \dots$ ədədi silsiləsində: a) 53-ə; b) 75-ə bərabər olan hədd varmı? Varsa, bu həddin nömrəsini tapın.
- 6 > $-40; -37; \dots$ ədədi silsiləsində hansı hədlər üçün: a) $a_n > 0$; b) $a_n < 0$ şərti ödənilir?
- 7 > a) $a_1 = -18$; $d = 1,5$ olarsa, silsilənin ilk müsbət həddini tapın. Bu silsilənin neçə həddi mənfidir?
 b) $4,1; 3,9; \dots$ ədədi silsiləsində ilk mənfi həddi tapın.
- 8 > Ədədi silsilədə $x_1 = -45$; $d = 4$ olarsa, hansı hədlər üçün:
 a) $x_n > 99$; b) $x_n < 160$ bərabərsizliyi ödənilir?
- 9 > a) $x_n = 2n - 5$ düsturu ilə verilmiş ardıcılığın ədədi silsilə olduğunu göstərin. Onun birinci həddini və fərqi tapın.
 b) $(n+1)$ -ci və n -ci hədlərin fərqi tapmaqla $a_n = k \cdot n + b$ düsturu ilə verilmiş ardıcılığın ədədi silsilə olduğunu göstərin.
- 10 > a) Ədədi silsilədə $a_n = 2n + 3$ olarsa, a_8 və d -ni tapın.
 b) Ədədi silsilədə $a_n = 1 - 4n$ olarsa, a_6 və d -ni tapın.
- 11 > Zavod yanvar ayında 120 detal, hər sonrakı ayda əvvəlki aydakından 8 detal artıq hazırladı. Zavod may, dekabr aylarında neçə detal hazırladı?

- 12 > İlk altı həddini göstərməklə: a) artan ; b) azalan; c) bütün hədləri mənfəi olan; d) bütün hədləri cüt ədəd olan ədədi silsilələrə nümunələr yazın.

Təbiiq tapşırıqları

- 13 > Verilənlərə görə ədədi silsilələrin fərqlərini, altıncı və birinci həddini tapın.

$$a) \begin{cases} a_1 + a_7 = 42 \\ a_{10} - a_3 = 21 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 3 \\ a_2 \cdot a_3 = 8 \end{cases}$$

- 14 > Cism birinci saniyədə 6 m, hər sonrakı saniyədə əvvəlkindən 2 m çox yol getmişdir. Cism: a) beşinci saniyədə, b) ilk 5 saniyə ərzində hansı məsafəni getmişdir?

- 15 > Bir ədədi silsilənin hədlərinə başqa ədədi silsilənin uyğun hədlərini (eyni nömrəli hədlərini) əlavə etdikdə alınan ardıcılıq ədədi silsilə olarmı?

- 16 > Ədədi silsilədə $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{12}$ olarsa, bu silsilənin neçənci həddi $\sqrt{48}$ -ə bərabərdir?

- 17 > Stolların sayından asılı olaraq stulların sayının necə dəyişdiyini araşdırın. Bu qayda ilə düzülə: a) 7 stolun; b) 10 stolun; c) n sayda stolun arxasında neçə stul olacaq? **Göstəriş:** $a_n = a_1 + d(n - 1)$ düsturunda a_1 və d -ni tapın.

1 stol.



2 stol



3 stol



- 18 > **Arxitektura.** Bakıdakı “İçərişəhər”, “Koroğlu”, “Avtovağzal” metro stansiyalarında şəffaf piramida elementindən istifadə edilmişdir. Məsələn, “İçərişəhər” metro stansiyasının binasında ən yuxarı cərgədə 2 pəncərə, hər sonrakı cərgədə isə əvvəlkindən 2 pəncərə çox olmaqla dizayn edilmişdir. 12-ci cərgədə neçə pəncərə var? Neçənci cərgədə 18 pəncərə var?

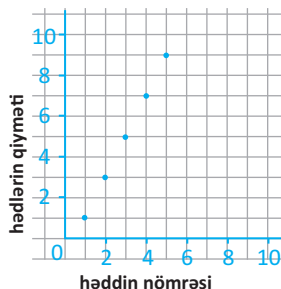


- 19 > a) Üç ədəd ədədi silsilə təşkil edir. Bu ədədlərin cəmi 12, hasil isə 28-dir. Bu ədədləri tapın.
 b) Üç ədəd ədədi silsilə təşkil edir. Ortadakı ədəd 8-dir. Bu ədədlərin kvadratları cəmi 264-dür. Digər iki ədədi tapın.
 c) 3; 8; 13; ... ; 58 ədədi silsiləsinin neçə həddi var?

- 20 > Verilən a_n ədədi silsilələrinin: a) ilk 5 həddini yazın; b) fərqlərini tapın; c) qrafik olaraq göstərin.

$$a_n = 4 + 2(n - 1) \quad \left| \quad a_n = \frac{5}{2} - (n - 1) \quad \left| \quad a_n = 4 - 3(n - 1) \quad \left| \quad a_n = \frac{1}{2}(n - 1) \right.\right.$$

- 21 > a) Qrafikdə $a_n = 2n - 1$ ədədi silsiləsinin hədlərinin nömrələri ilə qiymətləri arasındakı asılılıq əks edilmişdir. Qeyd edilmiş nöqtələrdən keçən düz xəttin tənliyini yazın.



b) $f(x) = 2x - 1$ (x həqiqi ədəddir) funksiyasının qrafikini qurun. Ədədi silsilənin qrafiki ilə xətti funksiyanın qrafikinə oxşar və fərqli cəhətlərini göstərin. Xətti funksiyanın düsturundakı bucaq əmsalı ədədi silsilədə nəyi ifadə edir?

- 22 > İlk həddi 6, silsilə fərqi 5, sonuncu həddi 66 olan ədədi silsilənin neçə həddi var?

- 23 > Əmanət kassasına qoyulmuş əmanət ildə 5% artır. Sadə faiz düsturu ilə hesablandıqda, 3 il müddətinə kassaya qoyulmuş 40000 manat pul hansı məbləğə çevrilir?

- 24 > Düzbucaqlı üçbucağın a , b , c tərəfləri artan ədədi silsilə təşkil edir. $c = 10$ sm olarsa, bu üçbucağın sahəsini tapın.

- 25 > Hər hansı ardıcılığın hədlərinin tərsi ədədi silsilə yaradırsa, bu ardıcılıqlar **harmonik ardıcılıq** adlanır. Aşağıdakı ardıcılığın harmonik olduğunu izah edin.

$$1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \dots$$

- 26 > Ədədi silsilənin ilk 6 həddi koordinat müstəvisində qeyd edilmişdir. Bu nöqtələrdən ikisinin koordinatları (3; 11) və (6; 23) kimidir. Bu ardıcılığın n -ci həddinin düsturunu yazın.

- 27 > Ədədi silsilənin bəzi hədləri cədvəllə verilmişdir. Cədvəli dəftərinizdə tamamlayın və silsiləni rekurrent qayda ilə təqdim edin. ($n \in \mathbb{N}$)

n	a_n
1	-3,5
2	1
4	

n	a_n
1	40
7	22
13	

n	a_n
1	
3	30
50	500
150	

Araşdırma 1) Hər hansı ədədi silsilənin ilk 10 həddini yazın. Məsələn, $a_1 = 4$, $d = 3$ olduqda, bu hədlər aşağıda yazılanlar olur:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

2) Orta hədlərdən hər hansı birini götürün və onu bu hədlə qonşu olan iki həddin ədədi ortası ilə müqayisə edin. Bərabərlik alındımı?

$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$
bərabərlikləri doğrudurmu?

9-3

Ədədi silsilənin hədlərinin xassələri

Xassə. Ədədi silsilənin ikincidən başlayaraq istənilən həddi, onunla qonşu olan hədlərin ədədi ortasına bərabərdir.

Doğrudan da, $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ bərabərliyindən $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ alınır.

Ümumi halda, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ olduğundan

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n \geq 2) \quad \text{bərabərliyi doğrudur.}$$

Bu xassəni belə ümumiləşdirmək mümkündür: ədədi silsilənin hər bir həddi (ikincidən başlayaraq) özündən eyni uzaqlıqda duran hədlərin ədədi ortasına bərabərdir:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

Bunun tərsi də doğrudur: əgər bir ardıcılığın ikincidən başlayaraq istənilən həddi, özündən əvvəlki və sonrakı hədlərin ədədi ortasıdırsa, onda bu ardıcılıq ədədi silsilədir.

Sonlu ədədi silsilənin uclarından eyni uzaqlıqda duran iki həddinin cəmi kənar hədlərin cəminə bərabərdir:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$$

Ümumi halda $m + k = n + p$ olarsa, $a_m + a_k = a_n + a_p$

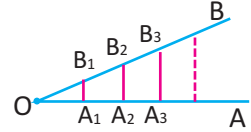
Öyrənmə tapşırıqları

- 1) a) Ədədi silsilədə $a_1 = 3$, $a_3 = 7$ olarsa, a_2 -ni tapın.
b) Ədədi silsilədə $a_4 + a_{10} = 6$ olarsa, tapın: 1) $a_5 + a_9$; 2) a_7
c) Ədədi silsilədə $a_8 = 5$ olarsa, $a_1 + a_{15}$ cəmini tapın.
- 2) Verilmiş ədədlərin ədədi silsilənin ardıcıl hədləri olduqlarını bilərək, x -i tapın.
a) $3x - 4$; 6; $x + 6$ b) $x - 2$; x^2 ; $3x + 2$
- 3) $\div (x_n)$ ədədi silsiləsinin hədləri üçün bərabərliyi isbat edin.
a) $x_1 + x_9 = x_4 + x_6$ b) $x_3 + x_{12} = x_8 + x_7$ c) $x_4 + x_{n-4} = x_6 + x_{n-6}$

Tətbiq tapşırıqları

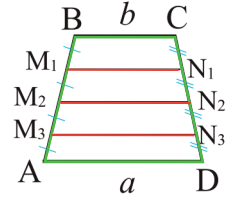
- 4 > Bir üçbucağın bucaqlarının dərəcə ölçüləri ədədi silsilə əmələ gətirir. Bu üçbucağın bucaqlarından birinin dərəcə ölçüsünün 60° olduğunu isbat edin.
- 5 > Üçbucağın perimetri 24 sm-dir. Bu üçbucağın tərəflərinin uzunluqları ədədi silsilə təşkil edir. Üçbucağın orta uzunluqlu tərəfini tapın.

- 6 > $\angle AOB$ -nin OA tərəfi üzərində təpədən başlayaraq bərabər parçalar ayrılmış və bölgü nöqtələrindən paralel düz xətlər çəkilmişdir. $A_1B_1 = 2$ sm olarsa, A_5B_5 parçasının uzunluğunu tapın.



- 7 > ABCD trapesiyasının AB yan tərəfi dörd bərabər hissəyə bölünmüş və bölgü nöqtələrindən oturaqlara paralellər çəkilmişdir.

- a) İsbat edin ki, BC , M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 və AD parçalarının uzunluqları ədədi silsilə təşkil edirlər.
- b) $AD = 18$ sm, $BC = 6$ sm olduqda M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 parçalarının uzunluqlarını tapın.



- 8 > $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ədədləri ədədi silsilə əmələ gətirərlərsə, $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$ bərabərliyinin doğruluğunu isbat edin.

- 9 > Verilən ədədlər arasında: 1) elə bir ədəd; 2) elə iki ədəd yazın ki, onlar ədədi silsilə əmələ gətirsinlər.

a) $-1; 5$ b) $30; 50$ c) $12; 48$ d) $0; 20$ e) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$

- 10 > Ədədi silsilənin 5-ci həddi c -yə bərabərdir. Bu silsilənin 2-ci həddi ilə 8-ci həddinin cəmini göstərən ifadəni yazın.

- 11 > Həkim xəstənin qəbul etdiyi dərmanı 5 gün ərzində bərabər dozalarla gündəlik 100 mq-dan 300 mq-a qədər artırmaq istəyir. Xəstənin 5 gün ərzində qəbul etdiyi dərmanın miqdarını ardıcıl yazın.

- 12 > a, b, c ədədləri ədədi silsilə təşkil edir. $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ ardıcılığının da ədədi silsilə olduğunu isbat edin.

LAYIHƏ

Praktik məşğələ. 1-dən 100-ə qədər natural ədədlərin cəmini tapaq. Tutaq ki, bu cəm x -ə bərabərdir. I cərgədə bu cəmin toplananlarını artan sırada, II cərgədə isə azalan sırada yazmaq və bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplayaq.

$$\begin{aligned}
 x &= 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\
 + \quad & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 x &= 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\
 2x &= \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101}_{100} \\
 x &= \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050
 \end{aligned}$$

Alınmış nəticəni $x = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$ şəklində yazmaq olar.

9-4

Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu

İstənilən ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmini S_n ilə işarə edək.

$$\begin{aligned}
 S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
 + \quad & \\
 S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1
 \end{aligned}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Sonlu ədədi silsilənin uclarından eyni uzaqlıqda duran hədlərinin cəmi kənar hədlərin cəminə bərabər olduğundan mötərizə daxili cəmlərin hər biri $(a_1 + a_n)$ -ə bərabərdir. Mötərizə daxili cəmlərin sayı n -ə bərabər olduğu

üçün $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, buradan isə $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ alırıq.

Sonlu ədədi silsilənin cəmi kənar hədlərin yarım cəmi ilə hədlərin sayının hasilinə bərabərdir.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ olduğundan ilk n həddin cəmi düsturu

$S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1)d) \cdot n}{2}$ şəklində yazmaq olar.

1. Nümunə. $a_n = 3n + 1$ düsturu ilə verilmiş ədədi silsilənin ilk on iki həddinin cəmini tapaq.

Həlli. $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ $a_{12} = 3 \cdot 12 + 1 = 37$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = (4 + 37) \cdot 6 = 246$$

2. Nümunə. $-3; 5; 13; \dots$ ədədi silsiləsində ilk on həddin cəmini tapaq.

Həlli. $a_1 = -3, a_2 = 5, d = 8, a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 72 = 69$

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (-3 + 69) \cdot 5 = 330$$

LAYIHƏ

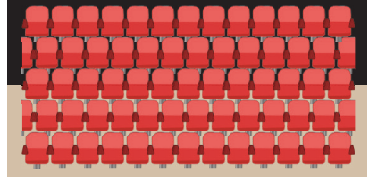
- 3. Nümunə.** Toplantı salonunda 30 sıra var. Birinci sırada 24 yer, hər sonrakı sırada isə bundan 1 yer çoxdur. Salonda neçə yer var?

Həlli: $a_1 = 24, d = 1, n = 30$

Sonuncu sırada: $a_{30} = 24 + 29 \cdot 1 = 53$ yer var.

30 sırada yerlərin ümumi sayı:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = 1155$$



- 4. Nümunə.** 5; 7; 9; ... ədədi silsiləsinin ilk neçə həddini toplasaq, 320 alınar?

Həlli: $320 = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}, \quad \frac{(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 2) \cdot n}{2} = 320,$

$$\frac{(8 + 2n) \cdot n}{2} = 320, \quad n^2 + 4n = 320, \quad n^2 + 4n - 320 = 0$$

$$(n - 16)(n + 20) = 0, \quad n_1 = 16, n = -20.$$

Hədlərin sayı mənfi ədəd ola bilməz, deməli, bu silsilənin ilk 16 həddinin cəmi 320-dir.

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2} = \frac{(n \cdot d + (2a_1 - d)) \cdot n}{2} = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2a_1 - d}{2} \cdot n$$

şəklində yazıb, $\frac{d}{2} = a, \quad \frac{2a_1 - d}{2} = b$ işarə etməklə alırıq ki, istənilən

ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n$ şəklində olur.

S_n məlumdursa, ədədi silsilə verilmiş hesab oluna bilər.

- 5. Nümunə.** İlk n həddinin cəmi $S_n = 2n^2 - 3n$ düsturu ilə verilən ədədi silsilənin fərqi və birinci həddini tapmaq.

Həlli:

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1$$

$$a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = S_2 - S_1 = (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2) - (-1) = 3$$

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-1) = 4$$

Diqqət! Bəzi məsələlərin həllində a_n -i müəyyən etmək üçün $a_n = S_n - S_{n-1}$ düsturundan istifadə etmək əlverişlidir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 >** Verilənlərə görə ədədi silsilənin uyğun sayda həddinin cəmini tapın.

a) $a_1 = 10, a_{20} = 48$
 $n = 10, S_n = ?$

b) $a_1 = 6,5, a_{20} = 7,5$
 $n = 20, S_n = ?$

c) $a_1 = -13, d = 7,$
 $n = 8, S_n = ?$

d) $a_1 = 9, d = -4,$
 $n = 12, S_n = ?$

e) $-17, -11; \dots$
 $n = 17, S_n = ?$

f) $14,2; 9,6; \dots$
 $n = 11, S_n = ?$

- 2 >** $a_n = 2n - 3$ düsturu ilə verilmiş ədədi silsilənin: a) ilk 15 həddinin cəmini; b) ilk n həddinin cəmini tapın.

LAYIHƏ

- 3 > Ədədi silsilənin ilk 10 həddinin cəmini tapın.
- a) $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + \dots$ b) $3 + \frac{7}{2} + 4 + \frac{9}{2} + 5 + \dots$
- c) $8 + 4 + 0 + (-4) + (-8) + \dots$ d) $0,5 + 1,1 + 1,7 + 2,3 + \dots$
- 4 > Verilən sayda hədlərin cəmini və neçə həddinin cəminin verilən ədədə bərabər olduğunu tapın.

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \dots$$

a) $n = 20$ b) $S_n = 210$
 $S_n = ?$ $n = ?$

$$30 + 24 + 18 + 12 + 6 + \dots$$

a) $n = 15$ b) $S_n = -36$
 $S_n = ?$ $n = ?$

$$-10 + (-5) + 0 + 5 + 10 + \dots$$

a) $n = 15$ b) $S_n = 315$
 $S_n = ?$ $n = ?$

$$45 + 42 + 39 + 36 + 33 + \dots$$

a) $n = 68$ b) $S_n = -48$
 $S_n = ?$ $n = ?$

- 5 > Cəmi tapın:
- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n$; b) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$; c) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.
- 6 > Cəmi tapın:
- a) ilk 80 natural ədədin; b) bütün ikirəqəmli ədədlərin;
 c) 3-ə bölünən və 100-dən kiçik olan natural ədədlərin;
 d) 4-ə bölünən və 130-dan kiçik olan natural ədədlərin.

Tətbiq tapşırıqları

- 7 > Ədədi silsilənin birinci həddi 7-yə, fərqi 1,5-ə bərabərdir. Silsilənin 5-dən 11-ə qədər (11-ci də daxil olmaqla) hədlərinin cəmini tapın.
- 8 > Cədvəli doldurun.

Nö	a_1	d	n	a_n	S_n
1	2		11	7	
2		-0,4	8	-5,2	
3	0,5			14	72,5
4			7	16	17,5

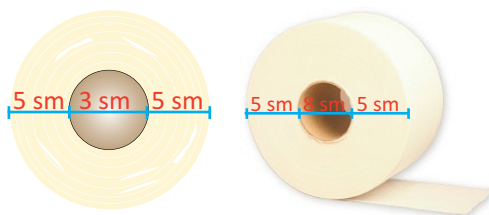
- 9 > Kürələr birinci sırada 1 kürə, ikinci sırada 2 kürə, üçüncü sırada 3 kürə və i.a. olmaqla üçbucaq şəklində düzülmüşdür.
- a) Kürələrin sayı 36 olarsa, onlar neçə sırada düzülmüşdür?
 b) 12 sıradan ibarət üçbucaq düzəltmək üçün neçə kürə lazımdır?



LAYIHƏ

- 10 > **Araşdırma.** 90 kürə 5 cərgədə düzülmüşdür. İki qonşu cərgələrdəki kürələrin sayları fərqi həmişə sabitdir. Bu kürələri göstərilən qayda ilə neçə variantda düzmək olar?
- 11 > Saat 1-də bir dəfə, 2-də iki dəfə, 12-də on iki dəfə zəng çalarsa, bu müddət ərzində cəmi neçə dəfə zəng çalmış olar?
- 12 > Sol tərəfdəki toplananların ədədi silsilənin hədləri olduğunu bilərək, tənliyi həll edin.
- a) $1 + 4 + 7 + \dots + x = 70$ b) $1 + 1,5 + 2 + \dots + x = 27$
- 13 > Hesablayın. $\frac{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{19}}{4 \cdot 4^4 \cdot 4^7 \cdot \dots \cdot 4^{16}}$
- 14 > İlk n həddinin cəmi düsturuna görə tələb edilən hədləri tapın.
- a) $S_n = 4n^2 - 3n$ b) $S_n = 2n^2 + n$ c) $S_n = 2n^2 + 3n$
 $a_1 = ?$ və $a_2 = ?$ $a_5 = ?$ və $a_{11} = ?$ neçənci hədd 21-ə bərabərdir?
- 15 > Ədədi silsilənin 3-cü və 5-ci həddinin cəmi 12-yə bərabərdir. 2-dən 5-ə qədər (5-ci də daxil olmaqla) olan hədlərinin cəmi 8-ə bərabərdir. Bu silsilənin ilk 5 həddini yazın.
- 16 > a) Ədədi silsilədə $a_3 = 31$ və $a_7 = 79$ olarsa, a_{11} və S_{31} -i tapın. b) Ədədi silsilədə $S_7 = 203$, $a_5 = 38$ olarsa, a_n üçün düstur yazın və S_{17} -ni tapın.
- 17 > **Yaradıcı tətbiq.** Kağız fabrikləri müxtəlif məqsədlər üçün nəzərdə tutulmuş kağızları xüsusi silindrik kartonlara dolanmış rulon şəklində istehsal edir. Kağızın qalınlığı 0,01 sm-dir. Kartonun diametri 3 sm, bütün rulonun diametri 13 sm-dir.

n	d_n (sm)	l_n (sm)
1	3	3π
2		
3		
4		



a) Kağız dolaqlarının sayını n , hər n -ci dolamada rulonun diametrini d_n , hər dolama addımında dolaqdakı kağızın uzunluğunu l_n qəbul etməklə cədvəli dəftərinizdə doldurun.

b) $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots$ ardıcılığı haqda fikirlərinizi və ardıcılığın n -ci həddinin düsturunu yazın.

c) Diametri 13 sm olan rulonda neçə kağız dolağı var? Bu rulondakı kağızın uzunluğu təxminən neçə metrdir?

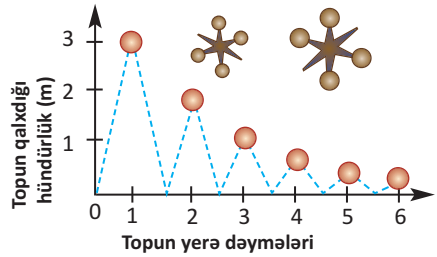
d) Diametri 13 sm olan rulondakı kağızın qiyməti 5 manatdır. Bu rulonun diametri 18 sm olduqda onun qiyməti təxminən neçə manat olar? Cavabı ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

Araşdırma. Top ilk dəfə yerə dəydikdən sonra 3 m yüksəkliyə qalxdı. Hər sonrakı dəfə əvvəl qalxdığı hündürlüyün

60%-i qədər hündürlüyə qalxdı. Qrafik topun yerə dəymə sayı ilə qalxdığı yüksəklik arasındakı əlaqəni göstərir. 1) Topun qalxdığı hündürlükləri $h_1, h_2, h_3, h_4, \dots$ işarə etməklə hər dəfə qalxdığı hündürlüyü yerə ilk dəymədən sonra qalxdığı hündürlüklə ifadə edin.

2) Top 8-ci dəfə yerə dəydikdən sonra neçə metr hündürlüyə qalxacaq?

3) Topun n -ci dəfə yerə dəyməsindən sonra qalxdığı hündürlüyü tapmaq üçün $h_n = 3 \cdot (0,6)^{n-1}$ düsturundan istifadə etməyin mümkün olduğunu izah edin.



9-5

Həndəsi silsilə

Tərif. Hədləri 0-dan fərqli olan ardıcılığın ikincindən başlayaraq hər bir həddi özündən əvvəlki həddin eyni bir ədədə hasilinə bərabər olarsa, belə ardıcılığa **həndəsi silsilə** deyilir. Yəni, istənilən natural n üçün

$$b_n \neq 0 \text{ və } b_{n+1} = b_n \cdot q$$

şərti ödənərsə, onda (b_n) ardıcılığı həndəsi silsilədir. q ədədinə **həndəsi silsilənin vuruğu** deyilir.

Həndəsi silsilə simvolik olaraq $\div (b_n)$ kimi işarə edilir.

$b_{n+1} = b_n \cdot q$ düsturu həndəsi silsilənin rekurrent qayda ilə ifadəsidir.

Tərifdən belə nəticə çıxır ki, istənilən n natural ədədi üçün $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ bərabərliyi doğrudur. Xüsusi halda,

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots$$

- 1. Nümunə.** a) $b_1 = 2, q = 3$ olduqda, 2, 6, 18, 54, 162, ... həndəsi silsiləsi, b) $b_1 = 3, q = -2$ olduqda, 3, -6, 12, -24, 48, ... həndəsi silsiləsi alınır. $q > 0$ olduqda, həndəsi silsilənin hədləri eyni işarəli olur, $q < 0$ olduqda isə hədlərin işarələri növbələşir, $q = 1$ olduqda sabit ardıcılıq alır.

Verilən ədədi ardıcılıqlardan hansı həndəsi silsilədir?

- 2. Nümunə.** a) 4, 12, 22, 34, 48. b) 625, 125, 25, 5, 1.

Həlli. Həndəsi silsilənin hər bir həddinin özündən əvvəlki həddə olan nisbəti həmişə sabit qalır. Bu şərti hər iki ardıcılıq üçün yoxlayaq.

a) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{4} = 3 \quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$ Şərt ödənmir, bu ardıcılıq həndəsi silsilə deyil.

b) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5} \quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5} \quad \frac{b_4}{b_3} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \quad \frac{b_5}{b_4} = \frac{1}{5}$

Şərt ödənilir, bu ardıcılıq həndəsi silsilədir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Həndəsi silsilənin növbəti iki həddini yazın.

500; 100; 20; ...	$\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots$	$7; \frac{14}{3}; \frac{28}{9}; \dots$
16; 24; 36; ...	$\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; \frac{25}{12}; \dots$	$0,4; -0,16; 0,064; \dots$
1,25; 1,5; 1,8; ...		$1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; \dots$

- 2 > Həndəsi silsilənin 10-cu həddini yazın.

a) 512; -256; 128; -64, ... b) $\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \frac{16}{5}; \dots$

- 3 > Həndəsi silsilənin naməlum hədlərini tapın.

a) $y_1; 1; \frac{1}{2}; y_4; \dots$ b) $y_1; y_2; 24; 36; 54; \dots$

- 4 > a) $b_2 = 3$ olduğunu bilərək, $b_{n+1} = 0,3 \cdot b_n$ rekurrent qaydasına görə həndəsi silsilənin ilk 5 həddini yazın.

b) 2; 8; 32; 128; ... ardıcılığı üçün rekurrent qaydanı yazın.

- 5 > **Açıq tipli tapşırıqlar.** Verilənlərə görə həndəsi silsilə qurun və ilk dörd həddini yazın.

a) $q = \frac{1}{2}$ b) $b_1 = 0,5$ c) $b_3 = 20$

- 6 > Verilən ardıcılıqlardan hansı ədədi silsilə, hansı həndəsi silsilədir? Bu silsilələr üçün rekurrent düsturu yazın.

a) 7; 14; 28; 56; 112; ... d) 1; 2; 5; 26; ...
 b) 1000; 500; 250; 125; ... e) 1; 5; 9; 13; ...
 c) 4; 8; 13; 19; ... f) 200; 20; 2; 0,2; ...

- 7 > Həndəsi silsilənin vuruğunu tapın.

1) 81; 27; 9; ... 2) 4; 8; 16; ...
 3) 14; 7; $\frac{7}{2}$; ... 4) $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \dots$

- 8 > Ardıcılıqlar üçün rekurrent qaydanı yazın və növbəti iki həddini göstərin.

a) 1; 7; 13; 19; ... b) 66; 33; 16,5; 8,25; ... c) 41; 32; 23; 14; ...
 d) 2; 3; 8; 63; ... e) 2; 5; 11; 23; 47; ... f) 2; 5; 10; 50; 500; ...

Araşdırma. Həndəsi silsilənin $b_{n+1} = b_n \cdot q$ rekurrent münasibətilə verildiyini bilərək, cədvəldə boş xanaların yerinə uyğun ifadəni yazın.

b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$b_1 \cdot q$	$b_2 \cdot q = b_1 q^2$	$b_3 \cdot q = b_1 q^3$	$\square \cdot q = \square$	$\square \cdot q = \square$

Hansı nəticəyə gəldiniz?

b_5 -i tapmaq üçün b_1 q -nün hansı qüvvətinə vurulur?

q -nün bu qüvvət üstü ilə b_5 və b_1 hədlərinin indeksləri arasında hansı əlaqəni görürsünüz?

Sizcə, b_8 -i tapmaq üçün b_1 -i q -nün hansı qüvvətinə vurmaq lazımdır?



Həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturu

Həndəsi silsilədə b_n həddi üçün $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ düsturu doğrudur.

Bu, həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturu adlanır.

Həndəsi silsilənin verilməsi üçün onun birinci həddinin və vuruğunun verilməsi kifayətdir.

1. Nümunə. Həndəsi silsilədə $b_1 = 3$, $q = 2$ olduqda b_4 və b_7 -ni tapaq.

Həlli. $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 3 \cdot 2^3 = 24$, $b_7 = b_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$

Qeyd. $b_7 = b_1 \cdot q^6 = b_1 \cdot q^3 \cdot q^3 = b_4 \cdot q^3 = 24 \cdot 2^3 = 192$ üsulu ilə də hesablamaq olardı.

Ümumiyyətlə, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = b_k \cdot q^{n-k}$ bərabərliyi doğrudur.

2. Nümunə. Həndəsi silsilədə $b_2 = 4$; $b_5 = 32$ olarsa, b_7 -ni tapaq.

Həlli. $b_5 = b_2 \cdot q^3$ olduğundan, $q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{32}{4} = 8$, $q = 2$ və $b_7 = b_5 \cdot q^2 = 32 \cdot 2^2 = 128$

Həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturunu aşağıdakı üsulla alaq.

Tərifə görə

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_3 = b_2 \cdot q$$

$$b_4 = b_3 \cdot q$$

.....

$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Bu $(n-1)$ sayda bərabərlikləri tərəf-tərəfə vuraq:

$$b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1}.$$

Burada sağ və sol tərəflərdə eyni hədləri ixtisar etsək, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ düsturunu alırıq.

Nəticə: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot \frac{q^n}{q} = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$ yazmaqla $\frac{b_1}{q} = c$ işarə etsək, aydın

olur ki, istənilən həndəsi silsilə $b_n = c \cdot q^n$ düsturu ilə verilə bilər.

(Burada c -sıfırdan fərqli hər hansı ədəd, q -sililə vuruğudur).

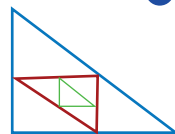
LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

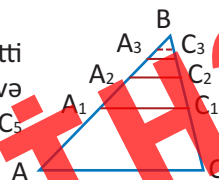
- 1 > Verilənlərə görə tələb olunanları tapın.
 - a) $b_1 = 3$; $q = 2$ olarsa, $b_4 = ?$ $b_5 = ?$
 - b) $b_1 = 24$; $q = 0,5$ olarsa, $b_3 = ?$ $b_4 = ?$
 - c) $b_6 = 48$; $q = -2$ olarsa, $b_4 = ?$ $b_5 = ?$
 - d) $b_5 = 64$; $q = 2$ olarsa, $b_1 = ?$ $b_7 = ?$
 - e) $b_4 = 15$; $b_6 = 135$ olarsa, $q = ?$ $b_7 = ?$
 - f) $b_1 = 3$; $b_5 = 48$ olarsa, $q = ?$ $b_7 = ?$
- 2 > Həndəsi silsilənin yeddinci həddini tapın.
 - a) 2,5; 5; 10; 20; ...
 - b) -0,25; -1; -4; -16; ...
 - c) $-\frac{64}{81}$, $\frac{32}{27}$, $-\frac{16}{9}$, $\frac{8}{3}$, ...
 - d) 15; -5; $\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{9}$, ...
- 3 > Verilənlərə görə həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturunu yazın.
 - a) $b_1 = 4$, $q = 3$
 - c) $b_3 = 72$, $q = 6$
 - e) $b_1 = -2$, $q = 2$
 - b) $b_1 = 45$, $q = \frac{1}{3}$
 - d) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{8}$
 - f) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_6 = -16$
- 4 > a) Həndəsi silsilədə $b_1 = 2$, $q = 3$ olarsa, 162-yə bərabər olan həddin nömrəsini tapın.
 b) 0,1; 0,3; həndəsi silsiləsində 24,3-ə bərabər olan həddin nömrəsini tapın.
- 5 > Verilənlərə görə həndəsi silsilənin n -ci həddini rekurrent qayda ilə yazın.
 - 1) $b_1 = -4$, $q = 6$
 - 2) $b_1 = 4$, $q = 3$
 - 3) $b_1 = 2$, $q = -3$
 - 4) $b_1 = -4$, $q = 2$
- 6 > Verilənlərə görə həndəsi silsilənin ilk 5 həddini yazın. Silsiləni rekurrent münasibətlə və analitik üsulla verin: 1) $b_4 = 25$, $q = -5$; 2) $b_1 = 4$, $q = 5$

Tətbiq tapşırıqları

- 7 > Katetləri 12 sm və 16 sm olan düzbucaqlı üçbucağın daxilinə təpələri onun tərəflərinin orta nöqtələri olan üçbucaq çəkilmişdir. Eyni qayda ilə ikinci üçbucağın da daxilinə üçbucaq çəkilib və i.a. 6-cı üçbucağın perimetrini tapın.

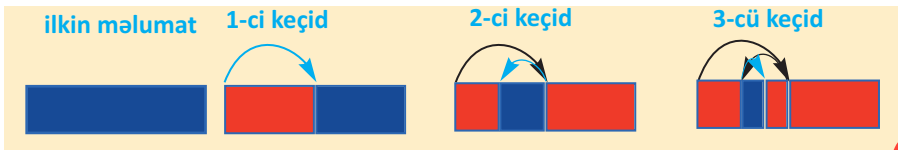
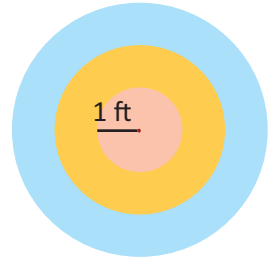


- 8 > $\triangle ABC$ -də A_1C_1 orta xətti çəkildi, $\triangle A_1BC_1$ -də A_2C_2 orta xətti çəkildi, yeni alınmış $\triangle A_2BC_2$ -də A_3C_3 orta xətti çəkildi və i.a. $\triangle ABC$ üçbucağının sahəsi 3072 sm^2 olarsa, A_5BC_5 üçbucağının sahəsini tapın.
- 9 > Süd məhsulları istehsalı zavodu 200 min manata yeni avadanlıq aldı. Avadanlığa hər il 10% amortizasiya (köhnəlmə) hesablanır. 3 ildən sonra bu avadanlığın qiyməti neçə manat olacaq?



LAYIHƏ

- 10 > Meşə təcrübə sahəsində oduncaq ildə 10% artır. Sahədə oduncaq əvvəldə 20000 m^3 olarsa, 4 ildən sonra nə qədər olar?
- 11 > Həndəsi silsilənin birinci və üçüncü həddinin cəmi 15, ikinci və dördüncü həddinin cəmi isə 30 olarsa, ilk dörd həddini tapın.
- 12 > Nasos bir dəfəyə çəndəki yanacağın $\frac{1}{10}$ hissəsini çəkir. Nasos 3 dəfə qoşulduqdan sonra çəndə yanacağın neçə faizi qalar?
- 13 > Hədəf taxtası dairələrin radiusu 1 ft (feet uzunluq vahididir və $1 \text{ ft} \approx 30,48 \text{ sm}$) artırılmaqla hazırlanmışdır.
- a) Hədəf taxtasının n -ci halqasının sahəsini göstərən düsturu yazın.
- b) 10-cu halqanın sahəsini kvadrat santimetrlə ifadə edin.
- c) n halqalı hədəf taxtasının sahəsini göstərən düsturu yazın.
- d) $n = 1; 2; 4; 8$ qiymətlərində hədəf taxtasının sahəsinin qiymətini aldığınız düstura görə hesablayın. n -in qiymətinin 2 dəfə artması ilə sahələr necə dəyişir?
- 14 > Kompüterdə hər hansı element axtarışı yarıya bölmə üsulu ilə həyata keçirilir. Bu axtarış üsuluna görə ilk olaraq məlumatlar siyahısının ortasına keçilir və axtarılan elementin siyahının hansı yarım hissəsində olduğu müəyyən edilir. Bununla da məlumatın digər yarısını yoxlamağa ehtiyac qalmır. Daha sonra bu yarım hissə yarıya bölünür və elementin yeri müəyyən edilir. Lazımi element tapılana qədər axtarış bu qayda ilə davam etdirilir.



- a) 2048 elementdən ibarət məlumatlar siyahısında n -ci keçiddən sonra qalan elementlərin sayını göstərən ifadəni yazın.
- b) Axtarılan element ən pis halda ən sonuncu keçiddə tapıla bilər. Bu halda 2048 elementli məlumatlar toplusunda n -in hansı qiymətində axtarılan element tapılacaq?

LAYIHƏ

Araşdırma. Hər hansı həndəsi silsilənin ilk səkkiz həddini yazaq.
Məsələn, $b_1 = 3$, $q = 2$ olduqda, bu hədlər cədvəldə yazılanlar olur.

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
3	6	12	24	48	96	192	384

$\sqrt{3 \cdot 12} = 6$ $\sqrt{12 \cdot 48} = 24$

9-5

Həndəsi silsilənin hədlərinin xassələri

Hədləri müsbət olan həndəsi silsilədə ikincidən başlayaraq hər bir hədd onunla qonşu olan hədlərin həndəsi ortasına bərabərdir.

Məsələn, 2, 6, 18, 54, 162, ... ardıcılığında 18 ədədi 6 və 54 arasında həndəsi ortadır. Vuruğu ifadə edən nisbətləri yazmaqla həndəsi ortanı aydın görə bilərik.

Həndəsi silsilənin tərifinə görə $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

bərabərliklərini alırıq. Bu bərabərlikləri cüt-cüt götürməklə alırıq:

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3, \quad b_3^2 = b_2 \cdot b_4, \quad \dots, \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Bu xassə daha ümumi şəkildə aşağıdakı kimi verilir.

Həndəsi silsilədə ikinci həddən başlayaraq hər bir həddin kvadratı özündən eyni uzaqlıqda olan hədlərin hasilinə bərabərdir, yəni:

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$$

Hədləri müsbət olan həndəsi silsilə üçün bu xassəni

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad \text{şəklində yazmaq olar.}$$

Həndəsi silsilənin hədlərinin daha bir xassəsi: $n + m = k + l$ olduqda

$$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l \quad \text{bərabərliyi doğrudur.}$$

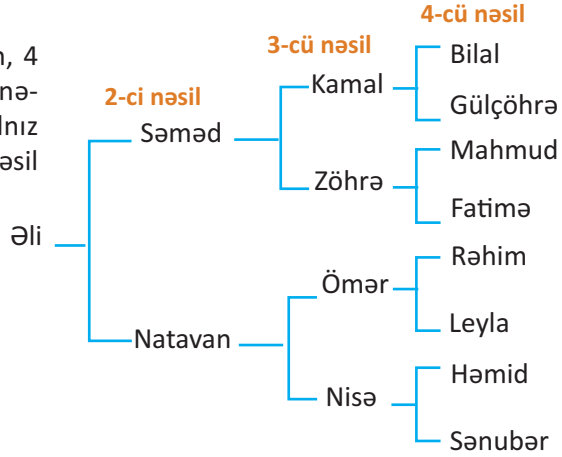
Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > (b_n) həndəsi silsiləsində: a) $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$; b) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$;
c) $b_5 \cdot b_9 = b_6 \cdot b_8$; d) $b_3 \cdot b_7 = b_4 \cdot b_6$; e) $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ ($n+m = k+l$)
olduğunu göstərin.
- 2 > $x - 1$; 8; $x + 11$ ədədləri həndəsi silsilənin ardıcıl hədləridir. x -i tapın.
- 3 > $x - 1$; $x + 2$; $x + 8$ ədədləri həndəsi silsilənin ardıcıl hədləridir. x -i tapın.
- 4 > $c_n = 3 \cdot 2^n$ düsturu ilə verilmiş ardıcılığın həndəsi silsilə olduğunu göstərin. Silsilə vuruğunu yazın.
- 5 > $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n \cdot 3$ rekurrent münasibəti ilə verilmiş ardıcılığın n -ci həddinin düsturunu yazın.
- 6 > $\therefore (b_n)$ həndəsi silsilə olarsa, a) b_1 ; b_3 ; b_5 ; b_7 ; ... b) b_1^2 ; b_2^2 ; b_3^2 ; ...
ardıcılığı həndəsi silsilədirmi?

LAYIHƏ

Araşdırma. Əli öz ata-anasının, 4 nənə-babasının, 8 ulu nənə-babasının adını yazmaqla yalnız birbaşa valideynləri göstərən nəsil ağacını tərtib etmişdir.

Əlinin 10 nəsil valideynlərinin sayı neçə nəfərdir?



9-6

Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu

Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmini S_n ilə işarə edək:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \quad (1)$$

$q = 1$ olarsa, bütün hədlər b_1 -ə bərabərdir və $S_n = n \cdot b_1$ olar.

$q \neq 1$ olan hala baxaq.

(1) bərabərliyin hər iki tərəfini q -yə vuraq:

$$q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q + \dots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q \quad (2)$$

(2) bərabərliyəndən (1) bərabərliyini çıxsaq:

$$q \cdot S_n - S_n = b_n \cdot q - b_1 \text{ alırıq.}$$

Buradan isə

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}, \quad (q \neq 1) \quad (3)$$

(3) düsturuna həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu deyilir.

Burada $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ olduğunu nəzərə alsaq, onu

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q \neq 1) \quad \text{şəklində yazı bilərik.}$$

Nümunə Həndəsi silsilədə $b_2 = 6$, $b_5 = 48$ olarsa, ilk altı həddin cəmini tapaq.

Həlli. $b_5 = b_2 \cdot q^3$ olduğundan $q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{48}{6} = 8, \quad q = 2$

$b_2 = b_1 \cdot q$ düsturuna görə $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{6}{2} = 3$

Onda $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$

LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Verilənlərə görə həndəsi silsilənin tələb olunan sayda hədlərinin cəmini tapın.

a) $b_1 = 16, q = \frac{1}{2} \quad S_6 = ?$	b) $b_1 = 1, q = -2 \quad S_5 = ?$
c) $3; 6; \dots, S_{10} = ?$	d) $1; -2; 4; \dots, S_8 = ?$
- 2 > Verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

1) $-4 + 12 + (-36) + 108 + \dots$	2) $160 + (-80) + 40 + (-20) + \dots$
a) $n = 6, S_6 = ?$	b) $S_n = -244, n = ?$
	a) $n = 7, S_7 = ?$
	b) $S_n = 105, n = ?$
- 3 > Həndəsi silsilədə verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

a) $S_4 = 45, q = 2, b_1 = ?$	b) $S_4 = 130, q = \frac{2}{3}, b_4 = ?$
c) $b_1 = 2, b_5 = 162$ olarsa, $S_6 = ?$	d) $b_2 = \frac{1}{5}, b_5 = \frac{1}{625}$ olarsa, $S_5 = ?$
- 4 > Həndəsi silsilə olan $a_n = 3 \cdot 2^n$ ardıcılığının: a) ilk 5 həddinin; b) ilk n həddinin cəmini tapın.
- 5 > Verilən həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturunu yazın.

a) $1, y, y^2, y^3, y^4, \dots$	b) $3z, 6z^3, 12z^5, 24z^7, \dots$
---------------------------------	------------------------------------
- 6 > Həndəsi silsilənin dördüncü və birinci hədlərinin fərqi 26, beşinci və ikinci hədlərinin fərqi isə 78-dir. Bu silsilənin ilk altı həddinin cəmini tapın.

Tətbiq tapşırıqları

- 7 > Canlı orqanizmə düşən bakteriya 20-ci dəqiqənin sonunda iki yerə bölünür; bunlardan da hər biri sonrakı 20 dəqiqənin sonunda yenə də iki yerə bölünür və s. Bir gün müddətində bir bakteriyadan törənmiş bakteriyaların sayını tapın.
- 8 > Təhlükəsizlik üçün siqnalizasiya cihazları istehsal edən şirkət işə başladığında ildə 10000 cihaz istehsal edirdi. İstehsalın artımı ildə 20% olmuşdur.
 - a) Şirkət fəaliyyətinin 5-ci ilində neçə cihaz istehsal etmişdir.
 - b) İlk 5 ildə cəmi neçə cihaz istehsal edilmişdir?

LAYIHƏ

9 > $x \neq 1$ olduqda ifadəni sadələşdirin.

a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

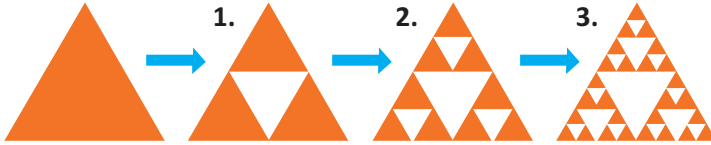
b) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

10 > İfadəni sadələşdirin ($n \neq 1$).

a) $\frac{1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5}{1 + n + n^2}$

b) $\frac{1 + n + n^2 + n^3}{1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7}$

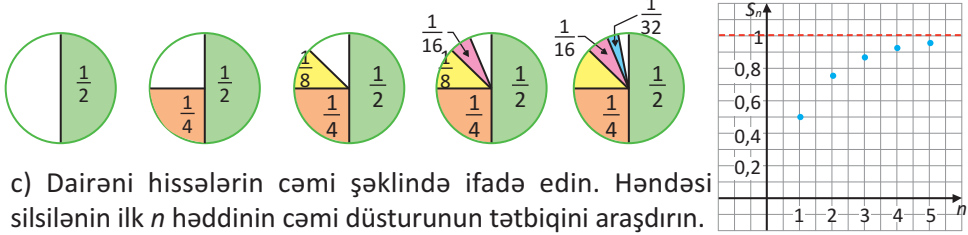
11 > Polyak alimi Vatslav Serpinski bərabərtərəfli üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələrini birləşdirməklə yaranan bərabərtərəfli üçbucaqları kəsib çıxarmaqla "Serpinski xəlbiri" kimi tanınan mozaikanı yaratmışdır. Təsəvvür edin ki, ilkin üçbucaq tərəfləri vahid uzunluqda olan bərabərtərəfli üçbucaqdır.



- a) 1-ci addımda kəsilib çıxarılan üçbucağın sayı 1, 2-ci addımda 3, 3-cü addımda 9-dur və s. n -ci addımda kəsilib çıxarılan üçbucaqların sayını göstərən düstur yazın.
- b) Bu qayda ilə 4-cü; 5-ci addımda neçə bərabərtərəfli üçbucaq kəsilib çıxarılmış olacaq?
- c) 3-cü addımda verilən üçbucaqdan bölünməmiş qalan (rəngli) sahəni hesablayın.
- 12 > Hədlərinin sayı cüt olan sonlu həndəsi silsilədə cüt nömrəli hədlərin cəminin, tək nömrəli hədlərin cəminə olan nisbəti silsilə vuruğuna bərabərdir. Bunu isbat edin.
- 13 > Fərrux bir şəkildə baxırdı. Şəkildə bir it çəkilmişdi, itin arxasında 4 balası var idi. Hər balanın arxasınca 4 pişik gedirdi. Hər pişiyin arxasında 4 balası var idi. Hər pişik balasının arxasınca 4 siçan gedirdi. Fərrux bu şəkildə cəmi neçə ayaq saya bilərdi?
- 14 > Proqram təminatı ilə məşğul olan şirkət oyunun təkmilləşdirilməsi üçün 100 000 manat xərcləməyi planlaşdırır. Şirkətin maliyyə menecerləri bu iş üçün birinci həftə 4000 manat, sonrakı hər həftə isə əvvəlkindən 20% çox olmaqla pul xərcləməli olacaqlar. a) 5-ci həftədə; b) ilk beş həftədə nə qədər pul xərclənəcək? c) Neçənci həftədə artıq xərcləmək üçün yetərinə pul qalmayacaq?
- 15 > Hər biriniz 10 nəsil üçün ata-ana, nənə-baba, ulu nənə və babalarının sayını hesablayın. Neçənci nəsildə bu insanların sayı 1000 000-dan çox olacaq?

LAYIHƏ

Praktik məşğələ. Şəkilə bir dairənin müəyyən qayda ilə hissələrə bölünmə addımları verilmişdir. a) Bu qaydanı sözlə təqdim edin.
b) dairəni bu qayda ilə kiçik hissələrə bölmə prosesinin sonu olacaqmı?



c) Dairəni hissələrin cəmi şəklində ifadə edin. Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturunun tətbiqini araşdırın.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \approx 0,88$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \approx 0,94$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \approx 0,97$$

$$S_n = b_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d) n -in qiyməti artdıqca $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ həddinin qiymətini 0-la müqayisə edin.

e) Verilən qrafiki situasiyaya uyğun izah edin. $n \rightarrow \infty$, $S_n \rightarrow 1$ fikrini qrafikə görə təqdim edin.

9-7

$|q| < 1$ olduqda sonsuz həndəsi silsilənin cəmi

Əgər həndəsi silsilənin hədləri sayı sonsuz olarsa, onu sonsuz həndəsi silsilə adlandırırlar. Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturunu aşağıdakı şəkildə çevirək:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$$

$|q| < 1$ isə, onda n sonsuz artıqda q^n vuruğu, deməli, $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$ hasilı də sıfıra yaxınlaşır. Ona görə də n sonsuz olaraq artıqda S_n cəmi $\frac{b_1}{1 - q}$ ədədinə yaxınlaşır. $\frac{b_1}{1 - q}$ ədədinə $|q| < 1$ olduqda sonsuz həndəsi silsilənin cəmi deyirlər.

Bu cəmi S ilə işarə etsək, yazı bilərik : $S = \frac{b_1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$

Nümunə. Sonsuz həndəsi silsilənin cəmi düsturunu 0,(3) dövrü onluq kəsrini adi kəsre çevirmək üçün tətbiq edin.

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots$$

$$q = \frac{1}{10}, \quad b = \frac{3}{10} \text{ olduğundan, sonsuz həndəsi silsilənin cəmi düs-}$$

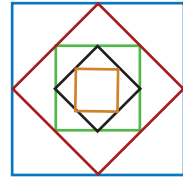
$$\text{turuna görə } 0, (3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Öyrənmə tapşırıqları

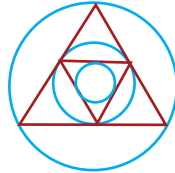
- 1 > Həndəsi silsilənin vuruğunun $|q| < 1$ şərtini ödədiyini yoxlayın və silsilə cəmini tapın.
 - a) 18; 6; 2; b) 0,3; 0,03; 0,003;
- 2 > Sonsuz həndəsi silsilənin cəmini tapın.
 - a) $-\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$ b) $1; \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
- 3 > Sonsuz həndəsi silsilənin cəminə və birinci həddinə görə vuruğunu tapın.
 - a) $S = 4, b_1 = 1$ b) $S = 12, b_1 = 3$ c) $S = -\frac{1}{9}, b_1 = -\frac{1}{6}$
 - d) $S = 8; b_1 = \frac{1}{2}$ e) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}, b_1 = \sqrt{3}$ f) $S = \frac{11}{13}, b_1 = 1$
- 4 > Toplananları sonsuz həndəsi silsilənin hədləri olan ($|a| < 1$) cəmi tapın
 - a) $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ b) $1 - a + a^2 - a^3 + \dots$
 - c) $1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots$ d) $1 - a^3 + a^6 - a^9 + \dots$
- 5 > Dövri onluq kəsrləri adi kəsre çevirin
 - a) 0,(2) b) 0,(15) c) 2,(6) d) 0,2(7)

Tətbiq tapşırıqları

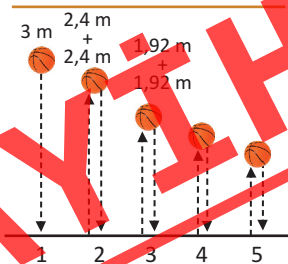
- 6 > Tərəfi 6 sm olan kvadrat verilmişdir. Onun tərəflərinin ortaları ikinci kvadratın təpələridir, ikinci kvadratın tərəflərinin ortaları üçüncü kvadratın təpələridir və s. Bu qayda ilə qurulmuş bütün kvadratların sahələri cəmini tapın.



- 7 > Radiusu 6 sm olan çevrənin daxilinə düzgün üçbucaq çəkilmişdir. Üçbucağın daxilinə çevrə, bu çevrənin daxilinə düzgün üçbucaq çəkilmişdir və s. Çevrələrin uzunluqları cəmini tapın.



- 8 > Top 3 m yüksəklikdən yerə dəyir. Hər dəfə yerə dəyən top əvvəl qalxdığı hündürlüyün 80%-i qədər yuxarı qalxır. Topun qət etdiyi məsafənin ümumi uzunluğu təxmini neçə metr olar?



LAYIHƏ



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

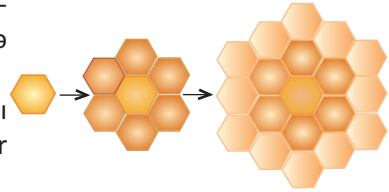
- 1 > Ardıcılığın ilk beş həddini yazın.

a) $a_1 = 5$ $a_n = a_{n-1} + 3$	b) $a_1 = 1$ $a_n = 4a_{n-1}$	c) $a_1 = 17$ $a_n = a_{n-1} + n$	d) $a_1 = 1, a_2 = 2$ $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$
-------------------------------------	----------------------------------	--------------------------------------	--
 - 2 > İlk n həddinin cəmi $S_n = 2 \cdot (5^n - 1)$ düsturu ilə hesablanan $\ddot{::} (b_n)$ həndəsi silsiləsində S_3, b_1 və b_4 -ü tapın.
 - 3 > Ardıcılığın ədədi və ya həndəsi silsilə olduğunu müəyyən edin, növbəti iki həddini yazın.

a) 5; -3; 5; -3;	b) $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \dots$
c) $\sqrt{3}; 3; 3\sqrt{3}; 9; \dots$	d) 1; -1; 1; -1; ...
 - 4 > Tikinti şirkəti 500000 manata buldozer almışdır. Buldozerin qiyməti hər il əvvəlkinə görə 20% ucuzlaşır. Buldozerin qiymətini istənilən n -ci ildə müəyyən etməyə imkan verən düstur yazın. Buldozerin qiyməti neçə ildən sonra 256 min manat olacaq?
 - 5 > Aşağıdakı şəkli araşdırın. Ardıcılığın daha 5 həddini yazın. Bu ardıcılığın istənilən həddini tapmaq üçün düstur yazın.
-
- 6 > Ədədi silsilədə $a_3 + a_6 + a_{24} = 12$ olarsa, ilk 21 həddin cəmini tapın.
 - 7 > Ədədi silsilədə $a_4 = 9, a_9 = -6$ olarsa, ilk neçə həddin cəmi 54-ə bərabər olar?
 - 8 > 1, 2, 5, 10, $a, 12, b, c$ artan ardıcılığında (a, b, c natural ədədlərdir) hədlərin ədədi ortası 12-yə bərabərdir. b -nin ən böyük qiyməti neçə ola bilər?
 - 9 > Ədədi silsilə əmələ gətirən üç ədədin cəmi 45-ə bərabərdir. Birinci həddən 2, ikinci həddən 9, üçüncü həddən isə 8 çıxsaq, bu ədədlər həndəsi silsilə əmələ gətirir. Ədədi silsilənin hədlərini tapın.
 - 10 > **(Qədim məsələ)** Tacirin 14 gümüş pulu var. Gümüş pulların çəkisi silsilə fərqi 4-ə bərabər olan ədədi silsilə kimi artır. Axırncı gümüş pulun çəkisi 59 lotdur (lot – qədim ölçü vahididir və 12,8 qrama bərabərdir). Bütün pulların çəkisi nə qədərdir?

- 11 > 6,6; 5,8; ədədi silsiləsinin müsbət hədlərinin cəmini tapın.
- 12 > İlk n həddinin cəmi $S_n = 2n^2 + 3n$ düsturu ilə verilən ədədi silsilənin birinci həddini və fərqi tapın.
- 13 > Hədləri tam ədədlər olan ədədi silsilədə $a_3 = 11$, ilk 8 həddin cəmi isə 72-dən böyük, 80-dən kiçikdir. a_2 -ni tapın.
- 14 > Həndəsi silsilənin ilk dörd həddinin cəmi 8, sonrakı dörd həddin cəmi isə 4-ə bərabərdir. İlk on iki həddin cəmini tapın.
- 15 > $a, b, 12$ ədədləri həndəsi silsilə, $a, b, 9$ ədədləri isə ədədi silsilə əmələ gətirirsə, a və b ədədlərini tapın.

- 16 > İşçi arılar ilkin olaraq bir düzgün altıbucaqlı hücrə, 2-ci etapda bu altıbucaqlının tərəfləri üzərində yeni hücrələr yaradır və bal pətəyini hörürlər. a) Arılar 4-cü, 5-ci dövrdə neçə altıbucaqlı "hörəcəklər"?
b) Arıların istənilən n -ci dövrdə qurduqları altıbucaqlıların sayını tapmaq üçün düstur yazın.



- 17 > Düzxətli hərəkət edən cisim birinci saniyədə 6 m, hər sonrakı saniyədə əvvəlkindən 4 m çox olmaqla yol gedir. a) Cisim ilk 20 saniyə ərzində hansı məsafəni getmişdir? b) Cisim 4800 m məsafəni neçə saniyəyə qət edər?
- 18 > Tahir və Orxan velosiped almaq arzusundadırlar. Velosipedin qiyməti 120 manatdır. Tahir fikirləşir ki, atası ona birinci gün 4 man, hər sonrakı gün isə əvvəlkindən 4 manat çox pul verərsə, yeddi günə lazımi miqdar pul toplaya bilər. Orxan isə hesab edir ki, atası ona birinci gün 1 man., hər sonrakı gün isə əvvəlkindən 2 dəfə çox pul verərsə, yeddi günə lazımi miqdar toplanar. Onlardan hansının fikri doğrudur?
- 19 > 2000-ci ildə fəaliyyətə başlayan iki A və B şirkətindən A şirkətinin mədəxili 2010-ci ilə qədər ədədi silsilə ilə, B şirkətinin mədəxili isə həndəsi silsilə ilə dəyişmişdir. A şirkətinin mədəxili 2000-ci ildə 2 milyon, B şirkətinin isə 25 min manat olmuşdur. A şirkətinin mədəxili hər il 100 min manat artıb, B şirkətinin mədəxili isə hər il əvvəlki ildən 2 dəfə çox olub. Şirkətlərin mədəxilinin n -ci il üçün hesablama düsturunu yazın. 2007-ci ildə bu şirkətlərin mədəxillərini hesablayın və müqayisə edin. 2000-ci ildəki mədəxili birinci hədd kimi qəbul edin.
- 20 > Cəmi tapın.

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots$

b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \frac{7}{2^7} + \dots$

10

Məlumatın qruplaşdırılması və təqdimi Ehtimalın hesablanması

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz:

- ✓ Məlumatı sistemləşdirməyi və təqdim etməyi;
- ✓ Qruplaşdırılmış məlumatı analiz etməyi;
- ✓ Mümkün variantlarının sayını hesablamağı;
- ✓ Permutasiyaları və kombinezonları hesablamağı;
- ✓ Ehtimalın hesablanmasına aid məsələlər həll etməyi.



10-1

Məlumatın qruplaşdırılması. Məlumatın tezliyi

Məlumat bazasına görə məlumatın siniflərdə qruplaşdırılmasını, tezliklərin müəyyən edilməsini və tezlik cədvəlinin qurulmasını aşağıdakı nümunə üzərində yerinə yetirək.

Nümunə. Aşağıda verilənlər 50 internet istifadəçisinin yaşı haqqında məlumatı əks etdirir. Məlumatı tezlik cədvəli ilə təqdim edin.

50 40 41 17 11 7 22 44 28 21 19 23 37 51 54 42 88
41 78 56 72 56 17 7 69 30 80 56 29 33 46 31 39 20
18 29 34 59 73 77 36 39 30 62 54 67 39 31 53 44

1. Məlumatı müəyyən intervallarda qruplaşdırmaqla 7 sinfə ayırmaq.
2. Hər bir sinfin - intervalın ölçüsünü müəyyən edək. Bunun üçün ən böyük qiymətdən (88) ən kiçik qiyməti (7) çıxmaq və siniflərin sayına bölək:

$$(88 - 7) : 7 \approx 11,57 \approx 12$$
3. Göründüyü kimi, ən kiçik qiymət 7-dir və bu birinci sinfin ən kiçik sərhəd qiymətidir, ən böyük isə 18 olacaq, 2-ci sinfin ən kiçik qiyməti 19, ən böyük qiyməti 30, 3-cü sinfin sərhədləri 31 və 42 olacaq və s. (sərhəd qiymətinin intervala daxil olduğunu unutmayın, məlumatların üst-üstə düşməsinə diqqət edin).
4. Tezlik cədvəlini quraq.

Sinif (yaş)	7-18	19-30	31-42	43-54	55-66	67-78	79-90	
Tel	###	### ##	### ##	###	##	##		
Tezlik	6	10	13	8	5	6	2	Cəmi: 50

Məlumat bazasını sistemləşdirməni və təqdimini aşağıdakı kimi ümumiləşdirmək olar.

1. Məlumat toplusundakı ədədi qiymətlərə (və ya kateqoriyalara - rəng, növ və s.) görə məlumatlar siniflərdə - intervallarda qruplaşdırılır. Hesablamaların əlverişli olması üçün siniflərin sayının 5 ilə 12 arasında olması tövsiyə edilir.
2. Siniflərin - intervalların ölçüsü müəyyən edilir. Bunun üçün məlumatın ən böyük və ən kiçik qiymətləri fərqi siniflərin sayına bölünür. Qismətdə alınan ədədin tam hissəsi sinfin ölçüsü kimi qəbul edilir.
3. Hər bir sinfin-intervalın sərhəd qiymətlərinin ən böyük və ən kiçik qiyməti müəyyən edilir. Birinci intervalın ən kiçik qiyməti verilən məlumatlardan seçilir, ən böyük qiymət isə sinfin ölçüsünə görə tapılır.
4. Tezlik cədvəli qurulur. Cədvəldə siniflərin sərhəd qiymətləri, məlumata uyğun tezlik tellə və ədədlə göstərilir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Aşağıdakı məlumatları tələb olunan sayda siniflərdə qruplaşdırın.
 - a) **Satış.** Siniflərin sayı: 6
Məlumat: Avqust ayında satışdan əldə olunan məbləğ (manatla)
2114, 2468, 7119, 1876, 4105, 3183, 1932, 1355, 4278, 1030, 2000, 1077, 5835, 1512, 1697, 2478, 3981, 1643, 1858, 1500, 4608, 1000
 - b) **Reaksiya müddəti.** Siniflərin sayı: 8
Məlumat: 30 qadının səsli xəbərdarlığa reaksiya müddəti (millisaniyə ilə)
507, 389, 305, 291, 336, 310, 514, 382, 320, 450, 309, 416, 359, 442, 307, 337, 373, 469, 351, 411, 388, 422, 413, 428, 387, 454, 323, 441, 388, 426
- 2 > Məlumat çoxluğu 45 seçmə nümunəni əhatə edir. Ən kiçik qiymət 0, ən böyük qiymət 28 olmuşdur. Siz bu məlumata görə siniflərin ölçüsünün neçə olmasını təklif edərdiniz? Siniflərə uyğun ədədi intervalları yazın.
- 3 > 1) İdmançılar kütlələrini ölçmüş və nəticələr aşağıdakı kimi olmuşdur. Siniflərin sayı 5 olmaqla məlumatı tezlik cədvəli ilə təqdim edin.

50, 50, 53, 53, 54, 55, 55, 55, 56, 60, 62, 62, 62, 64, 64, 64, 65, 65, 65, 66, 66, 66, 70, 72, 72, 72, 75, 75, 76, 80, 80, 80, 81, 81, 82, 82, 83, 84, 85, 85, 85, 86, 87, 93, 94, 97, 98, 98, 100, 100

2) Sizin sinfinizdəki şagirdlərin kütlələrini əks etdirən tezlik cədvəli tərtib edin.

✓ Nisbi tezlik

Məlumatın analizi və təqdimi üçün sinfin-intervalın **orta nöqtəsi**, **nisbi tezlik** kimi göstəricilərdən istifadə edilir.

Sinfin-intervalın orta nöqtəsi sinfin ən kiçik sərhəd qiyməti ilə ən böyük sərhəd qiymətinin cəminin yarısına bərabərdir. Bu göstəriciyə qısaca olaraq **sinfin qiyməti** də deyilir.

Nisbi tezlik sinfin tezliyinin qiymətinin ümumi məlumatın sayına olan nisbəti kimi müəyyən edilir.

Verilən nümunə üzərində bu göstəriciləri müəyyən edək:

Sinif	Tezlik	Sinfin orta qiyməti	Nisbi tezlik
7-18	6	$\frac{7+18}{2} = 12,5$	$\frac{6}{50} = 0,12$
19-30	10	$\frac{19+30}{2} = 24,5$	$\frac{10}{50} = 0,2$
31-42	13	$\frac{31+42}{2} = 36,5$	$\frac{13}{50} = 0,26$
...	...	...	...

12,5; 24,5; 36,5 ardıcılığından göründüyü kimi, birinci sinfin orta qiymətini tapdıqdan sonra hər sonrakı sinfin orta qiyməti özündən əvvəlki ilə sinfin ölçüsünün (bu halda 12-nin) cəminə bərabər olur.

Məlumat bazasını bu göstəricilər daxil olmaqla aşağıdakı cədvəllə təqdim edək.

İstifadəçilərin yaşı və istifadə müddəti			
Sinif (yaş)	Tezlik	Sinfin orta qiyməti (orta yaş)	Nisbi tezlik
7-18	6	12,5	0,12
19-30	10	24,5	0,2
31-42	13	36,5	0,26
43-54	8	48,5	0,16
55-66	5	60,5	0,1
67-78	6	72,5	0,12
79-90	2	84,5	0,04
	Cəmi: 50		Cəmi: 1

Bu araşdırma göstərir ki, istifadəçilərin 26%-ni 31- 42 yaşlı şəxslər təşkil edir.

- 4 > Aşağıdakı məlumat sırası 50 nəfər şagirdin 100 ballıq sistemlə riyaziyyat fənni üzrə yazdığı qiymətləndirmənin nəticələrini əks etdirir.
43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35, 25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 49, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61, 45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 28.
- a) Məlumatı 6 sinfə ayırın.
b) Tezlik cədvəlini tərtib edin.
c) Nisbi tezliyi əks etdirən sütun əlavə etməklə cədvəli yenidən çəkin.
- 5 > Sınıfdə 26 şagird riyaziyyatdan qiymətləndirmə tapşırıqlarını yerinə yetirdi. Onların aldıkları qiymətlər sağda verildiyi kimi oldu. Məlumatı tezlik və nisbi tezliyi əhatə edən cədvəllə təqdim edin.
- 6 > Cədvələ görə tapşırıqları yerinə yetirin.
a) Hər sinfin ölçüsünü müəyyən edin;
b) Hər sinfin orta qiymətini müəyyən edin;
c) Nisbi tezlikləri hesablayın;

3 2 3 3 4 3 3 2 5 4
5 4 2 4 4 3 3 4 3 2
1 4 5 4 5 2

Sınıf	Tezlik
10-19	8
20-29	120
30-39	230
40-49	310
50-59	140
60-69	72
70-79	20

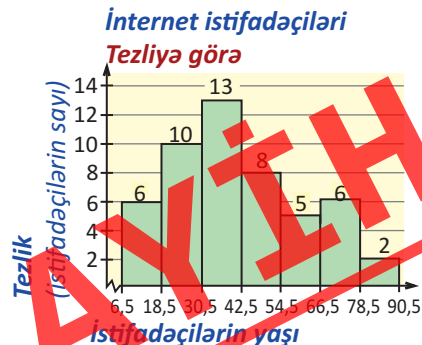


Tezlik poliqonu

Tezlik histqramı. Məlumatı təqdim etmək üçün ən əlverişli formalardan biri histqramdır. Nəzərdən keçirdiyimiz internet istifadəçiləri haqqında məlumatın tezlik histqramını quraq:

1. Sınıfların ölçüsü sərhəd qiymətləri ilə və ya sinfin orta qiyməti ilə üfüqi oxda, tezliklərin qiyməti isə şaquli oxda yerləşdirilir.
2. Histqramın qonşu sütunları toxunmalıdır. Yəni sinfin sərhəd qiymətləri eyni müəyyən edilməlidir ki, boşluq yaranmasın. Məsələn 1-ci sinfin ən böyük qiyməti 18, 2-ci sinfin ən kiçik qiyməti 19-dur. Onlar arasında məsafə $19 - 18 = 1$. Bu məsafə iki qonşu sinif arasında bölüşdürülür. Yarısı 0,5 olacaq. 1-ci sinfin sərhəd qiymətləri 6,5-18,5 olacaq və s.

Sınıf (yaş)	Sərhədlər	Tezlik
7-18	6,5-18,5	6
19-30	18,5-30,5	10
31-42	30,5-42,5	13
43-54	42,5-54,5	8
55-66	54,5-66,5	5
67-78	66,5-78,5	6
79-90	78,5-90,5	2

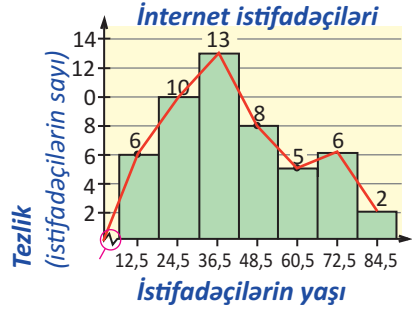


Məlumatın təqdimi. Tezlik histoqramından görünür ki, istifadəçilərin yarısından çoxu yaşı 42-dən az olan şəxslərdir.

Tezlik poliqonu məlumatın paylanma tezliyini qrafik olaraq əks etdirir. Tezlik poliqonunu 2 üsulla qurmaq olar.

1. Histoqramdan istifadə etməklə:

- histoqram qurulur; • intervalların orta nöqtəsi qeyd edilir (histoqramın sütunu üzərində); • bu nöqtələr birləşdirilir.



2. Tezlik cədvəlindən istifadə etməklə:

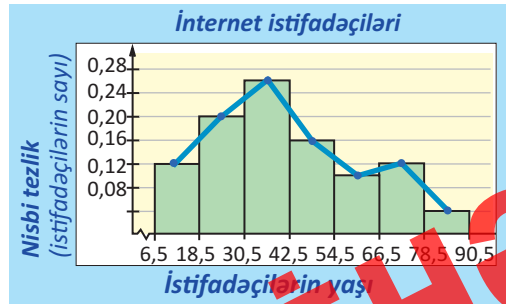
- absis oxu üzərində uyğun miqyasla sinfin intervalın orta nöqtəsi, ordinat oxu üzərində sinfə uyğun tezlik qeyd edilir.
- qeyd edilmiş nöqtələr birləşdirilir. Alınan qrafik məlumatın paylanmasını əks etdirən tezlik poliqonu adlanır.



Tezlik poliqonuna görə məlumatı analiz etmək və yeni məlumatlar əldə etmək olar. Məsələn, tezlik poliqonundan (36,5;13) nöqtəsinin koordinatlarına görə müəyyən etmək olar ki, internet istifadəçiləri arasında orta yaşı 36,5 olan sinifdəki şəxslər çoxluq təşkil edir.

Nisbi tezlik histoqramı.

Toplanmış məlumatın müqayisəsinin asan, əyani olması üçün bir çox hallarda məlumatı nisbi tezlik histoqramı və ya nisbi tezlik poliqonu ilə təqdim etmək daha əlverişli olur.



Tezlik histoqramından görünür ki, təxminən 25% istifadəçi 30 ilə 42 yaş arasındadır.

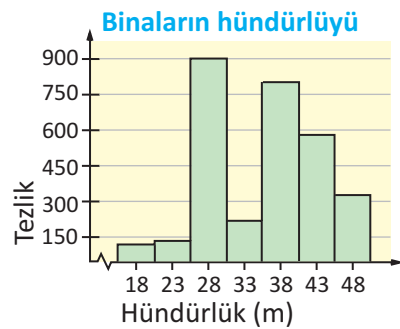
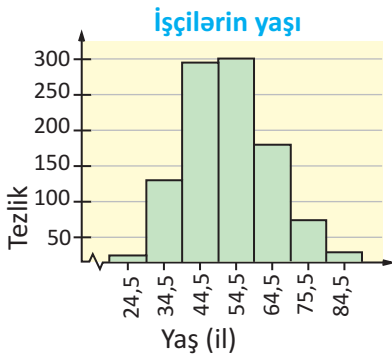
LAYIHƏ

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Verilən məlumat ailələrin aylıq ərzağa neçə manat pul xərclədikləri haqqında seçmə nümunələr üzərində aparılan araşdırmanın nəticələrini əks etdirir.
a) Məlumatı uyğun tezlik cədvəli qurun: b) Məlumatı tezlik poliqonu ilə təqdim edin.

279	205	279	266	199	177	162	232	303
192	181	321	309	246	278	50	41	335
116	100	151	240	474	297	170	188	320
429	294	570	342	279	235	434	123	325

- 2 > 1) Histoqramlara görə müəyyən edin:
a) siniflərin sayını;
b) siniflərin ölçüsünü;
c) ən böyük və ən kiçik tezlikli sinifləri və bu siniflərin tezliklərinin təqribi qiymətlərini;
2) Hər bir histoqrama uyğun tezlik poliqonunu qurun.



- 3 > Tezlik poliqonuna görə tapşırıqları yerinə yetirin.
a) Ən böyük və ən kiçik tezliyi olan sinifləri müəyyən edin.
b) Təxminən neçə nəfərin 50-dən az bal topladığını söyləmək olar?



4 > Cədvəl meşədə ağacların hündürlüyü haqqında məlumatı əks etdirir.

- a) Nisbi tezliyi əks etdirən sütun əlavə etməklə cədvəli dəftərinizdə çəkin.
b) Uyğun tezlik histqramını və poliqonunu qurun.

Sınıf (ağacların hündürlüyü, m)	10-13	14-17	18-21	22-25	26-29	30-33	34-37	38-41
Tezlik (ağacların sayı)	10	15	20	30	30	20	25	15

5 > Verilən məlumatları 5 sinifdə qruplaşdırmaqla:

- a) tezlik histqramı;
b) nisbi tezlik histqramı;
c) tezlik poliqonu qurun.
d) ən böyük və ən kiçik nisbi tezlikli sinifləri müəyyən edin.

1) Oyunun nəticələri (xalların sayı ilə)

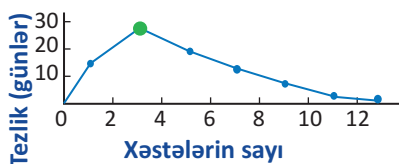
Məlumat: 154 257 195 220 182 240 177 228 235 146 174 192 165 207
185 180 264 169 225 239 148 190 182 205 148 188

2) Kənddə fermerlərin sahələri (hektarla)

Məlumat: 12 7 9 8 9 8 12 10 9 10 6 8 13
12 10 11 7 14 12 9 8 10 9 11 13 8

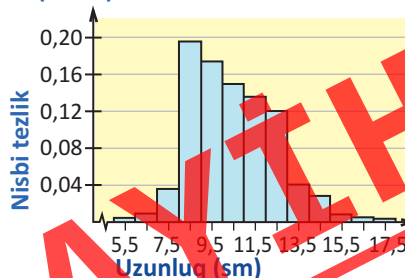
6 > Tezlik poliqonu bir xəstəxanaya gündəlik təcili yardım vasitəsilə daxil olan xəstələrin sayını göstərir.

- a) Yaşıl rəngli nöqtəyə uyğun məlumatı təqdim edin.
b) Müşahidə neçə günü əhatə edir?
c) Qrafikə uyğun tezlik cədvəli tərtib edin.



7 > a) Nisbi tezliyi ən böyük və ən kiçik olan sinfi müəyyən edin;
b) Uzunluğu orta hesabla 12,5 sm olan balıqlar bütün balıqların neçə faizini təşkil edir?

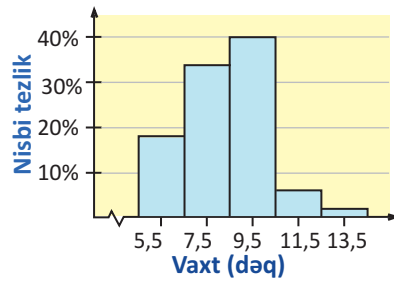
Akvariumdakı balıqların uzunluğu (sm-lə)



LAYIHƏ

- 8 > a) Histoqramı görə "hər 100 çağırışdan 50-sində təcili yardım 10 dəqiqədən az müddətdə yetişmişdir" fikri doğrudurmu?
 b) nisbi tezliyin qiymətinin ən böyük olduğu hala uyğun məlumatı təqdim edin.

Təcili yardımın gəlmə müddəti



- 9 > Aşağıda 40 kiçik şirkətin illik maliyyə dövriyyəsi haqqında məlumat verilmişdir.

İllik dövriyyənin miqdarı (min manatla)	Şirkətlərin sayı
45-dən 55-ə qədər	5
55-dən 65-ə qədər	7
65-dən 75-ə qədər	14
75-dən 85-ə qədər	8
85-dən 95-ə qədər	6

- a) Məlumatı uyğun tezlikləri müəyyən edin.
 b) Tezlik qrafikini çəkin.
 c) Qrafikə görə dövriyyəsi 85 min manatdan az olan neçə şirkət var?
 d) Dövriyyəsi 55 min manatdan az olan şirkətlər bütün şirkətlərin hansı hissəsini təşkil edir?
- 10 > Cədvəldə Sənanın kompüter oyununda topladığı xallar verilmişdir. Bu məlumatlardan ən kiçiyini nəzərə almasanız, ən çox hansı mərkəzə meyilli göstərici dəyişər: ədədi orta, yoxsa median?

Sənanın topladığı xallar

164	128	151	138
158	162	130	162
109	134	157	137

LAYIHƏ



Məlumatın analizi

Bir çox hallarda qruplaşdırılmış məlumatı analiz etmək üçün uyğun ədədi ortanı hesablamaq tələb edilir. Aşağıdakı nümunə üzərində bu cür ədədi ortanı tapma qaydasını araşdıraraq.

Nümunə. Cədvəl bir gündəki telefon danışığ-
larının müddətinə görə şirkət işçilərinin sayını
göstərir. Bu şirkətdə bir nəfər orta hesabla neçə
dəqiqə telefonla danışır?

Bu məsələdə qruplaşdırılmış məlumata uyğun
ədədi ortanı hesablamaq tələb edilir. Bu halda ədə-
di orta aşağıdakı qayda ilə hesablanır.

Sinif (danışığ müddəti)	Tezlik (işçilərin sayı)
1–5	12
6–10	26
11–15	20
16–20	7
21–25	11

1. Hər sinfin orta qiyməti tapılır.
2. Hər bir sinfin orta qiyməti ilə tez-
liyin hasilləri cəmi hesablanır.
3. Tezliklərin cəmi tapılır.
4. İkinci nəticə üçüncü nəticəyə
bölünür.

$$\text{Ədədi orta} = \frac{883}{76} \approx 11,6$$

Ədədi ortaya görə demək olar ki,
bu şirkətdə hər işçi gündə orta
hesabla 11,6 dəqiqə telefonla
danışır.

Sinif	Tezlik	Sinfin qiyməti	Tezlik × Sinfin qiyməti
1–5	12	3	36
6–10	26	8	208
11–15	20	13	260
16–20	7	18	126
21–25	11	23	253
	76		883

Tezlik paylanmasına görə ədədi orta

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{n} \quad x \text{ sinfin ədədi ortası, } f \text{ tezliyidir,}$$

$\sum$ işarəsi cəmi göstərir və "siqma" kimi oxunur.

$n = \sum f$ olduğuna diqqət edin.

1. Hər bir sinfin orta nöqtəsi tapılır.
2. Hər bir sinfin orta nöqtəsi (sinfin
qiyməti) ilə tezliyin hasilləri cəmi
tapılır.
3. Tezliklərin cəmi tapılır.
4. Ümumi məlumata uyğun ədədi
orta tapılır.

$$x = \frac{\text{ən böyük qiymət} + \text{ən kiçik qiymət}}{2}$$

$$\sum(x \cdot f)$$

$$n = \sum f$$

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{n}$$

LAYIHƏ

- 1 > Şirkətdəki 30 işçidən 8 nəfərinin maaşı 120 manat, 22 nəfərinin maaşı 330 manatdır. Şirkətdəki işçilərin orta əmək haqqını tapın.

- 2 > Eyni şirkətin hazırladığı piroqlar şəhərin müxtəlif mağazalarında müxtəlif qiymətə satılır. Bir gün ərzində satılan piroqların sayı və bir ədədinin qiyməti cədvəldə verilmişdir. Şirkət bir piroqu orta hesabla neçə manata satır?

Piroq satışı		
Mağaza	Qiyməti(ⁿ)	Sayı
A	1,20	120
B	1,50	70
C	1,60	110
D	1,10	200

- 3 > Cədvəldə verilmiş məlumatlara görə ədədi ortanı tapın.

- a) Kompüter oyununda toplanan xallara görə orta xalı tapın.

Topladığı xal	Oyunçuların sayı
1–10	2
11–20	5
21–30	6
31–40	4
41–50	3

- b) Bir həftə ərzində doğulan körpələrin kütlələri haqqında məlumata görə bir körpənin kütləsinin orta qiymətini tapın.

Kütləsi	Sayı
[1; 1,5)	1
[1,5; 2)	3
[2; 2,5)	8
[2,5; 3)	15
[3; 3,5)	10
[4; 4,5)	9
[4,5; 5)	0

- 4 > Məlumatları siniflərdə qruplaşdırın, cədvəl qurun və ədədi ortanı hesablayın.

- a) Məlumat bazası:

30 kolun hündürlüyü (sm-lə)

Siniflərin sayı: 5

67 76 69 68 72 68 65 63 75 69

66 72 67 66 69 73 64 62 71 73

68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

- b) Məlumat bazası:

20 xəstənin xəstəxanada qalma müddəti (günlə)

Siniflərin sayı: 4

6 9 7 14 4 5 6 8 4 11

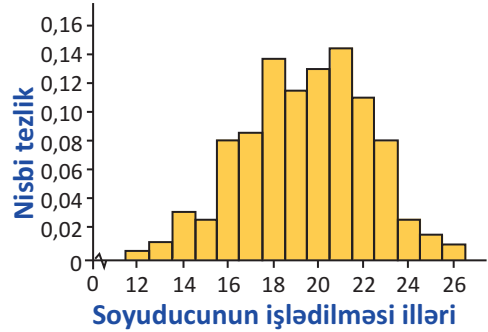
10 6 8 6 5 7 6 6 3 11

- 5 > Qruplaşdırılmış məlumatlara uyğun ədədi orta hesablanarkən nə üçün sinfin orta qiyməti tapılır? Fikrinizi aşağıdakı nümunə üzərində izah edin. Bir məlumat bazası da siz fikirləşib yazın.

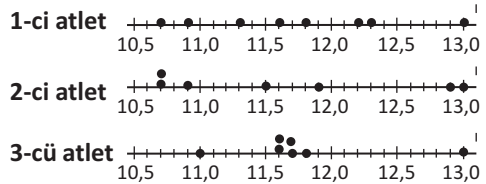
Göldən tutulan balıqların kütləsi (kq)	Balıqların sayı
1–5	2
6–10	5
11–15	9
16–20	8
21–25	3

- 6 > Elektron avadanlıqlar istehsal edən şirkət əhali arasında soyuducularını neçə il əvvəl aldıkları haqqında araşdırma aparmışdır. Araşdırma 200 evdə aparılmış və nəticələr histqramla verilmişdir.

- a) Histoqramla görə sinifləri, siniflərin qiymətini, tezlik məlumatlarını əhatə edən cədvəl qurun.
b) hesablama aparmadan ədədi ortanı təxmin edin, ədədi orta 15-ə, 20-yə, yoxsa 25-ə daha yaxındır?
c) Ədədi ortanı hesablayın, təxmini-nizi yoxlayın.



- 7 > Diaqramda üç atletin qaçış nəticələri göstərilmişdir. Hər biri üçün orta nəticəni müəyyən edin. Hansı idmançının daha stabil nəticə göstərdiyini söyləmək olar? Fikrinizi izah edin.



- 8 > Verilən məlumatlara görə tezlik cədvəli qurun.

Uşaqların boyu. Siniflərin sayı: 5. Məlumat: 30 uşağın boyu
67 76 69 68 72 68 65 63 75 69 66 72 67 66 69 73 64 62 71 73
68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

- 9 > Verilən məlumatlara görə tezlik poliqonu və nisbi tezlik poliqonu qurun.

a)

Qızların boyu	Sayı
140-145	3
146-151	7
152-157	12
158-163	6
164-169	2

b)

Oğlanların boyu	Sayı
145-150	2
151-156	3
157-162	8
163-168	11
169-174	6

- 10 > Verilən məlumatlara görə nisbi tezlik histqramı qurun. Ədədi ortanı hesablayın.

Oteldə qalma müddəti. Siniflərin sayı: 6

Məlumat: 20 nəfərin oteldə qalma müddəti:

6 9 10 6 11 7 14 6 5 7 6 4 5 6 8 4 11 8 6 3

Nümunə 1. Tutaq ki, avtomobillər latın əlifbasının üç hərfinin və üç rəqəmin ardıcıl yazılışı ilə nömrələnir. İşarələrin düzülüşünə görə neçə müxtəlif avtomobil nömrəsi hazırlamaq mümkündür? a) hərfin təkrarlanmasına icazə verilir. b) hərfin təkrarlanmasına icazə verilmir.

	Hərflər			Rəqəmlər			Seçimlərin ümumi sayı
a)	26	26	26	10	10	10	$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ $= 17\,576\,000$
b)	26	25	24	10	10	10	$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ $= 15\,600\,000$

Vurma prinsipi. a elementini n üsulla seçmək mümkündürsə və hər seçmə qarşı b elementini m üsulla seçmək mümkündürsə, (a, b) nizamlı cütünü $m \times n$ sayda üsulla seçmək mümkündür.

10-2

Permutasiya - Yerdəyişmə. nP_r

Permutasiya. Bəzi hallarda çoxluğa daxil olan elementlərin düzülmə sırasına görə mümkün variantların sayını tapmaq tələb edilir. Biz bu tip məsələləri indiyə qədər budaqlanan diaqram qurmaqla və ya siyahı tutmaqla həll edirdik. Məsələn, 1, 2, 3 rəqəmlərinin hər birindən bir dəfə istifadə etməklə neçə müxtəlif üçrəqəmli ədəd yazmaq olar? 123, 132, 213, 231, 312, 321. Burada hər bir düzülüş **permutasiya** (yerdəyişmə) adlanır. İndi isə biz permutasiya anlayışından istifadə edərək mümkün variantları düsturla hesablayacağıq. Hər hansı rəqəmin 1-ci yerdə seçilməsinin 3, qalan 2 rəqəmdən birinin 2-ci yerdə seçilməsinin 2, üçüncü rəqəmin isə bir variantı var. Deməli, vurma prinsipini tətbiq etsək, verilən rəqəmlərin bütün permutasiyaları sayı $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -dır. $3 \cdot 2 \cdot 1$ hasili qısaca olaraq $3!$ kimi yazılır və “üç faktorial” kimi oxunur. $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$... və s. $0! = 1$ qəbul edilir.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Hesablamalarda $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ və $(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!$ düsturlarından

istifadə səmərəli olur. Məsələn: $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$

Yalnız elementlərinin düzülüşü ilə fərqlənən (yəni bir çoxluqdan alınə bilən) müxtəlif nizamlanmış çoxluqlar baxılan çoxluğun permutasiyaları (yerdəyişmələri) adlanır.

LAYIHƏ

Permutasiyanın I elementini n elementli çoxluqdan n üsulla, II elementini qalan $(n - 1)$ elementdən $(n - 1)$ üsulla, III elementini qalan $(n - 2)$ elementdən $(n - 2)$ üsulla və s. nəhayət, n -ci (sonuncu) elementi 1 üsulla seçmək olar. Onda bütün permutasiyalar sayı vurma prinsipinə görə

$${}_nP_n = n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ olar.}$$

n elementli çoxluğun bütün mümkün permutasiyaları sayı ${}_nP_n$ kimi yazılır və ${}_nP_n = n!$ düsturu ilə hesablanır.

Nümunə 2. 5 nəfərin bir sırada düzülməsinin neçə mümkün variantı var?

Burada $n = 5$, ${}_5P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > 1234 ədədinin rəqəmlərini yerdəyişmə etməklə neçə müxtəlif ədəd yazmaq olar?
- 2 > Turnirdə 6 nəfər iştirak edir. Turnir cədvəlində yerlər neçə müxtəlif üsulla bölüşdürülə bilər?
- 3 > 0, 1, 2, 3, 4 rəqəmlərindən, rəqəmləri təkrarlanmamaqla neçə beşrəqəmli ədəd yazmaq olar?
- 4 > Hesablayın.
 a) $\frac{8!}{6!}$ b) $\frac{18! - 2 \cdot 17!}{16! + 15!}$ c) $\frac{9! \cdot 5!}{8! \cdot 6!}$ d) $\frac{{}_5P_5 - 2 \cdot {}_3P_3}{{}_4P_4 + 5 \cdot {}_3P_3}$
- 5 > “ATOM” sözündəki hərflərin yerini dəyişərək neçə müxtəlif “söz” düzəltmək olar?
- 6 > Qrupdakı 8 şagird Lalə və Elmirin yanaşı dayanması şərti ilə neçə müxtəlif üsulla cərgəyə düzülə bilər?
- 7 > 6 nəfər dəyirmi masa ətrafında neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilər?
- 8 > “EHTİMAL” sözündəki hərfləri yerdəyişmələr edərək müxtəlif “söz”lər düzəldilir. Onların neçəsində saitlər yanaşı yazılır?
- 9 > Sınıfdə 8 şagird var - 5 oğlan, 3 qız. Onların qapıdan çıxma ardıcılıqlarının neçə mümkün variantı var: a) qapıdan əvvəlcə qızlar çıxır; b) qapıdan əvvəlcə oğlanlar çıxır; c) istənilən ardıcılıqda çıxa bilərlər.

✓ **Təkrarlanan elementli çoxluqda permutasiyaların sayı**

Nümunə 1. “ALTAY” sözündəki hərfləri yerdəyişmə edərək, oxunuşları müxtəlif olan neçə “söz” düzəltmək olar?

Həlli. Əgər hərflər müxtəlif olsaydı $5!$ sayda yerdəyişmələr etməklə müxtəlif sözlər düzəldə bilərdik. Lakin hər bir belə yerdəyişmədə iki A hərfinin yerlərini öz aralarında dəyişdirdikdə oxunuş dəyişmir.

Ona görə də müxtəlif yerləşmələrin sayı $2!$ dəfə az olur və $\frac{5!}{2!} = 60$ saydadır.

Nümunə 2. “BANAN” sözünün hərflərini neçə müxtəlif vəziyyətdə düzmək olar? Məsələn, AABNN, ANABN, BAANN və s.

Həlli: BANAN sözündə iki A, iki N və bir B hərfi var.

5 elementi $5!$ sayda müxtəlif cür düzmək olar. Lakin burada ikisi təkrarlanmaqla 3 müxtəlif element var. Mümkün düzülüşlərin sayı:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{2 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{60}{2} = 30$$

n elementli təkrarlanan çoxluğun k növ elementi varsa və bunlardan n_1 sayda 1-ci növdən, n_2 sayda 2-ci növdən, n_3 sayda 3-cü növdən, nəhayət n_k sayda k -ci növdən olarsa, permutasiyaların mümkün sayı: $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ olmaqla

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \text{ kimi hesablanır.}$$

Öyrənmə tapşırıqları

10> a) NƏNƏ; b) NƏVƏ; c) ŞƏLALƏ; d) ELEMENT sözlərinin hərflərini oxunuşu müxtəlif olan neçə variantda düzmək olar?

11> Ardıcıl düzülmüş 5 şarın ikisi qırmızı, üçü sarı rəngdədir. Şarları düzmənin görünüşü müxtəlif olan neçə mümkün variantı var?



12> Verilən ifadələrə görə elementlərin sayını, neçə elementin təkrarlandığını və neçə dəfə təkrarlandığını yazın. Rəngi dairelərlə göstərin.

a) $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$

b) $\frac{12!}{7! \cdot 3! \cdot 2!}$

c) $\frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$

LAYIHƏ

✓ Nizamlı seçim, nizamsız seçim

Nümunə. Qrupda 8 şagird var. a) qrup nümayəndəsini və divar qəzetinin redaktorunu; b) iki nəfər növbətçini neçə müxtəlif üsulla seçmək olar?

Həlli: a) Qrup nümayəndəsini 8 nəfərdən 8 müxtəlif üsulla, qrup nümayəndəsi seçildikdən sonra redaktoru qalan 7 nəfərdən 7 müxtəlif üsulla seçə bilərik. Vurma qaydasına görə müxtəlif seçimlərin sayı $8 \cdot 7 = 56$ olur.

Şagirdləri 1, 2, ..., 8 ədədləri ilə kodlaşdırsaq, 3; 5 ardıcılığı ilə seçim 5; 3 ardıcılığı ilə seçimdən fərqlənir. Birinci halda 3-cü şagird qrup nümayəndəsi, 5-ci isə redaktor seçilib. İkinci halda isə tərsinə, 5-ci şagird qrup nümayəndəsi, 3-cü şagird isə redaktor seçilib.

b) Bu məsələ ilk baxışdan əvvəlkinə oxşayır. Burada da növbətçilərdən birini 8 nəfərdən 8 üsulla, o birini isə qalan 7 nəfərdən 7 üsulla seçmək olar. Lakin, bu halda məsələn, 3; 5 və 5; 3 seçimləri fərqli deyillər və eyni cütlüyü göstərir.

Eyni tərkibli heyətləri nəzərə alaraq məsələnin həlli üçün $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ üsul alırıq.

Oxşar məsələlərdə elementlərin seçim ardıcılığının əhəmiyyətli olub-olmadığına xüsusi diqqət yetirilməlidir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 13 > 1; 2; 3; 4; 5; 6 rəqəmlərindən rəqəmləri təkrarlamamaqla neçə müxtəlif ikirəqəmli ədəd yazmaq olar?
- 14 > Çevrə üzərində A, B, C, D, E nöqtələrini qeyd edin. Bu nöqtələrin hər hansı ikisindən keçməklə neçə müxtəlif düz xətt çəkmək olar?
- 15 > Əli, Vüqar, Yaşar, Leyla, İlahə və Toğrul öz aralarında keçirdikləri şahmat yarışında müxtəlif xallar topladılar.
 - a) I və II yerləri bölüşdürməyin mümkün variantlarının sayını tapın.
 - b) İlk iki yeri tutan şahmatçılar rayon turuna vəsiqə qazandılar. Mümkün variantların sayını tapın.

10-3

Permutasiya - Yerləşdirmə. nP_k

Nümunə. Yeddi nəfər arasından üç nəfəri məktəb şagird təşkilatına sədr, müavin və katib seçilməlidir. Bu seçimin neçə variantı var?

Həlli. Sədr 7 nəfərdən 7 üsulla, müavini qalan 6 nəfərdən 6 üsulla, katibi isə 5 üsulla seçmək mümkündür. Yeddi nəfər arasından üç nəfəri seçmə variantlarının sayı $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ olacaq.

n elementdən hər birində k element olmaqla və bir-birindən ya elementli, ya da düzlüyü ilə fərqlənən permutasiyalara baxaq. n elementli çoxluğun k sayda elementini seçərək nizamlı sıraya düzək.

Düzümün 1-ci elementini n elementli çoxluqdan n üsulla, 2-ci elementini qalan $(n-1)$ elementdən $(n-1)$ üsulla və s., nəhayət k -cı elementini $(n-k+1)$ üsulla seçmək olar. Vurma qaydasına görə permutasiyalar sayı:

$${}_nP_k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{\text{vuruqlar } k \text{ sayda olmalıdır}} \quad 0 \leq k \leq n. \quad \text{düsturu ilə hesablanır.}$$

$(n-k)!$ ifadəsinə vurub bölməklə bu düsturu daha qısa şəkildə yazmaq olar:

$$\begin{aligned} {}_nP_k &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \\ &= \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot \underbrace{(n-k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n!}}^{n!}}{(n-k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Nümunə: ${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

${}_7P_3 = 210$ doğruluğunu düsturla hesablamaqla da yoxlayaq:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 6 \cdot 5 &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!} \\ {}_7P_3 &= \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \end{aligned}$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 16 > “AZOT” sözündəki hərflərin hərəsi bir karta yazılıb. Bu kartların hər hansı ikisini yanaşı düzməklə alınan müxtəlif “sözlərin” sayını tapın.
- 17 > Hesablayın. a) ${}_{10}P_3$ b) ${}_7P_2$ c) ${}_8P_3$ d) ${}_5P_4$ e) ${}_7P_4$
- 18 > Hansı böyükdür? a) ${}_8P_2$, yoxsa ${}_6P_3$ b) ${}_{10}P_3$, yoxsa ${}_7P_5$ c) ${}_9P_6$, yoxsa ${}_8P_7$
- 19 > Hesablayın. a) $\frac{{}_5P_3}{{}_5P_2}$ b) $\frac{{}_8P_5}{{}_8P_4}$ c) $\frac{{}_7P_3 + {}_6P_3}{{}_{11}P_2}$ d) $\frac{{}_6P_5 + {}_6P_4}{{}_6P_3}$
- 20 > Fidanın 6 iş kostuyumu var. O, bazar ertəsi, çərşənbə axşamı, çərşənbə günləri seminarda iştirak etməlidir. Fidan bu günlərin hər birində müxtəlif kostyumlar geyinirsə, onun neçə müxtəlif seçimi var?
- 21 > 4 məktubu 6 zərfə hər zərfə bir məktubdan artıq olmamaqla neçə müxtəlif üsulla yerləşdirmək olar?
- 22 > Sınıfdə 20 şagird var. Sınıf iclasını aparmaq üçün sədr və katibi neçə üsulla seçmək olar?
- 23 > Üç sərnəşin 5 dayanacaqda hər dayanacaqda ən çoxu biri düşmək şərti ilə neçə müxtəlif üsulla avtobusu tərk edə bilər?
- 24 > 1, 2, 3, 4, 5, 6 rəqəmlərindən rəqəmləri təkrarlanmayan neçə üçrəqəmli ədəd düzəltmək olar? Onların neçəsi 200-dən böyükdür?

10-4

Kombinezon. ${}_nC_k$

Nümunə. 7 üzvü olan qrup layihə işini təqdim etmək üçün aralarından üç nəfəri seçməlidir. Qrup üzvləri bunu neçə müxtəlif üsulla edə bilərlər?

Həlli. Üç nəfərin hansı ardıcılıqla seçilməsi əhəmiyyətli deyil. Şagirdlərin hər hansı üçünü çağırıb, onları çağırıldıqları ardıcılıqla sıraya düzsək, bütün mümkün halların sayı ${}_7P_3$ olar. Seçilmiş üç nəfərin sıradakı yerlərini $3!$ üsulla dəyişdirməklə alınan müxtəlif permutasiyalar eyni heyəti göstərdiyindən müxtəlif seçimlərin sayı $3!$ dəfə az, yəni $\frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ olur.

Elementlərin hansı ardıcılıqla, düzülüşlə seçilməsi tələb edilmədikdə seçimlər *kombinezon* adlanır. Kombinezonlar bir-birindən yalnız elementlə fərqlənirlər. Yəni kombinezon n elementli çoxluğun k elementli alt çoxluğuudur. n elementli çoxluğun k elementli alt çoxluqlarının sayı ${}_nC_k$ ilə işarə edilir və “kombinezon n elementdən k ” kimi oxunur. Bu cür k elementli kombinezonların hər birindən $k!$ sayda permutasiyalar düzəlsək, bütövlükdə ${}_nP_k$ sayda permutasiya alınır. Vurma prinsipinə görə ${}_nP_k = {}_nC_k \cdot k!$ olur. Deməli,

$${}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

vuruqlar k sayda olmalıdır

Nümunə. ${}_7C_3 = \frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$

Kombinezonların sayı düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Bu düsturun özünəməxsus simmetriyasına diqqət yetirin. Əgər k -ni $(n-k)$ ilə əvəz etsək, eyni düstur alınır. Təkcə məxrəcdəki faktoriallar yerini dəyişəcək: ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$. Asanlıqla göstərmək olar ki, ${}_nC_0 = 1$, ${}_nC_n = 1$, ${}_nC_1 = n$.

Birləşmələrə aid bəzi hesablamalarda Microsoft EXCEL proqramından və ya qrafik kalkulyatorlardan istifadə edilməsi zərurəti yaranır.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Çevrə üzərində A, B, C, D, E, F nöqtələrini qeyd edib, onları parçalarla birləşdirin. Neçə parça alındı?
- 2 > Hesablayın. a) ${}_4C_3$ b) ${}_4C_4$ c) ${}_5C_2$ d) ${}_6C_3$ e) ${}_6C_1$ f) ${}_7C_3$
- 3 > Müqayisə edin.
a) ${}_8P_2$ və ${}_11C_2$ b) ${}_7P_3$ və ${}_7C_3$ c) ${}_11P_2$ və ${}_11C_2$ d) ${}_7C_3$ və ${}_7C_4$

LAYİHƏ

- 4 > a) 12 növ sərirləşdirici içkidən 3 müxtəlif içki seçmənin neçə mümkün variantı var?
b) 20 nəfər arasından 2 finalçını müəyyən etməyin neçə mümkün variantı var?
- 5 > $n = 6$, $k = 2$ olduqda hesablayın: ${}_nP_k$ və ${}_nC_k$. Hansı daha böyükdür?
- 6 > Verilən hər bir kombinezona uyğun bir məsələ yazın. a) ${}_{10}C_3$; b) ${}_5C_2$; c) ${}_7C_4$
- 7 > İfadələri sadələşdirin. a) $\frac{6!}{5!} - \frac{5!}{4!} + \frac{7!}{6!}$ b) $\frac{7! + 6!}{7! - 6!}$ c) $\frac{{}_7C_3}{{}_6P_3}$ d) ${}_7C_3 : {}_8P_5$

Tətbiq tapşırıqları

- 8 > Hansı halda permutasiyaların, hansı halda kombinezonların tapıldığını müəyyən edin və hesablayın.
a) 20 növ güldən 3 növ gülün seçilməsi; b) Kredit kartının üçrəqəmli kodu;
c) 12 kitabdan oxunmuş 9 kitabın qeyd edilməsi;
d) 10 idmançıdan finişə 1-ci, 2-ci, 3-cü çatması.
- 9 > İdman malları mağazası yeni mövsüm mallarını almağa hazırlaşır. İdman kostyumlarının 6 rəngdə, 4 stildə təklifi var. Mağaza sahibi 4 rəngdə, 2 stildə kostyum seçməyi qərara aldı. Onun neçə seçim imkanı var?

Göstəriş: Seçim imkanı = Rəng sayı $\times$ Stil sayı 6 rəngdən 4-nü seçmə sayı: ${}_6C_4$
4 stildən 2-ni seçmə sayı: ${}_4C_2$

- 10 > Lamiyə öz adının hərfləri ilə 6 kiçik hərfdən ibarət e-mail parolu seçmək istəyir. O, bunu neçə üsulla edə bilər?
- 11 > 10 reklam lövhəsindən 3-ü ağ, 2-i boz, 5-i mavi rəngdədir. Bu lövhələri bir cərgədə düzmənin neçə müxtəlif variantı var?
- 12 > Azər, Anar, Əli, Vəli, Vədadi və Araz dəyirmi masanın ətrafında Əli ilə Vəli yanaşı olmamaq şərti ilə neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilərlər?
- 13 > Çevrə üzərində 8 nöqtə qeyd edilmişdir. Təpələri bu nöqtələrdə olan neçə üçbucaq qurmaq olar?

- 14 > Şəkildə neçə paraleloqram saymaq olar?



- 15 > 10 suala iki cavab - *doğrudur* və *yanlıştır* yazmaqla neçə müxtəlif variantda cavab vermək olar?
- 16 > 5 oğlan və 4 qızdan, hərəsində ən azı 1 qız olmaqla, 3 nəfərlik neçə müxtəlif qrup yaratmaq olar?
- 17 > Qabda 5 ağ, 3 qırmızı kürə var. Qabdan 2-si ağ, 1-i qırmızı olmaqla 3 kürəni çıxarmağın neçə müxtəlif variantı var?
- 18 > 4 oğlan və 4 qız bir sırada neçə mümkün variantda otura bilərlər.
a) oğlanlar yanaşı, qızlar yanaşı olmaqla; b) bir qız, bir oğlan olmaqla;
c) istənilən ardıcılıqda olmaqla

10-5

Ehtimalın hesablanması aid məsələ həlli

Sınağın hər bir ayrılmayan nəticəsinə elementar hadisə deyilir. Sınaq nəticəsində elementar hadisələrdən yalnız biri hökmən baş verir. Elementar hadisələrin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir. Elementar hadisələr çoxluğunun ixtiyari alt çoxluğuna bu sınağa aid hadisə deyilir. Ona görə də çoxluqlar üçün təyin edilən əməllər hadisələr üçün də eyni qaydada təyin edilir.

A hadisəsinə daxil olmayan bütün nəticələr çoxluğuna A hadisəsinin əksi (və ya tamamlayıcısı) deyilir və $\bar{A}$ ilə işarə olunur.

Bütün nəticələri A və ya B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan hadisəyə A və B hadisələrinin birləşməsi deyilir və $A \cup B$ kimi işarə edilir.

Nəticələri həm A, həm də B hadisələrinə daxil olan hadisəyə A və B hadisələrinin kəsişməsi deyilir və $A \cap B$ kimi işarə olunur.

Məsələn, bir zərin atılma sınağında elementar hadisələr $E_1, E_2, \dots, E_6$ (burada E_k ilə yuxarı üzdə k xal düşmüşdür hadisəsi işarə olunub) olacaqdır. Bu sınaqda A və B uyğun olaraq "cüt sayda xal düşmüşdür" və "3-ə bölünən xal düşmüşdür" hadisələri olarsa,

$A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $A \cup B = \{E_2, E_3, E_4, E_6\}$, $A \cap B = \{E_6\}$, $\bar{A} = \{E_1, E_3, E_5\}$
Elementar hadisənin baş verməsi A hadisəsinin baş verməsinə gətirirsə, ona A hadisəsi üçün əlverişli nəticə deyilir. Eyniimkanlı elementar nəticələri olan sınaqda hadisənin ehtimalı aşağıdakı qaydada tapılır

$$P(A) = \frac{\text{Əlverişli halların sayı}}{\text{Mümkün halların sayı}}$$

Aydındır ki, $0 \leq P(E) \leq 1$

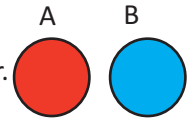
Tamamlayıcı hadisənin ehtimalı: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ düsturu ilə tapıla bilər.

✓ 1. Uyuşmayan hadisələr

Ortaq nəticələri olmayan hadisələrə uyuşmayan hadisələr deyilir.

A və B-nin kəsişməsi boş çoxluqdur. $P(A \cap B) = 0$

Uyuşmayan A və ya B hadisəsinin baş vermə ehtimalı $P(A \text{ və ya } B)$ bu hadisələrin hər birinin baş vermə ehtimalının cəminə bərabərdir. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



1. Nümunə Torbaya RİYAZİYYAT sözünün hərfləri kəsilib yığılmışdır. Torbadan ilk olaraq A və ya İ hərfini çıxaran Fərəh prizi udar. Fərəhin prizi udma ehtimalını hesablayın.

Həlli. Təsadüfi bir hərf seçilsə, onun A hərfi olması hadisəsi **A hadisəsi**, ehtimalı isə **P(A)** olsun. Hərflərin sayı 10, A hərfinin sayı 2 olduğundan: $P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Təsadüfi bir hərf seçilsə, onun İ hərfi olması hadisəsi **B hadisəsi**, ehtimalı isə **P(B)** olsun: $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Fərəhin prizi udma ehtimalı A və ya B, yəni $A \cup B$ hadisəsinin baş vermə ehtimalı, A və B hadisələrinin ehtimalları cəminə bərabərdir.

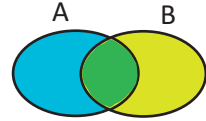
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$



2. Hadisələrin birləşməsinin ehtimalı

İstənilən A və B hadisələri üçün

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ münasibəti doğrudur.



- 2. Nümunə.** 24 nəfər seminar iştirakçısından 12 nəfəri ingilis, 10 nəfəri alman dilində, bunlardan 4-ü həm ingilis, həm alman dilində danışır. Seminar iştirakçılarından təsadüfi olaraq bir nəfər seçilsə, onun ingilis və ya alman dilində danışan olması ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. A hadisəsi. Təsadüfi bir nəfər seçilsə onun ingilis dilində danışan olması ehtimalı $P(A)$:

$$P(A) = \frac{12}{24}$$

B hadisəsi. Təsadüfi bir nəfər seçilsə onun alman dilində danışan olma ehtimalı $P(B)$:

$$P(B) = \frac{10}{24}$$

A və B hadisələrinin ortaq nəticələri (kəsişməsi) var: Təsadüfi bir nəfər seçilsə onun həm ingilis həm də alman dilində danışan olması ehtimalı $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = \frac{4}{24}$$

$$P(A \cup B) = \frac{12}{24} + \frac{10}{24} - \frac{4}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$



3. Asılı olmayan hadisələrin baş vermə ehtimalı

Bir hadisənin baş verməsi digər hadisənin baş verməsinə təsir etmirsə, bu hadisələr asılı olmayan hadisələrdir. Asılı olmayan A və B hadisəsinin baş vermə ehtimalı $P(A \text{ və } B) = P(A) \cdot P(B)$ kimi hesablanır, “və” bağlayıcısını çoxluqların kəsişməsi, “ $\cap$ ”, işarəsi ilə əvəz etmək olar. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- 3. Nümunə.** Zər və metal pul eyni zamanda atılır. Zərin 6 xal, pulun xəritə üzünə düşərsə, Afaq prizi qazanar. Afaqın prizi qazanma ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. A hadisəsi zərin 6 xal düşməsi $P(A) = \frac{1}{6}$,

B hadisəsi pulun xəritə üzünə düşməsi $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

LAYIHƏ



4. Asılı hadisələrin baş vermə ehtimalı

Bir hadisənin baş verməsi digər hadisənin baş verməsinə təsir edərsə, bu hadisələr asılı hadisələrdir. Asılı A və B hadisəsinin baş vermə ehtimalı

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(\text{B hadisəsi A-dan sonra}) \text{ kimi hesablanır.}$$

4. **Nümunə.** Torbada 5 qırmızı, 3 sarı kürə var. Torbaya qaytarılmadan ardıcıl olaraq iki kürə çıxarılır. Bu kürələrin hər ikisinin qırmızı kürə olması ehtimalını tapın.

Həlli: birinci çıxarılan şarın qırmızı olma ehtimalı $P(A) = \frac{5}{8}$, ikincinin qırmızı olma ehtimalı $P(B) = \frac{4}{7}$, hər ikisinin qırmızı olma ehtimalı $P(A \cap B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Əvvəlcə hadisələrin uyuşmayan olub-olmadığını müəyyən edin. Sonra ehtimalını hesablayın.
 - 1) Torbaya Azərbaycan əlifbasının hərfləri yazılmış kartlar yığılmışdır. Təsadüfən çıxarılan kartın: a) A hərfi və ya hər hansı sait olması; b) L, M və ya N hərflərindən biri olması.
 - 2) Bir zər atıldıqda: a) $P(1 \text{ və ya } 5)$; b) $P(\text{tək ədəd və ya } 5\text{-dən kiçik ədəd})$.
- 2 > Əvvəlcə asılı və ya asılı olmayan hadisələr olduğunu müəyyən edin. Sonra ehtimalını hesablayın.
 - 1) Bir zər iki dəfə dalbadal atılmışdır: a) $P(2, \text{sonra } 3)$; b) $P(\text{iki dəfə } 6)$; c) $P(3, \text{istənilən xal})$
 - 2) Qutuda üzərində A, B, G, N, L, Ə, M yazılmış hərf kartları var. Ardıcıl iki kart çıxarılır. Hadisənin ehtimalını tapın.
 - a) Kartlar geri qaytarılmadıqda: $P(A, \text{sonra } Ə)$
 - b) Kartlar geri qaytarıldıqda: $P(L, \text{sonra } N)$
- 3 > Supermarketin hədiyyə kampaniyasının finalında alıcıları üçün hər birində uduş olan 10 günəbəxan tumu bağlaması təqdim etdi. Uduşlarda 6 televizor, 3 kompüter, 1 avtomobil olduğu elan edildi. Bu məlumatlara görə hadisələrin ehtimalını hesablayın.
 - a) Birinci uduşun kompüter, ikincinin avtomobil olması
 - b) Ardıcıl iki televizor olması
- 4 > Zər 2 dəfə atılır. Hər ikisində 4 xalın düşməsi hadisələri asılı, yoxsa asılı olmayan hadisələrdir. Ehtimalı hesablayın.
- 5 > A, İ, B, K, T hərf kartları qutuya yığılmışdır. Qutudan təsadüfi qayda ilə götürülən kartlar ardıcıl düzüldükdə KİTAB sözünün alınması ehtimalını tapın.

- 1. Nümunə.** Qutuda üzərində heç bir məlumat olmayan 6 ədəd CD-dən ikisi xalq musiqisi, ikisi caz, ikisi estrada musiqisidir. Təsədüfi götürdüyünüz iki diskdən birincinin caz, ikincinin estrada musiqisi olma ehtimalını tapın.

Həlli.
$$P(\text{caz, estrada}) = \frac{\text{Əlverişli halların sayı}}{\text{Mümkün halların sayı}}$$

Əlverişli halların sayı vurma prinsipinə görə $2 \cdot 2$

iki estrada, iki caz diski olduğu üçün

6 CD-dən ikisinin seçilməsinin mümkün halları sayı: ${}_6P_2$

$$P(\text{caz, estrada}) = \frac{2 \cdot 2}{{}_6P_2} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{4}{6 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Cavab: 1-nin caz, 2-nin estrada musiqisi olma ehtimalı $\frac{2}{15}$ -dir

- 2. Nümunə.** Torbada 12 tennis topu var, onlardan 4-ü defektlidir. Torbadan iki top çıxarsanız, hər ikisinin defektli olma ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. Eyni imkanlı bütün hadisələrin sayı 12 elementdən hər birində 2 element olmaqla kombinasiyonların sayı qədərdir: ${}_{12}C_2$.

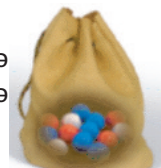
Verilən hadisədə əlverişli hadisələrin sayı 4 elementdən hər birində 2 element olmaqla kombinasiyonların sayıdır: ${}_4C_2$

$$P(2 \text{ defektli}) = \frac{\text{Əlverişli halların sayı}}{\text{Mümkün halların sayı}} = \frac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2}$$

$${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \quad {}_{12}C_2 = \frac{{}_{12}P_2}{2!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

$$P(2 \text{ defektli}) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

- 3. Nümunə.** Torbada 5 qırmızı, 3 mavi kürə var. Torbadan 2 kürə çıxarsanız, heç olmazsa birinin qırmızı rəngdə olma ehtimalı nə qədərdir?



Həlli. İki kürə çıxarılsa, birinin qırmızı olma hadisəsini E ilə işarə edək. Lakin bir kürənin qırmızı olma variantlarının mümkün sayını tapmaq yorucudur. Biz əvvəlcə bu hadisəni tamamlayan, iki kürədən heç birinin qırmızı rəngdə olmaması hadisəsinin (E') ehtimalını tapaq. Arzu olunan hadisə hər iki kürənin mavi olmasıdır. Bu halda əlverişli halların sayı: ${}_3C_2$ Mümkün halların sayı: ${}_8C_2$

$$P(E') = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}}{\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}} = \frac{3}{28}$$

E hadisəsinin baş vermə ehtimalı:

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28} \approx 0,89$$

- 6 > Sınıfdə 12 qız, 10 oğlan var. Məktəb şagird təşkilatına beş nümayəndə göndərməlidir. a) Təsadüfi seçimlə nümayəndələrin 3 qız, 2 oğlan seçilməsinin neçə mümkün variantı var? b) Təsadüfi seçilmişlərin beşinin də oğlan olmasının ehtimalı nə qədərdir? c) Təsadüfi seçmələrlə beşinin də qız olmasının ehtimalı nə qədərdir?
- 7 > 2, 3, 5, və 7 rəqəmlərindən rəqəmlərinin təkrarlanmaması şərtilə neçə üçrəqəmli ədəd düzəltmək olar?
Bu ədədlərdən təsadüfi biri seçilsə, onun cüt ədəd olması ehtimalını tapın.
- 8 > Qutudakı 5 göy, 4 qırmızı kürədən istənilən üçü müxtəlif üsullarla götürülə bilər. Götürülmüş kürələrdən ən azı birinin göy rəngli olması ehtimalını tapın.
- 9 > Konveyer bir buraxılışda 100 batareya istehsal edir və bunlardan ikisinin defektli olduğu məlum olur. Batareyalar hər birində 4 ədəd olmaqla təsadüfi seçimlə qablaşdırılır. a) Təsadüfi seçilmiş bir qutudakı bütün batareyaların defektsiz olmasının ehtimalı nə qədərdir? b) Bu hadisənin tamamlayıcı hadisəsi hansıdır və ehtimalı nə qədərdir?
c) qutudakı 2 batareyanın defektli olması, d) qutudakı 2 batareyanın defektsiz olması, e) qutuda heç olmasa bir batareyanın defektli olması ehtimalı nə qədərdir?
- 10 > 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, və 13 ədədləri yazılaraq torbaya yığılmışdır. Təsadüfi üç ədəd çıxarılsa, bu ədədlərin Pifaqor üçlüyü olma ehtimalı nə qədərdir?
- 11 > Rəna və rəfiqəsi Leyla, həmçinin daha beş şagird məktəb şagird təşkilatının sədri və müavini seçimində iştirak edirlər. a) Rənanın sədr, Leylanın müavin seçilməsinin ehtimalını tapın. b) Hər iki vəzifəyə rəfiqələrin seçilmə ehtimalını tapın.
- 12 > Sınıf rəhbəri üç qız, beş oğlan arasından üç nəfəri məktəb şagird təşkilatına nümayəndə seçməlidir.
a) O bunu neçə müxtəlif üsulla edə bilər?
b) Bunların neçəsində hər üç nümayəndə oğlan olacaq?
c) Hər üç nümayəndənin oğlan olması ehtimalını tapın.
- 13 > 3 qız, 2 oğlan müxtəlif ardıcılıqla sıraya düzüləndə oğlanların yanaşı olması ehtimalını tapın.
- 14 > Qutuda 4 ağ, 3 qara kürə var. Təsadüfən çıxarılan 2 kürənin:
a) hər ikisinin ağ;
b) hər ikisinin qara;
c) birinin ağ, digərinin qara olması ehtimalını tapın.

- 15 > Torbada 8 qırmızı, 5 sarı kürə var. Geri qaytarılmadan dalbadal iki kürə çıxarılrsa, onlardan birincinin qırmızı, ikincinin isə sarı olması ehtimalını hesablayın.
- 16 > Metal pul 3 dəfə dalbadal atılır. Hər üçündə şəkil üzünün düşmə ehtimalı nə qədərdir?
- 17 > 9^a sinfindən 12 nəfər, 9^b-dən 8 nəfər olimpiadanın təşkilatı işlərində könüllü olaraq iştirak etmək istəyir. Dalbadal iki nəfər çağırılsa: a) onların hər ikisinin 9^b; b) birinin 9^a, digərinin 9^b; c) hər ikisinin 9^a sinfindən olma ehtimalı nə qədərdir?
- 18 > a) Bir zərin atılmasında tək ədəd və ya sadə ədəd düşmə ehtimalını hesablayın.
b) İki zər birlikdə atılır. Düşən xallar cəminin 7 və ya 11 olması ehtimalını tapın.
- 19 > “Son xəbərləri haradan əldə edirsiniz” sorğusunun nəticəsi: 85% xəbərləri internetdən oxuyur, 35% qəzetlərdən oxuyur, 25% hər ikisindən oxuyur. Məlumatı Venn diaqramı ilə təqdim edin. Respondentlər arasından təsadüfi biri seçilsə, uyğun ehtimalı tapın: a) xəbərləri qəzetdən deyil, internetdən alan şəxs olması; c) məlumatı hər iki mənbədən alan şəxs olması.
- 20 > 1-dən 30-a qədər ədəd kartları qutuya yığılmışdır. Qutudan bir kart çıxarılrsa, bu kartdakı ədədin: a) 2-yə və ya 3-ə bölünən ədəd; b) 2-yə bölünüb, 3-ə bölünməyən ədəd; c) həm 2-yə həm də 3-ə bölünən ədəd olması ehtimalını tapın.
- 21 > Qutuda sarı və yaşıl rəngdə 45 kürə var. Kürələrin sayları nisbəti uyğun olaraq 5 : 4 kimidir. Qutudan iki kürə çıxarılrsa, hər ikisinin sarı rəngdə olma ehtimalı nə qədərdir?
- 22 > Venn diaqramına görə məsələləri həll edin.

Bir şagird seçilərsə, verilən şərtlərlə ehtimalını hesablayın:

- a) $P(\text{musiqi və ya rəsm})$
b) $P(\text{dram və ya rəsm})$
c) $P(\text{dram və musiqi və ya dram və rəsm})$



- 23 > Torbada 3 iyirmimanatlıq, 2 onmanatlıq, 5 beşmanatlıq var. Geri qaytarılmadan 3 banknot çıxarılrsa, birincinin beşmanatlıq, ikincinin onmanatlıq, üçüncünün iyirmimanatlıq olma ehtimalı nə qədərdir?
- 24 > “ARABA” sözündəki hərflərin hərəsini bir karta yazıb qutuya yığdılar. Kartları qutudan bir-bir çıxararaq sıraya düzdükdə “ARABA” sözünün alınması ehtimalını tapın.



Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > 1) Məlumat şirkətdə işləyən işçilərin maaşlarını və onların sayını göstərir. Cədvələ görə tapşırıqları yerinə yetirin.
- | Maaş | Sayı |
|-----------|------|
| 280 - 330 | 5 |
| 331 - 381 | 6 |
| 382 - 412 | 4 |
| 413 - 443 | 3 |
| 444 - 474 | 7 |
- a) Məlumata görə nisbi tezlik cədvəli qurun.
 b) Neçə nəfərin maaşı 382 manatdan azdır?
 c) Yetmiş iki faiz işçi neçə manatdan az maaş alır?
 d) İşçilər arasından təsadüfi bir nəfər seçilsə, onun 413 manatdan az maaş alan şəxs olması ehtimalı nə qədərdir?
- 2) Şirkətdə bayram şənliyində 3 soyuducu hədiyyə-priz olaraq oynanılır:
 a) hər üç soyuducunu 331 manatdan az maaş alan şəxsin udma ehtimalı;
 b) ən azı birini 331 manatdan az maaş alan şəxsin udma ehtimalı nə qədərdir?
- 2 > Bir qəsəbənin sakinləri arasında evlərində neçə televizor olduğu haqda araşdırma aparılmışdır. Seçmə nümunələrin cavabına görə nəticələr aşağıdakı kimi olmuşdur. Bir evdə orta hesabla neçə televizor var?
- | Televizorların sayı: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------|---|---|----|----|---|---|
| Evlərin sayı: | 1 | 8 | 13 | 10 | 5 | 3 |
- 3 > Məktəbdə şagirdlərin 56%-i qızlardır. Onların yarısı idmanla məşğul olur. Bu qızların sayı 140 nəfərdir. Məktəbdəki oğlanların 65%-i idmanla məşğul olur.
 a) Bu məktəbdə neçə şagird var? b) Məktəbdə neçə oğlan, neçə qız şagird var? c) Təsadüfi bir şagird seçilsə, onun idmanla məşğul olan şagird olması ehtimalı nə qədərdir?
- 4 > Məktəbdə 3 nəfər altıncı, 5 nəfər yeddinci, 4 nəfər səkkizinci sinif şagirdləri arasından növbətçilik üçün 3 nəfər şagird seçilməlidir.
 a) Bütün növbətçilərin yeddinci sinifdən olması ehtimalını tapın;
 b) Növbətçilərin heç birinin 7-ci sinifdən olmamasının ehtimalını tapın.
- 5 > Torbadakı hərflərdən üçünün çıxarılmasının neçə mümkün variantı var? Torbadan 3 hərf çıxarılsa, heç olmazsa birinin sait olma ehtimalını tapın.
- a) **A B C D E** b) **E F G H I J K** c) **M N O P**
- 6 > Qabda 6 sarı və 8 ağ kürə var.
 a) Qabdan 3 kürə çıxarmanın neçə mümkün variantı var?
 b) Kürələrin hər üçünün ağ olmasının ehtimalını tapın.
- 7 > "MUĞAN" sözündəki hərfləri yerdəyişmə edərək müxtəlif "sözlər" düzəldilib. Bunlardan neçəsində: a) samitlər yanaşı yazılıb, b) saitlər yanaşı yazılıbmıy?
- 8 > Tənlikdə n -ni tapın.
 a) $(n + 2)! = 20 \cdot {}_nP_n$ b) ${}_nP_2 = 90$ c) ${}_nC_2 - {}_nC_1 = 9$

LAYIHƏ

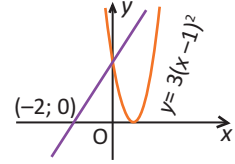


Bölmələr üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > Qab şəkər tozu ilə tam dolu olarkən onun kütləsi 14,5 kq, yarısı dolu olduqda isə 7,7 kq olur. Boş qabın kütləsini tapın.

- 2 > $y = kx + b$ düz xətti absis oxunu $(-2; 0)$ nöqtəsində,

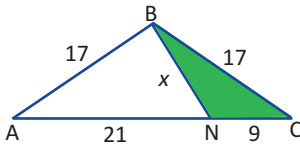
$y = 3(x - 1)^2$ parabolasını ordinat oxu üzərində kəsir. Düz xətt parabola ilə daha hansı nöqtədə kəşir?



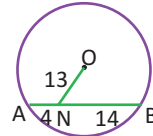
- 3 > a) $x = 4 - \sqrt{5}$ olduqda $x^2 - 8x + 15$;

b) $x = \sqrt[3]{7}$ olduqda $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

- 4 > Şəkildə verilənlərə görə rəngli hissənin perimetrini və sahəsini tapın.



- 5 > Çevrənin radiusunu tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



- 6 > 56 turisti yerləşdirmək üçün üçnəfərlik və beşnəfərlik çadırlar quruldu. Cəmi 16 çadır quruldusa, onların neçəsi üçnəfərlikdir?

- 7 > Ədədi silsilədə $a_1 = -2$, $a_5 = 18$ olarsa, onuncu həddi tapın. Bu silsilənin 50-dən kiçik olan hədlərinin cəmini hesablayın.

- 8 > Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan və verilən nöqtədən keçən çevrənin tənliyini yazın. Uyğun dairədə 45° -li mərkəzi bucağa uyğun sektorun sahəsini tapın.

a) $(0; -10)$ b) $(-3; -1)$ c) $(-4; -4)$ d) $(-6; 4)$

- 9 > Hər birinin tili 4 sm olan dörd kub üst-üstə qoyulmaqla düzbucaqlı paralelepiped quraşdırılmışdır. Onun həcmi və tam səthinin sahəsini tapın.

- 10 > Boş xanalara müqayisə işarələrindən $(>, <, =)$ uyğun olanını yazın.

a) $a > b$ olarsa, $(-a) + b$ ☐ b) $a > b$ olarsa, $(-a) - (-b)$ ☐

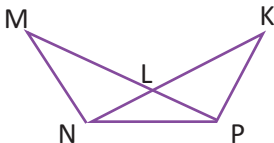
- 11 > Seymur 32 dəqiqəyə kitabın 24 səhifəsini oxuyursa: a) 40 dəqiqəyə neçə səhifə oxuyar? b) 264 səhifəlik kitabı nə qədər vaxta oxuyar?

- 12 > Bərabərsizlikləri həll edin:

a) $2(x-3) < 5x$ b) $\frac{x-3}{1-\sqrt{2}} > \sqrt{2} + 1$ c) $1 < 3 - 2x \leq 7$ d) $2|x-3| - 1 < 3$

- 13 > Verilir: $\triangle MLN \cong \triangle KLP$

İsbat edin: $\triangle MNP \cong \triangle KPN$

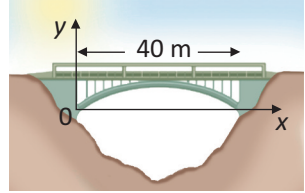


14 >
$$\begin{cases} \frac{S}{x+y} = 3 \\ \frac{S}{x-y} = 5 \end{cases}$$

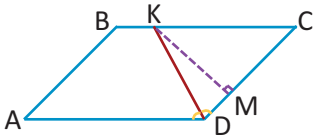
tənliklər sistemindən $\frac{S}{x} + \frac{S}{y}$ cəmini tapın.

LAYIHƏ

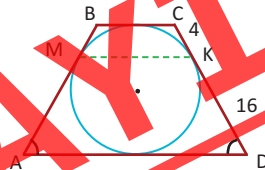
- 15 > Dolu çəndəki suyun $\frac{2}{7}$ -si günortaya qədər, $\frac{1}{2}$ -i günortadan sonra işlədildi. Günortadan sonra işlədilən su günortaya qədər işlədilən sudan 15 / çoxdursa, çən nə qədər su tutur?
- 16 > Hesablayın. a) $\frac{\text{ƏKOB}(72; 90)}{\text{ƏBOB}(72; 90)}$ b) $\frac{\text{ƏKOB}(36; 45)}{\text{ƏBOB}(36; 45)}$
- 17 > Əkin sahəsində məhsuldarlıq 25 s-dən 30 s-ə qalxdı. Məhsuldarlıq neçə faiz artdı?
- 18 > Düzgün çoxbucaqlının bir tərəfi 8 m, perimetri 64 m-dir. Bu çoxbucaqlının: a) hər bir daxili bucağı neçə dərəcədir? b) bir tərəsindən neçə diaqonal çəkmək olar? c) neçə diaqonalı var?
- 19 > Yargının üzərindən salınmış 40 m uzunluğundakı körpü şaquli metal çubuqlarla paraboləşəkilli tağa bərkidilmişdir. Koordinat sistemini şəkildə göstəriləyi kimi seçməklə tağı $f(x) = -0,08(x - 20)^2 + 32$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Körpünün orta nöqtəsindən 5 m, 10 m, 20 m məsafələrdə bərkidici çubuqların uzunluqlarını tapın.
- 20 > a) Göstərin ki, $(3 + 2\sqrt{2})$ -nin kvadrat kökü $(1 + \sqrt{2})$ -dir. b) Hesablayın: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
- 21 > a) $x = \sqrt{2}$ olduqda $(7x - y)^2 - 2(7x - y)(x - y) + (x - y)^2$ b) $a = \sqrt{2} - 1$ olduqda $\frac{2\sqrt{2} - ab^2}{2 + b^2} + \frac{\sqrt{2}b^2 - 2a}{2 + b^2}$ ifadəsinin qiymətini tapın.
- 22 > 3 saata 240 km yol gedən avtomobil eyni sürətlə: a) 5 saata hansı məsafəni qət edər? b) 560 km yolu nə qədər vaxta gedər?
- 23 > Torbada kürələr sarı və yaşıl rəngdədir. Sarı kürələrin sayının yaşıl kürələrin sayına nisbəti 4:1 kimidir. Sarı kürələrin yarısını çıxarsaq, torbada qalan sarı kürələrin sayı yaşıl kürələrin sayından 2 ədəd çox olar. 1) Torbada neçə kürə var? 2) Torbaya baxmadan iki kürə çıxarılsa: a) hər ikisinin sarı rəngli olması; b) müxtəlif rəngli olması ehtimalını tapın.



- 24 > ABCD paraleloqram, DK tən bölə, $KM \perp CD$, $KM = 3$ sm, $BK = 2$ sm və $S_{\Delta CKD} = 9$ sm² olarsa, paraleloqramın perimetrini və sahəsini tapın.



- 25 > Şəkildə verilənlərə görə ABCD bərabəryanlı trapesiyasının perimetrini və sahəsini, yan tərəflərinin çevrəyə toxunma nöqtələrini birləşdirən MK parçasının uzunluğunu tapın.



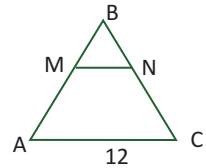
- 26 > a) Üçbucağın tərəflərinin uzunluqları nisbəti 2 : 3 : 4 kimidir. Üçbucağın perimetri 54 sm olarsa, tərəflərinin uzunluqlarını tapın.
 b) Yan tərəfi 10 sm, oturacağa çəkilmiş hündürlüyü 8 sm olan bərabəryanlı üçbucağın perimetrini, sahəsini, daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın
- 27 > l düz xəttinin tənliyi $3x - 2y = 6$ kimidir. m düz xətti l düz xəttini $x = 2$ nöqtəsində kəsir. $(-1; 6)$ və $(x; 2)$ nöqtələri m düz xəttinin üzərində yerləşirsə, x koordinatını tapın.
- 28 > a) Diaqonalları 6 sm və 8 sm olan rombun sahəsini, perimetrini, hündürlüyünü və daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
 b) Perimetri 28 sm, hündürlükləri 3 sm və 4 sm olan paraleloqramın sahəsini tapın.

29 > Hesablayın.

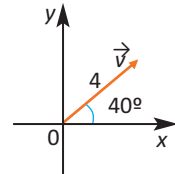
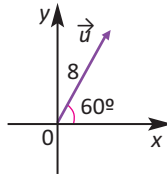
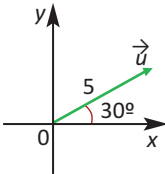
a) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} - \sqrt{117^2 - 108^2}$ b) $(\sqrt{14} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{28}$ c) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}$

- 30 > $x^2 - 2x + y^2 + 1 = 4$ çevrəsinin:
 a) mərkəzinin koordinatlarını;
 b) radiusunu tapın;
 c) uyğun dairənin sahəsini hesablayın.

- 31 > $MN \parallel AC$
 $S_{AMNC} = 8 \cdot S_{\Delta MBN}$
 $AC = 12$ isə
 MN -i tapın.

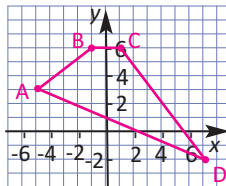


- 32 > Hər bir vektoru komponentləri ilə yazın.



- 33 > Müəllim 30 şagirdin test imtahanında orta balını hesablayarkən şagirdlərdən birinin balı 50 əvəzinə 350 göstərilmiş olduğundan orta bal 70 olmuşdur. Yol verilmiş səhv düzəldilsə, orta bal neçə olacaq?

- 34 > Koordinat müstəvisi üzərində təsvir edilmiş dördbucaqlının perimetrini və sahəsini hesablayın.



- 35 > Hesablayın.

a) $\frac{9^5 \cdot 2^9}{36^4}$ b) $\frac{4^{-3} \cdot 9^{-2}}{6^{-5}}$

c) $2^{\frac{7}{3}} \cdot 32^{\frac{5}{6}} \cdot 8^{\frac{3}{2}}$

- 36 > a) $2x^2 - 3x - 1 = 0$ tənliyinin köklərinin cəmini və hasilini tapın.
 b) $x^2 + (1 - 2m)x + m - 3 = 0$ köklərinin cəmi onların hasilindən 3 vahid böyükdür. m -i tapın və tənliyi həll edin.
- 37 > a) 300 ədədini 20% artırıb, yeni ədədi 20% azaltsaq, hansı ədəd alınar?
 b) Malın qiymətini 10% azaldıb, sonra yenidən 10% artırdılar. Qiymət necə dəyişdi?

- 38 > 1) Bərabəryanlı üçbucağın iki tərəfinin uzunluqları verilib: 8,4 m və 3,2 m. Bu üçbucağın perimetrini tapın. Məsələnin neçə həlli var?
 2) Üçbucağın uzunluqları 6 və 8 vahid olan tərəfləri arasındakı bucaq:
 a) 90° -dən kiçik; b) 90° -dən böyük olduqda üçüncü tərəfinin uzunluğu hansı tam qiymətlər ala bilər?

- 39 > Tənlikləri həll edin :

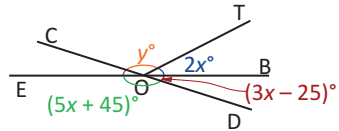
a) $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ b) $\frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{x}$ c) $\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

- 40 > a) Perimetri 64 sm olan düzbucaqlı hansı ölçülərdə olsa, sahəsi ən böyük olar?
 b) Sahəsi 25 m^2 olan düzbucaqlı hansı ölçülərdə olsa, perimetri ən kiçik olar?

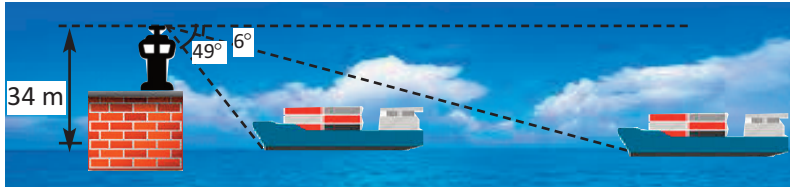
- 41 > 16 bənövşə, 32 çobanyastığı, 24 nərgiz güllərindən eyni tərkibli olmaqla ən çoxu neçə dəstə bağlamaq olar? Bu halda hər dəstədə olan müxtəlif növ güllərin sayını tapın.

- 42 > Bakteriyaların artması üçün əlverişli şərait olduqda onların hər biri 20 dəqiqədə 2 yeni bakteriyaya bölünür. Bu şəraitdə 4 saat ərzində 1 bakteriyadan nə qədər yaranar ?

- 43 > Şəkilləki bucaqların dərəcə ölçülərini tapın.



- 44 > Dəniz fənəri qülləsindəki müşahidəçi qülləyə doğru hərəkət edən qayıqı əvvəlcə 6° bucaq altında gördü. Beş dəqiqə sonra isə qayıq 49° bucaq altında müşahidə edildi. Müşahidəçi gölün səthindən 34 m hündürlükdədir. Qayığın sürətini (m/dəq ilə) hesablayın.



- 45 > Səbinənin pulu Gülərin pulunun $\frac{4}{5}$ hissəsi qədərdir. Kənanın pulu Səbinənin pulunun $\frac{7}{8}$ hissəsi qədərdir. Kənanın 28 manat pulu varsa, Səbinə və Gülərin nə qədər pulu var?

- 46 > 1) Radiusu 15 sm olan dairənin 60° -li mərkəzi bucağının söykəndiyi qövsün uzunluğunu tapın. Cavabı ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

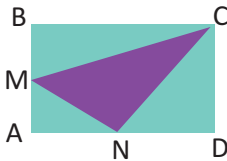
2) 60° -li qövsünün uzunluğu: a) 3π ; b) 5π olan çevrənin radiusunu tapın.

- 47 > Kvadratik funksiyanın qrafiki olan parabolun təpə nöqtəsini və koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın və parabolun qurun. Kvadratik funksiyaları $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın.

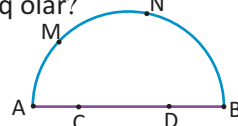
a) $y = x^2 + 8x + 1$ b) $x^2 + 4x - 2$ c) $2x^2 + 4x + 6$ d) $3x^2 + 12x + 9$

- 48 > Hesablayın. a) $\frac{7,1^2 - 1,5^2 + 8,6 \cdot 2,4}{6,3^2 - 2,3^2}$ b) $\frac{2,1^3 - 0,9^3}{1,2} + 0,9 \cdot 2,1$
- 49 > Məxrəci irrasionalıqdan azad edin. a) $\frac{8}{3\sqrt{5}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ c) $\frac{4}{\sqrt[3]{36}}$
- 50 > Uzunluğu 120 m, eni 25 m olan sahəyə qalınlığı 20 sm olan beton tökülməlidir. Beton daşıyan maşın bir reysə 12 m³ beton daşıyır. Bu sahəni betonlamaq üçün bir betondaşıyan maşın neçə reys etməlidir?
- 51 > Ədədləri standart şəkildə yazın.
a) 3560 b) 0,000204 c) 21020 000 d) $0,32 \cdot 10^7$ e) $3580 \cdot 10^9$
- 52 > Bir tədbirdə iştirak edənlər masaların ətrafında 5-5 otursalar, 3 nəfər ayaq üstə qalar, 8-8 otursalar, 3 masa boş qalar. Bu tədbirdə neçə nəfər iştirak edir?

- 53 > ABCD düzbucaqlısında E və K tərəflərin orta nöqtələridir.
 $S_{ABCD} = 64$ sm² olarsa, $S_{MNC} = ?$



- 54 > Təpələri yarımçevrənin və diametrin üzərində qeyd edilmiş nöqtələrdə olmaqla neçə üçbucaq qurmaq olar?

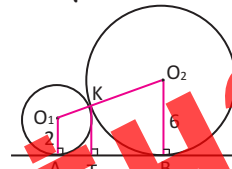


- 55 > A (1 ; 3) , B (− 2 ; 1) və C (4 ; 2) nöqtələri verilir. $\overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{CA}$ vektorunu komponentləri ilə yazın və uzunluğunu hesablayın.
- 56 > Lətifin il ərzində riyaziyyat fənni üzrə summativ qiymətləndirmələrdə aldığı qiymətlər aşağıdakı kimidir: bir “2”, dörd “3”, üç “4”, iki “5”. Bu məlumatlara görə ədədi ortanı, modanı və medianı tapın.
- 57 > İki ardıcıl natural ədədin cəminin kvadratı onların kvadratları cəmindən 24 vahid böyükdür. Bu ədədləri tapın.

- 58 > Tənliklər sistemini həll edin.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = \frac{1}{2} \\ 4y - x = \frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(y+1) = 0 \\ x+5xy+y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{cases}$

- 59 > Radiusları 2 və 6 olan iki çevrə K nöqtəsində xaricdən toxunur. K nöqtəsindən çevrələrin ortaq AB toxunanına qədər məsafəni tapın.



- 60 > Paralel köçürmədə A(−2;1) nöqtəsi A'(−1;3) nöqtəsinə çevrilir. Bu paralel köçürmədə: a) B(−1;1) nöqtəsi hansı nöqtəyə çevrilir; b) Hansı nöqtə C'(−3;1) nöqtəsinə çevrilir?
- 61 > Samir bir işi təklikdə 9 saata, Nadirlə birlikdə isə 6 saata yerinə yetirir. Nadir təklikdə bu işi neçə saata yerinə yetirər?

62 > Ədədləri artan sırada düzün. $a = \frac{71}{72}$, $b = \frac{72}{73}$, $c = \frac{75}{74}$, $d = \frac{76}{75}$

63 > Avtobuslardan biri ilk dayanacağa 30 dəqiqədən, ikincisi 36 dəqiqədən, üçüncüsü 45 dəqiqədən bir gəlir. Hər üç avtobus eyni vaxtda ilk dayanacaqdan çıxarlarsa, hansı müddətdən sonra yenidən ilk dayanacaqda görüşürlər?

64 > Tənlikləri həll edin.

a) $4x = x^3$

b) $x^3 - x^2 - 2x = 0$

c) $x^3 + x^2 = 4x + 4$

d) $(5x + 1)^2 + 6(5x - 7) = 0$

e) $(x^2 + 2x + 4)^2 - 7(x^2 + 2x + 4) + 12 = 0$

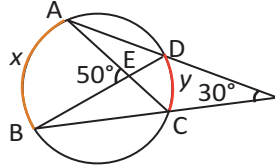
65 > İki nasosdan biri hovuzu 15 saata, digəri isə 10 saata doldurur. Üçüncü nasos dolu hovuzu 18 saata boşaldır. Hər üç nasos eyni vaxtda qoşulsa, hovuz neçə saata dolar?

66 > Bir kisə qəndin əvvəlcə $\frac{1}{3}$ hissəsi, sonra isə qalan qəndin $\frac{3}{5}$ hissəsi satıldı.

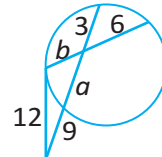
a) Satılan qənd bütün qəndin hansı hissəsidir?

b) Cəmi 45 kq qənd var idisə, kisədə nə qədər qənd qaldı?

67 > Verilənlərə görə a) dəyişənləri tapın.



b)



68 > Uyğunluğu müəyyən edin (c_n ardıcılığın n -ci həddi, S_n ilk n həddin cəmidir) 1.

$S_n = n^2 + n$

A) $c_3 = 12$

B) $c_3 = 5$

C) $c_3 = 6$

2. $S_n = n^2$

D) həndəsi silsilədir

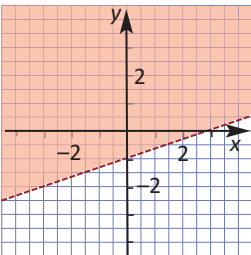
E) $c_n = 2n - 1$

3. $S_n = 3(2^n - 1)$

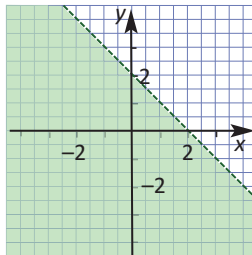
69 > Səbətdəki almaları qablara dörd-dörd, altı-altı, səkkiz-səkkiz yığdıqda hər dəfə 3 alma artıq qalır. Səbətdə ən azı neçə alma var?

70 > Hər bir qrafikə uyğun bərabərsizliyi yazın.

a)



b)



71 > Mərkəzi $C(-1; 2)$ nöqtəsində olan, $k = 2$ əmsallı homotetiyada $A(3; 5)$ nöqtəsinin çevrildiyi $N(x; y)$ nöqtəsinin koordinatlarını tapın. CA, CN parçalarının uzunluqlarını hesablayın və müqayisə edin.

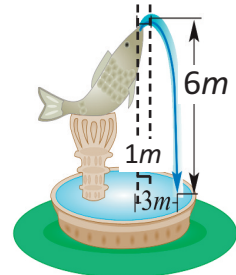
72 > Təpə nöqtəsi $(1; -5)$ olan və $(0; -3)$ nöqtəsindən keçən kvadratik funksiyanın tənliyini $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın və qrafikini qurun.

73 > $(2ab^2)^3 \cdot (3a^2b)^2$ birhədlisinin əmsalını və qüvvətini göstərin.

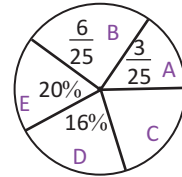
74 > 60%-li 400 q duz məhlulundan 25%-i götürülərək yerinə həmin miqdarda su töküldü. Alınmış qarışıq neçə faizli oldu?

- 75 > $a, b \in \mathbb{N}$, $a : b = 2 : 5$, $\angle KOB(a; b) - \angle BOB(a; b) = 45$ olarsa, $a + b$ cəmini tapın.
- 76 > Üçbucağın xarici bucaqlarının dərəcə ölçüləri nisbəti 3:4:5 kimidir. Bu üçbucağın daxili bucaqlarını tapın.
- 77 > Durğun suda sürəti 20 km/saat olan motorlu qayıq 18 km axın əksinə, 11 km axın istiqamətində gedərək, bütün yola saat yarım vaxt sərf etdi. Çayın axma sürətini tapın.
- 78 > Bərabərsizlikləri həll edin.
- a) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$ c) $3x^2 - 16x + 5 \leq 0$ e) $4x^2 < 25$
b) $-x^2 - 12x < 32$ d) $2x^2 - 4x - 5 > 0$ f) $0,5x^2 + 3x \leq -6$

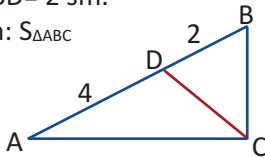
- 79 > Su fontanının hündürlüyünü kvadratik funksiya ilə modelləşdirmək olar. Şəkildə su şırnağı su- atan mənbədən 1 m uzaqlıqda olmaqla maksimum 6 m hündürlüyə qalxır və 3 m məsafədə yerə tökülürsə, suyun qalxdığı hündürlüyün (H) suatandan olan məsafədən (d) asılılığını $H(d)$ funksiyası ilə ifadə edin.



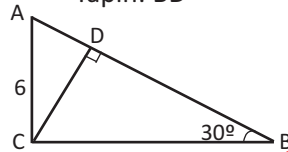
- 80 > Dairəvi diaqramda 125 sualı olan sınaq imtahanındakı doğru cavabların paylanması göstərilmişdir. Ən çox doğru cavab hansı bənddədir? Uyğun bəndlə neçə doğru cavab göstərilmişdir?



- 81 > Verilən çevrələrin kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını müəyyən edin.
- a) $x^2 + (y + 2)^2 = 13$ b) $(x + 1)^2 + y^2 = 5$ c) $x^2 + y^2 = 25$
və $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ və $(x - 4)^2 + y^2 = 10$ və $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 25$
- 82 > Bakı ilə Gəncə arasındakı məsafə 350 km-dir. Xəritə üzərində bu məsafə 7 sm-dirsə, bu xəritə hansı miqyasla çəkilmişdir?
- 83 > Verilir: $\angle ACB = 90^\circ$, CD tənbölən, $AD = 4$ sm, $BD = 2$ sm.
Tapın: $S_{\triangle ABC}$



- 84 > Verilir: $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 6$.
Tapın: BD



- 85 > Anbardakı taxılı 6 yük maşını 80 gündə daşıyır. Bu taxılı 8 belə yük maşını neçə gündə daşıyır? Anbardakı taxılı 30 günə daşımaq üçün neçə yük maşını lazım gələr?
- 86 > 1) c -nin hansı qiymətində $(c^2 - 1)x = c - 1$ tənliyinin: a) yeganə həlli var; b) sonsuz sayda həlli var; c) həlli yoxdur?
2) c -nin hansı qiymətində tənliklər sisteminin bir həlli var?

$$\begin{cases} 4x + y = c \\ y = x^2 \end{cases}$$

I Bölmə

- s. 7-11 №9 b) $\frac{8}{9}$ №14 d) -3 və $\frac{2}{3}$; f) 1 və $\sqrt{3}-1$ №17 a) 2 №26 2) $A \cap (B \cup C)$
- s.13-20 №3 c)2; e)3; f)4; g)5. №9 a) $\sqrt[3]{1,2} < \sqrt[3]{7} < 2 < \sqrt[3]{9}$ №10 a) 2 və 3; b)2 və 3; c) 1 və 2; d) 0 və 1; e) 1 və 2 №13 a)2; c)3; d)2 g)48; №16 a)2x; b)0 №17 b)0 №18 1
- №21 d) ± 2 ; e) -2 ; f)0; g)2; h) -8 №23 1) $a=2^2 \cdot 3=12$; 2) 96 sm^2
- №24 $h \approx 37,3 \text{ m}$ №26 b) $\approx 4,5 \text{ sm}$
- №28 a) 2; d) 40;
- e)1 №29 a)12 b) 6 №33 a)1; c)2; f)6 №34 a)4; c)2 №37 a)x; b)a; h)xy №38 2m^2
- №42 a) $\frac{y}{x}$, d) $|x|$ №43 a) $a^2 + 4a + 4$; c) $x^2 - 1$ №44 a) $4\sqrt{2}$; b) $2\sqrt[3]{3}$ №45 a) $4x\sqrt{x}$;
- b) $3a\sqrt[3]{2x}$ №41 h) $x\sqrt[4]{2y}$ $x \geq 0, y > 0$ №47 a) $9\sqrt[5]{y}$ b) $x\sqrt[5]{2x^3}$ №48 a) $\sqrt[3]{54}$; d) $-\sqrt[4]{48}$
- №49 d) $\sqrt[4]{2x}$, $x > 0$; e) $-\sqrt[4]{-3c^3}$, $c < 0$ №53 a) 3. №54 a) $\sqrt[4]{b}$
- №58 a) $3\sqrt[3]{3}$; c) $2\sqrt[4]{4}$ №59 a) 1 №60 b) $x = 16, x > 16, 0 \leq x < 16$
- №61 a) 2; b) 4; c) $1,5\sqrt{3}$
- s.21-25 №3 a)10; b) $\frac{1}{3}$; f) 10; h) 1 №5 b) 6 №9 d) a^3 №11 a) a; b) $m^{0,5}$; d) $c^{0,5}$ №12 b) 2
- №13 a) 6 №14 b) $3x$ №17 a)0,1a; c)10a №18 a) $x=a^2$; b) $x=a^{-3}$ №19 c)3 №20 c) $x^{\frac{11}{24}}$
- №21 c) $x^{0,5}$ №22 a) $2x$; b) $x-y$; c) $y-1$ №23 c) $c^{\frac{4}{3}}-1$ №24 a) $b^{0,5} (b^{0,5} + 1)$;
- c) $(c-3^{0,5})(c+3^{0,5})$; g) $(x^{\frac{1}{3}}-3)(x^{\frac{1}{3}}+3)$ №25 a) $a^{0,5}+b^{0,5}$; d) $b^{\frac{1}{6}}$ №26 a)5 №282)5saat
- №30 b) $h=12 \text{ sm}$ №31 paralelepipedin həcmi böyükdür №34 d) $b = \sqrt[3]{\frac{a}{A^2-1}}$
- s.26-27 №1 a) 6; b)1; c) -1 ; e)1 №3 a) $\sqrt[4]{9}$ c) $\sqrt[4]{8}$ №5 b) $\approx 1,9 \text{ m}$ №6 a) 1 №7 d) $-\sqrt{3a^4}$;
- e) $\sqrt[4]{2c^3}$; f) $-\sqrt[4]{-2c^3}$ №8 b) $\sqrt[5]{b}$; c) $\sqrt[6]{a}$ №10 a) ± 2 ; c) -1 №12 $2a^3$ №13 $\frac{2}{a}$
- №15 a) $x \geq 3$; b) $x \in R$; c) $x \leq 2$; d) $x \leq 0$ №18 b) $\approx 342 \text{ q}$

II Bölmə

- s.29-31 №4 d) $\approx 4,18 \text{ mm}$ №5 a) $\approx 2,36 \text{ sm}$ №6 a) $150^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ №7 $\approx 62,8 \text{ sm}$
- s.32-35 №3 a) 4 b) 93° №5 a) 16; b) 30 №7 25 №11 b) 48; 26 №12 a) 10 b) 3 №13 21
- №14 I hal-1sm, II hal-7sm. №15 a) 12 sm; b) 10 sm; c) 48 sm. №17 144 m.
- s.37-38 №1 $40^\circ, 180^\circ, 210^\circ$. №2 $95^\circ, 60^\circ, 120^\circ$. №4 1) 63° ; 2) 110° ; 3) $36^\circ, 30^\circ$
- s.40-42 №4 b) 8; c)9; d)15. №6 c) 3,9 m; d) 36° №8 b)2; d)12 №9 a) $AD=14 \text{ sm}, AB=16 \text{ sm}, DC=17 \text{ sm}, BC=19 \text{ sm}, P=66 \text{ sm}$ №10 3) 12 №11 a) $15\sqrt{3}$; b) 36 №12 $9\sqrt{7} \text{ sm}$
- s.43-46 №5 a) 19° ; b) 17° №6 d) 14° ; e) 26° №7 a) 30° b) 44° №8 40° №9 1) b) $58^\circ, 122^\circ$ №10 c) 55°
- s.47-48 №4 a)2; b) 25; c) 2 №5 a)2; e)8 №6 b) $c=5, d=6$; c) $x=11$ №7 6,5m №8 a)5,8 km
- s.49-50 №1 30° №2 50° №5 b) 8 №7 $89^\circ, 41^\circ$ №8 e) $154^\circ, 76^\circ$ №10 a) $\approx 13,4 \text{ km}$; b) $\approx 67 \text{ man}$

LAYIHƏ

III Bölmə

s.51-66 №2 b) 9 №3 a) -1; 2 №8 1) $a = \frac{1}{4}$ №17 b) $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$, $y = 2(x-3)^2 + 2$
 №21 a) $x = 5$ №22 c) $y = -4(x-2)^2 + 5$; d) $y = \frac{1}{5}(x+3)^2 - 10$ №24 a) $y = -(x-2)^2 - 1$;

№26 1) a) 2; b) 1; c) 2; №27 a) 1) yuxarı; 2) $m = 15$, $n = -100$; 3) $x = 15$; 4) 2;
 b) 1) aşağı; 2) $m = 0$, $n = 14$; 3) $x = 0$; 4) 2; c) 1) yuxarı; 2) $m = -18$, $n = -8$;
 3) $x = -18$; 4) 2; №28 a) $f(x) = (x-8)(x+3)$; $g(x) = (x-1)^2$; $p(x) = 4(x-2)(x-3)$
 b) $f(x)$: (8; 0), (-3; 0), (0; -24); $g(x)$: (1; 0), (0; 1); $p(x)$: (2; 0), (3; 0), (0; 24)
 №29 a) $y = (x-10)(x-4)$
 №31 a) $m = 1$, $n = -8$; b) $m = -2,5$, $n = -\frac{1}{6}$; c) $m = -1$, $n = 4$

№33 1) a) (3; 0), (-1; 0); b) (0; -3); c) (1; -4); d) $y = (x-1)^2 - 4$. 3) a) (-1; 0),
 (-5; 0); b) (0; 5); c) (-3; -4); d) $y = (x+3)^2 - 4$. №36 a) 2; $x = 2$; c) $2\sqrt{3}$; $x = 2$; d) 4;
 $x = 1$ №38 a) absis oxunu (2; 0); (6; 0), ordinat oxunu (0; 12) nöqtəsində kəsir. Təpə
 nöqtəsi (4; -4). ƏKQ = -4. Təyin oblastı $(-\infty; +\infty)$, qiymətlər çoxluğu $[-4; +\infty]$.
 №39 a) ƏKQ = 8; b) ƏBQ = 4; f) ƏBQ = 0,5
 №40 $y = -\frac{1}{20}(x-5)^2 + 20$ №41 d) (1; 14); f) (2; 48) №46 a) $b = -2$,
 $c = -3$; b) $b = -4$, $c = 3$; c) $b = -4$, $c = 4$;

s.67-69 №1 c) $S = 12x - x^2$; d) $x = 6$ sm olduqda $S_{\max} = 36$ sm² №3 a) $t_1 = 1$ san, $t_2 = 3$ san;
 b) $t = 2$ san, $h_{\max} = 21$ m c) $\approx 4,05$ san №5 3-cü gün; 290 biletd
 №6 a) hər dəfə 50 qəpik olmaqla beş dəfə bahalanma apardıqda b) 1125 manat
 №8 20 m

s.72-73 №4 a) $y = 2|x|$; b) $y = 1 - |x-3|$ c) $y = 0,5|x+2|$ №5 b) 6-cı həftə, 5000 manat

s.74 №1 a) B, C və D nöqtələri b) $m = -2$ №4 $V = 64$ sm³ a) 512 sm³ b) 61 sm³ artar

s.75-76 №1 $b = -3$; $c = 2$ №2 (5; 0), (-3; 0), (0; -15) №3 $y = (x+3)^2 - 2$ №4 $k = 10$
 №5 $[2; +\infty)$ №7 $y = x^2 - x - 2$ №8 20 m №12 $a = 4$, $b = -6$ və ya $a = -4$, $b = 6$
 №17 b) 20-ci həftə, 4000 albom
 №18 1) $y = 2,24 - \frac{8}{7}x^2$ (x və y metrə) 2) a) 1,68 m

LAYIHƏ

IV Bölmə

- s.78-81 №3 a) 1) 10; 2) 5; 3) 13 b) $RQ = \sqrt{68}$, $PT = 5$ №4 1) a) $x=10$, $y=10$; b) $2\sqrt{13}$
 №6 a) $P = 18$; b) $P = 4\sqrt{17}$ №7 5 №8 5
 №9 $(-2; -2)$ №10 $k = -1$; $k = -7$, iki nöqtə
 №11 $(6; 0)$ №14 a) $P = 12$ №16 10 km №19 a) $y = 2x + 4$ və $y = 2x - 1$; c) $\sqrt{5}$
 №20 15 m
- s.83-89 №1 b) $x^2 + y^2 = 12$; c) $x^2 + y^2 = 15$ №2 b) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 1$; f) $(x+5)^2 + (y-9)^2 = 20$
 №3 a) ± 12 ; b) ± 13 №4 b) $M(1; 2)$, $r=4$ №5 b) $M(-8; -20)$, $r=22$; d) $M(2; -1)$, $r = 1$
 f) $M(1; -3)$, $r = 5$ №8 a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 17$, $(-1; 2)$, $(-1; 4)$ №9 a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 49$
 b) $(10; -2)$, $(-4; -2)$ №13 b) $y = -\frac{4}{5}x - \frac{41}{5}$ №15 10 №16 5 №17 a) *toxunan*;
 d) *kəsən* №18 $(x-12)^2 + y^2 = 64$ №21 a) 10; b) 7 №27 13; $\frac{7\sqrt{3}}{26}$ №29 a) $9\sqrt{3}$
- s.90-91 №1 a) $\approx 39,3 \text{ sm}^2$ b) $\approx 37,7 \text{ sm}^2$ №2 a) $\approx 1,14 \text{ m}^2$ №3 b) $\approx 8,94 \text{ m}$ №4 $9\sqrt{3} - 1,5\pi \approx$
 $\approx 10,87 \text{ sm}^2$ №8 $\approx 0,61 \text{ m}^2$ №10 a) $12,5(\pi - 1)$; b) $6,25\pi - 12$
- s.92-93 №3 a) $(4; 3)$; c) 5π ; d) $y = -\frac{4}{3}x$ №4 b) $(-6; 0)$, $(2; 0)$ №6 $12,5\pi$ №8 $16\sqrt{3} - 8\pi$
 №11 $8\pi - 16$

V Bölmə

- s. 95-97 №1 a) 3; e) ± 1 №2 b) 0; 2 c) 0; ± 2 ; e) 0; ± 4 ; №3 1) 0; 4; $-5, 3$ $-2; \pm 0,5$ 10) ± 3 ; 1,5
 №4 a) *iki həqiqi ədəd*; b) *bir həqiqi kökü var*; c) *üç həqiqi kökü var* №5 c) ± 2
 i) ± 2 ; ± 3 №6 $-2; 1; 3$; $a = -2$ №7 a) 5; b) 1; ± 3 №8 10 il №9 a) ± 3 ; d) ± 2 ; ± 1 f) 1; 2
 i) 4; $-0,5$ №10 a) ± 1 ; ± 2 b) 3; ± 1 c) ± 1 ; $-2; -4$; f) ± 1 ; g) 1; 2; 3; 6 №14 b) 12; 4
 №15 a) $k = 2$ b) $k = -1$ №16 a) 56; b) *son 4 həftədə orta bal 52,5 olmaq şərti ilə*
 №17 a) $r = \frac{A-P}{Pt}$; d) $v_0 = \frac{s}{t} - \frac{gt}{2}$ №18 b) $\approx 31,25 \text{ m}$
- s. 98-99 №1 a) $\emptyset$; b) -4 ; 3 g) ± 4 ; i) $-2,5$ №2 a) 3 c) ± 4 f) $\emptyset$; h) 6; -1 №3 a) $\emptyset$; d) 0; f) -1
 №4 a) $b = \frac{b}{3b+2}$; f) $a = \frac{b(x+1)}{x-1}$ №6 20 oyun №7 36; 37 №8 Rəhim - 6saat, Cəmil - 3
 saat №9 4 saat, 12saat №10 40 səh №11 10man, 12,25 man №12 a) 4 kq
- s. 101-103 №4 b) ± 4 ; g) ± 3 ; i) -4 ; 3; 1 l) №6 b) $-1; 1,8$; g) 1 №9 $|x - 110| = 15$ №10 $|x - 48| = 2,4$
- s. 106-113 №11 2) $y = 4 - (x+3)^2$, $y = -x - 1$ №15 b) ≈ 14 san №16 a) 7,5 №17 b) $(2; 2)$, $(1; 3)$;
 c) $(4; 2)$; d) $(-1; 3)$, $(-3; 1)$ №18 a) $(3; 9)$, $(-1; 1)$; b) $(1; 2)$, $(-2; 5)$;
 e) $(6; -1)$, $(3; 5)$ №21 a) $b > 7$; b) $b = -5$ №22 $k = -2$ və $k = 10$ №23 $b < 0$ №24 a) $(-2; -4)$
 $(4; 2)$ №25 $t_1 = 1$ san və $t_2 = 3$ san
 №29 a) *iki həlli var*; b) *həlli yoxdur* №31 a) $(1; -2)$, $(-1; 2)$
- s. 114-115 №1 24 №3 1000man, 3000man №4 2350man, 3050man
 №5 6 l, 4 l №7 60 sm^2 №9 20 dəq, 30 dəq
 №10 96 km/saat, 64 km/saat №11 56 san
- s. 116-117 №1 1) $(1; -4)$, $(2; -1)$; 2) $(3; 3)$, $(-3; -3)$; 5) $(1; -2)$, $(-1; 2)$; 10) $(0; -1)$, $(-1; 0)$
 №3 c) 1; 2 e) 0; ± 5 №4 4 km/saat, 5 km/saat №5 a) 100 nəfər №7 b) $(-2; 5)$, $(2; 1)$;
 c) $(3; 2)$ №9 6; 8; 10 №10 f) -1 №11 4m/san, 3 m/san №14 a) $a = 0$; b) $a = \pm 6$

VI Bölmə

s.119-122 №5 a)7; b)12; №7 1)a)12 ; b)54; 2) a)120°; 60°; b) 144°;36° №9 1260° №10 $n = 10$

№11 a) 127° №12 140° №14 1) 6; 2) 12; 3) 9; 4) 18 №15 3) $n = 10$ 4) $n = 12$

s.124-130 №1 a) 30°; b) 7,5 №3 a) $x = 90^\circ, y = 60^\circ$; b) $x = 90^\circ, y = 50^\circ$; c) $x = 32^\circ, y = 90^\circ$
 №4 96 sm² №7 24 sm №11 I hal-22 sm; II-hal 20 sm №13 a) 40;80 №14 d)130sm²
 №15 b) $R=5, r=2$; №17 10 sm №18 $R=8$ sm №19 2)12sm №20 $R=6$ sm $S=27\sqrt{3}$ sm²

№22 a) $r=4$ sm, $R=8, 125$ sm;

№25 4,8 sm №26 $2,4\pi$ sm №31 b) $P=6R, d_b=2R, d_k=\sqrt{3}R$

s.133-136 №2 a) $9\sqrt{3}$ №4 a) 48 sm²; b) 24 sm² c) 20 sm² №5 a)256; c)288 $\sqrt{3}$ №6 c)54 $\sqrt{3}$
 №7 a) $P=42$; $S=\frac{147\sqrt{3}}{2}$; c) $P\approx 56$; $S=243$ №8 b)24 $\sqrt{3}$ m² №12 b)3 $\sqrt{3}$ sm
 №16 b)1) $x=105^\circ$; 2) $x=54^\circ$; 3) $x=84^\circ$

s. 137-138 №1 36 sm №2 $72\sqrt{3}$ sm² №3 126° №4 $\sqrt{5}$ №9 ≈ 226 m²

№12 a) $r_1 = 1$; $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ b) $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}$ c) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

VII Bölmə

s.140-142 №2 a) $[-4; 2]$; b) $(1; 10)$ c) $\emptyset$ №3 a) $[2; 4]$ b) $(-\infty; 4)$ №4 (4; 8) №5 a) $(-4; 1)$
 c) $(-10; 2)$ №6 a) $(-1; 8)$; c) $(-0,5; +\infty)$ №7 a) $[5; 7]$; c) $[-2; +\infty)$ №8 36
 №9 10,8 kq-dan az, 32,4 kq-dan çox olmamaq şərti ilə №10 3 m-dən böyük,
 9 m-dən kiçik №11 a) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$; c) $(1; +\infty)$ №12 b) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
 d) $[-3; 6]$ №13 a) $(1; 3)$ b) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ №14 15 №15 b) $a < 10$ olduqda

s.143-144 №1 a) $(-\infty; -3,6] \cup [2; +\infty)$ b) $[2; 3]$; c) $(-6; 0)$; h) $(-\infty; -2)$; i) $(1,5; +\infty)$; №2 $|x - 45| \leq 30$
 №4 a) -5 ; 3 b) $(-5; 3)$ c) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$ №6 b) mavi c) yaşıl

s.147-152 №2 a) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; b) $(1; 3)$; c) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ №3 a) $(-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$
 d) $[-2,5; -1]$; e) $(-1,5; 1)$ №5 a) $(-\infty; +\infty)$; c) $\emptyset$ №7 b) $x=7$; c) $\emptyset$; d) $(-\infty; +\infty)$
 №8 a) $(1; 8)$; b) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; d) $[-4; 6]$; i) $x \neq 2$ №10 a) $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$
 b) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ №11 a) $(-2,5; 2)$; b) $(1; 7)$ №12 (-1; 6) №13 a) $(-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$
 b) $[1; 5]$; e) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ №14 b) $[-5; -1]$ c) $(-\infty; 2,5] \cup [3; +\infty)$; d) $(2,5; 4)$
 e) $(-\infty; -12) \cup (2; +\infty)$ №20 7sm-dən çox, 12sm-dən az
 №21 c) > 58 yaş №22 a) 5sm; b) 4sm, 5sm №23 soldirəkdən 50m-dən 480m qədər
 məsafədə №24 a) $t \in (1; 3)$
 №26 a) keçə bilməz b) 2m c) $\approx 3,439$ m №30 eni 15 m-dən çox, 20 m-dən az olsa

- s.153-156 №1 a) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; c) $[-4; 7]$; d) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; h) $[-3; 0] \cup [3; +\infty)$
 №2 c) $[-4; -3] \cup [3; 5]$; f) $[0; 2] \cup \{-5\}$; g) $(0; 4) \cup (4; 8)$; i) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$
 j) $\{-4\} \cup [5; +\infty)$ №3 a) 7; $(-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$; (5; 7) №4 b) $[2; 6]$ №5 a) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$
 №6 $\approx 27,9$ sm-dən çox, 28,6 sm-dən az №8 a) $(-7; 3)$; b) $(-\infty; -8) \cup (5; +\infty)$ f) $[-5\frac{1}{3}; -2\frac{1}{2}]$
- s.159-160 №1 c) $x \neq 0,5$; g) $\emptyset$; h) $(-\infty; +\infty)$ №2 d) $(-2; -1) \cup (1; 3)$; e) $[-3; 0] \cup [20; +\infty)$
 f) $[-1; 3) \cup (3; +\infty)$ h) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2)$; i) $(-\infty; -4) \cup [-2; 5]$; №9 b) $(-2; -0,5) \cup (1; +\infty)$
 c) $(-\infty; -1,5) \cup (-1; 11)$ №13 9 və 11; 10 və 10. №16 $a \in (-3; 0)$ №18 $a \in [0; 4)$

VIII Bölmə

- s.163 №3 a) $\vec{f}, \vec{h}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{k}$; b) $\vec{b}, \vec{f}, \vec{h}$; c) $\vec{f}, \vec{h}$; d) $\vec{d}$
- s.165-170 №15 $\langle -8; -2 \rangle$, $|\vec{PQ}| = \sqrt{68}$ №4 a) $\vec{OP} = \langle 2; 4 \rangle$; c) $\vec{QP} = \langle 2; -4 \rangle$ №7 $\vec{PQ} = \langle 3; 4 \rangle$ $|\vec{PQ}| = 5$,
 $v = 50$ km/saat №8 a) $\vec{OP} = \langle 3; 2 \rangle$, $\vec{RS} = \langle 3; 2 \rangle \Rightarrow \vec{OP} = \vec{RS}$ №10 a) $-0,5$
 №13 a) $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$, $\varphi = 45^\circ$. №15 a) $\vec{PQ} = \langle -3; 2 \rangle$ $|\vec{PQ}| = \sqrt{13}$, $\varphi \approx 144^\circ$
 №21 a) $\langle 10\sqrt{2}; 10\sqrt{2} \rangle$; b) $\langle -300; 0 \rangle$ №24 300 m №25 $\vec{w} = \langle -3\sqrt{3}; 3 \rangle$
- s.172-178 №2 a) 220 N; b) 270 N №7 $\approx 143^\circ$, 5 km №13 a) $\vec{AB}$; b) $\vec{DB}$;
 d) $\vec{AD}$; f) $\vec{BC}$; i) $\vec{AD}$ №17 c) $\approx 81^\circ$ №18 $F_{\vec{u}} \approx 159$ N, $F_{\vec{s}} \approx 103,5$ N
- №20 a) 40 san; b) ≈ 89 m
 №21 $|\vec{u}| = 250$ (m), $\varphi \approx 67^\circ$
- s.179-181 №1 AC = $2\vec{a}$; b) $\vec{KC} = -2\vec{b}$ №6 a) $\langle -8; 21 \rangle$ c) $\langle 14; -1 \rangle$ №7 a) 10 b) 13 №9 b) $k = \pm 6$
 №10 2) $\vec{AX} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{BY} = \vec{b} - 0,5\vec{a}$ №13 C(0; 3) №14 (3; 5)
- s.183-184 №7 a) $F(-4; 1) \rightarrow F'(-1; -1)$; $A(-2; 5) \rightarrow A'(1; 3)$, $S(-1; 4) \rightarrow S'(2; 2)$, $N(-1; 2) \rightarrow N'(2; 0)$
 №8 a) $\vec{u} \langle 5; 8 \rangle$, d) $\vec{u} \langle -4; -5 \rangle$ №10 1) $\langle 5; 3 \rangle$ 2) $A'(2; 1)$ №14 c) C(3; 0)
- səh 188-189 №10 a) $u = \langle -4; 2 \rangle$ №13 c) $A'(-4; -1)$, $B'(1; -1)$, $C'(-4; -7)$

IX Bölmə

- s.191-193 №3 a) 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21. $a_5 = 15$, $a_n = 3n$, $n \in N$ №5 1) a) $b_4 = 33$; b) $b_5 = 51$;
 c) $b_7 = 99$; d) $b_{k+1} = 2k^2 + 4k + 3$, $k \in N$ 2) a) $c_n = 27$ $n=7$; b) $c_n = 35$ $n=9$ №6 a) $a_n = 20$
 $n=10$; d) $a_n = 0$ $n=8$ №7 $a_n = 3n+1$ №10 1) $a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 1$, $n \in N$
 və $a_n = 2n-1$, $n \in N$; 2) $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 2$, $n \in N$ və $a_n = 2n$, $n \in N$
 №11 a) 1; 5; 17; 53; 161 №12 a) $a_1 = 11$, $a_2 = 34$, $a_3 = 17$, $a_4 = 52$
- s.195 №1 b) $a_{n+1} = a_n + 0,5$; $a_1 = 0,5$ c) $a_{n+1} = a_n + 0,3$; $a_1 = -1,6$ №2 a) $x_1 = 9$, $x_3 = 1$
- s.196-198 №1 b) $a_n = 4n - 10$ və $a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = -6$. №3 a) $a_1 = -40$, $a_8 = -19$
 №4 11,2; 18,4; 25,6; 32,8 №6 a) $n \geq 15$, $a_n > 0$ №10 b) $a_6 = -23$, $a_7 = -4$
 №11 152; 208 №13 a) $d = 3$, $a_1 = 12$, $a_6 = 27$. №16 $a_4 = \sqrt{48}$ №20 a) 1; 4; 7 və 7, 4, 1
 c) 12 hədd №22 13 həddi var №23 46000 manat №24 24 sm² №26 $a_n = 4n - 1$

- s.199-200 №1 b)1) $a_5 + a_9 = 6$; 2) $a_7 = 3$ №2 b) $x=0$, $x=2$. №5 8 sm №6 10sm
 №7 b)9sm;12sm; 15sm №9 1) a)-1; 2; 5. e) $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{3}$. №10 $a_2 + a_8 = 2a_5 = 2c$
- s.202-204 №1 c) 92 №2 a)195; b) $n^2 - 2n$ №5 a) $\frac{n(n+1)}{2}$; b) $n(n+1)$; c) n^2 №6 c)1683
 №7 122,5 №9 a) 8 b)78 №12 a) 19 №13 0,25 №14 a) $a_1 = 1$; $a_2 = 9$ c) 5-ci hədd
- s.206 №3 a) $y_1 = 2$, $y_4 = 0,25$. №4 a) 10; 3; 0,9; 0,27; 0,081 №7 1) $q = \frac{1}{3}$; 3) $q = 0,5$
- s.208-209 №1 c) $b_4 = 12$, $b_5 = -24$ №4 a) $n = 5$ b) $n = 6$ №5 2) $b_{n+1} = 3b_n$, $b_1 = 4$ №7 $P_6 = 1,5$ sm
 №8 3sm^2 №12 72,9% №13 d) 4 dəfə artır №14 a) $b_n = 2^{11-n}$ b) $n = 11$
- s.210 №2 $x = 5$, $x = -15$ №3 $x = 4$ №4 $q = 2$ №5 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ №6 b) hə
- s.212-213 №1 a)31,5; c)3069 №3 a) $b_1 = 3$ №5 a) $\frac{y^n - 1}{y - 1}$, ($y \neq 1$) №7 2^{72} №10 a) $n^3 + 1$ №13 1364
- s.215 №1 a) $S = 27$ №3 e) $q = \frac{1}{3}$ №4 a) $\frac{1}{1-a}$ b) $\frac{1}{1+a}$ c) $\frac{1}{1-a^2}$ d) $\frac{1}{1+a^3}$ №6 72 sm^2
- s.216-217 №2 $S_3 = 248$, $b_1 = 8$, $b_4 = 1000$ №6 84 №7 $S_4 = S_9 = 54$ №10 462 lot və ya 5913,6 q
 №11 30,6 №12 $a_1 = 5$, $d = 4$ №13 12 №15 $a = 3$, $b = 6$ və ya $a = 27$, $b = 18$ №20 a) $\frac{3}{4}$

X Bölmə

- s.230-233 №2 720 №3 96 №4 d) 2 №5 24 №7 5! №8 $5! \cdot 3!$ №9 a) $3! \cdot 5!$ b) $5! \cdot 3!$
 c)8! №10 a)6, b)12, c)180, d)840 №11 10 №12 a)6 element, 3 elementin hər biri
 2 dəfə təkrarlanır; №13 30 №14 10 №15 a) 30 b)15 №17 a)720 №18 a) ${}_8P_2 < {}_6P_3$
 №19 b) 4 №20 120 №21 360 №22 380 №23 60 №24 120; 100-ü
- s.234-235 №2 a) 4; d) 20 №4 a) 220 №5 ${}_nP_k > {}_nC_k$ №8 a) *kombinezon*; b) *permutasiya*;
 №10 6! №11 2520 №13 56 №14 60 №15 2^{10} №16 74 №18 b) $2! \cdot 4! \cdot 4!$; c) 8!
- s. 238-241 №6 a)9900 №7 24, $P = \frac{1}{4}$ №8 $\frac{20}{21}$ №10 $P = \frac{1}{28}$ №11 a) $\frac{1}{42}$ №12 a) 56; b)10; c) $\frac{5}{28}$
 №13 $\frac{2}{5}$ №14 a) $P = \frac{2}{7}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{4}{7}$ №15 $\frac{10}{39}$ №16 $\frac{1}{8}$ №18 a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{9}$
 №20 a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{6}$ №21 $\frac{10}{33}$ №23 $\frac{1}{24}$ №24 $\frac{1}{20}$
- s. 242 №4 a) $\frac{1}{22}$ b) $\frac{21}{22}$ №5 a)10; 0,9 №6 a) 364; b) $\frac{2}{15}$ №7 a) 36; b) 72 №8 c) 6
- s.243-249 №24 28 sm, 24 sm^2 №31 4 №33 60 №37 1% azaldı №54 16 №65 9 saat
 №69 27 №74 45% №79 a) $H(d) = 6 - 1,5(d-1)^2$ №81 c) (5;0), (4;3) №83 7,2 sm^2

LAYIHƏ

Pulsuz

Əziz məktəbli !

Bu dərslik sənə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sənə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, sən də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsan ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşın ondan sən kimi rahat istifadə edə bilsin. Sənə təhsildə uğurlar arzulayırıq!

LAYİHƏ